EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM
INFORMATIKAI KAR

NUMERIKUS MÓDSZEREK PÉLDATÁR

Bozsik József, Krebsz Anna

Budapest, 2010

Tartalomjegyzék

Vissza a tartalomhoz

ELŐSZÓ

Jelen példatár hiánypótló a maga nemében. A Numerikus módszerek témakörében számtalan színvonalas tankönyv és jegyzet látott már napvilágot, de a gyakorlatokon is használható példatár eddig nem volt, mely segíti az órai munkát és a zárthelyi dolgozatokra való önálló felkészülést. Igazán akkor lehet megérteni egy módszert, ha azt konkrét feladatokra alkalmazzuk. Ebben kívánunk segítséget nyújtani a példatárban összegyűjtött feladatok és azok megoldásainak segítségével. Ezt a feladat- és megoldásgyűjteményt elsősorban az ELTE IK Programtervező informatikus BSc, Informatika tanár BSc és TTK Matematika tanár BSc szakos hallgatóinak ajánljuk. Természetesen azok is haszonnal forgathatják, akik segítséget szeretnének kapni a numerikus módszerek gyakorlati alkalmazásaihoz. A példatárat ajánljuk még azok számára, akik a numerikus módszerek alapjaival feladatokon keresztül szeretnének megismerkedni.

A példatárat az ELTE-n oktatott, korábban Numerikus Analízis elnevezésű tárgy tematikáját követve építettük fel. Mivel a tárgy neve és témakörei is változtak, ezért a korábbi bővebb tematika alapján dolgoztunk, arra gondolva, hogy bizonyos részekre az MSc-s hallgatóknak lehet szükségük. Minden témakör az elméleti anyag mélyebb megértése mellett hozzásegíti az olvasót a feladatok mögött meghúzódó technikák és trükkök elsajátításához is. A példatár elkészítése során a gyakorlati szempontokat is figyelembe véve törekedtünk az egyszerű példáktól az összetett és bonyolult számításokat tartalmazó példákig minél szélesebb feladatkört bemutatni. Természetesen helyet kaptak elméleti jellegű és mélyebb absztrakciót igénylő feladatok is. A feladatmegoldások elkészítése során törekedtünk a minél érthetőbb és minél részletesebb leírásokra, esetenként többféle megoldást is adtunk. A több éves sikeres oktatási gyakorlatból kikristályosodott és letisztult példák mellett számtalan új példa is belekerült az anyagba. A feladatok fejezetenként sorszámozottak. Minden fejezet két alfejezetre bomlik, egyikben a feladatok, a másikban azok megoldásai találhatóak, így a feladatok szövege után csak néhány oldalt kell lapozni a megoldásokig. Célunk ezzel az volt, hogy az egyes fejezetek önállóan is használhatóak legyenek.

Ezúton szeretnénk köszönetet mondani Dr. Szili Lászlónak, a technikai problémák megoldásában nyújtott segítségéért és Dr. Hegedűs Csabának, aki ötletes és gondolkodtató példáival járult hozzá a példatárhoz. Köszönjük Dr. László Lajos lelkiismeretes lektori munkáját és értékes tanácsait. Továbbá köszönjük az ELTE Numerikus Analízis Tanszékének és az ELTE Informatikai Karának a példatár létrejöttéhez nyújtott támogatását.

Ajánljuk kedves családtagjainknak, akik türelmükkel és segítségükkel hozzájárultak a példatár létrejöttéhez. Halálának 5. évfordulóján Dr. Sövegjártó András emlékének ajánljuk, aki halhatatlan érdemeket szerzett az általa oly kedvelt és szeretett tárgy, a Numerikus Analízis oktatása során.

A példatárban található példák megoldásához kellemes és hasznos időtöltést kívánunk!

Budapest, 2010. november 2.

Krebsz Anna, Bozsik József

1. fejezet

GÉPI SZÁMÁBRÁZOLÁS ÉS HIBASZÁMÍTÁS

1.1. Feladatok

1.1.1. Gépi számábrázolás

1. Vizsgáljuk meg az $M(6,-3,3)$ gépi számhalmazt!

a) Mennyi az elemszáma?

b) Adjuk meg a nevezetes számait: $\varepsilon_0, \varepsilon_1, M_\infty$!

2. Vizsgáljuk meg az $M(5,-4,4)$ gépi számhalmazt!

a) Mennyi az elemszáma?

b) Adjuk meg a nevezetes számait: $\varepsilon_0, \varepsilon_1, M_\infty$!

3. Vizsgáljuk meg az $M(8,-4,4)$ gépi számhalmazt!

a) Mennyi az elemszáma?

b) Adjuk meg a nevezetes számait: $\varepsilon_0, \varepsilon_1, M_\infty$!

4. Az $M = (6,-4,4)$ gépi számhalmazban adjuk meg $fl(4,21)$ értékét!

5. Az $M = (6,-4,4)$ gépi számhalmazban adjuk meg $fl(0,11)$ értékét!

6. Az $M = (8,-4,4)$ gépi számhalmazban adjuk meg $fl(\frac{1}{6})$ értékét! Hasonlítsuk össze, milyen bináris tört közelítést kapunk 2, 3 illetve 4 tizedesjegy pontosságból kiindulva!

7. Az $M = M(6,-3,3)$ gépi számok halmazában adjuk meg a $\sqrt{2}$ -nek megfeleltetett gépi számot, és adjuk meg a gépi számábrázolásból származó abszolút hibakorlátot!

8. Az $M = (5,-4,4)$ gépi számhalmazban adjuk meg $fl(\sqrt{3})$ értékét!

9. Adjuk meg a $\sqrt{5}$-nek megfeleltetett gépi számot az $M(6,-3,3)$ gépi számok halmazában! Adjon a közelítésre abszolút és relatív hibakorlátot!

10. Az $M = M(6,-4,4)$ gépi számok halmazában

a) adjuk meg az $\frac{1}{6}$ -nak és $\frac{1}{12}$ -nek megfeleltetett gépi számokat,

b) végezzük el az $fl(\frac{1}{6}) - fl(\frac{1}{12})$ gépi kivonást,

c) adjuk meg a gépi számábrázolásból származó abszolút hibakorlátot $fl(\frac{1}{6})$ -ra, $fl(\frac{1}{12})$ -re és az eredményre!

11. Az $M = M(6, -3, 3)$ gépi számok halmazában adjuk meg az $\frac{5}{6}$ -nak megfeleltetett gépi számot és számítsa ki az $fl(\frac{5}{6})+fl(\frac{5}{6})$ összeget a megadott aritmetikában! Adjon abszolút hibakorlátot a számított összegre!

12. Az $M = M(8, -4, 4)$ gépi számok halmazában

a) adjuk meg az $\frac{1}{3}$ -nak és $\frac{1}{6}$ -nak megfeleltetett gépi számokat,

b) végezzük el az $fl(\frac{1}{3}) - fl(\frac{1}{6})$ gépi kivonást,

c) adjuk meg a gépi számábrázolásból származó abszolút hibakorlátot $fl(\frac{1}{3})$ -ra, $fl(\frac{1}{6})$ -ra és az eredményre!

13. Az $M = M(6, -4, 4)$ gépi számok halmazában

a) adjuk meg a $\sqrt{3}$ -nak és π -nek megfeleltetett gépi számokat,

b) végezzük el az $fl(\pi) - fl(\sqrt{3})$ gépi kivonást,

c) adjuk meg a gépi számábrázolásból származó abszolút hibakorlátot $fl(\sqrt{3})$ -ra, $fl(\pi)$ -re és az eredményre!

14. Az $M = M(5, -3, 3)$ gépi számok halmazában keressük meg a $\sqrt{2}$ -nek és a $\sqrt{3}$ -nak megfeleltetett gépi számot! Számítsa ki a $fl(\sqrt{2}) + fl(\sqrt{3})$ értékét a megadott aritmetikában. Adjon a közelítésre abszolút és relatív hibakorlátot!

1.1.2. Műveletek hibája

15. A 3-t $1,73 \cdot 1,73$ -mal közelítjük. Adjunk a szorzatra abszolút és relatív hibakorlátot, ha tudjuk, hogy $1,73$ a $\sqrt{3}$ két tizedes jegyre kerekített értéke!

16. A 4-et $1,41 \cdot 2,83$ -mal közelítjük. Adjunk a közelítésre abszolút és relatív hibakorlátot, ha tudjuk, hogy $1,41$ a $\sqrt{2}$ és $2,43$ a $\sqrt{8}$ két tizedes jegyre kerekített értéke!

17. A $\frac{2}{\sqrt{2}}$ -t $\frac{2}{1,414}$ -gyel közelítjük. Adjunk a közelítésre abszolút és relatív hibakorlátot, ha tudjuk, hogy $1,414$ a $\sqrt{2}$ három tizedes jegyre kerekített értéke!

18. Az $\frac{1}{\pi}$ -t $\frac{1}{3,14}$ -gyel közelítjük. Adjuk meg a közelítés abszolút és relatív hibakorlátját, ha tudjuk, hogy $3,14$ a π két tizedes jegyre kerekített értéke!

19. Közelítsük az $e \cdot \pi$ szorzatot $2,718 \cdot 3,142$ -vel. Adjuk meg a közelítés abszolút és relatív hibakorlátját, ha tudjuk, hogy e és π három tizedes jegyre kerekített értékét használtuk.

20. Számítsuk ki a $\sqrt{2007} - \sqrt{2006}$ mennyiséget, ha tudjuk, hogy $\sqrt{2007} \approx 44,80$ és $\sqrt{2006} \approx 44,79$ két tizedesjegyre számított közelítések!

a) Adjuk meg a számított különbség abszolút és relatív hibakorlátját!

b) A különbséget írjuk fel a vele ekvivalens alakba.

$$\sqrt{2007} - \sqrt{2006} = \frac{2007 - 2006}{\sqrt{2007} + \sqrt{2006}} = \frac{1}{\sqrt{2007} + \sqrt{2006}}.$$

Ezzel a számítási móddal milyen abszolút és relatív hibakorlátot kapunk?

c) Hasonlítsuk össze a kétféle számítás hibabecslését!

1.1.3. Függvényérték hibája

21. A 3^π közelítésére 3^3-t használjuk. Adjuk meg a függvényérték abszolút és relatív hibakorlátját, ha tudjuk, hogy 3 a π egészre kerekített értéke!

22. A e^2 közelítésére 3^2-t használjuk ($e = \exp(1)$). Adjuk meg a függvényérték abszolút és relatív hibakorlátját, ha tudjuk, hogy 3 az e egészre kerekített értéke!

23. A $\cos(0,8)$ közelítésére $\cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$-t használjuk. Adjuk meg a függvényérték abszolút és relatív hibakorlátját, ha tudjuk, hogy $0,8$ a $\frac{\pi}{4}$ -nek az egy tizedesjegyre kerekített értéke!

24. A $\sin(0,5)$ közelítésére $\sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$-et használjuk. Adjuk meg a függvényérték abszolút és relatív hibakorlátját, ha tudjuk, hogy $0,5$ a $\frac{\pi}{6}$ -nak az egy tizedesjegyre kerekített értéke!

1.2. Megoldások

1.2.1. Gépi számábrázolás

1. **a)** A szám előjele kétféle lehet. Az első mantissza jegy mindig 1, a többi 5 egyenként kétféle lehet. A karakterisztika −3-tól 3-ig 7 féle lehet. Vegyük még hozzá a 0-t, így összesen

$$2 \cdot 2^5 \cdot 7 + 1 = 449$$

eleme van a halmaznak.

b) ε_0-t, a legkisebb pozitív számot a legkisebb mantisszával és legkisebb karakterisztikával kapjuk.

$$\varepsilon_0 = [100000|-3] = \frac{1}{2} \cdot 2^{-3} = 2^{-4} = \frac{1}{16}$$

ε_1-t, a gépi számábrázolás relatív hibáját úgy kapjuk, hogy az 1 után következő gépi számból kivonjuk az 1-et.

$$\varepsilon_1 = [100001|\,1] - [100000|\,1] = 2^{-6} \cdot 2^1 = 2^{-5} = \frac{1}{32}$$

M_∞-t, a legnagyobb pozitív gépi számot a legnagyobb mantisszával és legnagyobb karakterisztikával kapjuk.

$$M_\infty = [111111|\,3] = \left(1 - 2^{-6}\right) \cdot 2^3 = 8 - \frac{1}{8} = 7,875$$

2. **a)** A szám előjele kétféle lehet. Az első mantissza jegy mindig 1, a többi 4 egyenként kétféle lehet. A karakterisztika −4-től 4-ig 9 féle lehet. Vegyük még hozzá a 0-t, így összesen

$$2 \cdot 2^4 \cdot 9 + 1 = 289$$

eleme van a halmaznak.

b) ε_0-t, a legkisebb pozitív számot a legkisebb mantisszával és legkisebb karakterisztikával kapjuk.

$$\varepsilon_0 = [10000|-4] = \frac{1}{2} \cdot 2^{-4} = 2^{-5} = \frac{1}{32}$$

ε_1-t, a gépi számábrázolás relatív hibáját úgy kapjuk, ha az 1 után következő gépi számból kivonjuk az 1-et.

$$\varepsilon_1 = [10001|\,1] - [10000|\,1] = 2^{-5} \cdot 2^1 = 2^{-4} = \frac{1}{16}$$

M_∞-t, a legnagyobb pozitív gépi számot a legnagyobb mantisszával és legnagyobb karakterisztikával kapjuk.

$$M_\infty = [11111|\,4] = \left(1 - 2^{-5}\right) \cdot 2^4 = 16 - \frac{1}{2} = 15,5$$

3. **a)** A szám előjele kétféle lehet. Az első mantissza jegy mindig 1, a többi 7 egyenként kétféle lehet. A karakterisztika -4-től 4-ig 9 féle lehet. Vegyük még hozzá a 0-t, így összesen

$$2 \cdot 2^7 \cdot 9 + 1 = 2305$$

eleme van a halmaznak.

b) ε_0-t, a legkisebb pozitív számot a legkisebb mantisszával és legkisebb karakterisztikával kapjuk.

$$\varepsilon_0 = [10000000|-4] = \frac{1}{2} \cdot 2^{-4} = 2^{-5} = \frac{1}{32}$$

ε_1-t, a gépi számábrázolás relatív hibáját úgy kapjuk, ha az 1 után következő gépi számból kivonjuk az 1-et.

$$\varepsilon_1 = [10000001|\,1] - [10000000|\,1] = 2^{-8} \cdot 2^1 = 2^{-7} = \frac{1}{128}$$

M_∞-t, a legnagyobb pozitív gépi számot a legnagyobb mantisszával és legnagyobb karakterisztikával kapjuk.

$$M_\infty = [11111111|\,4] = \left(1 - 2^{-8}\right) \cdot 2^4 = 16 - \frac{1}{16} = 15,9375$$

4. Nézzük meg, melyik az a két gépi szám, mely a $4,21$ -t közrefogja. Egy lehetséges megoldás, hogy átírjuk bináris számmá. Az egész és tört részét külön váltjuk át. Az egészrésznél maradékosan osztunk kettővel. A hányadost az első oszlopba írjuk, a maradékot a második oszlopba. A törtrésznél a törtrészt szorozzuk kettővel, ez kerül a második oszlopba, az átvitelt (ha van) az első oszlopban tároljuk. Mivel 6 jegyű a mantissza, ezért a kerekítéssel együtt 7 jegyre van szükségünk, ez az egész résznél 3 jegy (lásd átváltás), a törtrésznél 4 jegy kiszámítását jelenti. Mivel a 4. bináris tört jegy 1, ezért felfelé kerekítünk, a kapott bináris szám utolsó jegyéhez egyet hozzáadunk binárisan. A táblázatból az egészrésznél a maradék jegyek kiolvasását lentről felfelé, a törtrésznél az átviteli jegyek kiolvasását fentről lefelé végezzük. Így a $4,21$ kerekítése kettes számrendszerben 100.010 lesz.

4	
2	0
1	0
0	1

	21
0	42
0	84
1	68
1	36

A kapott bináris számot normalizáljuk, azaz hárommal balra toljuk a bináris pontot. Így megkaptuk a mantissza jegyeit, a karakterisztika értéke a balra tolás miatt 3 lesz. A gépi szám szokásos jelölésével felírva

$$[100010|\,3] = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{32}\right) \cdot 2^3 = \frac{16+1}{4} = \frac{17}{4} = 4,25.$$

Ellenőrizzük a kapott szám helyességét. Mivel felfelé kerekítettünk, ezért meg kell néznünk a szám alsó szomszédját. Ez az

$$[100001|\,3] = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{64}\right) \cdot 2^3 = \frac{32+1}{8} = \frac{33}{8} = 4,125.$$

Összehasonlítva, hogy melyik szám van közelebb 4,21-hez azt kapjuk, hogy az eredeti számunk.

$$4,21 - 4,125 = 0,085 \quad > \quad 0,04 = 4,25 - 4,21$$

Tehát $fl(4,21) = [100010|\,3] = \frac{17}{4} = 4,25$. A számábrázolásból származó abszolút hibakorlát (a karakterisztikát is figyelve) az utolsó helyiérték fele, azaz

$$\Delta_{fl(4,21)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{64} \cdot 2^3 = \frac{1}{16}.$$

5. Nézzük meg, melyik az a két gépi szám, mely a 0,11 -t közrefogja. Egy lehetséges megoldás, hogy átírjuk bináris számmá. A számnak csak törtrésze van. A törtrészt szorozzuk kettővel, ez kerül a második oszlopba, az átvitelt (ha van) az első oszlopban tároljuk.

	11
0	22
0	44
0	88
1	76
1	52
1	04
0	08
0	16
0	32
0	64

Látjuk, hogy az első három bináris jegy 0, ezeket nem ábrázoljuk a mantisszában. Utána mivel 6 jegyű a mantissza, a kerekítéssel együtt még 7 jegyre van szükségünk. Mivel a 10. bináris tört jegy 0, ezért lefelé kerekítünk. A táblázatból az átviteli jegyek kiolvasását fentről lefelé végezzük. Így a 0,11 kerekítése kettes számrendszerben 0.000111000 lesz.

A kapott bináris számot normalizáljuk, azaz hárommal jobbra toljuk a bináris pontot. Így megkaptuk a mantissza jegyeit, a karakterisztika értéke a jobbra tolás miatt -3 lesz. A gépi szám szokásos jelölésével felírva

$$[111000|-3] = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right) \cdot 2^{-3} = \frac{4+2+1}{64} = \frac{7}{64} = 0,109375.$$

Ellenőrizzük a kapott szám helyességét! Mivel lefelé kerekítettünk, ezért meg kell néznünk a szám felső szomszédját. Ez az

$$[111001|-3] = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{64}\right) \cdot 2^{-3} = \frac{32+16+8+1}{512} = \frac{57}{512} = 0,111328125$$

Összehasonlítva, hogy melyik szám van közelebb 0,11 -hez azt kapjuk, hogy az eredeti számunk.

$$0,11 - 0,109375 = 0,000625 \quad < \quad 0,001328125 = 0,111328125 - 0,11$$

Tehát $fl(0,11) = [111000| -3] = \frac{7}{64} = 0,109375$. A számábrázolásból származó abszolút hibakorlát (a karakterisztikát is figyelve) az utolsó helyiérték fele, azaz

$$\Delta_{fl(0,11)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{64} \cdot 2^{-3} = \frac{1}{128}.$$

Látjuk, hogy a nullához közeli számokat sokkal pontosabban ábrázoljuk.

6. Írjuk át mindhárom tizedestörtet bináris számmá. A számoknak csak törtrészük van. A törtrészt szorozzuk kettővel, ez kerül a második oszlopba, az átvitelt (ha van) az első oszlopban tároljuk.

	17		167		1667
0	34	0	334	0	3334
0	68	0	668	0	6668
1	36	1	336	1	3336
0	72	0	672	0	6672
1	44	1	344	1	3344
0	88	0	688	0	6688
1	76	1	376	1	3376
1	52	0	752	0	6752
1	04	1	504	1	3504
0	08	1	008	0	7008
0	16	0	016	1	4016

Látjuk, hogy az első két bináris jegy 0, ezeket nem ábrázoljuk a mantisszában. Mivel 8 jegyű a mantissza, a kerekítéssel együtt még 9 jegyre van szükségünk.

Első esetben a 11. bináris tört jegy 0, ezért lefelé kerekítünk. A $0,17$ kerekítése kettes számrendszerben 0.0010101110 lesz.

A második esetben a 11. bináris tört jegy 0, ezért lefelé kerekítünk. A $0,167$ kerekítése kettes számrendszerben 0.0010101011 lesz.

A harmadik esetben a 11. bináris tört jegy 1, ezért felfelé kerekítünk. A táblázatból az átviteli jegyek kiolvasását fentről lefelé végezzük. A $0,1667$ kerekítése kettes számrendszerben 0.0010101011 lesz, vagyis ugyanazt a gépi számot kaptuk, mint az előző esetben.

A kapott bináris számot normalizáljuk, azaz kettővel jobbra toljuk a bináris pontot. Így megkaptuk a mantissza jegyeit, a karakterisztika értéke a jobbra tolás miatt -2 lesz. A gépi szám szokásos jelölésével felírva

$$\begin{aligned}
[10101110| -2] &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128}\right) \cdot 2^{-2} = \frac{64+16+4+2+1}{512} = \frac{87}{512} = \frac{174}{1024} = \\
&= 0,169921875. \\
[10101011| -2] &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \frac{1}{128} + \frac{1}{256}\right) \cdot 2^{-2} = \frac{128+32+8+2+1}{1024} = \frac{171}{1024} = \\
&= 0,1669921875.
\end{aligned}$$

Keressünk két szomszédos gépi számot kaptunk, mely közrefogja az $\frac{1}{6}$ -ot. Mivel a felírt tizedestörtek mind nagyobbak nála, ezért érdemes a kapott legkisebb szám alsó szomszédját megnézni. Ez az

$$\begin{aligned}
[10101010| -2] &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \frac{1}{128}\right) \cdot 2^{-2} = \frac{64+16+4+1}{512} = \frac{85}{512} = \\
&= \frac{170}{1024} = 0,166015625.
\end{aligned}$$

Mivel most már van két szomszédos gépi számunk, mely közrefogja az $\frac{1}{6}$ -ot, ezért $fl(\frac{1}{6})$ a kettő közül a közelebbik lesz. A 4 tizedesjegyre felírt közelítésből kapjuk a keresett gépi számot

$$fl\left(\frac{1}{6}\right) = [10101011| - 2] = \frac{171}{1024} = 0,1669921875.$$

Látjuk, hogy a nullához közeli számok nagyon közel vannak egymáshoz, ezért a közelítésükre figyelni kell.

7. Nézzük meg, melyik az a két gépi szám, mely $\sqrt{2}$ -t közrefogja. Egy lehetséges megoldás, hogy átírjuk tizedestörtbe (figyelve arra, hogy a mantisszához kellő pontosságú legyen), majd ezt az alakot átváltjuk bináris számmá. $\sqrt{2} \approx 1,414$ -gyel dolgozunk. Az egész és tört részét külön váltjuk át. Az egészrésznél maradékosan osztunk kettővel. A hányadost az első oszlopba írjuk, a maradékot a második oszlopba. A törtrésznél a törtrészt szorozzuk kettővel, ez kerül a második oszlopba, az átvitelt (ha van) az első oszlopban tároljuk. Mivel 6 jegyű a mantissza, ezért a kerekítéssel együtt 7 jegyre van szükségünk, ez a törtrésznél 6 jegy kiszámítását jelenti. Mivel a 6. jegy 0, ezért lefelé kerekítünk. (Ha a kerekítő jegy 1 lenne, akkor a kapott bináris szám utolsó jegyéhez egyet hozzáadunk binárisan.) A táblázatból az egészrésznél a maradék jegyek kiolvasását lentről felfelé, a törtrésznél az átviteli jegyek kiolvasását fentről lefelé végezzük. Így 1,414 kerekítése kettes számrendszerben 1.01101 lesz.

1	
0	1

	414
0	828
1	656
1	312
0	624
1	248
0	496

A kapott bináris számot normalizáljuk, azaz eggyel balra toljuk a bináris pontot. Így megkaptuk a mantissza jegyeit, a karakterisztika értéke a balra tolás miatt 1 lesz. A gépi szám szokásos jelölésével felírva

$$[101101|\,1] = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64}\right) \cdot 2^1 = \frac{32+8+4+1}{32} = \frac{45}{32} = 1,40625.$$

Ellenőrizzük a kapott szám helyességét. Mivel lefelé kerekítettünk, ezért meg kell néznünk a szám felső szomszédját. Ez az

$$[101110|\,1] = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32}\right) \cdot 2^1 = \frac{16+4+2+1}{16} = \frac{23}{16} = 1,4375.$$

Összehasonlítva, hogy melyik szám van közelebb $\sqrt{2}$ -höz azt kapjuk, hogy az eredeti számunk.

$$\sqrt{2} - 1,40625 \approx 0,00796 \quad < \quad 0,02328 \approx 1,4375 - \sqrt{2}$$

Tehát $fl(\sqrt{2}) = [101101|\,1] = \frac{45}{32} = 1,40625.$

A számábrázolásból származó abszolút hibakorlát (a karakterisztikát is figyelve) az utolsó helyiérték fele, azaz

$$\Delta_{fl(\sqrt{2})} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{64} \cdot 2^1 = \frac{1}{64}.$$

8. Nézzük meg, melyik az a két gépi szám, mely $\sqrt{3}$ -at közrefogja. Egy lehetséges megoldás, hogy átírjuk tizedestörtbe (figyelve arra, hogy a mantisszához kellő pontosságú legyen), majd ezt az alakot átváltjuk bináris számmá. $\sqrt{3} \approx 1,732$ -vel dolgozunk. Az egész és tört részét külön váltjuk át. Az egészrésznél maradékosan osztunk kettővel. A hányadost az első oszlopba írjuk, a maradékot a második oszlopba. A törtrésznél a törtrészt szorozzuk kettővel, ez kerül a második oszlopba, az átvitelt (ha van) az első oszlopban tároljuk. Mivel 5 jegyű a mantissza, ezért a kerekítéssel együtt 6 jegyre van szükségünk, ez a törtrésznél 5 jegy kiszámítását jelenti. Mivel a 5. jegy 1, ezért felfelé kerekítünk, a kapott bináris szám utolsó jegyéhez egyet hozzáadunk binárisan. A táblázatból az egészrésznél a maradék jegyek kiolvasását lentről felfelé, a törtrésznél az átviteli jegyek kiolvasását fentről lefelé végezzük. Így $1,732$ kerekítése kettes számrendszerben 1.1100 lesz.

1	
0	1

	732
1	464
0	928
1	856
1	712
1	424

A kapott bináris számot normalizáljuk, azaz eggyel balra toljuk a bináris pontot. Így megkaptuk a mantissza jegyeit, a karakterisztika értéke a balra tolás miatt 1 lesz. A gépi szám szokásos jelölésével felírva

$$[11100|\,1] = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right) \cdot 2^1 = \frac{4+2+1}{4} = \frac{7}{4} = 1,75.$$

Ellenőrizzük a kapott szám helyességét. Mivel felfelé kerekítettünk, ezért meg kell néznünk a szám alsó szomszédját. Ez az

$$[11011|\,1] = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32}\right) \cdot 2^1 = \frac{16+8+2+1}{16} = \frac{27}{16} = 1,6875.$$

Összehasonlítva, hogy melyik szám van közelebb $\sqrt{3}$ -hoz azt kapjuk, hogy az eredeti számunk.

$$\sqrt{3} - 1,6875 \approx 0,04455 \quad > \quad 0,01795 \approx 1,75 - \sqrt{3}$$

Tehát $fl(\sqrt{3}) = [11100|\,1] = \frac{7}{4} = 1,75$. Mivel 6 mantissza jegyet kellett pontosan kiszámolnunk, ezért két tizedesjegyre kerekített értékkel is ugyanezt az eredményt kaptuk volna. ($10^3 \approx 2^{10}$, azaz 3 tizedesjegy felel meg 10 bináris jegynek.)

9. Nézzük meg, melyik az a két gépi szám, mely $\sqrt{5}$ -öt közrefogja. Egy lehetséges megoldás, hogy átírjuk tizedestörtbe (figyelve arra, hogy a mantisszához kellő pontosságú legyen), majd ezt az alakot átváltjuk bináris számmá. $\sqrt{5} \approx 2,236$ -tal dolgozunk. Az egész és tört részét külön váltjuk át. Az egészrésznél maradékosan osztunk kettővel. A hányadost az első oszlopba írjuk, a maradékot a második oszlopba. A törtrésznél a törtrészt szorozzuk kettővel, ez kerül a második oszlopba, az átvitelt (ha van) az első oszlopban tároljuk. Mivel 6 jegyű a mantissza, ezért a kerekítéssel együtt 7 jegyre van szükségünk, ez a törtrésznél 5 jegy kiszámítását jelenti. Mivel az 5. jegy 1, ezért felfelé kerekítünk, a kapott bináris szám utolsó jegyéhez egyet hozzáadunk binárisan. A táblázatból az egészrésznél a maradék jegyek kiolvasását lentről felfelé, a törtrésznél az átviteli jegyek kiolvasását fentről lefelé végezzük. Így $2,236$ kerekítése kettes számrendszerben 10.0100 lesz.

$$
\begin{array}{r|l}
2 & \\
\hline
1 & 0 \\
0 & 1
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r|l}
 & 236 \\
\hline
0 & 472 \\
0 & 944 \\
1 & 888 \\
1 & 776 \\
\hline
1 & 552
\end{array}
$$

A kapott bináris számot normalizáljuk, azaz kettővel balra toljuk a bináris pontot. Így megkaptuk a mantissza jegyeit, a karakterisztika értéke a balra tolás miatt 2 lesz. A gépi szám szokásos jelölésével felírva

$$[100100|\,2] = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{16}\right) \cdot 2^2 = \frac{8+1}{4} = \frac{9}{4} = 2,25.$$

Ellenőrizzük a kapott szám helyességét. Mivel felfelé kerekítettünk, ezért meg kell néznünk a szám alsó szomszédját. Ez az

$$[100011|\,2] = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64}\right) \cdot 2^2 = \frac{32+2+1}{16} = \frac{35}{16} = 2,1875.$$

Összehasonlítva, hogy melyik szám van közelebb $\sqrt{5}$ -höz azt kapjuk, hogy az eredeti számunk.

$$\sqrt{5} - 2,1875 \approx 0,04857 \quad > \quad 0,01393 \approx 2,25 - \sqrt{5}$$

Tehát $fl(\sqrt{5}) = [100100|\,2] = \frac{9}{4} = 2,25.$

A számábrázolásból származó abszolút hibakorlát (a karakterisztikát is figyelve) az utolsó helyiérték fele, azaz

$$\Delta_{fl(\sqrt{5})} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{64} \cdot 2^2 = \frac{1}{32}.$$

A relatív hibakorlát (abszolút hibakorlát/közelítő érték)

$$\delta_{fl(\sqrt{5})} = \frac{\frac{1}{32}}{\frac{9}{4}} = \frac{1}{9 \cdot 8} = \frac{1}{72} \approx 0,01389.$$

10. **a)** A megoldáshoz használjuk fel a 6. feladat megoldásában az $\frac{1}{6}$ bináris közelítésére kapott megoldást: 0.0010101011. Mivel most csak 6 hosszú a mantisszánk, ezért 6 jegyre van szükségünk az első egyestől. A 9. jegyben lévő 1-es miatt felfelé kerekítünk (a kettedes pont utáni két 0-t nem ábrázoljuk).

Így $fl(\frac{1}{6}) = [101011| - 2]$.

Ellenőrizzük, hogy $[101010| - 2]$ és az $[101011| - 2]$ közül $\frac{1}{6}$ az utóbbihoz van közelebb.

$$[101010| - 2] = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32}\right) \cdot 2^{-2} = \frac{16+4+1}{128} = \frac{21}{128} = 0,1640625$$
$$[101011| - 2] = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64}\right) \cdot 2^{-2} = \frac{32+8+2+1}{256} = \frac{43}{256} = 0,16796875$$

$\frac{1}{12}$ bináris közelítését úgy kapjuk, hogy jobbra léptetjük eggyel $\frac{1}{6}$ bináris közelítését (kettővel osztunk): 0.00010101011. Mivel 6 hosszú a mantisszánk, ezért 6 jegyre van szükségünk az első egyestől. A 10. jegyben lévő 1-es miatt felfelé kerekítünk (a kettedes pont utáni három 0-t nem ábrázoljuk).

Így $fl(\frac{1}{12}) = [101011|-3]$.

Ellenőrizzük, hogy $[101010|-3]$ és az $[101011|-3]$ közül $\frac{1}{12} \approx 0,08333333$ az utóbbihoz van közelebb.

$$[101010|-3] = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32}\right) \cdot 2^{-3} = \frac{16+4+1}{256} = \frac{21}{256} = 0,08203125$$
$$[101011|-3] = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64}\right) \cdot 2^{-3} = \frac{32+8+2+1}{512} = \frac{43}{512} = 0,083984375$$

A kivonást csak úgy tudjuk elvégezni, ha közös karakterisztikára hozzuk a számokat és kerekítünk. Ez a karakterisztika a nagyobbik lesz, mert így lesz kisebb a hiba.

Az $fl(\frac{1}{12})$ kerekítése $[101011|-3] \to [010110|-2]$.

$$\begin{array}{r} [101011|-2] \\ -\,[010110|-2] \\ \hline [010101|-2] \end{array}$$

A kapott eredményt normalizálni kell (a bináris pontot eggyel jobbra toljuk és csökkentjük a karakterisztikát eggyel)

$$[101010|-3] = \frac{21}{256} = 0,08203125.$$

c) $fl(\frac{1}{6}) = [101011|-2]$ abszolút hibakorlátja

$$\Delta_{fl(\frac{1}{6})} = \frac{1}{2} \cdot 2^{-6} \cdot 2^{-2} = 2^{-9}.$$

$fl(\frac{1}{12}) = [101011|-3]$ abszolút hibakorlátja

$$\Delta_{fl(\frac{1}{12})} = \frac{1}{2} \cdot 2^{-6} \cdot 2^{-3} = 2^{-10}.$$

Az eredmény abszolút hibakorlátja

$$\Delta_{\frac{21}{256}} = \frac{1}{2} \cdot 2^{-6} \cdot 2^{-3} = 2^{-10}.$$

11. Az $\frac{5}{6}$-ot tizedestörttel közelítjük (figyelve arra, hogy a mantisszához kellő pontosságú legyen), majd ezt az alakot átváltjuk bináris számmá. $\frac{5}{6} \approx 0,833$ -mal dolgozunk. A számnak csak törtrésze van, ezt árírjuk bináris számmá (lásd a korábbi megoldásokat). Mivel most 6 hosszú a mantisszánk, ezért a 7. jegyben lévő 0 miatt lefelé kerekítünk. A karakterisztika 0, mivel az első bináris jegy 1.

$$\begin{array}{r|l} & 833 \\ \hline 1 & 666 \\ 1 & 332 \\ 0 & 664 \\ 1 & 328 \\ 0 & 656 \\ 1 & 312 \\ \hline 0 & 624 \end{array}$$

Ellenőrizzük, hogy $\frac{5}{6}$ az $[110101|\,0]$ és az $[110110|\,0]$ közül az előbbihez van közelebb. Így $fl(\frac{5}{6}) = [110101|\,0]$.

$$[110101|\,0] = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}\right)\cdot 2^0 = \frac{32+16+4+1}{64} = \frac{53}{64} = 0,828125$$
$$[110110|\,0] = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}\right)\cdot 2^0 = \frac{16+8+2+1}{32} = \frac{27}{32} = 0,844375$$

Az összeadást egyszerű elvégezni, mivel a karakterisztikák megegyeznek. Elvégezzük binárisan az összadást.

$$\begin{array}{r} [110101|0] \\ +\,[110101|0] \\ \hline [1101010|0] \end{array}$$

A kapott eredményt normalizálni kell (a karakterisztikát eggyel növeljük a keletkezett átvitel miatt)

$$[1101010|\,0] = [110101|\,1] = \frac{53}{64}\cdot 2 = \frac{53}{32} = 1,65625.$$

Az összeg abszolút hibakorlátja

$$\Delta_{\frac{53}{32}} = \frac{1}{2}\cdot 2^{-6}\cdot 2^1 = 2^{-6}.$$

12. **a)** A megoldáshoz felhasználjuk a 6. feladat megoldásában $\frac{1}{6}$ bináris közelítését: 0.0010101011. Az $\frac{1}{3}$ bináris közelítését úgy kapjuk, hogy balra léptetjük eggyel az $\frac{1}{6}$ bináris közelítését (kettővel szorzunk): 0.010101011. Ellenőrizzük, hogy $\frac{1}{3} \approx 0,333333$ az $[10101010|-1]$ és az $[10101011|-1]$ közül az utóbbihoz van közelebb.

Így $fl(\frac{1}{6}) = [10101011|-2]$ és $fl(\frac{1}{3}) = [10101011|-1]$.

$$[10101010|-1] = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{32}+\frac{1}{128}\right)\cdot 2^{-1} = \frac{64+16+4+1}{256} = \frac{85}{256} = 0,33203125$$
$$[10101011|-1] = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{32}+\frac{1}{128}+\frac{1}{256}\right)\cdot 2^{-1} = \frac{128+32+8+2+1}{512} = \frac{171}{512} =$$
$$= 0,333984375$$

b) A kivonást csak úgy tudjuk elvégezni, ha közös karakterisztikára hozzuk a számokat és kerekítünk. Ez a karakterisztika a nagyobbik lesz, mert így lesz kisebb a hiba.

Az $fl(\frac{1}{6})$ kerekítése $[10101011|-2] \to [01010110|-1]$.

$$\begin{array}{r} [10101011|-1] \\ -\,[01010110|-1] \\ \hline [01010101|-1] \end{array}$$

A kapott eredményt normalizálni és kerekíteni kell (a bináris pontot eggyel jobbra toljuk és csökkentjük a karakterisztikát eggyel)

$$[10101010|-2] = \frac{85}{512} = 0,166015625.$$

c) $fl(\frac{1}{6}) = [10101011|-2]$ abszolút hibakorlátja

$$\Delta_{fl(\frac{1}{6})} = \frac{1}{2}\cdot 2^{-8}\cdot 2^{-2} = 2^{-11}.$$

$fl(\frac{1}{3}) = [10101011|-1]$ abszolút hibakorlátja

$$\Delta_{fl(\frac{1}{3})} = \frac{1}{2} \cdot 2^{-8} \cdot 2^{-1} = 2^{-10}.$$

Az eredmény abszolút hibakorlátja

$$\Delta_{\frac{85}{512}} = \frac{1}{2} \cdot 2^{-8} \cdot 2^{-2} = 2^{-11}.$$

13. **a)** A $\sqrt{3}$-nak megfeleltetett gépi számot már az 8. feladatban kerestük, de akkor más mantisszával. Még egy jegyet számoljunk hozzá a törtrészhez és kerekítsünk.

$$fl(\sqrt{3}) = [110111|\,1] = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64}\right) \cdot 2^1 =$$
$$= \frac{32+16+4+2+1}{32} = \frac{55}{32} = 1,71875.$$

Ellenőrizzük, hogy $\sqrt{3}$ az $[110111|\,1]$ és az $[111000|\,1]$ közül az előbbihez van közelebb. Így $fl(\sqrt{3}) = [110111|\,1]$. A $\pi \approx 3,142$, ezt írjuk át bináris törtté a korábbi megoldásokban ismertetett módon $\pi \approx 11.0010_2$.

$$\begin{array}{c|c} 3 & \\ \hline 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} & 142 \\ \hline 0 & 284 \\ 0 & 568 \\ 1 & 136 \\ 0 & 272 \\ \hline 0 & 544 \end{array}$$

$$fl(\pi) = [110010|\,2] = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{32}\right) \cdot 2^2 = \frac{16+8+1}{8} = \frac{25}{8} = 3,125$$

Ellenőrizzük, hogy π az $[110010|\,2]$ és az $[110011|\,2]$ közül az előbbihez van közelebb. Így $fl(\pi) = [110010|\,2]$.

b) A kivonást csak úgy tudjuk elvégezni, ha közös karakterisztikára hozzuk a számokat és kerekítünk. Ez a karakterisztika a nagyobbik lesz, mert így lesz kisebb a hiba. Az átalakítás $[110111|\,1] \to [011100|\,2]$.

$$\begin{array}{r} [110010|\,2] \\ -\,[011100|\,2] \\ \hline [010110|\,2] \end{array}$$

A kapott eredményt normalizálni és kerekíteni kell (a bináris pontot eggyel jobbra toljuk és csökkentjük a karakterisztikát eggyel)

$$[010110|\,2] = [101100|\,1] = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}\right) \cdot 2^1 = \frac{8+2+1}{8} = \frac{11}{8} = 1,375.$$

c) $fl(\sqrt{3}) = [110111|\,1]$ abszolút hibakorlátja

$$\Delta_{fl(\sqrt{3})} = \frac{1}{2} \cdot 2^{-6} \cdot 2^1 = 2^{-6}.$$

$fl(\pi) = [110010|\,2]$ abszolút hibakorlátja

$$\Delta_{fl(\pi)} = \frac{1}{2} \cdot 2^{-6} \cdot 2^2 = 2^{-5}.$$

Az eredmény abszolút hibakorlátja

$$\Delta_{\frac{11}{8}} = \frac{1}{2} \cdot 2^{-6} \cdot 2^{1} = 2^{-6}.$$

14. A $\sqrt{2}$-nek megfeleltetett gépi számot a 7. feladatból leolvashatjuk, most 5 jegyű mantisszát keresünk

$$fl(\sqrt{2}) = [10111|\,1].$$

A $\sqrt{3}$-nak megfeleltetett gépi szám a 8. feladatból

$$fl(\sqrt{3}) = [11100|\,1].$$

Mivel azonos a karakterisztika, egyszerű összeadni.

$$\begin{array}{r} [10111|1] \\ +\,[11100|1] \\ \hline [110011|1] \end{array}$$

Az összeg 5 jegyre kerekítve és normalizálva

$$[11010|\,2] = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16}\right) \cdot 2^2 = \frac{8+4+1}{4} = \frac{13}{4}.$$

Az eredmény abszolút hibakorlátja

$$\Delta_{\frac{13}{4}} = \frac{1}{2} \cdot 2^{-5} \cdot 2^{2} = 2^{-4}.$$

1.2.2. Műveletek hibája

15. A $\sqrt{3} \approx 1,73$ közelítés abszolút hibakorlátja a két tizedesjegyre való kerekítésből adódóan $\Delta_{1,73} = 0,005$.

Az $1,73$ relatív hibakorlátja $\frac{\Delta_{1,73}}{1,73} = \frac{0,005}{1,73} \leq 0,0029 = \delta_{1,73}$.

A szorzat hibakorlátjaira vonatkozó tételből

$$\Delta_{1,73\cdot 1,73} = 2 \cdot 1,73 \cdot \Delta_{1,73} = 0,0173$$

$$\delta_{1,73\cdot 1,73} = 2 \cdot \delta_{1,73} = 0,0058.$$

A relatív hibakorlátot számolhatjuk a definícióból is

$$\frac{\Delta_{1,73\cdot 1,73}}{1,73 \cdot 1,73} = \frac{0,0173}{2,9929} \leq 0,0058 = \delta_{1,73\cdot 1,73}.$$

16. A $\sqrt{2} \approx 1,41$ és a $\sqrt{8} \approx 2,83$ közelítés abszolút hibakorlátja a két tizedesjegyre való kerekítésből adódóan $\Delta_{1,41} = \Delta_{2,83} = 0,005$.

Az $1,41$ relatív hibakorlátja $\frac{\Delta_{1,41}}{1,41} = \frac{0,005}{1,41} \leq 0,00355 = \delta_{1,41}$.

A $2,83$ relatív hibakorlátja $\frac{\Delta_{2,83}}{2,83} = \frac{0,005}{2,83} \leq 0,00177 = \delta_{2,83}$.

A szorzat hibakorlátjaira vonatkozó tételből

$$\Delta_{1,41\cdot 2,83} = 1,41 \cdot \Delta_{2,83} + 2,83 \cdot \Delta_{1,41} = 0,005 \cdot (1,41 + 2,83) = 0,0212$$

$$\delta_{1,41\cdot 2,83} = \delta_{1,41} + \delta_{2,83} = 0,00355 + 0,00177 = 0,00532.$$

A relatív hibakorlátot számolhatjuk a definícióból is

$$\frac{\Delta_{1,41\cdot 2,83}}{1,41 \cdot 2,83} = \frac{0,0212}{3,9903} \leq 0,00532 = \delta_{1,41\cdot 2,83}.$$

17. A $\sqrt{2} \approx 1,414$ közelítés abszolút hibakorlátja a három tizedesjegyre való kerekítésből adódóan $\Delta_{1,414} = 0,0005$.

Az $1,414$ relatív hibakorlátja $\frac{\Delta_{1,414}}{1,414} = \frac{0,0005}{1,414} \leq 0,000354 = \delta_{1,414}$.

Az osztás hibakorlátjaira vonatkozó tételből

$$\Delta_{\frac{2}{1,414}} = \frac{2 \cdot \Delta_{1,414} + 1,414 \cdot 0}{1,414^2} \approx 0,00051$$

$$\delta_{\frac{2}{1,414}} = \delta_{1,414} + 0 = 0,000354.$$

A relatív hibakorlátot számolhatjuk a definícióból is

$$\frac{\Delta_{\frac{2}{1,414}}}{\frac{2}{1,414}} \leq \frac{0,00051}{1,4144} \leq 0,00037 = \delta_{\frac{2}{1,414}}.$$

18. A $\pi \approx 3,14$ közelítés abszolút hibakorlátja a két tizedesjegyre való kerekítésből adódóan $\Delta_{3,14} = 0,005$.

A $3,14$ relatív hibakorlátja $\frac{\Delta_{3,14}}{3,14} = \frac{0,005}{3,14} \leq 0,0016 = \delta_{3,14}$.

Az osztás hibakorlátjaira vonatkozó tételből

$$\Delta_{\frac{1}{3,14}} = \frac{1 \cdot \Delta_{3,14} + 1,14 \cdot 0}{3,14^2} \approx \frac{0,005}{3,14^2} \approx 0,00051$$

$$\delta_{\frac{1}{3,14}} = \delta_{3,14} + 0 = 0,0016.$$

A relatív hibakorlátot számolhatjuk a definícióból is

$$\frac{\Delta_{\frac{1}{3,14}}}{\frac{1}{3,14}} \leq \frac{0,00051}{9,8596} \leq 0,00051 = \delta_{\frac{1}{3,14}}.$$

19. Az $e \approx 2,718$ és a $\pi \approx 3,142$ közelítés abszolút hibakorlátja a három tizedesjegyre való kerekítésből adódóan $\Delta_{2,718} = \Delta_{3,142} = 0,0005$.

A $2,718$ relatív hibakorlátja $\frac{\Delta_{2,718}}{2,718} = \frac{0,0005}{2,718} \leq 0,000184 = \delta_{2,718}$.

A $3,142$ relatív hibakorlátja $\frac{\Delta_{3,142}}{3,142} = \frac{0,0005}{3,142} \leq 0,000160 = \delta_{3,142}$.

A szorzat hibakorlátjaira vonatkozó tételből

$$\Delta_{2,718\cdot 3,142} = 3,142 \cdot \Delta_{2,718} + 2,718 \cdot \Delta_{3,142} = 0,0005 \cdot (2,718 + 3,142) = 0,00293$$

$$\delta_{2,718\cdot 3,142} = \delta_{2,718} + \delta_{3,142} = 0,000184 + 0,000160 = 0,000344.$$

A relatív hibakorlátot számolhatjuk a definícióból is

$$\frac{\Delta_{2,718\cdot 3,142}}{2,718 \cdot 3,142} = \frac{0,00293}{8,539956} \leq 0,000344 = \delta_{2,718\cdot 3,142}.$$

20. A $\sqrt{2007} \approx 44,80$ és a $\sqrt{2006} \approx 44,79$ közelítés abszolút hibakorlátja a két tizedesjegyre való kerekítésből adódóan $\Delta_{44,80} = \Delta_{44,79} = 0,005$.

A relatív hibakorlátok

$$\frac{\Delta_{44,80}}{44,80} = \frac{0,005}{44,80} \leq 0,000111607$$

és

$$\frac{\Delta_{44,79}}{44,79} = \frac{0,005}{44,79} \leq 0,000111632.$$

Így $\delta_{44,80} = \delta_{44,79} \approx 0,0001117$.

a) A számított különbség $0,01$. Az abszolút hibakorlátja

$$\Delta_{0,01} = \Delta_{44,80} + \Delta_{44,79} = 0,01.$$

A relatív hibakorlátja a definíció alapján számolva $\frac{\Delta_{0,01}}{0,01} = 1 = \delta_{0,01}$.

b) A másik módon számolva

$$\Delta_{44,80+44,79} = \Delta_{89,59} = \Delta_{44,80} + \Delta_{44,79} = 0,01$$

$$\Delta_{\frac{1}{89,59}} = \frac{1 \cdot \Delta_{89,59} + 0}{89,59^2} \approx \frac{0,01}{8026} = 0,000001245.$$

A relatív hibakorlát

$$\frac{\Delta_{\frac{1}{89,59}}}{\frac{1}{89,59}} = 0,000001245 \cdot 89,59 = 0,00011624 = \delta_{89,59}.$$

c) Az első rész eredményéből látjuk, hogy a közeli számok kivonása megnöveli a relatív hibát, most 10^4-szeresre nőtt. Az 1 relatív hibakorlát túl nagy. Ezzel ellentétben a második részben kapott eredmény relatív hibája a kiindulási értékek relatív hibájával azonos nagyságrendű. Tehát ez a számítási mód stabilabb, megbízhatóbb eredményt ad.

1.2.3. Függvényérték hibája

21. 3 abszolút hibakorlátja a kerekítésből adódóan $\Delta_3 = 0,5$.

3 relatív hibakorlátja $\delta_3 = \frac{\Delta_3}{3} = \frac{0,5}{3} = \frac{1}{6}$.

A függvényérték hibájára kapott $\Delta_{f(a)} = M_1 \cdot \Delta_a$ becslés alapján számolunk, ahol

$$M_1 = \max\{|f'(x)| : x \in k_{\Delta_a}(a)\}.$$

Mivel $f(x) = 3^x$ és $f'(x) = \ln(3) \cdot 3^x$, így $x \in [2,5; 3,5]$-re

$$M_1 = \ln(3) \cdot 3^{3,5} \approx 51,377.$$

$$\Delta_{3^3} = \ln(3) \cdot 3^{3,5} \cdot 0,5 = \ln(3) \cdot 3^3 \cdot \sqrt{3} \cdot 0,5 \approx 25,6885$$

$$\frac{\Delta_{3^3}}{3^3} = \frac{\ln(3) \cdot 3^{3,5} \cdot 0,5}{3^3} = \ln(3) \cdot \sqrt{3} \cdot 3 \cdot \frac{1}{6} \leq 0,952 = \delta_{3^3}$$

A kapott értékekből látjuk, hogy az abszolút hibakorlát kb. 50-szeresre, a relatív hibakorlát pedig kb. 6-szorosra nőtt.

22. 3 abszolút hibakorlátja a kerekítésből adódóan $\Delta_3 = 0,5$.
3 relatív hibakorlátja $\delta_3 = \frac{\Delta_3}{3} = \frac{0,5}{3} = \frac{1}{6}$.
A függvényérték hibájára kapott $\Delta_{f(a)} = M_1 \cdot \Delta_a$ becslés alapján számolunk, ahol

$$M_1 = \max\{|f'(x)| : x \in k_{\Delta_a}(a)\}.$$

Mivel $f(x) = x^2$ és $f'(x) = 2x$, így $x \in [2,5; 3,5]$-ra

$$M_1 = 2 \cdot 3,5 = 7.$$

$$\Delta_{3^2} = 7 \cdot 0,5 = \frac{7}{2} = 3,5$$

$$\frac{\Delta_{3^2}}{3^2} = \frac{\frac{7}{2}}{3^2} = \frac{7}{18} = \delta_{3^2}$$

A kapott értékekből látjuk, hogy az abszolút hibakorlát a 7-szeresére, a relatív hibakorlát pedig több mint a kétszeresére nőtt.

23. A feladat szerint most 0,8 a pontos érték, helyette $\frac{\pi}{4}$ -gyel dolgozunk, mert ennek ismerjük a koszinuszát ($\cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$). Az $\frac{\pi}{4}$ abszolút hibakorlátja a kerekítésből adódóan $\Delta_{\frac{\pi}{4}} = 0,05$.
A $\frac{\pi}{4}$ relatív hibakorlátja $\delta_{\frac{\pi}{4}} = \frac{\Delta_{\frac{\pi}{4}}}{0,8} = \frac{0,05}{0,8} = 0,0625$.
A függvényérték hibájára kapott $\Delta_{f(a)} = M_1 \cdot \Delta_a$ becslés alapján számolunk, ahol

$$M_1 = \max\{|f'(x)| : x \in k_{\Delta_a}(a)\}.$$

Mivel $f(x) = \cos(x)$ és $f'(x) = -\sin(x)$, így $x \in [0,75; 0,85]$-ra

$$M_1 = \sin(0,75) \approx 0,682.$$

$$\Delta_{\cos(\frac{\pi}{4})} = 0,682 \cdot 0,05 = 0,0341$$

$$\frac{\Delta_{\cos(\frac{\pi}{4})}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \leq \frac{0,0341}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \leq 0,0482 = \delta_{\cos(\frac{\pi}{4})} = \delta_{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

24. A feladatban most 0,5 a pontos érték és $\frac{\pi}{6}$ a közelítő érték, mert a szinuszát ismerjük ($\sin(\frac{\pi}{6}) = 0,5$). A $\frac{\pi}{6}$ abszolút hibakorlátja a kerekítésből adódóan $\Delta_{\frac{\pi}{6}} = 0,05$.
A $\frac{\pi}{6}$ relatív hibakorlátja $\delta_{\frac{\pi}{6}} = \frac{\Delta_{\frac{\pi}{6}}}{0,5} = \frac{0,05}{0,5} = 0,1$.
A függvényérték hibájára kapott $\Delta_{f(a)} = M_1 \cdot \Delta_a$ becslés alapján számolunk, ahol

$$M_1 = \max\{|f'(x)| : x \in k_{\Delta_a}(a)\}.$$

Mivel $f(x) = \sin(x)$ és $f'(x) = \cos(x)$, így $x \in [0,45; 0,55]$-ra

$$M_1 = \cos(0,55) \approx 0,853.$$

$$\Delta_{\sin(\frac{\pi}{6})} = \Delta_{0,5} = 0,853 \cdot 0,05 = 0,04265$$

$$\frac{\Delta_{\sin(\frac{\pi}{6})}}{0,5} \leq \frac{0,04265}{0,5} \leq 0,0853 = \delta_{0,5} = \delta_{\sin(\frac{\pi}{6})}$$

2. fejezet

MÁTRIX SZORZAT FELBONTÁSOK

2.1. Feladatok

2.1.1. Gauss-elimináció és determináns meghatározása

1. Oldjuk meg az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ lineáris egyenletrendszert Gauss-eliminációval!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

2. Oldjuk meg az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ lineáris egyenletrendszert Gauss-eliminációval!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & -6 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 9 \\ 2 \\ 25 \end{bmatrix}$$

3. Oldjuk meg az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ lineáris egyenletrendszert Gauss-eliminációval és számítsuk ki az A mátrix determinánsát!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

4. Oldjuk meg az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ lineáris egyenletrendszert Gauss-eliminációval és számítsuk ki az A mátrix determinánsát!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -6 & 0 \\ -5 & -5 & -7 \\ -4 & 3 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -6 \\ 7 \end{bmatrix}$$

5. Oldjuk meg az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ lineáris egyenletrendszert Gauss-eliminációval, részleges főelem-kiválasztással és határozzuk meg a mátrix determinánsát!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 9 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

6. Oldjuk meg az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ lineáris egyenletrendszert Gauss-eliminációval, részleges főelem-kiválasztással és határozzuk meg a mátrix determinánsát!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 7 & -8 \\ 2 & 4 & -5 \\ -4 & -6 & 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 9 \end{bmatrix}$$

7. Oldjuk meg az alábbi $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ lineáris egyenletrendszert Gauss-eliminációval, teljes főelemkiválasztással és számítsuk ki az $\mathbf{A}$ mátrix determinánsát!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix}$$

8. Oldjuk meg az alábbi $\mathbf{Ax_1} = \mathbf{b_1}$ és $\mathbf{Ax_2} = \mathbf{b_2}$ lineáris egyenletrendszereket Gauss-elimináció segítségével úgy, hogy az $\mathbf{A}$ mátrixon az eliminációt csak egyszer végezzük el!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & -1 & -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b_1} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 8 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b_2} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix}$$

9. Oldjuk meg az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ lineáris egyenletrendszert Gauss-eliminációval!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ \vdots \\ (-1)^n \end{bmatrix}$$

10. Oldjuk meg Gauss-eliminációval az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ lineáris egyenletrendszert!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

2.1.2. Mátrix inverz meghatározása

11. Számítsuk ki az $\mathbf{A}$ mátrix inverzét és determinánsát Gauss-eliminációval!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \end{bmatrix}$$

12. Határozzuk meg az $\mathbf{A}$ mátrix inverzét Gauss-eliminációval és adjuk meg a determináns értékét!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

13. Határozzuk meg az $\mathbf{A}$ mátrix inverzét Gauss-eliminációval és adjuk meg a determináns értékét!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

14. Határozzuk meg az $\mathbf{A}$ mátrix inverzét Gauss-eliminációval és adjuk meg a determináns értékét!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

15. Határozzuk meg az $\mathbf{A}$ mátrix inverzét Gauss-eliminációval és adjuk meg a determináns értékét!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

16. Határozzuk meg a következő $(n \times n)$-es mátrix inverzét Gauss-eliminációval!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

17. Határozzuk meg a következő $(n \times n)$-es mátrix inverzét Gauss-eliminációval!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 2 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 2 & 1 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 2 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

18. Határozzuk meg a következő $(n \times n)$-es mátrix inverzét Gauss-eliminációval!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.1.3. LU-felbontás

19. Adjuk meg az $\mathbf{A}$ mátrix LU-felbontását és ennek segítségével határozzuk meg a determináns értékét!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & 7 \\ 1 & 3 & 7 \end{bmatrix}$$

20. Adja meg az $\mathbf{A}$ mátrix LU-felbontását és ennek segítségével határozzuk meg a determináns értékét!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 1 & 3 & 7 \\ -4 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

21. Határozzuk meg az $\mathbf{A}$ mátrix LU-felbontását és ennek segítségével határozzuk meg a determináns értékét!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 9 \end{bmatrix}$$

22. Határozzuk meg az $\mathbf{A}$ mátrix LU-felbontását és ennek segítségével határozzuk meg a determináns értékét!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \\ 9 & -8 & 1 \end{bmatrix}$$

23. Készítsük el az $\mathbf{A}$ mátrix LU-felbontását a Gauss-eliminációval párhuzamosan!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & 7 \\ 1 & 3 & 7 \end{bmatrix}$$

24. Készítsük el az $\mathbf{A}$ mátrix LU-felbontását a Gauss-elimináció segítségével, azzal párhuzamosan!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 1 & 3 & 7 \\ -4 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

25. Készítsük el az $\mathbf{A}$ mátrix LU-felbontását a Gauss-elimináció segítségével!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \\ 9 & -8 & 1 \end{bmatrix}$$

26. Határozzuk meg az $\mathbf{A}$ mátrix LU-felbontását mátrix szorzás segítségével, használjuk a parketta elrendezést!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & 7 \\ 1 & 3 & 7 \end{bmatrix}$$

27. Határozzuk meg az $\mathbf{A}$ mátrix LU-felbontását mátrix szorzás segítségével, használjuk a parketta elrendezést!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 1 & 3 & 7 \\ -4 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

28. Határozzuk meg az $\mathbf{A}$ mátrix LU-felbontását mátrix szorzás segítségével, használjuk az oszlopfolytonos elrendezést!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & 7 \\ 1 & 3 & 7 \end{bmatrix}$$

29. Határozzuk meg az $\mathbf{A}$ mátrix LU-felbontását mátrix szorzás segítségével, használjuk az oszlopfolytonos elrendezést!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 1 & 3 & 7 \\ -4 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

30. Határozzuk meg az $\mathbf{A}$ mátrix LU-felbontását mátrix szorzás segítségével, használjuk a sorfolytonos elrendezést!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 1 & 3 & 7 \\ -4 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

31. Határozzuk meg az $\mathbf{A}$ mátrix LU-felbontását mátrix szorzás segítségével, használjuk az oszlopfolytonos elrendezést!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -3 & -3 \\ 16 & 25 & -33 & -\frac{47}{2} \\ 8 & 9 & 18 & -\frac{29}{2} \\ -10 & -14 & \frac{33}{4} & \frac{63}{4} \end{bmatrix}$$

32. Határozzuk meg az $\mathbf{A}$ mátrix LU-felbontását sorfolytonos, oszlopfolytonos és parketta elrendezés segítségével!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -6 \\ -6 & -17 & 19 \\ 8 & -4 & -14 \end{bmatrix}$$

33. Készítsük el az $\mathbf{A}$ mátrix egy particionálását, ahol az átlóban álló blokkok négyzetes mátrixok.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A_{11}} & \mathbf{A_{12}} \\ \mathbf{A_{21}} & \mathbf{A_{22}} \end{bmatrix}$$

Tegyük fel, hogy $\mathbf{A_{11}}$ invertálható és az LU-felbontás során odáig jutottunk, hogy $\mathbf{A_{11}}$ területén készen vagyunk a felbontással, $\mathbf{A_{22}}$ helyén pedig már megváltozott elemek vannak, de még a felbontást nem végeztük el. Mutasssuk meg, ekkor $\mathbf{A_{22}}$ helyén az $[\mathbf{A}\,|\mathbf{A_{11}}]$ Schur-komplemens található!

2.1.4. LDU-felbontás LU-felbontás segítségével

34. Adjuk meg az $\mathbf{A}$ mátrix LDU-felbontását az LU-felbontás segítségével!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 8 & 8 & 5 \\ -4 & -7 & -5 \end{bmatrix}$$

35. Adjuk meg az $\mathbf{A}$ mátrix LDU-felbontását az LU-felbontás segítségével!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

36. Adjuk meg az $\mathbf{A}$ mátrix LDU-felbontását az LU-felbontás segítségével!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

37. Adjuk meg az $\mathbf{A}$ mátrix LDU-felbontását az LU-felbontás segítségével!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 4 & 4 & 2 \\ 6 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

38. Adjuk meg az $\mathbf{A}$ mátrix LDU-felbontását az LU-felbontás segítségével!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

39. Adjuk meg az $\mathbf{A}$ mátrix LDU-felbontását az LU-felbontás segítségével!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

40. Adjuk meg az $\mathbf{A}$ mátrix LDU-felbontását az LU-felbontás segítségével!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

2.1.5. LDL^T- és LL^T- (Cholesky) felbontás

41. Adjuk meg az $\mathbf{A}$ mátrix LL^T-felbontását!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

42. Adjuk meg az $\mathbf{A}$ mátrix LDL^T- és LL^T-felbontását!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & -3 \\ 2 & -3 & 6 \end{bmatrix}$$

43. Adjuk meg az $\mathbf{A}$ mátrix LDL^T- és LL^T-felbontását!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

44. Adjuk meg az $\mathbf{A}$ mátrix LDL^T- és LL^T-felbontását!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

45. Adjuk meg az $\mathbf{A}$ mátrix LDL^T- és LL^T-felbontását!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

46. Adjuk meg az $\mathbf{A}$ mátrix LDL^T- és LL^T-felbontását!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

2.1.6. ILU-felbontás Gauss-eliminációval

47. Mi lesz az $\mathbf{A}$ mátrix J pozícióhalmazra illeszkedő részleges LU-felbontása? Határozzuk meg az $\mathbf{L}, \mathbf{U}$ és $\mathbf{Q}$ mátrixokat!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix} \qquad J = \{(1,3), (2,1), (2,3)\}$$

48. Mi lesz az $\mathbf{A}$ mátrix J pozícióhalmazra illeszkedő részleges LU-felbontása? Határozzuk meg az $\mathbf{L}, \mathbf{U}$ és $\mathbf{Q}$ mátrixokat!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad J = \{(3,1),(2,3)\}$$

49. Mi lesz az $\mathbf{A}$ mátrix J pozícióhalmazra illeszkedő részleges LU-felbontása? Határozzuk meg az $\mathbf{L}, \mathbf{U}$ és $\mathbf{Q}$ mátrixokat!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad J = \{(1,3),(2,3)\}$$

50. Mi lesz az $\mathbf{A}$ mátrix J pozícióhalmazra illeszkedő részleges LU-felbontása? Határozzuk meg az $\mathbf{L}, \mathbf{U}$ és $\mathbf{Q}$ mátrixokat!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 5 & 3 & 5 \\ 7 & 2 & 2 \end{bmatrix} \qquad J = \{(1,2),(1,3),(2,3)\}$$

51. Mi lesz az $\mathbf{A}$ mátrix J pozícióhalmazra illeszkedő részleges LU-felbontása? Határozzuk meg az $\mathbf{L}, \mathbf{U}$ és $\mathbf{Q}$ mátrixokat!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 3 & -4 \\ -3 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad J = \{(1,3),(2,4),(3,1),(3,4),(4,2)\}$$

2.1.7. QR-felbontás Gram–Schmidt-ortogonalizációval

52. Adjuk meg az $\mathbf{A}$ mátrix QR-felbontását Gram–Schmidt-ortogonalizációval!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 6 & 8 & 0 \\ 3 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

53. Adjuk meg az $\mathbf{A}$ mátrix QR-felbontását Gram–Schmidt-ortogonalizációval!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & -1 \\ 4 & 8 & 7 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

54. Adjuk meg az $\mathbf{A}$ mátrix QR-felbontását Gram–Schmidt-ortogonalizációval!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 5 & 7 & -2 \\ 0 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

55. Határozzuk meg az $\mathbf{A}$ mátrix QR-felbontását Gram–Schmidt-ortogonalizációval!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0,8 \\ 0 & 0 & 0,2 \\ 1 & 0,7 & 0,7 \end{bmatrix}$$

56. Határozzuk meg az $\mathbf{A}$ mátrix QR-felbontását Gram–Schmidt-ortogonalizációval! Oldjuk meg a feladatot kétféleképpen!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 2 & 12 & 0 \\ 1 & 12 & 3 \end{bmatrix}$$

57. Határozzuk meg az $\mathbf{A}$ mátrix QR-felbontását Gram–Schmidt-ortogonalizációval, használjuk az egyszerűsített módszert! Ne felejtsük el a végén a normálást!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 2 & 5 & 6 \\ 2 & 2 & 9 \end{bmatrix}$$

58. Határozzuk meg az $\mathbf{A}$ mátrix QR-felbontását Gram–Schmidt-ortogonalizációval, használja az egyszerűsített módszert! Ne felejtsük el a végén a normálást!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \\ 1 & 7 & 5 \end{bmatrix}$$

59. Határozzuk meg az $\mathbf{A}$ mátrix QR-felbontását Gram–Schmidt-ortogonalizációval, használjuk az egyszerűsített módszert! Ne felejtsük el a végén a normálást!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

60. Határozzuk meg az $\mathbf{A}$ mátrix QR-felbontását Gram–Schmidt-ortogonalizációval, használjuk az egyszerűsített módszert! Ne felejtsük el a végén a normálást!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & 7 & 6 \end{bmatrix}$$

2.1.8. Householder transzformáció

61. Householder transzformációval hozzuk az $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \end{bmatrix}^T$ vektort $k \cdot \mathbf{e_1}$ alakra! Végezzük el a transzformációt a transzformációs mátrix elemeinek kiszámítása nélkül!

62. Írjuk fel azt a Householder transzformációs mátrixot, amely az $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}^T$ vektort $k \cdot \mathbf{e_1}$ alakra hozza!

63. Írjuk fel azt a Householder-mátrixot, amely az $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ vektort $k \cdot \mathbf{e_1}$ alakra hozza! Mennyi lesz k értéke?

64. Írjuk fel azt a Householder-mátrixot, amely az $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}^T$ vektort $k \cdot \mathbf{e_1}$ alakra hozza! Mennyi lesz k értéke?

65. Householder transzformációval hozzuk az $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}^T$ vektort $k \cdot \mathbf{e_1}$ alakra!
Végezzük el a transzformációt a transzformációs mátrix elemeinek kiszámítása nélkül!

66. Householder transzformációval hozzuk az $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ vektort $k \cdot \mathbf{e_1}$ alakra!
Végezzük el a transzformációt a transzformációs mátrix elemeinek kiszámítása nélkül!

67. Adjuk meg azt a Householder transzformációt, mely az $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$ vektort $k \cdot \mathbf{e_1}$ alakra hozza és végezzük is el a transzformációt a vektoron! (A mátrixot nem kell előállítani.)

68. Adjuk meg azt a Householder transzformációt(a Householder-mátrix elemeit nem kell felírni), amely az $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}^T$ vektort $k \cdot \mathbf{e_1}$ alakra hozza!
Alkalmazzuk a vektorra a transzformációt!

69. Adjuk meg azt a Householder transzformációt(a Householder-mátrix elemeit nem kell felírni), amely az $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}^T$ vektort $k \cdot \mathbf{e_1}$ alakra hozza!
Alkalmazzuk a vektorra a transzformációt!

70. Írjuk fel azt a Householder-mátrixot, amely az $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}^T$ vektort $k \cdot \mathbf{e_1}$ alakra hozza, majd alkalmazzuk a mátrixra a transzformációt! Mennyi lesz k értéke?

71. Írjuk fel azt a Householder transzformációt, amely az $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ vektort $k \cdot \mathbf{e_1}$ alakra hozza! Végezzük el a transzformációt $\mathbf{a}$-n, a transzformációs mátrix elemeinek kiszámítása nélkül!

72. Householder transzformációk felhasználásával hozzuk felsőháromszög alakra a $\mathbf{Cx} = \mathbf{d}$ lineáris egyenletrendszert és oldjuk meg!

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{d} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

73. Householder transzformációkkal hozzuk felső háromszög alakra a $\mathbf{C}$ mátrixot!

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

74. A $\mathbf{D}$ mátrixot Householder transzformációkkal hozzuk felső háromszög alakra!

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

75. Oldjuk meg az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszert, ha az $\mathbf{A}$ mátrixnak adott a QR-felbontása.
(Az $\mathbf{A}$ mátrix előállítása nélkül, $\mathbf{Q}$ és $\mathbf{R}$ felhasználásával oldjuk meg a feladatot.)

$\mathbf{Q} = \mathbf{H}(\mathbf{v})$, a $\mathbf{v} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}^T$ által meghatározott Householder-mátrix,

Vissza a tartalomhoz

$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 5 & 11 & -4 \end{bmatrix}^T$ és

$$\mathbf{R} = 9 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

2.2. Megoldások

2.2.1. Gauss-elimináció és determináns meghatározása

1. Az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ lineáris egyenletrendszer megoldására a Gauss-eliminációt használjuk fel. Az elimináció lényege, hogy felsőháromszög alakú lineáris egyenletrendszert hozunk létre. A k. lépésben mindig a k. egyenlettel nullázzuk (elimináljuk) az x_k ismeretlent a $(k+1)$. $-$ n. egyenletekből.

Az eliminációs lépéseket a mátrix elemein és az egyenletrendszer jobboldalán ($\mathbf{b}$ vektoron) is el kell végeznünk. Azért, hogy az eliminációs lépéseket könnyen el tudjuk végezni a jobboldalon is, vezessük be az úgynevezett bővített mátrixos jelölést. Ez azt jelenti, hogy az együttható mátrixhoz "hozzáragasztjuk" a jobboldalt reprezentáló $\mathbf{b}$ vektort.

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & -1 & 3 & 3 \\ -1 & 3 & 1 & 6 \end{array}\right]$$

Az első oszlopban kezdjük az eliminációt. Az első sor változatlan marad. A mátrix első oszlopában elimináljuk a főátlóbeli elem ($a_{11} = 1$) alatti elemeket. Fentről lefelé haladva végezzük az eliminációs lépéseket. Először a mátrix $a_{21} = 2$ elemét elimináljuk az első sor segítségével.

1. lépés: Az eliminációs lépésben a 2. sorból kivonjuk az első sor 2-szeresét, tehát
2. sor - $(2) \cdot 1$. sor.

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 4 \\ \boxed{2} & -1 & 3 & 3 \\ -1 & 3 & 1 & 6 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 4 \\ \boxed{0} & -5 & 5 & -5 \\ -1 & 3 & 1 & 6 \end{array}\right]$$

Majd a 3. sorban található $a_{31} = -1$ elemet kell eliminálnunk az 1. sor segítségével. Tehát a 3. sorból kivonjuk az 1. sor (-1)-szeresét, azaz hozzáadjuk az 1-szeresét
3. sor $+ (1) \cdot 1$. sor.

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ \boxed{-1} & 3 & 1 & 6 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ \boxed{0} & 5 & 0 & 10 \end{array}\right]$$

Ezzel az első oszlopban a főátlóbeli elem alatti elemeket elimináltuk a mátrixból.

2. lépés: A második oszlopban található főátlóbeli elemek alatt kell eliminálnunk. Ennek megfelelően a jelenlegi mátrix esetén ez egyetlen elem ($a_{23} = 5$) eliminációját jelenti.
3. sor $+ (1) \cdot 2$. sor.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & \boxed{5} & 0 & 10 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & \boxed{0} & 5 & 5 \end{array}\right]$$

Általánosságban egy nxn-es mátrix esetén $n-1$ oszlopban kell eliminálnunk és a j-ik oszlopban az $a_{j+1,j}, ..., a_{n,j}$ elemeket kell eliminálnuk.

Ezzel megkaptuk a célul kitűzött felsőháromszög alakú együttható mátrixunkat. A lineáris egyenletrendszer megoldását elemi úton, visszahelyettesítésekkel is meghatározhatjuk, de emellett bemutatunk egy egyszerű és könnyen automatizálható módszert is.

a) Megoldás visszahelyettesítéssel:
Alulról felfelé haladva soronként kiszámoljuk az ismeretleneket. Tehát ennek megfelelően az utolsó sorból indulva az x_3 értékét számítjuk ki a következőképpen.

$$5x_3 = 5 \Longrightarrow \boxed{x_3 = 1}$$

Ennek segítségével meghatározzuk a következő, vagyis a 2. sor egyetlen ismeretlen értékét az x_2-t.

$$-5x_2 + 5 \cdot 1 = -5 \Longrightarrow \boxed{x_2 = 2}$$

Innen pedig az első sorba visszahelyettesítve kapjuk x_1 értékét az alábbiak szerint.

$$x_1 + 2 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 = 4 \Longrightarrow \boxed{x_1 = 1}$$

Vagyis a keresett megoldás a következő.

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

b) Sorműveletek segítségével diagonális alakra hozzuk a mátrixot:
A módszer lényege abban áll, hogy a Gauss-elimináció végeredményeként kapott mátrixot sorműveletek segítségével egységmátrixszá alakítjuk. Ez az alak azért lesz kellemes a számunkra, mert ilyen formában a megoldás vektort a transzformációk elvégzése után egyszerűen le tudjuk olvasni. Ehhez a Gauss-eliminációhoz használt módszert alkalmazzuk "visszafelé". A metódust a mátrix utolsó oszlopában kezdjük, de még az elimináció előtt az adott oszlop főátlójában található elemet leosztjuk önmagával, hogy így biztosítsuk a főátlóban az egyest. Ezt követően a főátló feletti elemeket elimináljuk.

Tehát ennek megfelelően a 3. sort végigosztjuk 5-tel, majd pedig a 2. és az 1. sorokban elimináljuk a főátlóbeli elem ($a_{33} = 5$) feletti elemeket a következőképpen.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & \boxed{5} & 5 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & -5 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \end{array}\right]$$

Ezt követően a 2. sort végigosztjuk (-5)-tel, majd pedig az 1. sorban elimináljuk a főátlóbeli elem (a_{22}) feletti elemet ($a_{12} = 2$) a következőképpen.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & \boxed{-5} & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Vagyis a keresett megoldás könnyen leolvasható.

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2. Az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ lineáris egyenletrendszer megoldását Gauss-elimináció segítségével az előző feladatban részletesen bemutattuk, így a továbbiakban csak a legfontosabb részleteket, illetve az esetleges újdonságokat mutatjuk be.

1. lépés: Az első oszlopban a 2. sorhoz hozzáadjuk az első sor 1-szeresét, illetve a 3. sorból kivonjuk az első sor 3-szorosát, tehát
2. sor + $(1) \cdot 1$. sor.
3. sor - $(3) \cdot 1$. sor.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 5 & 9 \\ \boxed{1} & -1 & 3 & 2 \\ \boxed{3} & -6 & -1 & 25 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 5 & 9 \\ \boxed{0} & 1 & -2 & -7 \\ \boxed{0} & 0 & -16 & -2 \end{array}\right]$$

2. lépés: A következő lépésben a 2. sorban kell a főátló alatti elemeket eliminálnunk, de a példánkban szerencsére nulla került az a_{23} pozícióba, így nincs szükség az eliminációra. Ezzel elkészült a felső háromszögmátrix.

Sorműveletek segítségével diagonális alakra hozzuk a mátrixot. Az eliminációt nem kell feltétlenül az utolsó oszlopban kezdenünk, hiszen előfordulhat, hogy másik oszlop esetén egyszerűbb a kézi számolás. Fontos megjegyezni, hogy a felső háromszögmátrix kialakítása esetén ez az egyszerűsítés nem használható! A mostani példában a 2. oszlopban kezdjük az eliminációt.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \boxed{-2} & 5 & 9 \\ 0 & 1 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & -16 & -2 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \boxed{0} & 1 & -5 \\ 0 & 1 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & -16 & -2 \end{array}\right]$$

Ezt követően az utolsó oszlopban kell eliminálnunk, vagyis a 3. sort leosztjuk (-16)-tal, majd pedig az így kapott új 3. sor 2-szeresét hozzáadjuk a 2. sorhoz, illetve a 3. sor (-1)-szeresét hozzáadjuk az 1. sorhoz.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \boxed{1} & -5 \\ 0 & 1 & \boxed{-2} & -7 \\ 0 & 0 & -16 & -2 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \boxed{0} & \frac{-41}{8} \\ 0 & 1 & \boxed{0} & \frac{-54}{8} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{8} \end{array}\right]$$

Tehát az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ lineáris egyenletrendszer megoldása a következő.

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \frac{-41}{8} \\ \frac{-54}{8} \\ \frac{1}{8} \end{bmatrix}$$

3. A korábban már bemutatott módszer lépéseit követve kapjuk az alábbi megoldást.

1. lépés:
2.sor + $(-2) \cdot$ 1.sor.
3.sor + $(+1) \cdot$ 1.sor.

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & 1 \\ \boxed{2} & 1 & 1 & -3 \\ \boxed{-1} & 2 & -2 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \mathbf{A}' = \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & 1 \\ \boxed{0} & 5 & -5 & -5 \\ \boxed{0} & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Az első lépés után szerencsére megkaptuk a felső háromszögmátrixot.
Mivel a Gauss-elimináció során csak sorműveleteket végeztünk, melyek nem változtatják meg a mátrix determinánsát, így a kapott felső háromszögmátrix ($\mathbf{A}'$) determinánsa megegyezik az eredeti ($\mathbf{A}$) mátrix determinánsával. A felső háromszög alakú mátrixok determinánsa a főátlóbeli elemek szorzata.

$$\det(\mathbf{A}') = a_{11} \cdot a'_{22} \cdot a'_{33} = 1 \cdot 5 \cdot 1 = 5.$$

Ezt követően a egyenletrendszer megoldásához szükséges diagonális alakot állítjuk elő.

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Tehát az egyenletrendszer megoldása:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

4. A korábbi feladatokhoz hasonlóan a megoldás lépései a következők.

1. lépés:
2.sor + $(\frac{5}{2}) \cdot$ 1.sor.
3.sor + $(\frac{4}{2}) \cdot$ 1.sor.

2. lépés:
3.sor - $(\frac{9}{20}) \cdot$ 2.sor.

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 2 & -6 & 0 & 2 \\ -5 & -5 & -7 & -6 \\ -4 & 3 & -1 & 7 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} 2 & -6 & 0 & 2 \\ 0 & -20 & -7 & -1 \\ 0 & -9 & -1 & 11 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} 2 & -6 & 0 & 2 \\ 0 & -20 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{43}{20} & \frac{229}{20} \end{array}\right]$$

Innen a determináns:

$$\det(\mathbf{A}) = 2 \cdot (-20) \cdot \frac{43}{20} = -86.$$

Most diagonális alakra hozzuk a mátrixot.

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 2 & -6 & 0 & 2 \\ 0 & -20 & 0 & \frac{1560}{43} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{229}{43} \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} 2 & -6 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{78}{43} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{229}{43} \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & -\frac{191}{43} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{78}{43} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{229}{43} \end{array}\right]$$

Az egyenletrendszer megoldása

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -\frac{191}{43} \\ -\frac{78}{43} \\ \frac{229}{43} \end{bmatrix}.$$

5. Előfordulhat olyan eset, amikor egy adott eliminációs lépés után a soron következő diagonális elem nullává válik. Ilyen esetben megakad a Gauss-elimináció. Az ismeretlenek, vagy az egyenletek felcserélésével elérhetjük, hogy az imént említett nulla helyére egy nem nulla elem kerüljön. Erre két eljárás is ismert.

Részleges főelemkiválasztás

Az adott k. oszlopban az $a_{k,k}, a_{k+1,k}, ..., a_{n,k}$ elemek közül megkeressük a legnagyobb abszolút értékűt és a sorát felcseréljük a k. sorral. Így a hibaszámításnál tanultak szerint a kis számmal való osztás elkerülhető, melyről tudjuk, hogy növeli a hibát. Azonban így is előfordulhat, hogy a sorcserével a probléma nem oldható meg, ekkor az úgynevezett teljes főelemkiválasztást kell alkalmazni.

Teljes főelemkiválasztás

A k-tól n-ig terjedő sorok és oszlopok által meghatározott mátrixrészben megkeressük a legnagyobb abszolút értékű elemet. A sorát felcseréljük a k. sorral, az oszlopát a k. oszloppal. Így a hibaszámításnál tanultak szerint a kicsi számmal való osztás elkerülhető. A legnagyobb abszolút értékűvel való osztás az osztáskor keletkező abszolút hibát minimalizálja. Az oszlopcserékre figyelni kell, mert a megoldásvektor megfelelő komponenseinek cseréjét vonja maga után. Ha még így is elakad a Gauss-elimináció, akkor $rang(A) < n$. A $\mathbf{b}$ jobboldal megfelelő koordinátáinak értékétől függően vagy nincs megoldása, vagy végtelen sok megoldása van az egyenletrendszernek.

Fontos megjegyezni, hogy a sorcserék és oszlopcserék esetén a determináns értékét korrigálnunk kell a sorok és oszlopok cseréjében lévő inverziók együttes számával. Általános alak a determináns meghatározására

$$\det(\mathbf{A}) = a_{11}^{(0)} \cdot a_{22}^{(1)} \cdot ... \cdot a_{nn}^{(n-1)} \cdot (-1)^i,$$

ahol az i az inverziók számát jelöli.

1. lépés: A részleges főelemkiválasztáshoz megkeressük a mátrix első oszlopában a diagonális alatti elemek közül az abszolút értékben legnagyobbat. Vagyis keressük a $\max\{|a_{11}|, |a_{21}|, |a_{31}|\}$ értékét. Mivel

$$\max\{|a_{11}|, |a_{21}|, |a_{31}|\} = \max\{2, 4, 2\} = 4,$$

így az a_{21}-et kell cserélni az a_{11}-gyel. Ezt az 1. és 2. sor cseréjével tudjuk megtenni.
Ne feledjük, hogy a sorcsere a jobboldalra is vonatkozik!

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 4 & 7 & 1 \\ 2 & 5 & 9 & 3 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 4 & 7 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 9 & 3 \end{array}\right]$$

Ezt követően a Gauss-elimináció első lépését kell végrehajtanunk az átrendezett rendszeren, vagyis:
2. sor$-(\frac{2}{4}) \cdot$ 1. sor
3. sor$-(\frac{2}{4}) \cdot$ 1 .sor

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 4 & 7 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 9 & 3 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 4 & 7 & 1 \\ 0 & -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 3 & \frac{11}{2} & \frac{5}{2} \end{array}\right]$$

2. lépés: A következő lépés ismét a részleges főelemkiválasztás, amelyet a soron következő oszlopon kell végrehajtani, vagyis abszolút maximumot kell keresni, tehát

$$\max\{|a_{22}^{(1)}|, |a_{32}^{(1)}|\} = \max\{1, 3\} = 3.$$

Ez azt jelenti, hogy meg kell cserélnünk a 2. és 3. sort. Ezt követően el kell végeznünk a Gauss-elimináció következő lépését.

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 4 & 4 & 7 & 1 \\ 0 & 3 & \frac{11}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} 4 & 4 & 7 & 1 \\ 0 & 3 & \frac{11}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & \frac{4}{3} \end{array}\right]$$

Ezzek elértük a felső háromszög alakot. A determináns meghatározásakor - ahogy azt már fentebb említettük - figyelnünk kell a sorcserékre. Mivel két szomszédos sorcsere történt, így a determináns értékének meghatározásakor korrigálnunk kell az inverziók számával, vagyis 2-vel

$$\det(\mathbf{A}) = 4 \cdot 3 \cdot \frac{4}{3} \cdot (-1)^2 = 16.$$

Most már csak az egyenletrendszer megoldásának meghatározása van hátra.

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 4 & 4 & 7 & 1 \\ 0 & 3 & \frac{11}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & \frac{4}{3} \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Tehát az egyenletrendszer megoldása

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

6. Az előző példában látott módszer segítségével oldjuk meg ezt a feladatot.
1. lépés: Látható, hogy az $a_{11} = 0$, ezért szükséges a részleges főelemkiválasztás. Mivel

$$\max\{|a_{11}|, |a_{21}|, |a_{31}|\} = \max\{0, 2, 4\} = 4,$$

ezért $a_{31} = (-4)$-et kell becserélni az $a_{11} = 0$ helyére.

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 0 & 7 & -8 & 3 \\ 2 & 4 & -5 & 1 \\ -4 & -6 & 5 & 9 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} -4 & -6 & 5 & 9 \\ 2 & 4 & -5 & 1 \\ 0 & 7 & -8 & 3 \end{array}\right]$$

Ezt követően a 2. sorhoz hozzáadjuk az első sor $\frac{2}{4}$-ét.

$$\left[\begin{array}{rrr|r} -4 & -6 & 5 & 9 \\ 2 & 4 & -5 & 1 \\ 0 & 7 & -8 & 3 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} -4 & -6 & 5 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{2} & \frac{11}{2} \\ 0 & 7 & -8 & 3 \end{array}\right]$$

2. lépés: Folytatva a részleges főelemkiválasztást, mivel

$$\max\{|a_{22}^{(1)}|, |a_{23}^{(1)}|\} = \max\{1, 7\} = 7,$$

a 3. sort és a 2. sort fel kell cserélni.

$$\left[\begin{array}{rrr|r} -4 & -6 & 5 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{2} & \frac{11}{2} \\ 0 & 7 & -8 & 3 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} -4 & -6 & 5 & 9 \\ 0 & 7 & -8 & 3 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{2} & \frac{11}{2} \end{array}\right]$$

Ezt követően a 3. sorhoz hozzáadjuk a 2. sor $\left(-\frac{1}{7}\right)$-szeresét.

$$\left[\begin{array}{rrr|r} -4 & -6 & 5 & 9 \\ 0 & 7 & -8 & 3 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{2} & \frac{11}{2} \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} -4 & -6 & 5 & 9 \\ 0 & 7 & -8 & 3 \\ 0 & 0 & -\frac{19}{14} & \frac{71}{14} \end{array}\right]$$

A determináns értéke a sorokra vonatkozó $(3, 1, 2)$ sorrendet figyelembe véve (melyben 2 az inverziók száma)

$$\det(\mathbf{A}) = (-4) \cdot 7 \cdot (-\frac{19}{14}) \cdot (-1)^2 = 38.$$

Ezt követően diagonális alakra hozzuk a mátrixot és meghatározzuk a lineáris egyenletrendszer megoldását.

$$\left[\begin{array}{rrr|r} -4 & -6 & 5 & 9 \\ 0 & 7 & -8 & 3 \\ 0 & 0 & -\frac{19}{14} & \frac{71}{14} \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} -4 & -6 & 0 & \frac{526}{19} \\ 0 & 7 & 0 & -\frac{511}{19} \\ 0 & 0 & -\frac{19}{14} & \frac{71}{14} \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} -4 & 0 & 0 & \frac{526}{19} \\ 0 & 7 & 0 & -\frac{511}{19} \\ 0 & 0 & -\frac{19}{14} & \frac{71}{14} \end{array}\right]$$

Tehát az egyenletrendszer megoldása:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & -\frac{22}{19} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{73}{19} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{71}{19} \end{array}\right] \mathbf{x} = \begin{bmatrix} -\frac{22}{19} \\ -\frac{73}{19} \\ -\frac{71}{19} \end{bmatrix}.$$

7. A feladat megoldásához a teljes főelemkiválasztás módszerét használjuk fel. Tehát első lépésként a teljes **A** mátrixban abszolút maximumot kell keresnünk. Figyelem, csak az **A** mátrixban kell az abszolút maximumot keresnünk, tehát a kiegészített mátrix **b** vektorhoz tartozó részében nem!

1. lépés: Mivel

$$\max_{i,j=1}^{n}\{|a_{ij}|\} = 3,$$

nem csak egy a_{ij} elemre teljesül, ezért ebben az esetben tetszőlegesen választhatunk közülük. A példa szemléletességét megtartva az a_{22} elemet választjuk és ezt cseréljük az a_{11} helyére. Ehhez egy oszlopcserére és egy sorcserére lesz szükség, vagyis az 1. és a 2. sort felcseréljük, majd ezt követően az 1. és a 2. oszlopot is megcseréljük.

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 8 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 8 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} 3 & 2 & 1 & 5 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 8 \end{array}\right]$$

Ily módon a mátrixot megfelelő alakra hoztuk, tehát végrehajthatjuk a Gauss-elimináció 1. lépését.
2. sor $+ \left(\frac{1}{3}\right) \cdot$ 1. sor
3. sor $- \left(\frac{1}{3}\right) \cdot$ 1. sor

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 3 & 2 & 1 & 5 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 8 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} 3 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & \frac{5}{3} & \frac{7}{3} & \frac{14}{3} \\ 0 & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} & \frac{14}{3} \end{array}\right]$$

2. lépés: Ismét a teljes főelemkiválasztás következik, de arra figyeljünk, hogy most már csak egy $(n-1)\times(n-1)$-es , vagyis jelen esetben egy 2×2-es részmátrixon kell csak ezt az abszolút maximumot megkeresnünk. Így

$$\max\{|a_{22}^{(1)}|, |a_{23}^{(1)}|, |a_{32}^{(1)}|, |a_{33}^{(1)}|\} = \frac{7}{3}.$$

Tehát jelen esetben csak egy oszlopcserére lesz szükség, hiszen a felcserélendő elemek egy sorban helyezkednek el, vagyis a 2. oszlopot és a 3. oszlopot kell felcserélnünk. A cserét követően elvégezzük a Gauss-elimináció következő lépését.

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 3 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & \frac{5}{3} & \frac{7}{3} & \frac{14}{3} \\ 0 & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} & \frac{14}{3} \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} 3 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & \frac{7}{3} & \frac{5}{3} & \frac{14}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{5}{3} & \frac{14}{3} \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} 3 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & \frac{7}{3} & \frac{5}{3} & \frac{14}{3} \\ 0 & 0 & \frac{10}{7} & 4 \end{array}\right]$$

Ezzel elkészült a felső háromszögmátrix, így ezen a ponton könnyedén meghatározhatjuk a mátrix determinánsát. Mivel az inverziók száma 3, hiszen volt egy szomszédos sor cserénk és két szomszédos oszlopcserénk, így a determináns:

$$\det(\mathbf{A}) = 3 \cdot \frac{7}{3} \cdot \frac{10}{7} \cdot (-1)^3 = -10.$$

Most már csak az ismeretlenek meghatározása van hátra. Visszahelyettesítést követően az alábbi eredményt kapjuk

$$x_1 = \frac{14}{5}, \quad x_2 = -\frac{1}{5}, \quad x_3 = 0.$$

8. Az előző példákban már ismertetett Gauss-elimináció segítségével különböző jobboldalú, azonos mátrixú egyenletrendszerek megoldására is van lehetőség. Ilyen esetben a mátrix mellé írjuk a különböző jobboldalakat és az eliminációs lépéseket így hajtjuk végre.

$$\mathbf{A}|\mathbf{b_1}\mathbf{b_2}$$

1. lépés:
2. sor $+ (-2)\cdot 1$. sor
3. sor $+ (-3)\cdot 1$. sor
4. sor $+ (-1)\cdot 1$. sor

$$\left[\begin{array}{rrrr|rr} 1 & -1 & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & -1 & 5 & 5 \\ 3 & 2 & 3 & 0 & 8 & 8 \\ 1 & 4 & -1 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{rrrr|rr} 1 & -1 & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 5 & -3 & -3 & -1 & -1 \\ 0 & 5 & -3 & -3 & -1 & -1 \\ 0 & 5 & -3 & -3 & -1 & -3 \end{array}\right]$$

2. lépés:
3. sor $+ (-1)\cdot 2$. sor
4. sor $+ (-1)\cdot 2$. sor

$$\left[\begin{array}{rrrr|rr} 1 & -1 & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 5 & -3 & -3 & -1 & -1 \\ 0 & 5 & -3 & -3 & -1 & -1 \\ 0 & 5 & -3 & -3 & -1 & -3 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{rrrr|rr} 1 & -1 & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 5 & -3 & -3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

Mivel a 3. oszlop és 3. sor által meghatározott részmátrixban csak nulla elemek vannak, így a teljes főelemkiválasztás sem segít a továbblépésben. Mivel a $\mathbf{b_1}$ jobboldal esetén a "nullás" sorokhoz nulla érték tartozik, ami azt jelenti, hogy azonosságot kaptunk, így ebben az esetben az $\mathbf{Ax_1} = \mathbf{b_1}$ egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van. Ezzel szemben a $\mathbf{b_2}$ jobboldal esetén van nem nulla érték a "nullás" sorokhoz tartozóan, ami azt jelenti, hogy ellentmondáshoz jutottunk, így nincs megoldása az $\mathbf{Ax_2} = \mathbf{b_2}$ lineáris egyenletrendszernek.

Tehát azt érdemes megjegyeznünk, hogy a Gauss-elimináció során eldől, hogy megoldható-e a lineáris egyenletrendszer vagy sem.

9. Az általános megoldás meghatározásához először néhány konkrét lépését végezzük el a Gauss-eliminációnak.

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ \boxed{-1} & 1 & 0 & \dots & 0 & \boxed{1} \\ 0 & -1 & 1 & \dots & 0 & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 1 & (-1)^n \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ \boxed{0} & 1 & 0 & \dots & 0 & \boxed{0} \\ 0 & -1 & 1 & \dots & 0 & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 1 & (-1)^n \end{array}\right] \longrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{-1} & 1 & \dots & 0 & \boxed{-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 1 & (-1)^n \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{0} & 1 & \dots & 0 & \boxed{-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 1 & (-1)^n \end{array}\right]$$

Az első pár lépés után láthatjuk, hogy a mátrix bidiagonális volta miatt hogyan alakul az általános $(k-1)$. lépés utáni alak. A mátrix első k sora az egységmátrix első k sora, míg a jobboldali vektor első k komponensében a (-1) és 0 váltakozik. A k. komponens (-1), ha k páratlan és 0, ha k páros.
Végezzük el a k. eliminációs lépést, vagyis a $k+1$. sorhoz hozzáadjuk a k. sort, ezzel teljesen kinullázva a k. oszlopot. Nézzük meg, hogy ez a jobboldalra milyen hatással van.

páratlan k esetén: a $\mathbf{b}$ vektor $k+1$. helyén $1 + (-1) = 0$ lesz.
páros k esetén: a $\mathbf{b}$ vektor $k+1$. helyén $(-1) + 1 = -1$ lesz.

Látjuk, hogy a k. lépés utáni állapot formailag megegyezik a $(k-1)$. lépés utáni állapottal. Az így kapott mátrixot láthatjuk a sorok számozásával.

$$\begin{array}{r} 1. \\ 2. \\ \vdots \\ k. \\ k+1. \\ \vdots \\ n. \end{array} \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \dots & \dots & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ \vdots & 0 & \boxed{-1} & 1 & \dots & 0 & \boxed{1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 & (-1)^n \end{array}\right] \longrightarrow \begin{array}{r} 1. \\ 2. \\ \vdots \\ k. \\ k+1. \\ \vdots \\ n. \end{array} \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \dots & \dots & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ \vdots & 0 & \boxed{0} & 1 & \dots & 0 & \boxed{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 & (-1)^n \end{array}\right]$$

Tehát végeredményben a $\mathbf{b}$ vektor a következő alakú lesz

páratlan n esetén:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 & \dots & -1 \end{bmatrix}^T$$

páros n esetén:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}^T.$$

10. Az általános megoldás meghatározásához a Gauss-elimináció első néhány lépését végezzük el.

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ \boxed{1} & 1 & 0 & \dots & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ \boxed{0} & 1 & 0 & \dots & 0 & \boxed{0} \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & \boxed{1} \\ 0 & \boxed{1} & 1 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{0} & 1 & \dots & 0 & \boxed{1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Az első két lépést követően már jól látjuk a szabályosságot. Tehát $k = 1$ és $k = 2$ esetére látjuk, hogy a $\mathbf{b}$ vektor hogyan is alakul. Tegyük fel, hogy a $(k-1)$. lépés után is igaz ez a szabályosság. Nézzük meg k. lépést, vagyis a $k+1$. sorból vonjuk ki a k. sort, ezáltal a k. oszlopot kinulláztuk.

páratlan k esetén: a $\mathbf{b}$ vektoron is elvégezve a műveletet, a $k+1$. elem $1-1=0$ lesz.
páros k esetén: csak annyi a különbség, hogy a vektorban a k. helyen 0 található, ezért a $k+1$. elem $1+0=1$ marad.

$$\begin{array}{r} 1. \\ 2. \\ \vdots \\ k. \\ k+1. \\ \vdots \\ n. \end{array} \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \dots & \dots & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & 0 & \boxed{1} & 1 & \dots & 0 & \boxed{1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \begin{array}{r} 1. \\ 2. \\ \vdots \\ k. \\ k+1. \\ \vdots \\ n. \end{array} \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \dots & \dots & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & 0 & \boxed{0} & 1 & \dots & 0 & \boxed{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Tehát végeredményben a $\mathbf{b}$ vektor a következő alakú lesz

n páratlan esetén:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}^T$$

n páros esetén:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}^T.$$

2.2.2. Mátrix inverz meghatározása

11. Az inverz meghatározására számtalan módszer áll a rendelkezésünkre, de ezek a módszerek nehezen automatizálhatóak vagy olykor igen sok számítást igényelnek. Egy egyszerű és könnyen elsajátítható eljárást fogunk megismerni a következő példák megoldása során. A Gauss-eliminációt fogjuk alkalmazni mátrix inverz meghatározására.

Kezdjük egy rövid elméleti áttekintéssel. Az $\mathbf{A}$ mátrix inverzét az $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$ összefüggésből határozhatjuk meg. Ez azt jelenti, hogy keresnünk kell egy olyan $\mathbf{X}$ mátrixot, amelyre igaz az alábbi mátrixegyenlet

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{I}.$$

Vezessük be a következő jelöléseket.

$$\mathbf{X} = (\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, ..., \mathbf{x_n}), \quad \mathbf{I} = (\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, ..., \mathbf{e_n})$$

Blokkos mátrix szorzással ellenőrizhető, hogy az imént említett mátrixegyenlet valójában n darab lineáris egyenletrendszer.

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{x_1} &= \mathbf{e_1} \\ \mathbf{A} \cdot \mathbf{x_2} &= \mathbf{e_2} \\ &\vdots \\ \mathbf{A} \cdot \mathbf{x_n} &= \mathbf{e_n} \end{aligned}$$

Vegyük észre, hogy ez nem más mint n darab $\mathbf{A}$ mátrixú lineáris egyenletrendszer. Ahogy azt már korábban említettük erre a típusú problémára nagyon jól alkalmazható megoldást ad a Gauss-elimináció, hiszen a jobboldal vektorokat egymás mellé írva, csak egyszer kell a mátrixon eliminálnunk. Most nézzük meg, hogy ez hogyan is működik a gyakorlatban.

1. lépés: Írjuk fel a jobboldalakkal kiegészített bővített mátrixunkat, majd pedig végezzük el rajta a Gauss-elimináció első lépését. Az első lépés során a következő sorműveleteket kell elvégeznünk.
2. sor + $(-2) \cdot$ 1. sor
3. sor + $(+1) \cdot$ 1. sor

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 5 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

2. lépés: A 2. oszlopban kell eliminálnunk, tehát a megfelelő sorművelet a következő.
3. sor + $(-\frac{6}{2}) \cdot$ 2. sor

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 7 & -3 & 1 \end{array}\right]$$

Így megkaptuk a felső háromszög alakot, ahonnan könnyedén le tudjuk olvasni a mátrix determinánsát.

$$\det(\mathbf{A}) = 1 \cdot 2 \cdot (-1) = -2$$

Folytatva a mátrix inverz meghatározását, ezt követően sorműveletek segítségével diagonális alakra hozzuk a mátrixot.

3. sor $\cdot(-1)$
1. sor $+ (-1) \cdot$ 3. sor

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 7 & -3 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 8 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & 3 & -1 \end{array}\right]$$

2. sor $\cdot\frac{1}{2}$
1. sor $+ (-1) \cdot$ 2. sor

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 8 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & 3 & -1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 9 & -\frac{7}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & 3 & -1 \end{array}\right]$$

Vagyis az **A** mátrix inverze könnyen leolvasható.

$$\mathbf{A^{-1}} = \begin{bmatrix} 9 & -\frac{7}{2} & 1 \\ -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ -7 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

12. A megoldás során az előző feladatban látott eljárást alkalmazzuk.
1. lépés:
2. sor + 1. sor

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

2. lépés: Látjuk, hogy elakad a hagyományos Gauss-elimináció, ezért szükséges egy sorcsere, vagyis ennek megfelelően a 2. és a 3. sort megcseréljük. A sorcsere nem befolyásolja az inverz mátrixot, de a determináns értékét igen.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Sorcserét követően megkaptuk a felső háromszögmátrixot. Vagyis meghatározhatjuk a mátrix determinánsának értékét, figyelve a sorcsere miatti 1 inverziószámra.

$$\det(\mathbf{A}) = 1 \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1)^1 = -1$$

Sorműveletekkel diagonális alakra hozzuk a mátrixot.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

Tehát az **A** mátrix inverze

$$\mathbf{A^{-1}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

13. A megoldás során az előző feladatban látott eljárást alkalmazzuk.
1. lépés: 2. sor + 1. sor

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

2. lépés: 3. sor + $\frac{1}{3} \cdot$ 2. sor

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 \end{array}\right]$$

A felső háromszög alakból kiolvasva a determináns értékét, kapjuk hogy

$$\det(\mathbf{B}) = 1 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} = 2.$$

Sorműveletekkel diagonális alakra hozzuk a mátrixot.

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{array}\right]$$

Tehát a **B** mátrix inverze a következő.

$$\mathbf{B^{-1}} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

14. A megoldás során az előző feladatban látott eljárást alkalmazzuk.

1. lépés:	**2. lépés:**
2. sor + 1. sor 3. sor - 1. sor	3. sor + 2. sor

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

A felső háromszög alakból megkapjuk az alábbi determináns értéket

$$\det(\mathbf{A}) = 1 \cdot 2 \cdot 2 = 4.$$

Folytatva az eliminációt megkapjuk az **A** mátrix inverzét.

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

Tehát az **A** mátrix inverze a következő.

$$\mathbf{A^{-1}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

15. A mátrix méretével a számítások mennyisége ugyan megnő, de az eddig alkalmazott technika természetesen továbbra is működik. Ennek megfelelően a megoldás az alábbiak szerint alakul.

$$\left[\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

A következő lépésnél elakad a Gauss-elimináció, ezért sorcserét kell végrehajtanunk, a 2. és a 3. sort cseréljük meg. A sorcserét követően folytatjuk a Gauss-elimináció lépéseit.

$$\left[\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

Megkaptuk a felső háromszögmátrixot, innen a determináns a szonszédos sorok cseréje miatt a következőképpen alakul

$$\det(\mathbf{A}) = 1 \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot 4 \cdot (-1)^1 = -16.$$

Folytassuk a diagonális alakra hozást!

$$\left[\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 1 & 1 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & -2 & 0 & 0 & -\frac{2}{4} & -\frac{2}{4} & \frac{2}{4} & \frac{2}{4} \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -\frac{2}{4} & \frac{2}{4} & -\frac{2}{4} & \frac{2}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{array}\right] \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 1 & 0 & 0 & \frac{2}{4} & \frac{2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & -\frac{2}{4} & -\frac{2}{4} & \frac{2}{4} & \frac{2}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{array}\right]$$

Tehát az $\mathbf{A}$ mátrix inverze a következő:

$$\mathbf{A^{-1}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

16. Az általános megoldás meghatározásához először néhány lépést el kell végeznünk, hogy megsejtsük a megoldást. Ezt követően pedig indukcióval bebizonyítjuk a sejtést.

1. lépés:

$$\left[\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \boxed{1} & 1 & 0 & \dots & 0 & \boxed{0} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \boxed{1} & 1 & 1 & \dots & 0 & \boxed{0} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boxed{1} & 1 & 1 & \dots & 1 & \boxed{0} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \boxed{0} & 1 & 0 & \dots & 0 & \boxed{-1} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \boxed{0} & 1 & 1 & \dots & 0 & \boxed{-1} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boxed{0} & 1 & 1 & \dots & 1 & \boxed{-1} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array}\right]$$

2. lépés:

$$\left[\begin{array}{ccccc|ccccc}
1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0\\
0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -1 & 1 & 0 & \dots & 0\\
0 & \boxed{1} & 1 & \dots & 0 & -1 & \boxed{0} & 1 & \dots & 0\\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
0 & \boxed{1} & 1 & \dots & 1 & -1 & \boxed{0} & 0 & \dots & 1
\end{array}\right]
\longrightarrow
\left[\begin{array}{ccccc|ccccc}
1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0\\
0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -1 & 1 & 0 & \dots & 0\\
0 & \boxed{0} & 1 & \dots & 0 & -1 & \boxed{-1} & 1 & \dots & 0\\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
0 & \boxed{0} & 1 & \dots & 1 & -1 & \boxed{-1} & 0 & \dots & 1
\end{array}\right]$$

Innen megsejtjük, hogy az inverz egy olyan bidiagonális mátrix, ahol a főátlóban csupa 1-es szerepel és az átló alatti átlóban pedig (-1)-esek szerepelnek.
Tegyük fel, hogy a $(k-1)$. lépés után kapott alak első k sora is ilyen alakú illetve a jobboldali részen a k. oszlopban a $k. - n.$ pozíciókig (-1) áll.
Megmutatjuk, hogy a k. lépés után is ilyen alakú mátrixhoz jutunk. Mivel a k. oszlopban a $k.-n.$ pozíciókban 1-es áll, ezért a k. lépésben az i. sorból kivonjuk a k. sort $(i = k+1, \dots, n)$. Ez a jobboldali részmátrixon a $(k-1).$, $k.$ pozíciókon lévő $(-1, 0)$-ból kivonva a k. sor $(-1, 1)$-et $(0, -1)$-et kapunk.

$$\left[\begin{array}{cccccccc|cccccccc}
1 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0\\
0 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & -1 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0\\
0 & 0 & 1 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & -1 & 1 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0\\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & 0\\
0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 & 0 & \dots & 0\\
0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 & 1 & \dots & 0\\
0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & \ddots & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 & 0 & \ddots & 0\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & 0\\
0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 & 0 & \dots & 1
\end{array}\right] \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{cccccccc|cccccccc}
1 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0\\
0 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & -1 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0\\
0 & 0 & 1 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & -1 & 1 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0\\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & 0\\
0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 & 0 & \dots & 0\\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 1 & \dots & 0\\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 0 & \ddots & 0\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & 0\\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 0 & \dots & 1
\end{array}\right]$$

A fenti alakon nyomonkövethető, hogy a sejtésünk helytálló, tehát az $\mathbf{A}$ mátrix inverze a következő.

$$\mathbf{A^{-1}} = \begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0\\
-1 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0\\
0 & -1 & 1 & \dots & \dots & 0\\
\vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots\\
0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 1
\end{bmatrix}$$

17. Az általános megoldás meghatározásához először néhány lépést el kell végeznünk, hogy megsejtsük a megoldást. Ezt követően pedig indukcióval bebizonyítjuk a sejtést.

1. lépés:

$$\left[\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \boxed{2} & 1 & 0 & \dots & 0 & \boxed{0} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \boxed{0} & 1 & 0 & \dots & 0 & \boxed{-2} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array}\right]$$

2. lépés:

$$\left[\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \boxed{2} & 1 & \dots & 0 & 0 & \boxed{0} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \boxed{0} & 1 & \dots & 0 & \boxed{4} & \boxed{-2} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array}\right]$$

Mivel $\mathbf{A}$ bidiagonális mátrix, minden lépésben csak az elimináló sor alatti sorban kell eliminálnunk. Az a sejtésünk, hogy a $(k-1)$. lépés után a bal oldalon az első k sor az egységmátrix első k sorával egyezik, míg a jobboldalon az első k sorban a diagonálisban 1 szerepel, majd lefelé haladva a k. pozícióig (-2)-vel szorzódnak az elemek.

A k. sor jobboldali része: $[(-2)^k, \dots, (-2), 1, \underbrace{0}_{k+1.}, 0, \dots, 0]$.

A $(k+1)$. sor jobboldali része: $[0, \dots, 0, 0, \underbrace{1}_{k+1.}, 0, \dots, 0] = \mathbf{e}_{\mathbf{k+1}}^{\mathbf{T}}$.

A k. lépésben csak a $(k+1)$. sorban kell eliminálni, a $(k+1)$. sorból kivonjuk a k. sor 2-szeresét. Ezzel a $(k+1)$. sor baloldali része $\mathbf{e_{k+1}}^T$ alakú, míg a jobboldalon

$$\begin{array}{cccccccccccc} (-2)\cdot & [& (-2)^k & \dots & -2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 &] \\ + & [& 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 &] \\ \hline & [& (-2)^{k+1} & \dots & 4 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 &] \end{array}$$

Ezzel $k+1$-re olyan alakot kaptunk, amit k-ra megsejtettünk.
A főátló alatti átlóban lévő elemek megegyeznek, így az $\mathbf{A}$ mátrix inverze

$$\mathbf{A^{-1}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 4 & -2 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ (-2)^{n-1} & (-2)^{n-2} & \dots & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

18. Ebben a példában a korábbiaktól eltérően már rendelkezésünkre áll a felső háromszögmátrixú alak, így ebben az esetben "csak" sorműveletekkel diagonális alakra kell hoznunk a mátrixot.

Az eddigiekben megszokott módon elvégzünk néhány lépést az általános megoldás megsejtéséhez.

$$
\left[\begin{array}{cccccc|cccccc}
1 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\
0 & 1 & 1 & \dots & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\
0 & 0 & 1 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & \dots & \dots & 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 1 & 0 & 0 \\
0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 \\
0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 1
\end{array}\right] \longrightarrow
$$

$$
\longrightarrow \left[\begin{array}{cccccc|cccccc}
1 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\
0 & 1 & 1 & \dots & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\
0 & 0 & 1 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & \dots & \dots & 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 1 & 0 & 0 \\
0 & \dots & \dots & 0 & 1 & \boxed{0} & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & \boxed{-1} \\
0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 1
\end{array}\right] \longrightarrow
$$

$$
\longrightarrow \left[\begin{array}{cccccc|cccccc}
1 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\
0 & 1 & 1 & \dots & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\
0 & 0 & 1 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & \dots & \dots & 1 & \boxed{0} & 0 & 0 & \dots & \dots & 1 & \boxed{-1} & 1 \\
0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & -1 \\
0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 1
\end{array}\right]
$$

A mátrix speciális alakjából azt sejtjük, hogy a baloldalon egy felső háromszögmátrix alakul ki, mégpedig olyan formában, hogy a főátló feletti átlóban (-1) -esek e feletti átlóban újra 1 -esek, majd pedig e felett újra (-1) -esek és így tovább.

Tehát tegyük fel, hogy a $(k-1)$. lépésig igaz ez a sejtés, vagyis a jobboldali mátrixban jobb alsó $(k \times k)$-s mátrixára igaz az imént leírt struktúra. Mutassuk meg, hogy a k. lépésre is igaz. A $(k-1.)$ lépés után kapott mátrix

$$
\left[\begin{array}{cccccccc|cccccccc}
1 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\
0 & 1 & 1 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\
0 & 0 & 1 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & \dots & \dots & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & -1 & \dots & 1 \\
0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & -1 \\
0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & 1
\end{array}\right].
$$

Az $(n-k)$. sor jobboldali része: $[0, \dots, 0, \underbrace{1}_{n-k.}, 0, 0, \dots, 0]$.

Az $(n-k+1)$. sor jobboldali része: $[0, \dots, 0, \underbrace{0}_{n-k.}, 1, -1, \dots, (-1)^k]$.

Végezzük el a k. lépést, vagyis az $(n-k)$. sorból vonjuk ki az $(n-k+1)$. sort. A jobboldali részen elvégezve

$$\begin{array}{rl} & [0 \ \dots \ 0 \ 1 \quad 0 \quad 0 \ \dots \quad 0 \quad] \\ - & [0 \ \dots \ 0 \ 0 \quad 1 \ -1 \ \dots \ (-1)^k \quad] \\ \hline & [0 \ \dots \ 0 \ 1 \ -1 \quad 1 \ \dots \ (-1)^{k+1} \ ]. \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccccccc|cccccccc} 1 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 1 & -1 & 1 & \dots & -1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & -1 & \dots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & -1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array}\right]$$

Látjuk, hogy a k. lépés után kapott jobboldali mátrix $(k+1)\times(k+1)$-es jobbalsó részmátrixára is igaz maradt a sejtés, vagyis az $\mathbf{A}$ mátrix inverze a következő.

$$\mathbf{A^{-1}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & \dots \\ 0 & 1 & -1 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

2.2.3. *LU*-felbontás

19. $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix LU-felbontása azt jelenti, hogy keressük azt az $\mathbf{L}$ és $\mathbf{U}$ mátrixokat, melyekre teljesül, hogy $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$. Ebben a felbontásban az $\mathbf{L} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ alsó háromszögmátrix, mégpedig úgy, hogy a főátlóban rendre 1-es elemek helyezkednek el és $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ pedig egy felső háromszögmátrix. Egy $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mátrix esetén $\mathbf{L}$ és $\mathbf{U}$ mátrix alakja a következő.

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_1 & 1 & 0 \\ l_2 & l_3 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}$$

Lineáris egyenletrendszer megoldásához az $\mathbf{LU}$ felbontás egy újabb módszert ad a kezünkbe. Miért is jó az LU-felbontás egy lineáris egyenletrendszer megoldására?

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{ll} 1. & \mathbf{Ly} = \mathbf{b} \ \to \mathbf{y} \\ 2. & \mathbf{Ux} = \mathbf{y} \ \to \mathbf{x} \end{array}$$

Ebben az esetben az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ helyett az $\mathbf{Ly} = \mathbf{b}$, majd pedig az $\mathbf{Ux} = \mathbf{y}$ egyenletrendszert kell megoldanunk. Az LU-felbontás hátterében - mint azt majd látni fogjuk a további példák megoldása során - tulajdonképpen a Gauss-elimináció húzódik meg.

Éppen ezért érdemes megjegyezni, hogy az LU-felbontás létezik pontosan akkor, ha a Gauss-elimináció sor- és oszlopcsere nélkül elvégezhető. Az $\mathbf{LU}$ felbontást többféleképpen is előállíthatjuk. A példa megoldások során 3 alapvető módszert mutatunk be.

a) Előállítás $\mathbf{L_i}$ alsó háromszögmátrixok segítségével ($i = 1, \ldots, n-1$).

b) Előállítás Gauss-eliminációval párhuzamosan, tömörített alakkal.

c) Előállítás mátrixszorzás segítségével.

Először tekintsük végig a jelenlegi példán, hogyan készíthetjük el az LU-felbontást az $\mathbf{L_i}$ alsóháromszög mátrixok segítségével.

Az $\mathbf{L_i}$ ($i = 1, \ldots, n-1$) mátrixok segítségével a Gauss-elimináció egyes lépéseit valósítjuk meg. Tehát a Gauss-elimináció $k-1$. lépése után kapott $\mathbf{A_{k-1}}$ mátrixra a következő lépésben kapott $\mathbf{A_k}$ mátrixhoz eljuthatunk egy alkalmas $\mathbf{L_k}$ mátrix szorzás segítségével is.

$$\mathbf{A_k} = \mathbf{L_k} \cdot \mathbf{A_{k-1}}$$

Ennek megfelelően a Gauss-elimináció k. lépését szeretnénk reprezentálni. Minden lépésben az előző lépésben kapott mátrixból indulunk ki.

k. lépés: Az $\mathbf{L_k}$ számítása a következőképpen történik. Vegyük az $\mathbf{I} \in \mathbb{R}^{nxn}$ egységmátrixot és módosítsuk azt a k. oszlopában úgy, hogy a diagonális alatt lévő $-l_{k+1,k}, \ldots, -l_{nk}$ értékek rendre a

$$-\frac{a_{k+1,k}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}, \ldots, -\frac{a_{nk}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}$$

hányadosok legyenek, tehát $l_{ik} = \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}$, ($i = k+1, \ldots, n$).

Miután az $\mathbf{L_{n-1}}$ mátrixot, vagyis a Gauss-elimináció $n-1$. lépését is alkalmaztuk, megkapjuk az $\mathbf{U}$ mátrixot, vagyis a felső háromszög alakot.

$$\mathbf{L_{n-1}} \cdot \ldots \cdot \mathbf{L_2} \cdot \mathbf{L_1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{U}$$

Innen invertálással és mátrixszorzással kapjuk, hogy

$$\mathbf{A} = \left(\mathbf{L_1^{-1}} \cdot \mathbf{L_2^{-1}} \cdot \ldots \cdot \mathbf{L_{n-1}^{-1}}\right) \cdot \mathbf{U}$$

Belátható, hogy az $\mathbf{L}$ alsó háromszögbeli elemei a korábban említett $l_{i,k}$ elemekből a megfelelő oszlopokba pakolással előállíthatók. Nézzük meg ezt a technikát a konkrét példa megoldása során.

$$\mathbf{A_0} := \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & 7 \\ 1 & 3 & 7 \end{bmatrix}$$

Első lépésként elkészítjük az $\mathbf{L_1}$ mátrixot. Ahogy azt már korábban leírtuk, ebben az esetben az $\mathbf{I}$ egységmátrix első oszlopában kell a főátló alatti elemeket kiegészíteni a következőképpen.
$(-1)\frac{a_{21}}{a_{11}} = (-1)\frac{-2}{1} = 2$
$(-1)\frac{a_{31}}{a_{11}} = (-1)\frac{1}{1} = -1$

$$\mathbf{L_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \boxed{2} & 1 & 0 \\ \boxed{-1} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ezt alkalmazzuk az $\mathbf{A}$ mátrixra.

$$\mathbf{A_1} = \mathbf{L_1} \cdot \mathbf{A_0} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 8 & 13 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

A következő lépés az $\mathbf{L_2}$ mátrix előállítása.
$(-1)\frac{a_{31}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} = (-1)\frac{1}{8} = -\frac{1}{8}$

$$\mathbf{L_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{-\dfrac{1}{8}} & 1 \end{bmatrix}$$

Ezt alkalmazzuk az $\mathbf{A_1}$ mátrixra.

$$\mathbf{A_2} = \mathbf{L_2} \cdot \mathbf{A_1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 8 & 13 \\ 0 & 0 & \frac{19}{8} \end{bmatrix}$$

Mivel a mátrixunk 3×3-as volt, ezért készen is vannak az $\mathbf{L_i}$ mátrixok, sőt ahogy azt már korábban leírtuk ebben az esetben az $\mathbf{U}$ mátrix is könnyen leolvasható.

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 8 & 13 \\ 0 & 0 & \frac{19}{8} \end{bmatrix}$$

Most már csak az $\mathbf{L}$ mátrixot kell elkészítenünk, ami definíció szerint 3×3-as esetben. $\mathbf{L} = \mathbf{L_1^{-1}} \cdot \mathbf{L_2^{-1}}$ Az $\mathbf{L_i}$ mátrixok inverzét kiszámítani nagyon egyszerű, hiszen az egységmátrixtól különböző elemeinek a (-1)-szeresét kell venni.

$$\mathbf{L_1^{-1}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L_2^{-1}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{8} & 1 \end{bmatrix}$$

Így az $\mathbf{L}$ mátrix a következő

$$\mathbf{L} = \mathbf{L_1^{-1}} \cdot \mathbf{L_2^{-1}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{8} & 1 \end{bmatrix}.$$

Ha nem vagyunk kíváncsiak az $\mathbf{L_i}$ mátrixokra, akkor az $\mathbf{L}$ -be kerülő elemek úgy is megjegyezhetők, hogy az elimináció k. lépésében az $\mathbf{L}$ k. oszlopában a diagonális alá az $\frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}$ elemek kerülnek, vagyis a diagonális elemmel osztunk.
Az $\mathbf{A}$ mátrix determinánsa a Gauss-eliminációnál már említett módon számolható ki. Mivel elkészült a felső háromszögmátrix, így abból könnyedén leolvasható a mátrix determinánsa.

$$\det(\mathbf{A}) = 1 \cdot 8 \cdot \frac{19}{8} = 19$$

20. Az előző feladatban megismert módszert felhasználva határozzuk meg az $\mathbf{A}$ mátrix LU-felbontását.

$$\mathbf{A_0} := \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 1 & 3 & 7 \\ -4 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Ennek segítségével elkészítjük az $\mathbf{L_1}$ mátrixot. Tehát az $\mathbf{I}$ egységmátrix első oszlopában kell a főátló alatti elemeket kiegészíteni a következőképpen.
$(-1)\frac{a_{21}}{a_{11}} = (-1)\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$

$(-1)\frac{a_{31}}{a_{11}} = (-1)\frac{-4}{2} = -2$

$$\mathbf{L_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \boxed{-\frac{1}{2}} & 1 & 0 \\ \boxed{2} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tehát innen az A_1 mátrixot a következőképpen számoljuk.

$$\mathbf{A_1} = \mathbf{L_1} \cdot \mathbf{A_0} = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 0 & \frac{11}{2} & \frac{11}{2} \\ 0 & -8 & 5 \end{bmatrix}$$

Innen az L_2 mátrix a következő.

$$\mathbf{L_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{\frac{16}{11}} & 1 \end{bmatrix}$$

Az $\mathbf{A_2}$ mátrix az előbbiekben már ismertetett módon számítható.

$$\mathbf{A_2} = \mathbf{L_2} \cdot \mathbf{A_1} = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 0 & \frac{11}{2} & \frac{11}{2} \\ 0 & 0 & 13 \end{bmatrix}$$

Ezzel elkészítettük az $\mathbf{L}$ mátrix meghatározásához szükséges $\mathbf{L_i}$ mátrixokat. Arra kell csak figyelnünk, hogy az $\mathbf{L}$ mátrix meghatározásához az $\mathbf{L_i}$ mátrixok inverzére van szükségünk. Ezt a már említett összepakolással készítjük el.

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -2 & -\frac{16}{11} & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 0 & \frac{11}{2} & \frac{11}{2} \\ 0 & 0 & 13 \end{bmatrix}$$

A determináns meghatározása az eddigieknek megfelelően a következő.

$$\det(\mathbf{A}) = 2 \cdot \frac{11}{2} \cdot 13 = 143$$

21. Készítsük el az $\mathbf{A}$ mátrix LU-felbontását a korábbi példákban bemutatott módszer segítségével.

$$\mathbf{A_0} := \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 9 \end{bmatrix}$$

Elkészítjük az $\mathbf{L_1}$ mátrixot. Tehát az $\mathbf{I}$ egységmátrix első oszlopában kell a főátló alatti elemeket kiegészíteni a következőképpen.
$(-1)\frac{a_{21}}{a_{11}} = (-1)\frac{4}{2} = -2$
$(-1)\frac{a_{31}}{a_{11}} = (-1)\frac{-2}{2} = -1$

$$\mathbf{L_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \boxed{-2} & 1 & 0 \\ \boxed{-1} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tehát az $\mathbf{A_1}$ mátrix

$$\mathbf{A_1} = \mathbf{L_1} \cdot \mathbf{A_0} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 6 \end{bmatrix}.$$

Innen az $\mathbf{L_2}$ mátrix a következő.

$$\mathbf{L_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{-2} & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U} = \mathbf{A_2} = \mathbf{L_2} \cdot \mathbf{A_1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Most már csak $\mathbf{L_i}$ mátrixok inverzét kell meghatározni az $\mathbf{L}$ mátrix elkészítéséhez.

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Az $\mathbf{A}$ mátrix determinánsa a következő

$$\det(\mathbf{A}) = 2 \cdot 2 \cdot 4 = 16.$$

22. Készítsük el az $\mathbf{A}$ mátrix LU-felbontását a korábbi példákban bemutatott módszer segítségével!

$$\mathbf{A_0} := \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \\ 9 & -8 & 1 \end{bmatrix}$$

Elkészítjük az $\mathbf{L_1}$ mátrixot. Tehát az $\mathbf{I}$ egységmátrix első oszlopában kell a főátló alatti elemeket kiegészíteni.
$(-1)\frac{a_{21}}{a_{11}} = (-1)\frac{6}{3} = -2$
$(-1)\frac{a_{31}}{a_{11}} = (-1)\frac{9}{3} = -3$

$$\mathbf{L_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \boxed{-2} & 1 & 0 \\ \boxed{-3} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Vagyis az $\mathbf{A_1}$ mátrix a következő.

$$\mathbf{A_1} = \mathbf{L_1} \cdot \mathbf{A_0} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & -20 & 1 \end{bmatrix}$$

Innen az $\mathbf{L_2}$ mátrix könnyen számolható a következő segítségével.
$(-1)\frac{l_1 a_{23}}{l_2 a_{22}} = (-1)\frac{-20}{-6} = -\frac{10}{3}$

$$\mathbf{L_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{-\dfrac{10}{3}} & 1 \end{bmatrix}$$

Az $\mathbf{L}$ és $\mathbf{U}$ mátrix

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & \frac{10}{3} & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U} = \mathbf{A_2} = \mathbf{L_2} \cdot \mathbf{A_1} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Innen az $\mathbf{A}$ mátrix determinánsa a következő.

$$\det(\mathbf{A}) = 3 \cdot (-6) \cdot 1 = -18$$

23. Az LU-felbontáshoz nem szükséges az $\mathbf{L_i}$ mátrixokat elkészíteni, hiszen ezek, ahogyan azt korábban már említettük, a Gauss-elimináció egyes lépéseit reprezentálják. Így előállíthatjuk az LU-felbontást a Gauss-eliminációval párhuzamosan is. A következőkben megmutatjuk, hogy hogyan is lehet a számítógépes reprezentációhoz helytakarékosan megvalósítani az LU-felbontást a Gauss-elimináció segítségével.

Az alap ötletre bárki könnyen rájöhet, ha megfigyeli a mátrixok szerkezetét. Az $\mathbf{L}$ mátrix egy olyan alsó háromszögmátrix, amelyben a főátlóban egyesek találhatóak. Vagyis az "értékes" elemek valójában a főátló alatt helyezkednek el.
A másik fontos megfigyelés a Gauss-elimináció során előállított felső háromszög, vagyis az LU-felbontásban $\mathbf{U}$ mátrixként ismert mátrix strukúrájára vonatkozik. A felső háromszögmátrixban a főátló alatt nullák helyezkednek el, így az értékes elemek a főátlóban, illetve fölötte helyezkednek el. Most már csak egy apró megfigyelésre van szükség. Az $\mathbf{L_i}$ mátrix inverze egy (-1) -es szorzó segítségével könnyen képezhető, illetve a struktúra specialitásából fakad, hogy az $\mathbf{L_i^{-1}}$ mátrixok szorzata gyakorlatilag a mátrixok megfelelő oszlop vektorainak egymás mellé írásával képezhető. Ezeket a megfigyeléseket összesítve kapjuk az alábbi helytakarékos algoritmust.

i/1. lépés: Végrehajtjuk a Gauss-elimináció i. lépését.

i/2. lépés: kiszámítjuk az $i-1$. lépésben kapott mátrixból az $\mathbf{L_i}$ mátrixhoz szükséges hányadosokat. Ezeket az előző lépésben kapott mátrixban a nullák helyére beírjuk. Csak arra kell figyelnünk, hogy ezek az elemek nem az A_i mátrix elemei, vagyis a következő lépésben rajtuk nem végezzük el a Gauss-elimináció műveleteit, hiszen a Gauss-elimináció szempontjából ezeknek az elemeknek a helyén nullák vannak.

A Gauss elmináció végeztével könnyen le is tudjuk olvasni az $\mathbf{L}$ és $\mathbf{U}$ mátrixokat. Nézzük meg ezt a módszert a gyakorlatban is. Keretezve jelöljük az $\mathbf{L}$ mátrixhoz tartozó részt.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & 7 \\ 1 & 3 & 7 \end{bmatrix} \longrightarrow \mathbf{A_1'} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 8 & 13 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Ezzel elkészítettük a Gauss-elimináció első lépését. Most ki kell számolnunk az L_1 mátrixhoz szükséges hányadosokat. Arra ügyeljünk, hogy most nem kell a (-1)-szerest venni, hiszen az inverzhez erre van szükség.
$\frac{a_{21}}{a_{11}} = \frac{-2}{1} = -\frac{2}{1}$
$\frac{a_{31}}{a_{11}} = \frac{1}{1} = 1$
A kapott hányadosokat az elimináció végén kapott nullák helyére beírva kapjuk az első lépés utáni tömörített alakot.

$$\mathbf{A_1'} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 8 & 13 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \longrightarrow \mathbf{A_1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \boxed{-2} & 8 & 13 \\ \boxed{1} & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Most elvégezzük a Gauss-elimináció második lépését, arra ügyelve, hogy az első oszlopban a főátló alatti elemek ebben a kontextusban nullák.

$$\mathbf{A_1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \boxed{-2} & 8 & 13 \\ \boxed{1} & 1 & 4 \end{bmatrix} \longrightarrow \mathbf{A_2'} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \boxed{-2} & 8 & 13 \\ \boxed{1} & 0 & \frac{19}{8} \end{bmatrix}$$

Most pedig az $\mathbf{L_2}$ mátrixbeli háyadost kell meghatároznunk.
$\frac{a_{32}}{a_{22}} = \frac{1}{8}$

$$\mathbf{A_2'} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \boxed{-2} & 8 & 13 \\ \boxed{1} & 0 & \frac{19}{8} \end{bmatrix} \longrightarrow \mathbf{A_2} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \boxed{-2} & 8 & 13 \\ \boxed{1} & \boxed{\dfrac{1}{8}} & \frac{19}{8} \end{bmatrix}$$

Innen könnyen leolvashatjuk az $\mathbf{L}$ és az $\mathbf{U}$ mátrixot.

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{8} & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 8 & 13 \\ 0 & 0 & \frac{19}{8} \end{bmatrix}$$

24. Az előző feladatban bemutatott módszer segítségével oldjuk meg ezt a feladatot is. Tehát a Gauss-elimináció első lépése után az alábbi hányadosokkal egészítjük ki a mátrixot.
$\frac{a_{21}}{a_{11}} = \frac{1}{2}$
$\frac{a_{31}}{a_{11}} = \frac{-4}{2} = (-2)$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 1 & 3 & 7 \\ -4 & 2 & -1 \end{bmatrix} \longrightarrow \mathbf{A_1'} = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 0 & \frac{11}{2} & \frac{11}{2} \\ 0 & -8 & 5 \end{bmatrix} \longrightarrow \mathbf{A_1} = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 3 \\ \boxed{\dfrac{1}{2}} & \frac{11}{2} & \frac{11}{2} \\ \boxed{-2} & -8 & 5 \end{bmatrix}$$

Folytassuk a Gauss-elimináció 2. lépésével és a hányadosok beépítésével.

$$\mathbf{A_1} = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 3 \\ \boxed{\dfrac{1}{2}} & \frac{11}{2} & \frac{11}{2} \\ \boxed{-2} & -8 & 5 \end{bmatrix} \longrightarrow \mathbf{A_2'} = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 3 \\ \boxed{\dfrac{1}{2}} & \frac{11}{2} & \frac{11}{2} \\ \boxed{-2} & 0 & \frac{286}{22} \end{bmatrix} \longrightarrow \mathbf{A_2} = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 3 \\ \boxed{\dfrac{1}{2}} & \frac{11}{2} & \frac{11}{2} \\ \boxed{-2} & \boxed{-\dfrac{16}{11}} & 13 \end{bmatrix}$$

Az előbbiekben megismerteknek megfelelően könnyen leolvashatjuk az $\mathbf{L}$ és az $\mathbf{U}$ mátrixot.

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -2 & -\frac{16}{11} & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 0 & \frac{11}{2} & \frac{11}{2} \\ 0 & 0 & 13 \end{bmatrix}$$

25. A Gauss-elimináció első lépése után az alábbi hányadosokkal egészítjük ki a mátrixot.
$\frac{a_{21}}{a_{11}} = \frac{6}{3} = 2$
$\frac{a_{31}}{a_{11}} = \frac{9}{3} = 3$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \\ 9 & -8 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \mathbf{A_1'} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 20 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \mathbf{A_1} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ \boxed{2} & -6 & 0 \\ \boxed{3} & -20 & 1 \end{bmatrix}$$

Folytatva a Gauss-elimináció 2. lépésével és a hányadosok beépítésével kapjuk.

$$\mathbf{A_1} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ \boxed{2} & -6 & 0 \\ \boxed{3} & -20 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \mathbf{A_2'} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ \boxed{2} & -6 & 0 \\ \boxed{3} & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \mathbf{A_2} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ \boxed{2} & -6 & 0 \\ \boxed{3} & \boxed{\dfrac{10}{3}} & 1 \end{bmatrix}$$

Az előbb megismerteknek megfelelően könnyen leolvashatjuk az $\mathbf{L}$ és az $\mathbf{U}$ mátrixot.

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & \frac{10}{3} & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

26. A korábbiakban megismert kétféle módszer ($\mathbf{L_i}$ mátrixok, Gauss-elimináció) után egy harmadik alternatívát mutatunk be az LU-felbontás megvalósítására. Ez a módszer a mátrixszorzás segítségével készíti el az LU-felbontást.
Ez a módszer az $\mathbf{L}$ és az $\mathbf{U}$ mátrixok speciális szerkezetének köszönhetően működhet. Háromféle elrendezés segítségével fogjuk meghatározni az ismeretleneket, ezek a sorrendek beszédes elnevezésűek.

a) Oszlopfolytonos kifejtés esetén az $\mathbf{A}$ mátrix első oszlopában fentről lefelé haladva határozzuk meg az ismeretleneket, majd folytatjuk a második oszlopban és így tovább.

b) Sorfolytonos kifejtés során az $\mathbf{A}$ mátrix első sorából indulunk ki és az elemeken balról jobbra haladva sorban határozzuk meg az ismeretleneket.

c) Parketta kifejtés esetén az $\mathbf{A}$ mátris első során haladunk végig balról jobbra, ezt követően az első oszlopban a második elemtől fentről lefelé. Így egy $(n-1) \times (n-1)$ -es részmátrix marad, amin ugyanezt kell folytatnunk.

Oldjuk meg a konkrét feladatot a parketta kifejtéssel.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & 7 \\ 1 & 3 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_1 & 1 & 0 \\ l_2 & l_3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ 0 & u_4 & u_5 \\ 0 & 0 & u_6 \end{bmatrix}$$

A fent leírtaknak megfelelően az első sorban kell az ismeretleneket meghatároznunk balról jobbra haladva. Mivel az $\mathbf{A}$ mátrix első sora mindig megegyezik az $\mathbf{U}$ első sorával, a későbbi feladatok során ezt már felhasználjuk.

$$\begin{aligned} 1 = 1 \cdot u_1 \longrightarrow u_1 &= 1 \\ 2 = 1 \cdot u_2 \longrightarrow u_2 &= 2 \\ 3 = 1 \cdot u_3 \longrightarrow u_3 &= 3 \end{aligned}$$

Ezt követően az első oszlopban folytatjuk a kifejtést fentről lefelé haladva a második pozíciótól.

$$\begin{aligned} -2 = l_1 \cdot u_1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = l_1 \cdot 1 \longrightarrow l_1 &= -2 \\ 1 = l_2 \cdot u_1 + l_3 \cdot 0 + 1 \cdot 0 = l_2 \cdot 1 \longrightarrow l_2 &= 1 \end{aligned}$$

Ezt követően a maradék 2×2-es mátrix részen kell elvégeznünk az előbbi kifejtést.

$$\begin{aligned} 4 = l_1 \cdot u_2 + 1 \cdot u_4 + 0 \cdot 0 = -2 \cdot 1 + u_4 \longrightarrow u_4 &= 8 \\ 7 = l_1 \cdot u_3 + 1 \cdot u_5 + 0 \cdot u_6 = -2 \cdot 3 + u_5 \longrightarrow u_5 &= 13 \\ 3 = l_2 \cdot u_2 + l_3 \cdot u_4 + 1 \cdot 0 = 1 \cdot 2 + 8 \cdot l_3 \longrightarrow l_3 &= \frac{1}{8} \\ 7 = l_2 \cdot u_3 + l_3 \cdot u_5 + 1 \cdot u_6 = 1 \cdot 3 + \frac{1}{8} \cdot 13 + u_6 \longrightarrow u_6 &= \frac{19}{8} \end{aligned}$$

Visszaírva a mátrixokba a meghatározott ismeretlenek értékeit, megkapjuk az alábbi **L** és **U** mátrixokat.

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{8} & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 8 & 13 \\ 0 & 0 & \frac{19}{8} \end{bmatrix}$$

27. Az előző feladatban leírtaknak megfelelően oldjuk meg a feladatot.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 1 & 3 & 7 \\ -4 & 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_1 & 1 & 0 \\ l_2 & l_3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ 0 & u_4 & u_5 \\ 0 & 0 & u_6 \end{bmatrix}$$

Az **U** első sorában lévő ismeretlenek egyeznek az **A** első sorával.

$$u_1 = 2, \quad u_2 = -5, \quad u_3 = 3$$

Ezt követően az első oszlopban folytatjuk a kifejtést fentről lefelé haladva a második pozíciótól.

$$\begin{aligned} 1 = l_1 \cdot u_1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = l_1 \cdot 2 \longrightarrow l_1 &= \frac{1}{2} \\ -4 = l_2 \cdot u_1 + l_3 \cdot 0 + 1 \cdot 0 = l_2 \cdot 2 \longrightarrow l_2 &= -2 \end{aligned}$$

Ezt követően a maradék 2×2-es mátrixrészen kell elvégeznünk az előbbi kifejtést.

$$\begin{aligned} 3 = l_1 \cdot u_2 + 1 \cdot u_4 + 0 \cdot 0 = \frac{1}{2} \cdot 5 + u_4 \longrightarrow u_4 &= \frac{11}{2} \\ 7 = l_1 \cdot u_3 + 1 \cdot u_5 + 0 \cdot u_6 = \frac{1}{2} \cdot 3 + u_5 \longrightarrow u_5 &= \frac{11}{2} \end{aligned}$$

És így tovább.

$$\begin{aligned} 2 = l_2 \cdot u_2 + l_3 \cdot u_4 + 1 \cdot 0 = (-2) \cdot (-5) + \frac{11}{2} \cdot l_3 \longrightarrow l_3 = \frac{-8}{5,5} &= -\frac{16}{11} \\ -1 = l_2 \cdot u_3 + l_3 \cdot u_5 + 1 \cdot u_6 = (-2) \cdot 3 + \frac{-8}{5,5} \cdot 5,5 + u_6 \longrightarrow u_6 &= 13 \end{aligned}$$

Visszaírva a mátrixokba a meghatározott ismeretlenek értékeit, kapjuk az alábbi **L** és **U** mátrixokat.

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -2 & -\frac{16}{11} & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 0 & \frac{11}{2} & \frac{11}{2} \\ 0 & 0 & 13 \end{bmatrix}$$

28. A korábbi példában említett oszlopfolytonos kifejtést használjuk a feladat megoldásához.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & 7 \\ 1 & 3 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_1 & 1 & 0 \\ l_2 & l_3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ 0 & u_4 & u_5 \\ 0 & 0 & u_6 \end{bmatrix}$$

A fentebb leírtaknak megfelelően az első oszlopban kell az ismeretleneket meghatároznunk fentről lefelé haladva.

$$\begin{aligned} 1 = 1 \cdot u_1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 \longrightarrow u_1 &= 1 \\ -2 = l_1 \cdot u_1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 \longrightarrow l_1 &= -2 \\ 1 = l_2 \cdot u_1 + l_3 \cdot 0 + 1 \cdot 0 \longrightarrow l_2 &= 1 \end{aligned}$$

Folytatjuk a második oszlopban fentről lefelé. A továbbiakban a nulla szorzatokat nem írjuk ki.

$$\begin{aligned} 2 = 1 \cdot u_2 \longrightarrow u_2 &= 2 \\ 4 = l_2 \cdot u_2 + u_4 \longrightarrow u_4 &= 8 \\ 3 = l_2 \cdot u_2 + l_3 \cdot u_4 \longrightarrow l_3 &= \frac{1}{8} \end{aligned}$$

A harmadik oszloppal folytatjuk.

$$\begin{aligned} 3 = u_3 \longrightarrow u_3 &= 3 \\ 7 = l_1 \cdot u_3 + u_5 \longrightarrow u_5 &= 13 \\ 7 = l_2 \cdot u_3 + l_3 \cdot u_5 + u_6 \longrightarrow u_6 &= \frac{19}{8} \end{aligned}$$

Tehát az **L** és az **U** mátrixok.

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{8} & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 8 & 13 \\ 0 & 0 & \frac{19}{8} \end{bmatrix}$$

29. Az előző feladatban leírtaknak megfelelően oldjuk meg a feladatot.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 1 & 3 & 7 \\ -4 & 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_1 & 1 & 0 \\ l_2 & l_3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ 0 & u_4 & u_5 \\ 0 & 0 & u_6 \end{bmatrix}$$

Az első oszlopban kezdjük az ismeretlenek meghatározását.

$$\begin{aligned} 2 = u_1 \longrightarrow u_1 &= 2 \\ 1 = l_1 \cdot u_1 = l_1 \cdot 2 \longrightarrow l_1 &= \frac{1}{2} \\ -4 = l_2 \cdot u_1 = l_2 \cdot 2 \longrightarrow l_2 &= -2 \end{aligned}$$

Folytatjuk az ismeretlenek meghatározását a második oszlopban.

$$\begin{aligned} -5 = u_2 \longrightarrow u_2 &= (-5) \\ 3 = l_1 \cdot u_2 + u_4 = \frac{1}{2} \cdot (-5) + u_4 \longrightarrow u_4 &= \frac{11}{2} \\ 2 = l_2 \cdot u_2 + l_3 \cdot u_4 = (-2) \cdot (-5) + \frac{11}{2} \cdot l_3 \longrightarrow l_3 = \frac{-8}{5,5} &= -\frac{16}{11} \end{aligned}$$

Most már csak a harmadik oszlopban kell az ismeretleneket meghatároznunk.

$$\begin{aligned} 3 = u_3 \longrightarrow u_3 &= 3 \\ 7 = l_1 \cdot u_3 + u_5 = \frac{1}{2} \cdot 3 + u_5 \longrightarrow u_5 &= \frac{11}{2} \\ -1 = l_2 \cdot u_3 + l_3 \cdot u_5 + u_6 = (-2) \cdot 3 - \frac{16}{11} \cdot \frac{11}{2} + u_6 \longrightarrow u_6 &= 13 \end{aligned}$$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -2 & -\frac{16}{11} & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 0 & \frac{11}{2} & \frac{11}{2} \\ 0 & 0 & 13 \end{bmatrix}$$

30. Első lépésként az ismeretlenek meghatározásához az első sorban haladunk végig balról jobbra.

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 1 & 3 & 7 \\ -4 & 2 & -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_1 & 1 & 0 \\ l_2 & l_3 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ 0 & u_4 & u_5 \\ 0 & 0 & u_6 \end{bmatrix}$$

Az első sor $\mathbf{U}$ -ban ugyanaz, mint $\mathbf{A}$ -ban.

$$u_1=2, \quad u_2=-5, \quad u_3=3$$

Folytatva a második sorban

$$\begin{aligned} 1=l_1\cdot u_1=l_1\cdot 2\longrightarrow l_1 &= \frac{1}{2} \\ 3=l_1\cdot u_2+u_4=\frac{1}{2}\cdot(-5)+u_4\longrightarrow u_4 &= \frac{11}{2} \\ 7=l_1\cdot u_3+u_5=\frac{1}{2}\cdot 3+u_5\longrightarrow u_5 &= \frac{11}{2}. \end{aligned}$$

Az utolsó sorban folytatjuk az ismeretlenek meghatározását.

$$\begin{aligned} -4=l_2\cdot u_1=l_2\cdot 2\longrightarrow l_2 &= -2 \\ 2=l_2\cdot u_2+l_3\cdot u_4=(-2)\cdot(-5)+\frac{11}{2}\cdot l_3\longrightarrow l_3 &= -\frac{16}{11} \\ -1=l_2\cdot u_3+l_3\cdot u_5+u_6=(-2)\cdot 3-\frac{16}{11}\cdot\frac{11}{2}+u_6\longrightarrow u_6 &= 13 \end{aligned}$$

Tehát a megoldás

$$\mathbf{L}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -2 & -\frac{16}{11} & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U}=\begin{bmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 0 & \frac{11}{2} & \frac{11}{2} \\ 0 & 0 & 13 \end{bmatrix}$$

31.

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 2 & 3 & -3 & -3 \\ 16 & 25 & -33 & -\frac{47}{2} \\ 8 & 9 & 18 & -\frac{29}{2} \\ -10 & -14 & \frac{33}{4} & \frac{63}{4} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ l_1 & 1 & 0 & 0 \\ l_2 & l_3 & 1 & 0 \\ l_4 & l_5 & l_6 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ 0 & u_5 & u_6 & u_7 \\ 0 & 0 & u_8 & u_9 \\ 0 & 0 & 0 & u_{10} \end{bmatrix}$$

Első lépésként az ismeretlenek meghatározásához az első oszlopban haladunk végig fentről lefelé.

$$\begin{aligned} u_1 &= 2 \\ 16=u_1\cdot l_1=2\cdot l_1\longrightarrow l_1 &= 8 \\ 8=u_1\cdot l_2=2\cdot l_2\longrightarrow l_2 &= 4 \\ -10=u_1\cdot l_4=2\cdot l_4\longrightarrow l_4 &= -5 \end{aligned}$$

A második oszlopban folytatjuk a megoldást.

$$\begin{aligned} u_2 &= 3 \\ 25=u_2\cdot l_1+u_5=3\cdot 8+u_5\longrightarrow u_5 &= 1 \\ 9=u_2\cdot l_2+u_5\cdot l_3=3\cdot 4+1\cdot l_3\longrightarrow l_3 &= -3 \\ -14=u_2\cdot l_4+u_5\cdot l_5=3\cdot(-5)+1\cdot l_5\longrightarrow l_5 &= 1 \end{aligned}$$

A harmadik oszlopban folytatjuk az eljárást.

$$\begin{aligned} u_3 &= -3 \\ -33 = u_3 \cdot l_1 + u_6 = (-3)\cdot 8 + u_6 \longrightarrow u_6 &= -9 \\ 18 = u_3 \cdot l_2 + u_6 \cdot l_3 + u_8 = (-3)\cdot 4 + (-9)\cdot(-3) + u_8 \longrightarrow u_8 &= 3 \\ \frac{33}{4} = u_3 \cdot l_4 + u_6 \cdot l_5 + u_8 \cdot l_6 = (-3)\cdot(-5) + (-9)\cdot 1 + 3 \cdot l_6 \longrightarrow l_6 &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Végül az utolsó oszlopon haladunk végig.

$$\begin{aligned} u_4 &= -3 \\ -\frac{47}{2} = u_4 \cdot l_1 + u_7 = (-3)\cdot 8 + u_7 \longrightarrow u_7 &= \frac{1}{2} \\ -\frac{29}{2} = u_4 \cdot l_2 + u_7 \cdot l_3 + u_9 = (-3)\cdot 4 + \frac{1}{2}\cdot(-3) + u_9 \longrightarrow u_9 &= -1 \\ \frac{63}{4} = u_4 \cdot l_4 + u_7 \cdot l_5 + u_9 \cdot l_6 + u_10 = (-3)\cdot(-5) + \frac{1}{2}\cdot 1 + (-1)\cdot\frac{3}{4} \longrightarrow u_{10} &= 1 \end{aligned}$$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 1 & 0 \\ -5 & 1 & \frac{3}{4} & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & -9 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

32.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -6 \\ -6 & -17 & 19 \\ 8 & -4 & -14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_1 & 1 & 0 \\ l_2 & l_3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ 0 & u_4 & u_5 \\ 0 & 0 & u_6 \end{bmatrix}$$

a) Sorfolytonos kifejtés:

Első sor

$2 = 1 \cdot u_1 \longrightarrow u_1 = 2$
$4 = 1 \cdot u_2 \longrightarrow u_2 = 4$
$-6 = 1 \cdot u_3 \longrightarrow u_3 = -6$

Második sor

$-6 = l_1 \cdot u_1 = 2 \cdot l_1 \longrightarrow l_1 = -3$
$-17 = l_1 \cdot u_2 + u_4 = 4 \cdot (-3) + u_4 \longrightarrow u_4 = -4$
$19 = l_1 \cdot u_3 + u_5 = (-6)\cdot(-3) + u_5 \longrightarrow u_5 = 1$

Harmadik sor

$8 = l_2 \cdot u_1 = 2 \cdot l_2 \longrightarrow l_2 = 4$
$-4 = l_2 \cdot u_2 + l_3 \cdot u_4 = 4 \cdot 4 + (-5)\cdot l_3 \longrightarrow l_3 = 4$
$-14 = l_2 \cdot u_3 + l_3 \cdot u_5 + u_6 = (-6)\cdot 4 + 1 \cdot 4 + u_6 \longrightarrow u_6 = 6$

b) Oszlopfolytonos kifejtés:

Első oszlop

$2 = 1 \cdot u_1 \longrightarrow u_1 = 2$
$-6 = l_1 \cdot u_1 = 2 \cdot l_1 \longrightarrow l_1 = -3$

$8 = l_2 \cdot u_1 = 2 \cdot l_2 \longrightarrow l_2 = 4$

Második oszlop

$4 = 1 \cdot u_2 \longrightarrow u_2 = 4$
$-17 = l_1 \cdot u_2 + u_4 = 4 \cdot (-3) + u_4 \longrightarrow u_4 = -5$
$-4 = l_2 \cdot u_2 + l_3 \cdot u_4 = 4 \cdot 4 + (-5) \cdot l_3 \longrightarrow l_3 = 4$

Harmadik oszlop

$-6 = 1 \cdot u_3 \longrightarrow u_3 = -6$
$19 = l_1 \cdot u_3 + u_5 = (-6) \cdot (-3) + u_5 \longrightarrow u_5 = 1$
$-4 = l_2 \cdot u_3 + l_3 \cdot u_5 + u_6 = (-6) \cdot 4 + 1 \cdot 4 + u_6 \longrightarrow u_6 = 6$

c) Parketta kifejtés:

Első sor

$2 = 1 \cdot u_1 \longrightarrow u_1 = 2$
$4 = 1 \cdot u_2 \longrightarrow u_2 = 4$
$-6 = 1 \cdot u_3 \longrightarrow u_3 = -6$

Első oszlop

$-6 = l_1 \cdot u_1 = 2 \cdot l_1 \longrightarrow l_1 = -3$
$8 = l_2 \cdot u_1 = 2 \cdot l_2 \longrightarrow l_2 = 4$

És így tovább.

$-17 = l_1 \cdot u_2 + u_4 = 4 \cdot (-3) + u_4 \longrightarrow u_4 = -4$
$19 = l_1 \cdot u_3 + u_5 = (-6) \cdot (-3) + u_5 \longrightarrow u_5 = 1$

$-4 = l_2 \cdot u_2 + l_3 \cdot u_4 = 4 \cdot 4 + (-5) \cdot l_3 \longrightarrow l_3 = 4$
$-14 = l_2 \cdot u_3 + l_3 \cdot u_5 + u_6 = (-6) \cdot 4 + 1 \cdot 4 + u_6 \longrightarrow u_6 = 6$

A megoldás

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -6 \\ 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

33. A teljes blokkos LU-felbontás:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A_{11}} & \mathbf{A_{12}} \\ \mathbf{A_{21}} & \mathbf{A_{22}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{L_{11}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{L_{21}} & \mathbf{L_{22}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{U_{11}} & \mathbf{U_{12}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{U_{22}} \end{bmatrix}.$$

Végezzük el a beszorzást!

$$\begin{aligned} \mathbf{A_{11}} &= \mathbf{L_{11}}\mathbf{U_{11}}, \\ \mathbf{A_{21}} &= \mathbf{L_{21}}\mathbf{U_{11}}, \\ \mathbf{A_{12}} &= \mathbf{L_{11}}\mathbf{U_{12}}, \\ \mathbf{A_{22}} &= \mathbf{L_{21}}\mathbf{U_{12}} + \mathbf{L_{22}}\mathbf{U_{22}}. \end{aligned}$$

Ha az $\mathbf{A_{22}}$ helyén lévő blokkot még nem bontottuk fel, akkor ott $\mathbf{L_{22}U_{22}}$ áll. De ez a kapott egyenletekből

$$\mathbf{L_{22}U_{22}} = \mathbf{A_{22}} - \mathbf{L_{21}U_{12}} = \mathbf{A_{22}} - \mathbf{A_{21}U_{11}^{-1}L_{11}^{-1}A_{12}} = \mathbf{A_{22}} - \mathbf{A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}} = [\mathbf{A}\,|\mathbf{A_{11}}]$$

éppen ezt kellett bizonyítanunk.

2.2.4. *LDU*-felbontás *LU*-felbontás segítségével

34. Az *LDU*-felbontás esetén az **A** mátrix egy olyan szorzat felbontását keressük, amelyben az **L** egy alsó háromszögmátrix, a **D** egy diagonális mátrix, míg az **U** egy felső háromszögmátrix, ahol az **L** és **U** diagonálisában egyesek vannak.

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & 0 \\ l_{n1} & \dots & l_{nn-1} & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & d_{nn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & u_{2n} \\ 0 & \dots & 1 & u_{n-1n} \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Az előállításhoz használhatjuk a korábban tanult $\mathbf{L}\widetilde{\mathbf{U}}$ felbontásból kapott mátrixokat. Ez utóbbi felső háromszögmátrixát másképp kell jelölnünk, hiszen ott a diagonálisra nincs megkötésünk. Ha elkészült az **A** mátrix $\mathbf{L}\widetilde{\mathbf{U}}$ felbontása, akkor a **D** mátrix meghatározása könnyű, hiszen az $\widetilde{\mathbf{U}}$ mátrix diagonálisában lévő elemeket kell a **D** mátrix diagonálisába helyeznünk.

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \widetilde{u}_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \widetilde{u}_{22} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \widetilde{u}_{nn} \end{bmatrix}$$

A **D**-vel való szorzás kompenzálásaként az $\widetilde{\mathbf{U}}$ mátrix sorait végig kell osztani a diagonálisbeli elemekkel. Nézzük meg ezt a módszert a gyakorlatban a kitűzött feladat megoldása során. Első lépésként elkészítjük az **A** mátrix $\mathbf{L}\widetilde{\mathbf{U}}$ felbontását. Ennek a részletes bemutatásától eltekintünk, hiszen a korábbi példák esetén már megtettük.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 8 & 8 & 5 \\ -4 & -7 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Ebből készítsük el a fent leírt módszer segítségével az *LDU*-felbontást, mely a következő lesz.

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

35. Legyen adott az $\mathbf{A} = \mathbf{L}\widetilde{\mathbf{U}}$ felbontás.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{5} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -5 & -10 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Az *LDU*-felbontás a következő

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{5} & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

36. Legyen adott az $\mathbf{A} = \mathbf{L}\widetilde{\mathbf{U}}$ felbontás.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{5} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{12}{5} \end{bmatrix}$$

Az LDU-felbontás a következő

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{5} & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{12}{5} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

37. Legyen adott az $\mathbf{A} = \mathbf{L}\widetilde{\mathbf{U}}$ felbontás.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 4 & 4 & 2 \\ 6 & 6 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Az LDU-felbontás a következő

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

38. Legyen adott az $\mathbf{A} = \mathbf{L}\widetilde{\mathbf{U}}$ felbontás.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{15} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{15}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{56}{15} \end{bmatrix}$$

Az LDU-felbontás a következő

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{15} & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{15}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{56}{15} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & \frac{1}{15} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

39. Legyen adott az $\mathbf{A} = \mathbf{L}\widetilde{\mathbf{U}}$ felbontás.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

Az LDU-felbontás a következő

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

40. Legyen adott az $\mathbf{A} = \mathbf{L}\widetilde{\mathbf{U}}$ felbontás.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

Az LDU-felbontás a következő

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

2.2.5. LDL^T- és LL^T- (Cholesky) felbontás

41. Az LL^T-felbontás meghatározására három módszert mutatunk be.

a) LU-felbontás segítségével.
b) Az LDU segítségével, ami jelen esetben LDL^T-felbontás.
c) Mátrix szorzásból oszloponként.

Mivel az $\mathbf{LL^T}$ szorzat szimmetrikus mátrix, ezért csak szimmetrikus mátrixnak tudjuk a Cholesky-féle felbontását elkészíteni. Ha $\mathbf{A}$ még pozitív definit mátrix is, akkor létezik $\mathbf{LL^T}$-felbontás. A felbontás egyértelmű, ha megköveteljük, hogy $l_{ii} > 0 \ \ (i = 1, \ldots, n)$ legyen.

a) Először nézzük meg az LU-felbontás segítségével. A jobb érthetőség kedvéért az eddigi LU-felbontást jelölje $\widetilde{\mathbf{L}}\widetilde{\mathbf{U}}$. Tehát az új jelöléssel legyen adott az $\mathbf{A} = \widetilde{\mathbf{L}}\widetilde{\mathbf{U}}$ felbontás és ennek segítségével határozzuk meg az LL^T-felbontást.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Az LL^T-felbontáshoz az $\widetilde{\mathbf{L}}$ mátrix oszlopait szorozzuk meg az $\widetilde{\mathbf{U}}$ diagonálisában található elemek gyökével. Ezzel megkapjuk a keresett $\mathbf{L}$ mátrixot.

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{3}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \sqrt{\frac{3}{2}} & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

b) Az LDU-felbontás segítségével is ugyanilyen egyszerű az előállítás. Mivel $\mathbf{A}$ szimmetrikus mátrix, ezért $\mathbf{L^T} = \mathbf{U}$, így valójában LDL^T-felbontásból indulunk ki. Az LDL^T-felbontásnál az előzőekhez hasonlóan bevezetjük a hullámos jelölést, legyen $\mathbf{A} = \widetilde{\mathbf{L}}\mathbf{D}\widetilde{\mathbf{L}^\mathbf{T}}$. Vegyük a $\mathbf{D}$ elemeinek gyökét és szorozzuk meg $\widetilde{\mathbf{L}}$ oszlopait. Így $\mathbf{L} = \widetilde{\mathbf{L}} \cdot \sqrt{\mathbf{D}}$.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{LDU}$$

$$\mathbf{L} = \widetilde{\mathbf{L}} \cdot \sqrt{\mathbf{D}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{3}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \sqrt{\frac{3}{2}} & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

c) Az LL^T-felbontás elkészítéséhez a jegyzetekben megtaláljuk a képleteket, ezek a képletek a programozáshoz hasznosak, de a kézi számolásnál egyszerűbb az alapötletet használni, azaz a mátrix szorzást. A szorzáshoz nem kell a képletet megjegyezni és nem kell tartanunk a képletekbe történő helyettesítés hibáitól.
Írjuk fel az $\mathbf{L} \cdot \mathbf{L^T} = \mathbf{A}$ mátrixszorzatot.

$$\begin{bmatrix} l_1 & 0 & 0 \\ l_2 & l_3 & 0 \\ l_4 & l_5 & l_6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} l_1 & l_2 & l_4 \\ 0 & l_3 & l_5 \\ 0 & 0 & l_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Innen az $\mathbf{L}$ mátrix oszlopain sorban végighaladva meghatározhatjuk az l_i értékeket.

- Az első oszlop alapján
$l_1^2 = 2 \longrightarrow l_1 = \sqrt{2}$
$l_2 \cdot l_1 = 1 \longrightarrow l_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$
$l_4 \cdot l_1 = 2 \longrightarrow l_4 = \sqrt{2}.$

- A második oszlop alapján
$l_2^2 + l_3^2 = 2 \longrightarrow l_3 = \sqrt{\frac{3}{2}}$
$l_4 \cdot l_2 + l_5 \cdot l_3 = 1 \longrightarrow l_5 = 0.$

- A harmadik oszlop alapján
$l_4^2 \cdot l_5^2 + l_6^2 = 4 \longrightarrow l_6 = \sqrt{2}.$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \sqrt{\frac{3}{2}} & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Látjuk, hogy mindhárom esetben ugyanazt az eredményt kaptuk.

42. Az előző feladatban bemutatott LL^T-felbontás kapcsán megismerhettük az LU-felbontásból történő meghatározás módszerét. Az LDL^T-felbontásnál is hasonlóan fogunk eljárni, mint az LL^T esetnél. Most is használjuk a könnyebb követhetőség kedvéért a hullámos jelölést, vagyis legyen $\mathbf{A} = \mathbf{L}\widetilde{\mathbf{U}}$. Az $\mathbf{L}$ -re nem kell új jelölést bevezetnünk, hiszen az LDL^T-felbontásnál és az LU-felbontásnál is egyesek vannak az $\mathbf{L}$ diagonálisában.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & -3 \\ 2 & -3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \mathbf{L}\widetilde{\mathbf{U}}$$

Az LDL^T-felbontás előállítása tulajdonképpen megegyezik az LDU-felbontásnál megismert módszerrel. A $\mathbf{D}$ mátrixba rakjuk az $\mathbf{U}$ diagonális elemeit.

Ellenőrizhetjük, hogy $\mathbf{L^T} = \mathbf{D^{-1}} \cdot \widetilde{\mathbf{U}}$, ehhez az $\widetilde{\mathbf{U}}$ sorait kell a diagonális elemekkel leosztani. Ezzel tulajdonképpen elő is állítottuk az LDL^T-felbontást.

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L^T} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Az LL^T-felbontást elkészíthetjük az LDL^T segítségével is, hiszen

$$(\mathbf{L}\sqrt{\mathbf{D}})(\sqrt{\mathbf{D}}\mathbf{L})^{\mathbf{T}} = \widehat{\mathbf{L}}\widehat{\mathbf{L}}^{\mathbf{T}}.$$

Tehát az $\widehat{\mathbf{L}}\widehat{\mathbf{L}}^{\mathbf{T}}$-felbontás

$$\widehat{\mathbf{L}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \widehat{\mathbf{L}}^{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

43. Használjuk fel az $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$ felbontás eredményét.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Ebből az LDL^T-felbontás

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L^T} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Innen pedig az LL^T-felbontás

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & \sqrt{3} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \sqrt{3} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L^T} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \sqrt{3} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix}.$$

44. Használjuk fel az $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$ felbontás eredményét.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ebből az LDL^T-felbontás

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L^T} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Innen pedig az LL^T-felbontás

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L^T} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

45. Használjuk fel az $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$ felbontás eredményét.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{15}{4} \end{bmatrix}$$

Ebből az LDL^T-felbontás

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{15}{4} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L^T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Innen pedig az LL^T-felbontás

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{15}}{2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L^T} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{15}}{2} \end{bmatrix}.$$

.

46. Használjuk fel az $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$ felbontás eredményét.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Ebből az LDL^T-felbontás

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L^T} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Innen pedig az LL^T-felbontás

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L^T} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

2.2.6. ILU-felbontás Gauss-eliminációval

47. Adott a $J = \{(1,3),(2,1),(2,3)\}$ pozícióhalmaz, amely a főátló pozícióit nem tartalmazza. A továbbiakban csillagokkal szemléltetjük ezek mátrixbeli helyzetét.

$$\begin{bmatrix} & & * \\ * & & * \\ & & \end{bmatrix}$$

Az a feladatunk, hogy meghatározzuk az $\mathbf{A}$ mátrix J-re illeszkedő faktorizációját. Ez olyan LU-felbontás jelent, ahol az $\mathbf{L}$ és $\mathbf{U}$ mátrix a szokásos - egy apró különbséggel

$$l_{ij} = \begin{cases} l_{ij} & \text{ha } (i,j) \notin J, \\ 0 & \text{ha } (i,j) \in J \end{cases} \qquad u_{ij} = \begin{cases} u_{ij} & \text{ha } (i,j) \notin J, \\ 0 & \text{ha } (i,j) \in J \end{cases}$$

és

$$q_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{ha } (i,j) \notin J, \\ -a_{ij} & \text{ha } (i,j) \in J \end{cases}$$

E három mátrix segítségével fel tudjuk írni az $\mathbf{A}$ mátrix felbontását

$$\mathbf{A} = \mathbf{LU} - \mathbf{Q}$$

alakban. Az ILU-felbontást a Gauss-elimináció segítségével végezhetjük el.
A módszer k. lépése két részből áll.

a) $\widetilde{\mathbf{A}}_\mathbf{k} = \mathbf{P_k} - \mathbf{Q_k}$
és $\mathbf{P_k}$ -ban a k. sorbeli $(k,j) \in J$ és k. oszlopbeli a $(i,k) \in J$ pozíciókat kinullázzuk.

b) $\widetilde{\mathbf{A}}_\mathbf{k+1} := \mathbf{L_k P_k}$, azaz elvégezzük $\mathbf{P_k}$-n a Gauss-Elimináció k. lépését.

A kiindulási mátrixot $\mathbf{A} = \widetilde{\mathbf{A}}_\mathbf{1}$ -mal jelölve
$\mathbf{L} = \mathbf{L_1^{-1}} \cdot \ldots \cdot \mathbf{L_{n-1}^{-1}}$ a Gauss-eliminációból lépéseiből,
$\mathbf{U} = \widetilde{\mathbf{A}}_\mathbf{n}$ a felső háromszög alak és
$\mathbf{Q} = \mathbf{Q_1} + \ldots + \mathbf{Q_{n-1}}$, vagyis a lépésenként félre rakott elemeket összepakoljuk.

1. lépés:

$$\widetilde{\mathbf{A}}_\mathbf{1} = \mathbf{A} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P_1} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Az $\mathbf{L_1}$ mátrixszal való szorzás a Gauss-elimináció 1. lépését jelenti, tehát $\mathbf{P_1}$-et megszorozva balról $\mathbf{L_1}$-gyel, a $\mathbf{P_1}$ első oszlopában a főátló alatti elemek kinullázódnak. Emlékezzünk vissza a Gauss-eliminációnál (LU-felbontásnál) tanultakra! Az $\mathbf{L_1}$ mátrixot a $\mathbf{P_1}$ mátrixból úgy kapjuk, hogy az első oszlopának elemeit $-p_{11}^{(1)}$-gyel leosztjuk. $\mathbf{P_1}$-en elvégezzük az eliminációt.

$$\mathbf{L_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L_1 P_1} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 4 \end{bmatrix}$$

2. lépés:

$$\widetilde{\mathbf{A}}_\mathbf{2} = \mathbf{L_1 P_1} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 4 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P_2} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Az $\mathbf{L_2}$ mátrixszal való szorzás a Gauss-elimináció 2. lépését jelenti, tehát $\mathbf{P_2}$-t megszorozva balról $\mathbf{L_2}$-vel, a $\mathbf{P_2}$ második oszlopában a főátló alatti elemek kinullázódnak. A Gauss-eliminációnál (LU-felbontásnál) tanultak szerint az $\mathbf{L_2}$ mátrixot a $\mathbf{P_2}$ mátrixból úgy kapjuk, hogy a második oszlopának diagonális alatti elemeit $-p_{22}^{(2)}$-vel leosztjuk. $\mathbf{P_2}$-n elvégezzük az eliminációt.

$$\mathbf{L_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{8} & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L_2 P_2} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Tehát mindent megkaptunk ahhoz, hogy kiszámoljuk a kívánt $\mathbf{L}, \mathbf{U}$ és $\mathbf{Q}$ mátrixokat. (Érdemes megjegyezni, hogy $\mathbf{L_k^{-1}}$ megegyezik $\mathbf{L_k}$-val, csupán a főátló alatti elemek (-1)-szeresét kell venni.)

$$\begin{aligned}
\mathbf{L} &= \mathbf{L_1^{-1} L_2^{-1}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{8} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} & 1 \end{bmatrix} \\
\mathbf{U} &= \widetilde{\mathbf{A}}_\mathbf{3} = \mathbf{L_2 P_2} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \\
\mathbf{Q} &= \mathbf{Q_1} + \mathbf{Q_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

48. Adott $\mathbf{J} = \{(3,1),(2,3)\}$ pozícióhalmaz, ami az alábbi pozíciókat jelenti.

$$\begin{bmatrix} & & \\ & & * \\ * & & \end{bmatrix}$$

A feladatunk, hogy meghatározzuk az $\mathbf{A}$ mátrix J-re illeszkedő faktorizációját.

1. lépés:

$$\widetilde{\mathbf{A}}_\mathbf{1} = \mathbf{A} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P_1} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Az $\mathbf{L_1}$ mátrixszal való szorzás a Gauss-elimináció 1. lépését jelenti, tehát $\mathbf{P_1}$-et megszorozva balról $\mathbf{L_1}$-gyel, a $\mathbf{P_1}$ első oszlopában a főátló alatti elemek kinullázódnak. Az $\mathbf{L_1}$ mátrixot a $\mathbf{P_1}$

mátrixból úgy kapjuk, hogy az első oszlopának elemeit $-p_{11}^{(1)}$-gyel leosztjuk. $\mathbf{P_1}$-en elvégezzük az eliminációt.

$$\mathbf{L_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{5}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L_1 P_1} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 0 & -\frac{16}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

2. lépés:

$$\widetilde{\mathbf{A}}_\mathbf{2} = \mathbf{L_1 P_1} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 0 & -\frac{16}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P_2} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 0 & -\frac{16}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Az $\mathbf{L_2}$ mátrixszal való szorzás a Gauss-elimináció 2. lépését jelenti, tehát $\mathbf{P_2}$-t megszorozva balról $\mathbf{L_2}$-vel, a $\mathbf{P_2}$ második oszlopában a főátló alatti elemek kinullázódnak. Az $\mathbf{L_2}$ mátrixot a $\mathbf{P_2}$ mátrixból úgy kapjuk, hogy a második oszlopának diagonális alatti elemeit $-p_{22}^{(2)}$-vel leosztjuk. $\mathbf{P_2}$-n elvégezzük az eliminációt.

$$\mathbf{L_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{16} & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L_2 P_2} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 0 & -\frac{16}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Tehát ki tudjuk számolni a kívánt mátrixokat.

$$\begin{aligned}
\mathbf{L} &= \mathbf{L_1^{-1} L_2^{-1}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{5}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{16} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{5}{3} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{16} & 1 \end{bmatrix} \\
\mathbf{U} &= \widetilde{\mathbf{A}}_\mathbf{3} = \mathbf{L_2 P_2} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 0 & -\frac{16}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \\
\mathbf{Q} &= \mathbf{Q_1} + \mathbf{Q_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

49. Adott $\mathbf{J} = \{(1,3), (2,3)\}$, ami az alábbi pozíciókat jelenti.

$$\begin{bmatrix} & & * \\ & & * \\ & & \end{bmatrix}$$

A feladatunk, hogy meghatározzuk az $\mathbf{A}$ mátrix J-re illeszkedő faktorizációját. Ehhez először ki kell számolni a $\mathbf{P_1}$ és $\mathbf{Q_1}$ mátrixokat.

1. lépés:

$$\widetilde{\mathbf{A}}_\mathbf{1} = \mathbf{A} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P_1} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Az $\mathbf{L_1}$ mátrixszal való szorzás a Gauss-elimináció 1. lépését jelenti, tehát $\mathbf{P_1}$-t megszorozva balról $\mathbf{L_1}$-gyel, a $\mathbf{P_1}$ első oszlopában a főátló alatti elemek kinullázódnak. Az $\mathbf{L_1}$ mátrixot a $\mathbf{P_1}$ mátrixból úgy kapjuk, hogy az első oszlopának elemeit $-p_{11}^{(1)}$-gyel leosztjuk. $\mathbf{P_1}$-en elvégezzük az eliminációt.

$$\mathbf{L_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{5} & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L_1 P_1} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

2. lépés:

$$\widetilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{2}} = \mathbf{L_1P_1} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P_2} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Az $\mathbf{L_2}$ mátrixszal való szorzás a Gauss-elimináció 2. lépését jelenti, tehát $\mathbf{P_2}$-t megszorozva balról $\mathbf{L_2}$-vel, a $\mathbf{P_2}$ második oszlopában a főátló alatti elemek kinullázódnak. Az $\mathbf{L_2}$ mátrixot a $\mathbf{P_2}$ mátrixból úgy kapjuk, hogy a második oszlopának diagonális alatti elemeit $-p_{22}^{(2)}$-vel leosztjuk. $\mathbf{P_2}$-n elvégezzük az eliminációt.

$$\mathbf{L_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L_2P_2} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Végül, a már kiszámolt mátrixokat felhasználhatjuk a kívánt $\mathbf{L}, \mathbf{U}$ és $\mathbf{Q}$ kiszámítására.

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \mathbf{L_1^{-1}L_2^{-1}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{5} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{U} &= \widetilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{3}} = \mathbf{L_2P_2} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \\ \mathbf{Q} &= \mathbf{Q_1} + \mathbf{Q_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

50. Adott $\mathbf{J} = \{(1,2),(1,3),(2,3)\}$, ami az alábbi pozíciókat jelenti.

$$\begin{bmatrix} & * & * \\ & & * \\ & & \end{bmatrix}$$

A feladatunk, hogy meghatározzuk az $\mathbf{A}$ mátrix J-re illeszkedő faktorizációját. Ehhez először ki kell számolni a $\mathbf{P_1}$ és $\mathbf{Q_1}$ mátrixokat.

1. lépés:

$$\widetilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{1}} = \mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{P_1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 5 \\ 7 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad \Rightarrow \quad \mathbf{Q_1} = \begin{bmatrix} 0 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Az $\mathbf{L_1}$ mátrixszal való szorzás a Gauss-elimináció 1. lépését jelenti, tehát $\mathbf{P_1}$-t megszorozva balról $\mathbf{L_1}$-gyel, a $\mathbf{P_1}$ első oszlopában a főátló alatti elemek kinullázódnak. Az $\mathbf{L_1}$ mátrixot a $\mathbf{P_1}$ mátrixból úgy kapjuk, hogy az első oszlopának elemeit $-p_{11}^{(1)}$-gyel leosztjuk. $\mathbf{P_1}$-en elvégezzük az eliminációt.

$$\mathbf{L_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{5}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{7}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L_1P_1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

2. lépés:

$$\widetilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{2}} = \mathbf{L_1P_1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P_2} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Az $\mathbf{L_2}$ mátrixszal való szorzás a Gauss-elimináció 2. lépését jelenti, tehát $\mathbf{P_2}$-t megszorozva balról $\mathbf{L_2}$-vel, a $\mathbf{P_2}$ második oszlopában a főátló alatti elemek kinullázódnak. Az $\mathbf{L_2}$ mátrixot a $\mathbf{P_2}$ mátrixból úgy kapjuk, hogy a második oszlopának diagonális alatti elemeit $-p_{22}^{(2)}$-vel leosztjuk. $\mathbf{P_2}$-n elvégezzük az eliminációt.

$$\mathbf{L_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L_2 P_2} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Az eddig kiszámolt mátrixok segítségével megkaphatjuk az eredményt.

$$\begin{aligned}
\mathbf{L} &= \mathbf{L_1^{-1} L_2^{-1}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{5}{2} & 1 & 0 \\ \frac{7}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{5}{2} & 1 & 0 \\ \frac{7}{2} & \frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix} \\
\mathbf{U} &= \widetilde{\mathbf{A}}_\mathbf{3} = \mathbf{L_2 P_2} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \\
\mathbf{Q} &= \mathbf{Q_1} + \mathbf{Q_2} = \begin{bmatrix} 0 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

51. Adott $\mathbf{J} = \{(1,2),(2,4),(3,1),(3,4),(4,2)\}$ pozícióhalmaz, ami az alábbi pozíciókat jelenti.

$$\begin{bmatrix} & * & & \\ & & & * \\ * & & & * \\ & * & & \end{bmatrix}$$

1. lépés:

$$\widetilde{\mathbf{A}}_\mathbf{1} = \mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{P_1} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 & -4 \\ -3 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q_1} = \begin{bmatrix} 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Az $\mathbf{L_1}$ mátrixszal való szorzás a Gauss-elimináció 1. lépését jelenti, tehát $\mathbf{P_1}$-t megszorozva balról $\mathbf{L_1}$-gyel, a $\mathbf{P_1}$ első oszlopában a főátló alatti elemek kinullázódnak. Az $\mathbf{L_1}$ mátrixot a $\mathbf{P_1}$ mátrixból úgy kapjuk, hogy az első oszlopának elemeit $-p_{11}^{(1)}$-gyel leosztjuk. $\mathbf{P_1}$-en elvégezzük az eliminációt.

$$\mathbf{L_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{2}{3} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L_1 P_1} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 3 & 5 & -3 \\ 0 & 4 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{17}{3} \end{bmatrix}$$

2. lépés:

$$\widetilde{\mathbf{A}}_\mathbf{2} = \mathbf{L_1 P_1} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 3 & 5 & -3 \\ 0 & 4 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{17}{3} \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{P_2} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & \frac{17}{3} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Az $\mathbf{L_2}$ mátrixszal való szorzás a Gauss-elimináció 2. lépését jelenti, tehát $\mathbf{P_2}$-t megszorozva balról $\mathbf{L_2}$-vel, a $\mathbf{P_2}$ második oszlopában a főátló alatti elemek kinullázódnak. Az $\mathbf{L_2}$ mátrixot a $\mathbf{P_2}$ mátrixból úgy kapjuk, hogy a második oszlopának diagonális alatti elemeit $-p_{22}^{(2)}$-vel leosztjuk. $\mathbf{P_2}$-n elvégezzük az eliminációt.

$$\mathbf{L_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{4}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L_2P_2} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{11}{3} & 4 \\ 0 & 0 & -1 & \frac{17}{3} \end{bmatrix}$$

3. lépés:

$$\widetilde{\mathbf{A}}_\mathbf{3} = \mathbf{L_2P_2} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{11}{3} & 4 \\ 0 & 0 & -1 & \frac{17}{3} \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{P_3} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{11}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \frac{17}{3} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q_3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Az $\mathbf{L_3}$ mátrixszal való szorzás a Gauss-elimináció 3. lépését jelenti, tehát $\mathbf{P_3}$-t megszorozva balról $\mathbf{L_3}$-mal, a $\mathbf{P_3}$ harmadik oszlopában a főátló alatti elemek kinullázódnak. Az $\mathbf{L_3}$ mátrixot a $\mathbf{P_3}$ mátrixból úgy kapjuk, hogy a harmadik oszlopának diagonális alatti elemeit $-p_{33}^{(3)}$-mal leosztjuk. $\mathbf{P_3}$-n elvégezzük az eliminációt.

$$\mathbf{L_3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{11} & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L_3P_3} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{11}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{17}{3} \end{bmatrix}$$

Végül kiszámolhatjuk az eredményeket.

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \mathbf{L_1^{-1}L_2^{-1}L_3^{-1}} = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{2}{3} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{4}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{11} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{4}{3} & 1 & 0 \\ -\frac{2}{3} & 0 & -\frac{3}{11} & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\mathbf{U} = \widetilde{\mathbf{A}}_\mathbf{4} = \mathbf{L_3P_3} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{11}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{17}{3} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q_1} + \mathbf{Q_2} + \mathbf{Q_3} = \begin{bmatrix} 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2.2.7. QR-felbontás Gram–Schmidt-ortogonalizációval

52. Egy nagyon jól használható módszert ad a kezünkbe a lineáris egyenletrendszerek megoldásához a QR-felbontás. Miért is jó a QR-felbontás a lineáris egyenletrendszerek megoldásához? A válasz nagyon egyszerű, természetesen a mátrixok speciális tulajdonságai miatt igaz az alábbi ekvivalencia. A $\mathbf{Q}$ mátrix ortogonális mátrix, míg az $\mathbf{R}$ mátrix egy felső háromszögmátrix.

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \iff \mathbf{QRx} = \mathbf{b} \iff \mathbf{Rx} = \mathbf{Q^Tb},$$

A feladat megoldásához a $\mathbf{Q}$ és az $\mathbf{R}$ mátrixokat a következő alakban keressük.

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{q_1} & \mathbf{q_2} & \mathbf{q_3} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ 0 & r_{22} & r_{23} \\ 0 & 0 & r_{33} \end{bmatrix}$$

Az egyszerűség kedvéért a $\mathbf{Q}$ mátrixot oszlopvektoronként fogjuk előállítani. $\mathbf{Q}$ és $\mathbf{R}$ előállításához a Gram–Schmidt-ortogonalizáció képleteit használjuk.

$$\begin{aligned} r_{11} &= \|\mathbf{a_1}\|_2 \\ \mathbf{q_1} &= \frac{1}{r_{11}}\mathbf{a_1} \end{aligned}$$

$k = 2, \ldots, n$ -re a következő képleteket használjuk.

$$\begin{aligned} r_{jk} &= <\mathbf{a_k}, \mathbf{q_j}> \\ r_{kk} &= \|\,\mathbf{a_k} - \sum_{j=1}^{k-1} r_{jk}\mathbf{q_j}\,\|_2 \\ \mathbf{q_k} &= \frac{1}{r_{kk}}\left(\mathbf{a_k} - \sum_{j=1}^{k-1} r_{jk}\mathbf{q_j}\right) \end{aligned}$$

Fontos megjegyezni, hogy kézi számolás esetén nem kell feltétlenül ragaszkodni a normált vektorok előállításához, ezt a végén egy egyszerű kompenzációval elő tudjuk állítani. Ezt majd egy későbbi feladat kapcsán ismertetjük.
A feladatbeli mátrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 6 & 8 & 0 \\ 3 & -3 & 2 \end{bmatrix},$$

melynek a QR-felbontását keressük. Az előbbiekben leírtaknak megfelelően számítsuk ki az ismeretleneket. Az r_{kk} elem meghatározása előtt célszerű kiszámolni az

$$\mathbf{a_k} - \sum_{j=1}^{k-1} r_{jk}\mathbf{q_j}$$

vektort, ezzel könnyítve a norma számolását.

$$\begin{aligned} r_{11} &= \|\,\mathbf{a_1}\|_2 = \sqrt{2^2+6^2+3^2} = \sqrt{4+36+9} = \sqrt{49} = 7 \\ \mathbf{q_1} &= \frac{1}{r_{11}}\mathbf{a_1} = \frac{1}{7}\cdot\begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_{12} &= <\mathbf{a_2}, \mathbf{q_1}>= \frac{1}{7}\cdot(5\cdot 2 + 8\cdot 6 + (-3)\cdot 3) = \frac{49}{7} = 7 \\ \mathbf{a_2} - r_{12}\mathbf{q_1} &= \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ -3 \end{bmatrix} - 7\cdot\frac{1}{7}\cdot\begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -6 \end{bmatrix} \\ r_{22} &= \|\,\mathbf{a_2} - r_{12}\mathbf{q_1}\,\|_2 = \sqrt{3^2+2^2+(-6)^2} = \sqrt{9+4+36} = \sqrt{49} = 7 \\ \mathbf{q_2} &= \frac{1}{r_{22}}(\,\mathbf{a_2} - r_{12}\mathbf{q_1}\,) = \frac{1}{7}\cdot\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -6 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r_{13} &= <\mathbf{a_3},\mathbf{q_1}>= \frac{1}{7}\cdot(4\cdot 2+0\cdot 6+2\cdot 3)=\frac{14}{7}=2\\
r_{23} &= <\mathbf{a_3},\mathbf{q_2}>= \frac{1}{7}\cdot(4\cdot 3+0\cdot 2+2\cdot(-6))=0\\
\mathbf{a_3}-r_{13}\mathbf{q_1}-r_{23}\mathbf{q_2} &= \begin{bmatrix}4\\0\\2\end{bmatrix}-2\cdot\frac{1}{7}\cdot\begin{bmatrix}2\\6\\3\end{bmatrix}=\frac{1}{7}\cdot\begin{bmatrix}24\\-12\\8\end{bmatrix}=\frac{4}{7}\cdot\begin{bmatrix}6\\-3\\2\end{bmatrix}\\
r_{33} &= \|\,\mathbf{a_3}-r_{13}\mathbf{q_1}-r_{23}\mathbf{q_2}\,\|_2=\frac{4}{7}\cdot\sqrt{6^2+(-3)^2+2^2}=\frac{4}{7}\cdot 7=4\\
\mathbf{q_3} &= \frac{1}{r_{33}}\,(\,\mathbf{a_3}-r_{13}\mathbf{q_1}-r_{23}\mathbf{q_2}\,)=\frac{1}{7}\cdot\begin{bmatrix}6\\-3\\2\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Tehát a $\mathbf{Q}$ és $\mathbf{R}$ mátrixok

$$\mathbf{Q}=\frac{1}{7}\cdot\begin{bmatrix}2&3&6\\6&2&-3\\3&-6&2\end{bmatrix},\quad \mathbf{R}=\begin{bmatrix}7&7&2\\0&7&0\\0&0&7\end{bmatrix}.$$

53. Az előző feladatban ismertetett módszer alapján készítjük el az

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}3&6&-1\\4&8&7\\0&-2&3\end{bmatrix}$$

mátrix QR-felbontását.

$$\begin{aligned}
r_{11} &= \|\,\mathbf{a_1}\|_2=\sqrt{3^2+4^2+0^2}=\sqrt{9+16+0}=\sqrt{25}=5\\
\mathbf{q_1} &= \frac{1}{r_{11}}\,\mathbf{a_1}=\frac{1}{5}\cdot\begin{bmatrix}3\\4\\0\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r_{12} &= <\mathbf{a_2},\mathbf{q_1}>= \frac{1}{5}\cdot(6\cdot 3+8\cdot 4+(-2)\cdot 0)=\frac{50}{5}=10\\
\mathbf{a_2}-r_{12}\mathbf{q_1} &= \begin{bmatrix}6\\8\\-2\end{bmatrix}-10\cdot\frac{1}{5}\cdot\begin{bmatrix}3\\4\\0\end{bmatrix}=\frac{1}{5}\cdot\begin{bmatrix}0\\0\\-2\end{bmatrix}\\
r_{22} &= \|\,\mathbf{a_2}-r_{12}\mathbf{q_1}\,\|_2=\sqrt{0^2+0^2+(-2)^2}=\sqrt{4}=2\\
\mathbf{q_2} &= \frac{1}{r_{22}}\,(\,\mathbf{a_2}-r_{12}\mathbf{q_1}\,)=\frac{1}{2}\cdot\begin{bmatrix}0\\0\\-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\-1\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r_{13} &= <\mathbf{a_3},\mathbf{q_1}>= \frac{1}{5}\cdot((-1)\cdot 3+7\cdot 4+3\cdot 0)=\frac{25}{5}=5\\
r_{23} &= <\mathbf{a_3},\mathbf{q_2}>= (-1)\cdot 0+7\cdot 0+3\cdot(-1)=-3\\
\mathbf{a_3}-r_{13}\mathbf{q_1}-r_{23}\mathbf{q_2} &= \begin{bmatrix}-1\\7\\3\end{bmatrix}-5\cdot\frac{1}{5}\cdot\begin{bmatrix}3\\4\\0\end{bmatrix}-(-3)\cdot\begin{bmatrix}0\\0\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4\\3\\0\end{bmatrix}\\
r_{33} &= \|\,\mathbf{a_3}-r_{13}\mathbf{q_1}-r_{23}\mathbf{q_2}\,\|_2=\sqrt{(-4)^2+3^2+0^2}=\sqrt{25}=5
\end{aligned}$$

$$\mathbf{q_3} = \frac{1}{r_{33}}\left(\mathbf{a_3} - r_{13}\mathbf{q_1} - r_{23}\mathbf{q_2}\right) = \frac{1}{5}\cdot\begin{bmatrix}-4\\3\\0\end{bmatrix}$$

Tehát a $\mathbf{Q}$ és $\mathbf{R}$ mátrixok

$$\mathbf{Q} = \frac{1}{5}\cdot\begin{bmatrix}3 & 0 & -4\\4 & 0 & 3\\0 & -5 & 0\end{bmatrix},\quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix}5 & 10 & 5\\0 & 2 & -3\\0 & 0 & 5\end{bmatrix}.$$

54. Az előző feladatban ismertetett módszer alapján készítjük el az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}0 & 4 & 1\\5 & 7 & -2\\0 & 3 & 5\end{bmatrix}$$

mátrix QR-felbontását.

$$r_{11} = \|\mathbf{a_1}\|_2 = \sqrt{0^2+5^2+0^2} = \sqrt{0+25+0} = \sqrt{25} = 5$$

$$\mathbf{q_1} = \frac{1}{r_{11}}\mathbf{a_1} = \frac{1}{5}\mathbf{a_1} = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$$

$$r_{12} = <\mathbf{a_2},\mathbf{q_1}> = 4\cdot 0 + 7\cdot 1 + 3\cdot 0 = 7$$

$$\mathbf{a_2} - r_{12}\mathbf{q_1} = \begin{bmatrix}4\\7\\3\end{bmatrix} - 7\cdot\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4\\0\\3\end{bmatrix}$$

$$r_{22} = \|\mathbf{a_2} - r_{12}\mathbf{q_1}\|_2 = \sqrt{4^2+0^2+3^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$\mathbf{q_2} = \frac{1}{r_{22}}\left(\mathbf{a_2} - r_{12}\mathbf{q_1}\right) = \frac{1}{5}\cdot\begin{bmatrix}4\\0\\3\end{bmatrix}$$

$$r_{13} = <\mathbf{a_3},\mathbf{q_1}> = 1\cdot 0 + (-2)\cdot 1 + 5\cdot 0 = -2$$

$$r_{23} = <\mathbf{a_3},\mathbf{q_2}> = \frac{1}{5}\cdot(1\cdot 4 + (-2)\cdot 0 + 5\cdot 3) = \frac{19}{5}$$

$$\mathbf{a_3} - r_{13}\mathbf{q_1} - r_{23}\mathbf{q_2} = \begin{bmatrix}1\\-2\\5\end{bmatrix} - (-2)\cdot\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} - \frac{19}{5}\cdot\frac{1}{5}\cdot\begin{bmatrix}4\\0\\3\end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{25}\cdot\begin{bmatrix}25+0-76\\-50+50-0\\125-0-57\end{bmatrix} = \frac{1}{25}\cdot\begin{bmatrix}-51\\0\\68\end{bmatrix} = \frac{17}{25}\cdot\begin{bmatrix}-3\\0\\4\end{bmatrix}$$

$$r_{33} = \|\mathbf{a_3} - r_{13}\mathbf{q_1} - r_{23}\mathbf{q_2}\|_2 = \frac{17}{25}\cdot\sqrt{(-3)^2+0^2+4^2} = \frac{17}{5}$$

$$\mathbf{q_3} = \frac{1}{r_{33}}\left(\mathbf{a_3} - r_{13}\mathbf{q_1} - r_{23}\mathbf{q_2}\right) = \frac{1}{5}\cdot\begin{bmatrix}-3\\0\\4\end{bmatrix}$$

Tehát a $\mathbf{Q}$ és $\mathbf{R}$ mátrixok

$$\mathbf{Q} = \frac{1}{5}\cdot\begin{bmatrix}0 & 4 & -3\\5 & 0 & 0\\0 & 3 & 4\end{bmatrix},\quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix}5 & 7 & -2\\0 & 5 & \frac{19}{5}\\0 & 0 & \frac{17}{5}\end{bmatrix}.$$

55. Az előző feladatban ismertetett módszer alapján készítjük el az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0,8 \\ 0 & 0 & 0,2 \\ 1 & 0,7 & 0,7 \end{bmatrix}$$

mátrix QR-felbontását.

$$\begin{aligned} r_{11} &= \|\mathbf{a_1}\|_2 = \sqrt{0^2+0^2+1^2} = \sqrt{0+0+1} = \sqrt{1} = 1 \\ \mathbf{q_1} &= \frac{1}{r_{11}}\mathbf{a_1} = \frac{1}{1}\mathbf{a_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_{12} &= <\mathbf{a_2}, \mathbf{q_1}>= 1\cdot 0 + 0\cdot 0 + 0,7\cdot 1 = 0,7 \\ \mathbf{a_2} - r_{12}\mathbf{q_1} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0,7 \end{bmatrix} - 0,7\cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ r_{22} &= \|\mathbf{a_2} - r_{12}\mathbf{q_1}\|_2 = \sqrt{1^2+0^2+0^2} = \sqrt{1} = 1 \\ \mathbf{q_2} &= \frac{1}{r_{22}}(\mathbf{a_2} - r_{12}\mathbf{q_1}) = \frac{1}{1}\cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_{13} &= <\mathbf{a_3}, \mathbf{q_1}>= 0,8\cdot 0 + 0,2\cdot 0 + 0,7\cdot 1 = 0,7 \\ r_{23} &= <\mathbf{a_3}, \mathbf{q_2}>= 0,8\cdot 1 + 0,2\cdot 0 + 0,7\cdot 0 = 0,8 \\ \mathbf{a_3} - r_{13}\mathbf{q_1} - r_{23}\mathbf{q_2} &= \begin{bmatrix} 0,8 \\ 0,2 \\ 0,7 \end{bmatrix} - 0,7\cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - 0,8\cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,2 \\ 0 \end{bmatrix} \\ r_{33} &= \|\mathbf{a_3} - r_{13}\mathbf{q_1} - r_{23}\mathbf{q_2}\|_2 = \sqrt{0^2+0,2^2+0^2} = 0,2 \\ \mathbf{q_3} &= \frac{1}{r_{33}}(\mathbf{a_3} - r_{13}\mathbf{q_1} - r_{23}\mathbf{q_2}) = \frac{1}{0,2}\cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0,2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Tehát a $\mathbf{Q}$ és $\mathbf{R}$ mátrixok

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0,7 & 0,7 \\ 0 & 1 & 0,8 \\ 0 & 0 & 0,2 \end{bmatrix}.$$

.

56. Először keressük meg az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 2 & 12 & 0 \\ 1 & 12 & 3 \end{bmatrix}$$

mátrix QR-felbontását az eddig megismert módon, majd ezt követően egy egyszerűsített módszert mutatunk be.

a) Az eddig bemutatott módszer segítségével oldjuk meg a feladatot.

$$\begin{aligned} r_{11} &= \|\mathbf{a_1}\|_2 = \sqrt{2^2+2^2+1^2} = \sqrt{4+4+1} = \sqrt{9} = 3 \\ \mathbf{q_1} &= \frac{1}{r_{11}}\mathbf{a_1} = \frac{1}{3}\cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r_{12} &= < \mathbf{a_2}, \mathbf{q_1} >= \frac{1}{3} \cdot (0 \cdot 2 + 12 \cdot 2 + 12 \cdot 1) = \frac{36}{3} = 12 \\
\mathbf{a_2} - r_{12}\mathbf{q_1} &= \begin{bmatrix} 2 \\ 12 \\ 12 \end{bmatrix} - 12 \cdot \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix} \\
r_{22} &= \| \mathbf{a_2} - r_{12}\mathbf{q_1} \|_2 = \sqrt{(-8)^2 + 4^2 + 8^2} = \sqrt{144} = 12 \\
\mathbf{q_2} &= \frac{1}{r_{22}} (\mathbf{a_2} - r_{12}\mathbf{q_1}) = \frac{1}{12} \cdot \begin{bmatrix} -8 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r_{13} &= < \mathbf{a_3}, \mathbf{q_1} >= \frac{1}{3} \cdot (3 \cdot 2 + 0 \cdot 2 + 3 \cdot 1) = \frac{9}{3} = 3 \\
r_{23} &= < \mathbf{a_3}, \mathbf{q_2} >= \frac{1}{3} \cdot (3 \cdot (-2) + 0 \cdot 1 + 3 \cdot 2) = 0 \\
\mathbf{a_3} - r_{13}\mathbf{q_1} - r_{23}\mathbf{q_2} &= \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} - 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} \\
r_{33} &= \| \mathbf{a_3} - r_{13}\mathbf{q_1} - r_{23}\mathbf{q_2} \|_2 = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3 \\
\mathbf{q_3} &= \frac{1}{r_{33}} (\mathbf{a_3} - r_{13}\mathbf{q_1} - r_{23}\mathbf{q_2}) = \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Tehát a $\mathbf{Q}$ és $\mathbf{R}$ mátrixok

$$\mathbf{Q} = \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 3 & 12 & 3 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

.

b) Az eddigi megoldások során, minden lépésben normálva tartottuk a $\mathbf{Q}$ mátrix oszlopvektorait. A mostani megoldásban ezt a normálást az eljárás végén hajtjuk végre. Így menet közben nem kell a normálásból fakadó esetleges nehezebb számítást okozó számokkal számolni. Ehhez az alábbi módosított képleteket használjuk.

$$\begin{aligned}
\widetilde{r}_{11} &= 1 \\
\widetilde{\mathbf{q}}_\mathbf{1} &= \mathbf{a_1}
\end{aligned}$$

$k = 2, \ldots, n$ -re a következő képleteket használjuk.

$$\begin{aligned}
\widetilde{r}_{jk} &= \frac{< \mathbf{a_k}, \widetilde{\mathbf{q}}_\mathbf{j} >}{< \widetilde{\mathbf{q}}_\mathbf{j}, \widetilde{\mathbf{q}}_\mathbf{j} >} \quad (j = 1, \ldots, k-1) \\
\widetilde{r}_{kk} &= 1 \\
\widetilde{\mathbf{q}}_\mathbf{k} &= \mathbf{a_k} - \sum_{j=1}^{k-1} \widetilde{r}_{jk} \widetilde{\mathbf{q}}_\mathbf{j}
\end{aligned}$$

Fontos megjegyeznünk, hogy a mátrixokat az eljárás végén kompenzálni kell a $\widetilde{\mathbf{Q}}$ mátrix oszlopvektorainak normáival.

$$\begin{aligned}
\widetilde{r}_{11} &= 1 \\
\widetilde{\mathbf{q}}_\mathbf{1} &= \mathbf{a_1} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \\
\widetilde{r}_{12} &= \frac{<\mathbf{a_2}, \widetilde{\mathbf{q}}_\mathbf{1}>}{<\widetilde{\mathbf{q}}_\mathbf{1}, \widetilde{\mathbf{q}}_\mathbf{1}>} = \frac{0\cdot 2 + 12\cdot 2 + 12\cdot 1}{2\cdot 2 + 2\cdot 2 + 1\cdot 1} = \frac{36}{9} = 4 \\
\widetilde{r}_{22} &= 1 \\
\widetilde{\mathbf{q}}_\mathbf{2} &= \mathbf{a_2} - \widetilde{\mathbf{r}}_\mathbf{12}\widetilde{\mathbf{q}}_\mathbf{1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 12 \\ 12 \end{bmatrix} - 4\cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\widetilde{r}_{13} &= \frac{<\mathbf{a_3}, \widetilde{\mathbf{q}}_\mathbf{1}>}{<\widetilde{\mathbf{q}}_\mathbf{1}, \widetilde{\mathbf{q}}_\mathbf{1}>} = \frac{3\cdot 2 + 0\cdot 2 + 3\cdot 1}{2\cdot 2 + 2\cdot 2 + 1\cdot 1} = \frac{9}{9} = 1 \\
\widetilde{r}_{23} &= \frac{<\mathbf{a_3}, \widetilde{\mathbf{q}}_\mathbf{2}>}{<\widetilde{\mathbf{q}}_\mathbf{2}, \widetilde{\mathbf{q}}_\mathbf{2}>} = \frac{3\cdot(-8) + 0\cdot 4 + 3\cdot 8}{(-8)\cdot(-8) + 4\cdot 4 + 8\cdot 8} = \frac{0}{144} = 0 \\
\widetilde{r}_{33} &= 1
\end{aligned}$$

$$\widetilde{\mathbf{q}}_\mathbf{3} = \mathbf{a_3} - \widetilde{r}_{13}\widetilde{\mathbf{q}}_\mathbf{1} - \widetilde{r}_{23}\widetilde{\mathbf{q}}_\mathbf{2} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} - 1\cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} - 0\cdot \begin{bmatrix} -8 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Ezt követően $\widetilde{\mathbf{Q}}$ oszlopait osztjuk a 2-es normájukkal , míg az $\widetilde{\mathbf{R}}$ sorait ugyanezekkel az értékekkel szorozzuk.

$$\|\widetilde{\mathbf{q}}_\mathbf{1}\|_2 = 3, \quad \|\widetilde{\mathbf{q}}_\mathbf{2}\|_2 = 12, \quad \|\widetilde{\mathbf{q}}_\mathbf{3}\|_2 = 3$$

$$\widetilde{\mathbf{Q}} = \begin{bmatrix} 2 & -8 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & 8 & 2 \end{bmatrix} \quad \longrightarrow \quad \mathbf{Q} = \frac{1}{3}\cdot \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\widetilde{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \longrightarrow \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 3 & 12 & 3 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Nem meglepő módon mind a két módszer azonos megoldást adott.

57. Az előző feladat második részében megismertük a QR-felbontás meghatározásának egy egyszerűsített változatát. Most ennek a módszernek a segítségével oldjuk meg a kitűzött példát.

$$\begin{aligned}
\widetilde{r}_{11} &= 1 \\
\widetilde{\mathbf{q}}_\mathbf{1} &= \mathbf{a_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \\
\widetilde{r}_{12} &= \frac{<\mathbf{a_2}, \widetilde{\mathbf{q}}_\mathbf{1}>}{<\widetilde{\mathbf{q}}_\mathbf{1}, \widetilde{\mathbf{q}}_\mathbf{1}>} = \frac{4\cdot 2 + 5\cdot 2 + 2\cdot 2}{1\cdot 1 + 2\cdot 2 + 2\cdot 2} = \frac{18}{9} = 2 \\
\widetilde{r}_{22} &= 1 \\
\widetilde{\mathbf{q}}_\mathbf{2} &= \mathbf{a_2} - \widetilde{\mathbf{r}}_\mathbf{12}\widetilde{\mathbf{q}}_\mathbf{1} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} - 2\cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\widetilde{r}_{13} &= \frac{<\mathbf{a_3},\widetilde{\mathbf{q}}_\mathbf{1}>}{<\widetilde{\mathbf{q}}_\mathbf{1},\widetilde{\mathbf{q}}_\mathbf{1}>} = \frac{6\cdot 1+6\cdot 2+9\cdot 2}{1\cdot 1+2\cdot 2+2\cdot 2} = \frac{36}{9} = 4\\
\widetilde{r}_{23} &= \frac{<\mathbf{a_3},\widetilde{\mathbf{q}}_\mathbf{2}>}{<\widetilde{\mathbf{q}}_\mathbf{2},\widetilde{\mathbf{q}}_\mathbf{2}>} = \frac{6\cdot 2+6\cdot 1+9\cdot(-2)}{2\cdot 2+1\cdot 1+(-2)\cdot(-2)} = \frac{0}{9} = 0\\
\widetilde{r}_{33} &= 1\\
\widetilde{\mathbf{q}}_\mathbf{3} &= \mathbf{a_3} - \widetilde{r}_{13}\widetilde{\mathbf{q}}_\mathbf{1} - \widetilde{r}_{23}\widetilde{\mathbf{q}}_\mathbf{2} = \begin{bmatrix}6\\6\\9\end{bmatrix} - 4\cdot\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix} - 0\cdot\begin{bmatrix}2\\1\\-2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\-2\\1\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Ezt követően $\widetilde{\mathbf{Q}}$ oszlopait osztjuk a 2-es normájukkal, míg az $\widetilde{\mathbf{R}}$ sorait ugyanezekkel az értékekkel szorozzuk.

$$\|\widetilde{\mathbf{q}}_\mathbf{1}\|_2 = 3, \quad \|\widetilde{\mathbf{q}}_\mathbf{2}\|_2 = 3, \quad \|\widetilde{\mathbf{q}}_\mathbf{3}\|_2 = 3$$

$$\widetilde{\mathbf{Q}} = \begin{bmatrix}1 & 2 & 2\\2 & 1 & -2\\2 & -2 & 1\end{bmatrix} \quad\longrightarrow\quad \mathbf{Q} = \frac{1}{3}\cdot\begin{bmatrix}1 & 2 & 2\\2 & 1 & -2\\2 & -2 & 1\end{bmatrix}$$

$$\widetilde{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix}1 & 2 & 4\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix} \quad\longrightarrow\quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix}3 & 6 & 12\\0 & 3 & 0\\0 & 0 & 3\end{bmatrix}$$

58. Az előző feladatban használt módszert alkalmazzuk.

$$\begin{aligned}
\widetilde{r}_{11} &= 1\\
\widetilde{\mathbf{q}}_\mathbf{1} &= \mathbf{a_1} = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\\
\widetilde{r}_{12} &= \frac{<\mathbf{a_2},\widetilde{\mathbf{q}}_\mathbf{1}>}{<\widetilde{\mathbf{q}}_\mathbf{1},\widetilde{\mathbf{q}}_\mathbf{1}>} = \frac{6\cdot 1+5\cdot 1+7\cdot 1}{1\cdot 1+1\cdot 1+1\cdot 1} = \frac{18}{3} = 6\\
\widetilde{r}_{22} &= 1\\
\widetilde{\mathbf{q}}_\mathbf{2} &= \mathbf{a_2} - \widetilde{\mathbf{r}}_\mathbf{12}\widetilde{\mathbf{q}}_\mathbf{1} = \begin{bmatrix}6\\5\\7\end{bmatrix} - 6\cdot\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\widetilde{r}_{13} &= \frac{<\mathbf{a_3},\widetilde{\mathbf{q}}_\mathbf{1}>}{<\widetilde{\mathbf{q}}_\mathbf{1},\widetilde{\mathbf{q}}_\mathbf{1}>} = \frac{1\cdot 1+0\cdot 1+5\cdot 1}{1\cdot 1+1\cdot 1+1\cdot 1} = \frac{6}{3} = 2\\
\widetilde{r}_{23} &= \frac{<\mathbf{a_3},\widetilde{\mathbf{q}}_\mathbf{2}>}{<\widetilde{\mathbf{q}}_\mathbf{2},\widetilde{\mathbf{q}}_\mathbf{2}>} = \frac{1\cdot 0+0\cdot(-1)+5\cdot 1}{0\cdot 0+(-1)\cdot(-1)+1\cdot 1} = \frac{5}{2}\\
\widetilde{r}_{33} &= 1\\
\widetilde{\mathbf{q}}_\mathbf{3} &= \mathbf{a_3} - \widetilde{r}_{13}\widetilde{\mathbf{q}}_\mathbf{1} - \widetilde{r}_{23}\widetilde{\mathbf{q}}_\mathbf{2} = \begin{bmatrix}1\\0\\5\end{bmatrix} - 2\cdot\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} - \frac{5}{2}\cdot\begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Ezt követően $\widetilde{\mathbf{Q}}$ oszlopait osztjuk a 2-es normájukkal, míg az $\widetilde{\mathbf{R}}$ sorait ugyanezekkel az értékekkel szorozzuk.

$$\|\widetilde{\mathbf{q}}_\mathbf{1}\|_2 = \sqrt{3}, \quad \|\widetilde{\mathbf{q}}_\mathbf{2}\|_2 = \sqrt{2}, \quad \|\widetilde{\mathbf{q}}_\mathbf{3}\|_2 = \frac{1}{2}\sqrt{6}$$

$$\widetilde{\mathbf{Q}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \longrightarrow \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

$$\widetilde{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \mathbf{R} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 6\sqrt{3} & 2\sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{2} & \frac{5}{2}\sqrt{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{6} \end{bmatrix}$$

59. Az előző feladatban használt módszert alkalmazzuk.

$$\begin{aligned}
\widetilde{r}_{11} &= 1 \\
\widetilde{\mathbf{q}}_\mathbf{1} &= \mathbf{a_1} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
\widetilde{r}_{12} &= \frac{<\mathbf{a_2}, \widetilde{\mathbf{q}}_\mathbf{1}>}{<\widetilde{\mathbf{q}}_\mathbf{1}, \widetilde{\mathbf{q}}_\mathbf{1}>} = \frac{2\cdot(-1)+1\cdot 0+2\cdot 1}{(-1)\cdot(-1)+0\cdot 0+1\cdot 1} = \frac{0}{2} = 0 \\
\widetilde{r}_{22} &= 1 \\
\widetilde{\mathbf{q}}_\mathbf{2} &= \mathbf{a_2} - \widetilde{\mathbf{r}}_\mathbf{12}\widetilde{\mathbf{q}}_\mathbf{1} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} - 0 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\widetilde{r}_{13} &= \frac{<\mathbf{a_3}, \widetilde{\mathbf{q}}_\mathbf{1}>}{\widetilde{<\mathbf{q_1}}, \widetilde{\mathbf{q}}_\mathbf{1}>} = \frac{5\cdot(-1)+2\cdot 0+3\cdot 1}{(-1)\cdot(-1)+0\cdot 0+1\cdot 1} = -\frac{2}{2} = -1 \\
\widetilde{r}_{23} &= \frac{<\mathbf{a_3}, \widetilde{\mathbf{q}}_\mathbf{2}>}{<\widetilde{\mathbf{q}}_\mathbf{2}, \widetilde{\mathbf{q}}_\mathbf{2}>} = \frac{5\cdot 2+2\cdot 1+3\cdot 2}{2\cdot 2+1\cdot 1+2\cdot 2} = \frac{18}{9} = 2 \\
\widetilde{r}_{33} &= 1 \\
\widetilde{\mathbf{q}}_\mathbf{3} &= \mathbf{a_3} - \widetilde{r}_{13}\widetilde{\mathbf{q}}_\mathbf{1} - \widetilde{r}_{23}\widetilde{\mathbf{q}}_\mathbf{2} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} - (-1)\cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - 2\cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Ezt követően $\widetilde{\mathbf{Q}}$ oszlopait osztjuk a 2-es normájukkal, míg az $\widetilde{\mathbf{R}}$ sorait ugyanezekkel az értékekkel szorozzuk.

$$\|\widetilde{\mathbf{q}}_\mathbf{1}\|_2 = \sqrt{2}, \quad \|\widetilde{\mathbf{q}}_\mathbf{2}\|_2 = 3, \quad \|\widetilde{\mathbf{q}}_\mathbf{3}\|_2 = 0$$

$$\widetilde{\mathbf{Q}} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{3} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\widetilde{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \mathbf{R} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A kapott eredményből látható, hogy az **A** oszlopvektorai nem lineárisan függetlenek. A kapott **Q** mátrix nem ortogonális, csak az első két oszlopa alkot ortonormált rendszert.

60. Az eddigi feladatban bemutatott módszert használva oldjuk meg a kitűzött feladatot.

$$
\begin{aligned}
\widetilde{r}_{11} &= 1 \\
\widetilde{\mathbf{q}}_{\mathbf{1}} &= \mathbf{a_1} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \\
\widetilde{r}_{12} &= \frac{< \mathbf{a_2}, \widetilde{\mathbf{q}}_{\mathbf{1}} >}{< \widetilde{\mathbf{q}}_{\mathbf{1}}, \widetilde{\mathbf{q}}_{\mathbf{1}} >} = \frac{1\cdot 4 + 0\cdot 0 + 7\cdot 3}{4\cdot 4 + 0\cdot 0 + 3\cdot 3} = \frac{25}{25} = 1 \\
\widetilde{r}_{22} &= 1 \\
\widetilde{\mathbf{q}}_{\mathbf{2}} &= \mathbf{a_2} - \widetilde{\mathbf{r}}_{\mathbf{12}}\widetilde{\mathbf{q}}_{\mathbf{1}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix} - 1\cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\widetilde{r}_{13} &= \frac{< \mathbf{a_3}, \widetilde{\mathbf{q}}_{\mathbf{1}} >}{< \widetilde{\mathbf{q}}_{\mathbf{1}}, \widetilde{\mathbf{q}}_{\mathbf{1}} >} = \frac{8\cdot 4 + 2\cdot 0 + 6\cdot 3}{4\cdot 4 + 0\cdot 0 + 3\cdot 3} = \frac{50}{25} = 2 \\
\widetilde{r}_{23} &= \frac{< \mathbf{a_3}, \widetilde{\mathbf{q}}_{\mathbf{2}} >}{< \widetilde{\mathbf{q}}_{\mathbf{2}}, \widetilde{\mathbf{q}}_{\mathbf{2}} >} = \frac{8\cdot(-3) + 2\cdot 0 + 6\cdot 4}{(-3)\cdot(-3) + 0\cdot 0 + 4\cdot 4} = \frac{0}{25} = 0 \\
\widetilde{r}_{33} &= 1 \\
\widetilde{\mathbf{q}}_{\mathbf{3}} &= \mathbf{a_3} - \widetilde{r}_{13}\widetilde{\mathbf{q}}_{\mathbf{1}} - \widetilde{r}_{23}\widetilde{\mathbf{q}}_{\mathbf{2}} = \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix} - 2\cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} - 0\cdot \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Ezt követően $\widetilde{\mathbf{Q}}$ oszlopait osztjuk a 2-es normájukkal, míg az $\widetilde{\mathbf{R}}$ sorait ugyanezekkel az értékekkel szorozzuk.

$$\|\widetilde{\mathbf{q}}_{\mathbf{1}}\|_2 = 5, \quad \|\widetilde{\mathbf{q}}_{\mathbf{2}}\|_2 = 5, \quad \|\widetilde{\mathbf{q}}_{\mathbf{3}}\|_2 = 2$$

$$\widetilde{\mathbf{Q}} = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix} \quad \longrightarrow \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\widetilde{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \longrightarrow \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 10 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

2.2.8. Householder transzformáció

61. A feladat, hogy az $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \end{bmatrix}^T$ vektort a kívánt alakra hozzuk, azaz

$$\mathbf{H}\cdot\mathbf{a} = k\cdot\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} k \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

A Householder transzformáció elvégzéséhez nincs feltétlenül szükség a transzformációs mátrix minden elemére, de a feladat megoldásához fontos ismerni a szerkezetét. A $\mathbf{H}$ mátrix olyan szimmetrikus és ortogonális (komplex esetben unitér) mátrix amelynek speciális alakja van:

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}(\mathbf{v}) = \mathbf{I} - 2\cdot\mathbf{v}\mathbf{v}^{\mathbf{T}}, \quad \mathbf{v} = \frac{\mathbf{a} - \sigma\mathbf{e}_1}{\|\mathbf{a} - \sigma\mathbf{e}_1\|_2} \in \mathbb{R}^n$$

ahol

$$\sigma = -sgn(a_1) \cdot \|\mathbf{a}\|_2.$$

Első feladatunk a σ kiszámítása a fenti képlet alapján.

$$\begin{aligned} \sigma &= -sgn(a_1) \cdot \|\mathbf{a}\|_2 = -sgn(-1) \cdot \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = \\ &= \sqrt{1+4+4} = 3 \end{aligned}$$

A $\mathbf{v}$ vektort a σ ismeretében megkaphatjuk egy egyszerű behelyettesítéssel a fenti képletből.

$$\mathbf{a} - \sigma \cdot \mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} - 3 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v} = \frac{\mathbf{a} - \sigma\mathbf{e}_1}{\|\mathbf{a} - \sigma\mathbf{e}_1\|_2} = \frac{1}{\sqrt{24}} \cdot \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Ezután alkalmazzuk a transzformációt az $\mathbf{a}$ vektorra, hogy megkapjuk a kívánt eredményt.

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{a} &= (\mathbf{I} - 2 \cdot \mathbf{v}\mathbf{v}^\mathbf{T}) \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a} - 2 \cdot \mathbf{v} \cdot (\mathbf{v}^\mathbf{T}\mathbf{a}) = \\ &= \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} - 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{24}} \cdot \frac{1}{\sqrt{24}} \cdot \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -4 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} - \frac{1}{12} \cdot \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} \cdot 12 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \boxed{k = 3} \end{aligned}$$

Ahogy látható, a fenti képlet segítségével a transzformáció elvégezhető a $\mathbf{H}$ mátrix konkrét előállítása nélkül. A számolás után az $\mathbf{a}$ vektort sikerült a kívánt $\mathbf{k} \cdot \mathbf{e_1}$ alakra hozni.

62. A feladat megoldásához először ki kell számolnunk a σ-t.

$$\begin{aligned} \sigma &= -sgn(a_1) \cdot \|\mathbf{a}\|_2 = -sgn(2) \cdot \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = \\ &= -\sqrt{4+4+1} = -3 \end{aligned}$$

A σ segítségével már könnyedén kiszámolható a $\mathbf{v}$ vektor értéke:

$$\mathbf{a} - \sigma \cdot \mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 3 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v} = \frac{\mathbf{a} - \sigma\mathbf{e}_1}{\|\mathbf{a} - \sigma\mathbf{e}_1\|_2} = \frac{1}{\sqrt{30}} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

A fenti adatok segítségével a Householder-mátrix immár kiszámolható.

$$\begin{aligned}
\mathbf{H}(\mathbf{v}) &= \mathbf{I} - 2\cdot \mathbf{v}\mathbf{v}^{\mathbf{T}} = \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - 2\cdot \left(\frac{1}{\sqrt{30}}\cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right)\cdot \left(\frac{1}{\sqrt{30}}\cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right)^T = \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - 2\cdot \frac{1}{\sqrt{30}}\cdot \frac{1}{\sqrt{30}}\cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}\cdot \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{15}\cdot \begin{bmatrix} 25 & 10 & 5 \\ 10 & 4 & 2 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \\
&= \frac{1}{15}\begin{bmatrix} -10 & -10 & -5 \\ -10 & 11 & -2 \\ -5 & -2 & 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{11}{15} & -\frac{2}{15} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{15} & \frac{14}{15} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

63. A feladat megoldásához első lépésként ki kell számolnunk a σ-t.

$$\begin{aligned}
\sigma &= -sgn(a_1)\cdot \|\mathbf{a}\|_2 = \\
&= -sgn(2)\cdot \sqrt{4+1+1} = -\sqrt{6}
\end{aligned}$$

A σ segítségével kiszámolható a $\mathbf{v}$ vektor értéke.

$$\begin{aligned}
\mathbf{a} - \sigma\cdot \mathbf{e}_1 &= \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \sqrt{6}\cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+\sqrt{6} \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \\
\mathbf{v} &= \frac{\mathbf{a} - \sigma\mathbf{e}_1}{\|\mathbf{a} - \sigma\mathbf{e}_1\|_2} = \frac{1}{\sqrt{12+4\sqrt{6}}}\cdot \begin{bmatrix} 2+\sqrt{6} \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

A fenti adatok segítségével a Householder-mátrix a következő.

$$\begin{aligned}
\mathbf{H}(\mathbf{v}) &= \mathbf{I} - 2\cdot \mathbf{v}\mathbf{v}^{\mathbf{T}} = \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - 2\left(\frac{1}{\sqrt{12+4\sqrt{6}}}\cdot \begin{bmatrix} 2+\sqrt{6} \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)\cdot \left(\frac{1}{\sqrt{12+4\sqrt{6}}}\cdot \begin{bmatrix} 2+\sqrt{6} \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)^T = \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - 2\cdot \frac{1}{\sqrt{12+4\sqrt{6}}}\cdot \frac{1}{\sqrt{12+4\sqrt{6}}}\cdot \begin{bmatrix} 2+\sqrt{6} \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\cdot \begin{bmatrix} 2+\sqrt{6} & 1 & 1 \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{6+2\sqrt{6}}\cdot \begin{bmatrix} 10+4\sqrt{6} & 2+\sqrt{6} & 2+\sqrt{6} \\ 2+\sqrt{6} & 1 & 1 \\ 2+\sqrt{6} & 1 & 1 \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} 1 - \frac{10+4\sqrt{6}}{6+2\sqrt{6}} & -\frac{2+\sqrt{6}}{6+2\sqrt{6}} & -\frac{2+\sqrt{6}}{6+2\sqrt{6}} \\ -\frac{2+\sqrt{6}}{6+2\sqrt{6}} & 1 - \frac{1}{6+2\sqrt{6}} & -\frac{1}{6+2\sqrt{6}} \\ -\frac{2+\sqrt{6}}{6+2\sqrt{6}} & -\frac{1}{6+2\sqrt{6}} & 1 - \frac{1}{6+2\sqrt{6}} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Ahhoz, hogy megkapjuk a k értékét, végre kell hajtanunk a transzformációt az $\mathbf{a}$ vektorra.

$$\begin{bmatrix} 1-\frac{10+4\sqrt{6}}{6+2\sqrt{6}} & -\frac{2+\sqrt{6}}{6+2\sqrt{6}} & -\frac{2+\sqrt{6}}{6+2\sqrt{6}} \\ -\frac{2+\sqrt{6}}{6+2\sqrt{6}} & 1-\frac{1}{6+2\sqrt{6}} & -\frac{1}{6+2\sqrt{6}} \\ -\frac{2+\sqrt{6}}{6+2\sqrt{6}} & -\frac{1}{6+2\sqrt{6}} & 1-\frac{1}{6+2\sqrt{6}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sqrt{6} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \boxed{k=-\sqrt{6}}$$

A transzormáció a

$$\mathbf{H}(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{a} = (\mathbf{I} - 2 \cdot \mathbf{v}\mathbf{v}^{\mathbf{T}}) \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a} - 2 \cdot \mathbf{v} \cdot (\mathbf{v}^{\mathbf{T}}\mathbf{a})$$

képlet alkalmazásával gazdaságosabban számolható ki.

64. A feladat megoldásához első lépésként ki kell számolnunk a σ-t.

$$\begin{aligned} \sigma &= -sgn(a_1) \cdot \|\mathbf{a}\|_2 = \\ &= -sgn(2) \cdot \sqrt{4+1+4} = -3 \end{aligned}$$

A σ segítségével a $\mathbf{v}$ vektor értéke is kiszámolható.

$$\begin{aligned} \mathbf{a} - \sigma \cdot \mathbf{e}_1 &= \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} + 3 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \\ \mathbf{v} &= \frac{\mathbf{a} - \sigma \mathbf{e}_1}{\|\mathbf{a} - \sigma \mathbf{e}_1\|_2} = \frac{1}{\sqrt{30}} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

A fenti adatok segítségével a Householder-mátrix kiszámolható.

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\mathbf{v}) &= \mathbf{I} - 2 \cdot \mathbf{v}\mathbf{v}^{\mathbf{T}} = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{30}} \cdot \frac{1}{\sqrt{30}} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{15} \cdot \begin{bmatrix} 25 & -5 & 10 \\ -5 & 1 & -2 \\ 10 & -2 & 4 \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{15} \cdot \begin{bmatrix} -10 & 5 & -10 \\ 5 & 14 & 2 \\ -10 & 2 & 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{14}{15} & \frac{2}{15} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{15} & \frac{11}{15} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Most, hogy megkaptuk a transzformációs mátrixot. Ahhoz, hogy megkapjuk a k értékét, alkalmaznunk kell a transzformációt az $\mathbf{a}$ vektoron.

$$\frac{1}{15} \begin{bmatrix} -10 & 5 & -10 \\ 5 & 14 & 2 \\ -10 & 2 & 11 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \boxed{k=-3}$$

65. A feladat, hogy az $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}^T$ vektort a kívánt alakra hozzuk, azaz $k \cdot \mathbf{e}_1$-re. Első feladatunk a σ kiszámítása.

$$\begin{aligned} \sigma &= -sgn(a_1) \cdot \|\mathbf{a}\|_2 = \\ &= -sgn(1) \cdot \sqrt{1+2^2+2^2+0} = -3 \end{aligned}$$

Mivel megkaptuk a σ-t, a $\mathbf{v}$ vektort ki tudjuk számítani.

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}-\sigma\cdot\mathbf{e}_1 &= \begin{bmatrix}1\\2\\2\\0\end{bmatrix}+3\cdot\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\2\\2\\0\end{bmatrix} \quad \Rightarrow \\
\mathbf{v} &= \frac{\mathbf{a}-\sigma\mathbf{e}_1}{\|\mathbf{a}-\sigma\mathbf{e}_1\|_2}=\frac{1}{\sqrt{24}}\cdot\begin{bmatrix}4\\2\\2\\0\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Ezután már csak annyi van hátra, hogy alkalmazzuk a transzformációt az $\mathbf{a}$ vektorra, hogy megkapjuk a kívánt eredményt.

$$\begin{aligned}
\mathbf{H}(\mathbf{v})\cdot\mathbf{a} &= (\mathbf{I}-2\cdot\mathbf{v}\mathbf{v}^{\mathbf{T}})\cdot\mathbf{a}=\mathbf{a}-2\cdot\mathbf{v}\cdot(\mathbf{v}^{\mathbf{T}}\mathbf{a})= \\
&= \begin{bmatrix}1\\2\\2\\0\end{bmatrix}-2\cdot\frac{1}{\sqrt{24}}\cdot\frac{1}{\sqrt{24}}\cdot\begin{bmatrix}4\\2\\2\\0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}4 & 2 & 2 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\2\\2\\0\end{bmatrix}= \\
&= \begin{bmatrix}1\\2\\2\\0\end{bmatrix}-\frac{1}{12}\cdot\begin{bmatrix}4\\2\\2\\0\end{bmatrix}\cdot 12=\begin{bmatrix}-3\\0\\0\\0\end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \boxed{k=-3}
\end{aligned}$$

66. A feladat, hogy az $\mathbf{a}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}^T$ vektort a kívánt alakra hozzuk, azaz $k\cdot\mathbf{e}_1$-re. Első feladatunk a σ kiszámítása.

$$\begin{aligned}
\sigma &= -sgn(a_1)\cdot\|\mathbf{a}\|_2= \\
&= -sgn(1)\cdot\sqrt{1+1+1+1}=-2
\end{aligned}$$

Mivel megkaptuk a σ-t, kiszámíthatjuk a $\mathbf{v}$ vektort.

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}-\sigma\cdot\mathbf{e}_1 &= \begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}+2\cdot\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\1\\1\\1\end{bmatrix} \Rightarrow \\
\mathbf{v} &= \frac{\mathbf{a}-\sigma\mathbf{e}_1}{\|\mathbf{a}-\sigma\mathbf{e}_1\|_2}=\frac{1}{\sqrt{12}}\cdot\begin{bmatrix}3\\1\\1\\1\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Az utolsó lépés, a transzformáció alkalmazása az $\mathbf{a}$ vektoron, hogy megkapjuk a kívánt eredményt.

$$\begin{aligned}
\mathbf{H}(\mathbf{v})\cdot\mathbf{a} &= (\mathbf{I}-2\cdot\mathbf{v}\mathbf{v}^{\mathbf{T}})\cdot\mathbf{a} = \mathbf{a}-2\cdot\mathbf{v}\cdot(\mathbf{v}^{\mathbf{T}}\mathbf{a}) = \\
&= \begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix} - 2\cdot\frac{1}{\sqrt{12}}\cdot\frac{1}{\sqrt{12}}\cdot\begin{bmatrix}3\\1\\1\\1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}3 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix} - \frac{1}{6}\cdot\begin{bmatrix}3\\1\\1\\1\end{bmatrix}\cdot 6 = \begin{bmatrix}-2\\0\\0\\0\end{bmatrix} \quad\Rightarrow\quad \boxed{k=-2}
\end{aligned}$$

67. Számoljuk ki a σ-t.

$$\begin{aligned}
\sigma &= -sgn(a_1)\cdot\|\mathbf{a}\|_2 = \\
&= -sgn(2)\cdot\sqrt{2^2+2^2+1^2+0} = -3
\end{aligned}$$

Megkaptuk a σ-t, így most már ki tudjuk számítani a $\mathbf{v}$ vektort.

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}-\sigma\cdot\mathbf{e}_1 &= \begin{bmatrix}2\\2\\1\\0\end{bmatrix} + 3\cdot\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5\\2\\1\\0\end{bmatrix} \Rightarrow \\
\mathbf{v} &= \frac{\mathbf{a}-\sigma\mathbf{e}_1}{\|\mathbf{a}-\sigma\mathbf{e}_1\|_2} = \frac{1}{\sqrt{30}}\cdot\begin{bmatrix}5\\2\\1\\0\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Ezután már csak annyi van hátra, hogy alkalmazzuk a transzformációt az $\mathbf{a}$ vektorra, hogy megkapjuk a kívánt eredményt.

$$\begin{aligned}
\mathbf{H}(\mathbf{v})\cdot\mathbf{a} &= (\mathbf{I}-2\cdot\mathbf{v}\mathbf{v}^{\mathbf{T}})\cdot\mathbf{a} = \mathbf{a}-2\cdot\mathbf{v}\cdot(\mathbf{v}^{\mathbf{T}}\mathbf{a}) = \\
&= \begin{bmatrix}2\\2\\1\\0\end{bmatrix} - 2\cdot\frac{1}{\sqrt{30}}\cdot\frac{1}{\sqrt{30}}\cdot\begin{bmatrix}5\\2\\1\\0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}5 & 2 & 1 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2\\2\\1\\0\end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix}2\\2\\1\\0\end{bmatrix} - \frac{1}{15}\cdot\begin{bmatrix}5\\2\\1\\0\end{bmatrix}\cdot 15 = \begin{bmatrix}-3\\0\\0\\0\end{bmatrix} \quad\Rightarrow\quad \boxed{k=-3}
\end{aligned}$$

68. A feladat, hogy az $\mathbf{a} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 2 & 2\end{bmatrix}^T$ vektort a kívánt alakra hozzuk, azaz $k\cdot\mathbf{e}_1$-re. Első feladatunk a σ kiszámítása.

$$\begin{aligned}
\sigma &= -sgn(a_1)\cdot\|\mathbf{a}\|_2 = \\
&= -sgn(1)\cdot\sqrt{1+0+4+4} = -3
\end{aligned}$$

Mivel megkaptuk a σ-t, lehetőségünk van arra, hogy a $\mathbf{v}$ vektort kiszámítsuk.

$$\begin{aligned}
\mathbf{a} - \sigma \cdot \mathbf{e}_1 &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} + 3 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \\
\mathbf{v} &= \frac{\mathbf{a} - \sigma \mathbf{e}_1}{\|\mathbf{a} - \sigma \mathbf{e}_1\|_2} = \frac{1}{\sqrt{24}} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Ezután már csak annyi van hátra, hogy alkalmazzuk a transzformációt az $\mathbf{a}$ vektorra, hogy megkapjuk a kívánt eredményt.

$$\begin{aligned}
\mathbf{H}(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{a} &= (\mathbf{I} - 2 \cdot \mathbf{v}\mathbf{v}^{\mathbf{T}}) \cdot \mathbf{a} = \mathbf{I} \cdot \mathbf{a} - 2 \cdot \mathbf{v} \cdot (\mathbf{v}^{\mathbf{T}}\mathbf{a}) = \\
&= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} - 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{24}} \cdot \frac{1}{\sqrt{24}} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} - \frac{1}{12} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot 12 = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \boxed{k = -3}
\end{aligned}$$

69. A feladat, hogy az $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}^T$ vektort a kívánt alakra hozzuk, azaz $k \cdot \mathbf{e}_1$-re. Első feladatunk a σ kiszámítása.

$$\begin{aligned}
\sigma &= -sgn(a_1) \cdot \|\mathbf{a}\|_2 = \\
&= -sgn(1) \cdot \sqrt{1+4+4+16} = -5
\end{aligned}$$

Megkaptuk a σ-t, tehát kiszámíthatjuk a $\mathbf{v}$ vektort.

$$\begin{aligned}
\mathbf{a} - \sigma \cdot \mathbf{e}_1 &= \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} + 5 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \\
\mathbf{v} &= \frac{\mathbf{a} - \sigma \mathbf{e}_1}{\|\mathbf{a} - \sigma \mathbf{e}_1\|_2} = \frac{1}{\sqrt{60}} \cdot \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Ezután már csak annyi van hátra, hogy alkalmazzuk a transzformációt az $\mathbf{a}$ vektorra, hogy megkapjuk a kívánt eredményt.

$$\begin{aligned}
\mathbf{H}(\mathbf{v})\cdot\mathbf{a} &= (\mathbf{I}-2\cdot\mathbf{v}\mathbf{v}^{\mathbf{T}})\cdot\mathbf{a} = \mathbf{a}-2\cdot\mathbf{v}\cdot(\mathbf{v}^{\mathbf{T}}\mathbf{a}) = \\
&= \begin{bmatrix}1\\2\\2\\4\end{bmatrix} - 2\cdot\frac{1}{\sqrt{60}}\cdot\frac{1}{\sqrt{60}}\cdot\begin{bmatrix}6\\2\\2\\4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}6 & 2 & 2 & 4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\2\\2\\4\end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix}1\\2\\2\\4\end{bmatrix} - \frac{1}{30}\cdot\begin{bmatrix}6\\2\\2\\4\end{bmatrix}\cdot 30 = \begin{bmatrix}-5\\0\\0\\0\end{bmatrix} \quad\Rightarrow\quad \boxed{k=-5}
\end{aligned}$$

70. A feladat megoldásához először ki kell számolnunk a σ-t.

$$\begin{aligned}
\sigma &= -sgn(a_1)\cdot\|\mathbf{a}\|_2 = \\
&= -sgn(2)\cdot\sqrt{4+1+0+4} = -3
\end{aligned}$$

A σ segítségével már könnyedén kiszámolható a $\mathbf{v}$ vektor értéke.

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}-\sigma\cdot\mathbf{e}_1 &= \begin{bmatrix}2\\1\\0\\2\end{bmatrix} + 3\cdot\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5\\1\\0\\2\end{bmatrix} \Rightarrow \\
\mathbf{v} &= \frac{\mathbf{a}-\sigma\mathbf{e}_1}{\|\mathbf{a}-\sigma\mathbf{e}_1\|_2} = \frac{1}{\sqrt{30}}\cdot\begin{bmatrix}5\\1\\0\\2\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

A fenti adatok segítségével a Householder-mátrix immár kiszámolható.

$$\begin{aligned}
\mathbf{H}(\mathbf{v}) &= \mathbf{I}-2\cdot\mathbf{v}\mathbf{v}^{\mathbf{T}} = \\
&= \begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix} - 2\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{30}}\cdot\begin{bmatrix}5\\1\\0\\2\end{bmatrix}\right)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{30}}\cdot\begin{bmatrix}5\\1\\0\\2\end{bmatrix}\right)^T = \\
&= \begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix} - 2\cdot\frac{1}{\sqrt{30}}\cdot\frac{1}{\sqrt{30}}\cdot\begin{bmatrix}5\\1\\0\\2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}5&1&0&2\end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix} - \frac{1}{15}\cdot\begin{bmatrix}25&5&0&10\\5&1&0&2\\0&0&0&0\\10&2&0&4\end{bmatrix} = \\
&= \frac{1}{15}\cdot\begin{bmatrix}-10&-5&0&-10\\-5&14&0&-2\\0&0&15&0\\-10&-2&0&11\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}&0&-\frac{2}{3}\\-\frac{1}{3}&\frac{14}{15}&0&-\frac{2}{15}\\0&0&1&0\\-\frac{2}{3}&-\frac{2}{15}&0&\frac{11}{15}\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Most, hogy már megvan a **H** mátrix, a transzformáció elvégzéséhez csupán egy szorzásra van szükség.

$$\mathbf{H}(\mathbf{v})\cdot\mathbf{a} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{14}{15} & 0 & -\frac{2}{15} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{15} & 0 & \frac{11}{15} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{k=3}$$

71. A feladat, hogy az $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ vektort a kívánt alakra hozzuk, azaz $k\cdot\mathbf{e}_1$-re. Első feladatunk a σ kiszámítása.

$$\begin{aligned} \sigma &= -sgn(a_1)\cdot\|\mathbf{a}\|_2 = \\ &= -sgn(1)\cdot\sqrt{1+1+1+1+1} = -\sqrt{5} \end{aligned}$$

A σ segítségével meghatározzuk a $\mathbf{v}$ vektort.

$$\begin{aligned} \mathbf{a}-\sigma\cdot\mathbf{e}_1 &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \sqrt{5}\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+\sqrt{5} \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \\ \mathbf{v} &= \frac{\mathbf{a}-\sigma\mathbf{e}_1}{\|\mathbf{a}-\sigma\mathbf{e}_1\|_2} = \frac{1}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}\cdot\begin{bmatrix} 1+\sqrt{5} \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Ezután már csak annyi van hátra, hogy alkalmazzuk a transzformációt az **a** vektorra, hogy megkapjuk a kívánt eredményt.

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\mathbf{v})\cdot\mathbf{a} &= (\mathbf{I}-2\cdot\mathbf{v}\mathbf{v}^{\mathbf{T}})\cdot\mathbf{a} = \mathbf{a}-2\cdot\mathbf{v}\cdot(\mathbf{v}^{\mathbf{T}}\mathbf{a}) = \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - 2\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}\right)^2\cdot\begin{bmatrix} 1+\sqrt{5} \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1+\sqrt{5} & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{5+\sqrt{5}}\cdot\begin{bmatrix} 1+\sqrt{5} \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\cdot(5+\sqrt{5}) = \begin{bmatrix} -\sqrt{5} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{k=-\sqrt{5}} \end{aligned}$$

72. Feladatunk a $\mathbf{C}\cdot\mathbf{x}=\mathbf{d}$ egyenletrendszer megoldása. Első lépésként el kell készítenünk a $\mathbf{c_1}$ vektorhoz a $\mathbf{H_1}$ mátrixot, ahol $\mathbf{c_1}$ vektor a **C** mátrix első oszlopa.

$$\begin{aligned} \sigma &= -sgn(c_{11})\cdot\|\mathbf{c_1}\|_2 = \\ &= -sgn(4)\cdot 4 = -4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{c_1} - \sigma\mathbf{e_1} &= \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \\
\mathbf{v} &= \frac{\mathbf{c_1} - \sigma\mathbf{e_1}}{\|\mathbf{c_1} - \sigma\mathbf{e_1}\|_2} = \frac{1}{8} \cdot \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Miután megkaptunk minden szükséges változót a $\mathbf{H_1}$ mátrixhoz, alkalmazzuk azt a $\mathbf{C}$ mátrix minden oszlopvektorára.

$$\begin{aligned}
\mathbf{H}_1\mathbf{c_1} &= (\mathbf{I} - 2 \cdot \mathbf{v}\mathbf{v}^\mathbf{T}) \cdot \mathbf{c_1} = \mathbf{c_1} - 2 \cdot \mathbf{v} \cdot (\mathbf{v}^\mathbf{T}\mathbf{c_1}) = \\
&= \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
\mathbf{H_1}\mathbf{c_2} &= \mathbf{c_2} - 2 \cdot \mathbf{v} \cdot (\mathbf{v}^\mathbf{T}\mathbf{c_2}) = \\
&= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} - 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \\
\mathbf{H_1}\mathbf{c_3} &= \mathbf{c_3} - 2 \cdot \mathbf{v} \cdot (\mathbf{v}^\mathbf{T}\mathbf{c_3}) = \\
&= \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} - 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

A fenti adatoknak köszönhetően felírhatjuk a $\mathbf{C}$ mátrix $\mathbf{H_1}$ Householder-mátrix-szal való szorzatának eredményét.

$$\mathbf{H_1} \cdot \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -4 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

A célunk, hogy a $\mathbf{C}$ mátrixból felső háromszögmátrixot készítsünk. Ehhez transzformációt kell alkalmaznunk a jobb alsó 2×2-es mátrixon is. Nevezzük ezt el $\widetilde{\mathbf{C}}$-nak. Az előző lépésekhez hasonlóan felírhatunk egy $\widetilde{\mathbf{H}}_\mathbf{2}$ Householder-mátrixot a $\widetilde{\mathbf{c}}_\mathbf{1}$ vektor segítségével.

$$\sigma = -sgn(1) \cdot \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = -\sqrt{2}$$

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathbf{c}}_\mathbf{1} - \sigma\mathbf{e_1} &= \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \sqrt{2} \\ -1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \\
\widetilde{\mathbf{v}} &= \frac{\widetilde{\mathbf{c}}_\mathbf{1} - \sigma\mathbf{e_1}}{\|\widetilde{\mathbf{c}}_\mathbf{1} - \sigma\mathbf{e_1}\|_2} = \frac{1}{\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}} \cdot \begin{bmatrix} 1 + \sqrt{2} \\ -1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Ezután a $\widetilde{\mathbf{H}}_\mathbf{2}$ mátrixot alkalmazzuk a $\widetilde{\mathbf{C}}$ mátrix minden oszlopvektorára.

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\mathbf{H}}_\mathbf{2}\widetilde{\mathbf{c}}_\mathbf{1} &= \widetilde{\mathbf{c}}_1 - 2\cdot\widetilde{\mathbf{v}}\cdot(\widetilde{\mathbf{v}}^\mathbf{T}\widetilde{\mathbf{c}}_\mathbf{1}) = \\
&= \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} - 2\cdot\frac{1}{4+2\sqrt{2}}\cdot\begin{bmatrix} 1+\sqrt{2} \\ -1 \end{bmatrix}\cdot\underbrace{\begin{bmatrix} 1+\sqrt{2} & -1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}}_{2+\sqrt{2}} = \\
&= \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1+\sqrt{2} \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} \\
\widetilde{\mathbf{H}}_\mathbf{2}\widetilde{\mathbf{c}}_\mathbf{2} &= \widetilde{\mathbf{c}}_\mathbf{2} - 2\cdot\widetilde{\mathbf{v}}\cdot(\widetilde{\mathbf{v}}^\mathbf{T}\widetilde{\mathbf{c}}_\mathbf{2}) = \\
&= \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} - 2\cdot\frac{1}{4+2\sqrt{2}}\cdot\begin{bmatrix} 1+\sqrt{2} \\ -1 \end{bmatrix}\cdot\underbrace{\begin{bmatrix} 1+\sqrt{2} & -1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}}_{2+3\sqrt{2}} = \\
&= \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} - \underbrace{\frac{2+3\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}}_{2\sqrt{2}-1}\cdot\begin{bmatrix} 1+\sqrt{2} \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Ezzel megkaptuk a kívánt felső háromszögmátrixot.

$$
\begin{bmatrix} -4 & -1 & 2 \\ 0 & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 2\sqrt{2} \end{bmatrix}
$$

A $\mathbf{H}_\mathbf{1}$ és $\mathbf{H}_\mathbf{2}$ mátrixok segítségével meghatározhatjuk a $\mathbf{Q}$ mátrixot, míg a kapott felső háromszögmátrix megegyezik az $\mathbf{R}$ mátrixszal. Ezáltal megkaptuk a $\mathbf{C}$ mátrix $\mathbf{QR}$ felbontását.

$$
\mathbf{QR} = \mathbf{C} \quad\Rightarrow\quad \mathbf{C}\cdot\mathbf{x} = \mathbf{d} \quad\Leftrightarrow\quad \mathbf{QR}\cdot\mathbf{x} = \mathbf{d} \quad\Leftrightarrow\quad \mathbf{R}\cdot\mathbf{x} = \mathbf{Q}^\mathbf{T}\cdot\mathbf{d}
$$

A következő feladatunk tehát, hogy alkalmazzuk a $\mathbf{H}_1$ -et $\mathbf{d}$ -re, majd annak utolsó két koordinátájára $\widetilde{\mathbf{H}}_2$ -t.

$$
\begin{aligned}
\mathbf{H}_1\mathbf{d} &= \mathbf{d} - 2\cdot\mathbf{v}\cdot(\mathbf{v}^\mathbf{T}\mathbf{d}) = \\
&= \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} - 2\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \\
\widetilde{\mathbf{H}}_2\widetilde{\mathbf{d}} &= \widetilde{\mathbf{d}} - 2\cdot\widetilde{\mathbf{v}}\cdot(\widetilde{\mathbf{v}}^\mathbf{T}\cdot\widetilde{\mathbf{d}}) = \\
&= \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{2}{4+2\sqrt{2}}\cdot\begin{bmatrix} 1+\sqrt{2} \\ -1 \end{bmatrix}\cdot\underbrace{\begin{bmatrix} 1+\sqrt{2} & -1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}}_{2+3\sqrt{2}} = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Tehát a Householder transzformációk eredménye $\begin{bmatrix} -2 & -\sqrt{2} & 2\sqrt{2} \end{bmatrix}^T$.
Utolsó lépésként a felső háromszög alakból visszahelyettesítéssel kiszámíthatók a megoldás vektor elemei.

$$
\begin{aligned}
2\sqrt{2}x_3 = 2\sqrt{2} &\quad\Rightarrow\quad \boxed{x_3 = 1} \\
-\sqrt{2}x_2 - \sqrt{2}x_3 = -\sqrt{2} \Leftrightarrow -\sqrt{2}x_2 - \sqrt{2} = -\sqrt{2} &\quad\Rightarrow\quad \boxed{x_2 = 0} \\
-4x_1 - x_2 + 2x_3 = -2 \Leftrightarrow -4x_1 = -4 &\quad\Rightarrow\quad \boxed{x_1 = 1}
\end{aligned}
$$

Tehát a lineáris egyenletrendszer megoldása: $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$.

73. A feladat, hogy a

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

mátrixot felső háromszög alakra hozzuk. Ehhez Householder-transzformációt alkalmazunk a mátrixon. Első lépésként meg kell alkotnunk a $\mathbf{c_1}$ vektorhoz a $\mathbf{H_1}$ mátrixot.

$$\begin{aligned} \sigma &= -sgn(c_{11}) \cdot \|\mathbf{c_1}\|_2 = \\ &= -sgn(1) \cdot \sqrt{1+0+1} = -\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{c_1} - \sigma \mathbf{e_1} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+\sqrt{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \\ \mathbf{v} &= \frac{\mathbf{c_1} - \sigma \mathbf{e_1}}{\|\mathbf{c}_1 - \sigma \mathbf{e}_1\|_2} = \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} \cdot \begin{bmatrix} 1+\sqrt{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Miután megkaptunk minden szükséges változót a $\mathbf{H_1}$ mátrixhoz, alkalmazzuk azt a $\mathbf{C}$ mátrix minden oszlopvektorára.

$$\begin{aligned} \mathbf{H_1 c_1} &= (\mathbf{I} - 2 \cdot \mathbf{v v^T}) \cdot \mathbf{c_1} = \mathbf{c_1} - 2 \cdot \mathbf{v} \cdot (\mathbf{v^T c_1}) = \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - 2 \cdot \frac{1}{4+2\sqrt{2}} \cdot \begin{bmatrix} 1+\sqrt{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1+\sqrt{2} & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2+\sqrt{2}} \cdot \begin{bmatrix} 1+\sqrt{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot (2+\sqrt{2}) = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{H_1 c_2} &= \mathbf{c_2} - 2 \cdot \mathbf{v} \cdot (\mathbf{v^T c_2}) = \\ &= \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} - \frac{1}{2+\sqrt{2}} \cdot \begin{bmatrix} 1+\sqrt{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1+\sqrt{2} & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}}_{4+2\sqrt{2}} = \\ &= \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1+\sqrt{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\sqrt{2} \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{H_1c_3} &= \mathbf{c_3} - 2\cdot\mathbf{v}\cdot(\mathbf{v^Tc_3}) = \\
&= \begin{bmatrix}0\\4\\2\end{bmatrix} - \frac{1}{2+\sqrt{2}}\cdot\begin{bmatrix}1+\sqrt{2}\\0\\1\end{bmatrix}\underbrace{\begin{bmatrix}1+\sqrt{2} & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\4\\2\end{bmatrix}}_{2} = \\
&= \begin{bmatrix}0\\4\\2\end{bmatrix} - \underbrace{\frac{2}{2+\sqrt{2}}}_{2-\sqrt{2}}\cdot\begin{bmatrix}1+\sqrt{2}\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\4\\2\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\sqrt{2}\\0\\2-\sqrt{2}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\sqrt{2}\\4\\\sqrt{2}\end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Miután elvégeztük a transzformációkat, a kapott eredmény felső háromszögmátrix, így készen vagyunk a feladat megoldásával.

$$
\begin{bmatrix}-\sqrt{2} & -2\sqrt{2} & -\sqrt{2}\\ 0 & 3 & 4\\ 0 & 0 & \sqrt{2}\end{bmatrix}
$$

74. A feladat, hogy a

$$
\mathbf{D} = \begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}
$$

mátrixot felső háromszög alakra hozzuk. Ehhez Householder-transzformációt alkalmazunk a mátrixon. Első lépésként meg kell határoznunk a $\mathbf{d_1}$ vektorhoz a $\mathbf{H_1}$ transzformációs mátrixot.

$$
\begin{aligned}
\sigma &= -sqn(d_{11})\cdot\|\mathbf{d_1}\|_2 = \\
&= -sgn(1)\cdot\sqrt{1^2+(-1)^2} = -\sqrt{2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{d_1} - \sigma\mathbf{e_1} &= \begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}-\sqrt{2}\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1+\sqrt{2}\\-1\end{bmatrix} \quad \Rightarrow \\
\mathbf{v} &= \frac{\mathbf{d_1}-\sigma\mathbf{e_1}}{\|\mathbf{d_1}-\sigma\mathbf{e_1}\|_2} = \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}\cdot\begin{bmatrix}1+\sqrt{2}\\-1\end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Miután megkaptunk minden szükséges változót a $\mathbf{H_1}$ mátrixhoz, alkalmazzuk azt a $\mathbf{D}$ mátrix mindkét oszlopvektorára.

$$
\begin{aligned}
\mathbf{H_1d_1} &= (\mathbf{I} - 2\cdot\mathbf{vv^T})\cdot\mathbf{d_1} = \mathbf{d}_1 - 2\cdot\mathbf{v}\cdot(\mathbf{v^Td_1}) = \\
&= \begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix} - 2\cdot\frac{1}{4+2\sqrt{2}}\cdot\begin{bmatrix}1+\sqrt{2}\\-1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1+\sqrt{2} & -1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix} - \frac{1}{2+\sqrt{2}}\cdot\begin{bmatrix}1+\sqrt{2}\\-1\end{bmatrix}\cdot(2+\sqrt{2}) = \begin{bmatrix}-\sqrt{2}\\0\end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{H_1d_2} &= \mathbf{d}_2 - 2\cdot\mathbf{v}\cdot(\mathbf{v^Td_2}) = \\
&= \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} - \frac{1}{2+\sqrt{2}}\cdot\begin{bmatrix}1+\sqrt{2}\\-1\end{bmatrix}\cdot\underbrace{\begin{bmatrix}1+\sqrt{2} & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}}_{\sqrt{2}} = \\
&= \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} - \underbrace{\frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}}_{\sqrt{2}-1}\cdot\begin{bmatrix}1+\sqrt{2}\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\\sqrt{2}\end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Miután elvégeztük a transzformációkat, a kapott eredmény felső háromszögmátrix, így készen vagyunk a feladattal.

$$\begin{bmatrix} -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

75. A feladat az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer megoldása. Mivel ismerjük az $\mathbf{A}$ mátrix QR-felbontását, így ezt felhasználva az $\mathbf{A}$ kiszámolása nélkül is megoldható az egyenletrendszer, hiszen

$$\mathbf{QRx} = \mathbf{b} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{Rx} = \mathbf{Q^T b} = \mathbf{Qb}.$$

Mivel $\mathbf{Q}$ Householder-mátrix, ezért megegyezik a transzponáltjával. Ebből következik, hogy első lépésként ki kell számolni $\mathbf{Qb}$-t.

$$\begin{aligned}
\mathbf{Qb} &= \mathbf{b} - 2 \cdot \mathbf{v} \cdot (\mathbf{v^T b}) \\
&= \begin{bmatrix} 5 \\ 11 \\ -4 \end{bmatrix} - \frac{2}{3} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 11 \\ -4 \end{bmatrix}}_{-9} = \\
&= \begin{bmatrix} 5 \\ 11 \\ -4 \end{bmatrix} + \underbrace{\frac{18}{3}}_{6} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Most már mindent előkészítettünk, hogy az $\mathbf{R}$ segítségével felírjuk az egyenleteket a háromszög mátrixba való behelyettesítéshez.

$$\begin{aligned}
9x_3 = 8 \quad &\Rightarrow \quad \boxed{x_3 = \frac{8}{9}} \\
9x_2 + 9x_3 = 5 \Leftrightarrow 9x_2 + 8 = 5 \quad &\Rightarrow \quad \boxed{x_2 = -\frac{1}{3}} \\
9x_1 + 9x_2 = 17 \Leftrightarrow 9x_1 - 3 = 17 \quad &\Rightarrow \quad \boxed{x_1 = \frac{20}{9}}
\end{aligned}$$

Tehát az eredmény: $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \frac{20}{9} & -\frac{1}{3} & \frac{8}{9} \end{bmatrix}^T$.

3. fejezet

VEKTOR- ÉS MÁTRIXNORMÁK, KONDÍCIÓSZÁM

3.1. Feladatok

3.1.1. Vektornormák

1. Számítsuk ki az alábbi vektor 1-es, 2-es és ∞ vektornormáját!

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

2. Számítsuk ki az alábbi vektor 1-es, 2-es és ∞ vektornormáját!

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ 8 \\ 4 \end{bmatrix}$$

3. Mutassuk meg, hogy $\|.\|_1$ és $\|.\|_\infty$ vektornormák ekvivalens vektornormák!

4. Mutassuk meg, hogy $\|.\|_2$ és $\|.\|_\infty$ vektornormák ekvivalens vektornormák!

5. Mutassuk meg, hogy $\|.\|_1$ és $\|.\|_2$ vektornormák ekvivalens vektornormák!

6. Írjuk fel az $\|.\|_1$ vektornorma által indukált mátrixnormát!

3.1.2. Mátrixnormák

7. Legyen $\mathbf{T} \in \mathbb{R}^{nxn}$ invertálható mátrix és $\|.\|_v$ egy vektornorma.

a) Igazoljuk, hogy $\|\mathbf{x}\|_T := \|\mathbf{Tx}\|_v$ vektornormát definiál!

b) Írjuk fel a $\|.\|_T$ vektornorma által indukált mátrixnormát! Mi a kapcsolat a $\|.\|_v$ által indukált mátrixnormával?

8. Számoljuk ki az alábbi A mátrix $1, 2$ és ∞ mátrixnormáit!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

9. Számoljuk ki az alábbi A mátrix $1, 2$ és ∞ mátrixnormáit!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

10. Számoljuk ki az alábbi A mátrix $1, 2$ és ∞ mátrixnormáit!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

11. Igaz-e, hogy a *Frobenius* mátrixnorma indukált mátrixnorma?

12. Adjunk meg egy mátrixot, melynek a *Frobenius* mátrixnormája egyenlő az $\mathbf{x} = (\,1\,)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n$ csak egyesekből álló vektor 2-es vektornormájával?

13. Igazoljuk, hogy bármely mátrixnormára és $\forall\ \mathbf{A} \in \mathbb{K}^{nxn}$ mátrixra igaz, hogy a spektrálsugár kisebb egyenlő bármely normánál, azaz

$$\rho(\mathbf{A}) \leq \|\mathbf{A}\| \ \ !$$

14. Bizonyítsuk be, hogy ha $\mathbf{A}$ normális mátrix, akkor

$$\|\mathbf{A}\|_2 = \rho(\mathbf{A}) = \max|\lambda_i(\mathbf{A})| \ \ !$$

15. Igazoljuk, hogy ha $\mathbf{Q} \in \mathbb{K}^{nxn}$ unitér mátrix, akkor igazak a következő állítások.

a) $\|\mathbf{Qx}\|_2 = \|\mathbf{x}\|_2 \quad \forall\ \mathbf{x} \in \mathbb{K}^n$.

b) $\|\mathbf{Q}\|_2 = \|\mathbf{Q}^*\|_2 = 1$.

c) $\|\mathbf{QA}\|_2 = \|\mathbf{AQ}\|_2 = \|\mathbf{A}\|_2 \quad \forall\ \mathbf{A} \in \mathbb{K}^{nxn}$.

16. Bizonyítsuk be, hogy

$$\|\mathbf{A}\|_F = (tr(\mathbf{A}^*\mathbf{A}))^{\frac{1}{2}} \ \ !$$

17. Igazoljuk, hogy ha $\mathbf{Q}$ unitér mátrix, akkor

$$\|\mathbf{QA}\|_F = \|\mathbf{AQ}\|_F = \|\mathbf{A}\|_F \ \ !$$

18. Igazoljuk, hogy

$$\|\mathbf{A}\|_F = \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i(\mathbf{A}^*\mathbf{A})\right)^{\frac{1}{2}} \ \ !$$

19. Mutassuk meg, hogy

a) a spektrálnorma és a *Frobenius* norma ekvivalensek!

b) a 2-es vektornorma és a *Frobenius* norma illeszkednek!

3.1.3. Kondíciószám

20. Számítsuk ki az alábbi $\mathbf{A}$ mátrix kondíciószámát 1-es és ∞ mátrixnorma esetén!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$$

21. Számítsuk ki az alábbi $\mathbf{A}$ mátrix kondíciószámát 2-es és *Frobenius* mátrixnorma esetén!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

22. Számítsuk ki az alábbi $\mathbf{A}$ mátrix kondíciószámát $1, 2, \infty$ és *Frobenius* mátrixnorma esetén!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

23. Számítsuk ki az alábbi $\mathbf{A}$ mátrix kondíciószámát $1, 2, \infty$ és *Frobenius* mátrixnorma esetén!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

24. Igazoljuk, hogy a QR felbontással kapott feladat érzékenysége (kondícionáltsága) nem változik!

25. Igazoljuk, hogy a szimmetrikus, pozitív definit $\mathbf{A}$ mátrixra elkészített $\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{L}^{\mathbf{T}}$ Cholesky felbontás esetén

$$cond_2(\mathbf{A}) = cond_2(\mathbf{L}) \cdot cond_2(\mathbf{L}^{\mathbf{T}}) = (cond_2(\mathbf{L}))^2 \;\; !$$

Ez azt jelenti, hogy ha az eredeti $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ lineáris egyenletrendszer helyett az $\mathbf{Ly} = \mathbf{b}$ és $\mathbf{L}^{\mathbf{T}}\mathbf{x} = \mathbf{y}$ háromszögmátrixú egyenletrendszereket oldjuk meg, azzal a feladat érzékenysége nem változik!

3.2. Megoldások

3.2.1. Vektornormák

1. Számítsuk ki a megadott normákat!

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{x}\|_1 &= \sum_{i=1}^{n} |x_i| = 1 + 2 + |-3| = 6 \\
\|\mathbf{x}\|_2 &= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2} = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-3)^2} = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14} \\
\|\mathbf{x}\|_\infty &= \max_{i=1}^{n} |x_i| = \max\{1; 2; |-3|\} = 3
\end{aligned}$$

2. Számítsuk ki a megadott normákat!

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{x}\|_1 &= \sum_{i=1}^{n} |x_i| = 5 + |-3| + 8 + 4 = 20 \\
\|\mathbf{x}\|_2 &= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2} = \sqrt{5^2 + (-3)^2 + 8^2 + 4^2} = \sqrt{25 + 9 + 64 + 16} = \sqrt{114} \\
\|\mathbf{x}\|_\infty &= \max_{i=1}^{n} |x_i| = max\{5; |-3|; 8; 4\} = 8
\end{aligned}$$

3. A vektornormák ekvivalensek, ha

$$\exists\ c_1, c_2 > 0 \quad \forall\ x \in \mathbb{K}^n: \quad c_1 \cdot \|\mathbf{x}\|_A \leq \|\mathbf{x}\|_B \leq c_2 \cdot \|\mathbf{x}\|_A$$

Ennek megfelelően a feladat valójában két egyenlőtlenségre bomlik.

a) Először megmutatjuk, hogy

$$\exists\ c_1 > 0: \quad c_1 \cdot \|\mathbf{x}\|_\infty \leq \|\mathbf{x}\|_1.$$

Mivel

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{i=1}^{n} |x_i| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| = \|x\|_1$$

Vagyis $c_1 = 1$ választással készen is vagyunk.

b) Most vizsgáljuk meg az egyenlőtlenség másik oldalát.

$$\exists\ c_2 > 0: \quad c_2 \cdot \|\mathbf{x}\|_1 \leq \|\mathbf{x}\|_\infty$$

$$\begin{aligned}
\forall\ j = 1, \cdots, n: \quad |x_j| &\leq \max_{i=1}^{n} |x_i| \\
&\Downarrow \\
\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{j=1}^{n} |x_j| &\leq n \cdot \max_{i=1}^{n} |x_i| = n \cdot \|\mathbf{x}\|_\infty.
\end{aligned}$$

Vagyis $c_2 = n$ választással beláttuk a fenti egyenlőtlenséget.

Vagyis ezzel megmutattuk, hogy az 1-es és ∞ vektornormák ekvivalensek.

4. Az előző feladatban alkalmazott eljárást használjuk most is. Vagyis a feladatot két részfeladatra bontjuk.

a) Először megmutatjuk, hogy

$$\exists\ c_1 > 0: \quad c_1 \cdot \|\mathbf{x}\|_\infty \leq \|\mathbf{x}\|_2.$$

Mivel

$$\begin{aligned}
\left(\max_{i=1}^{n} |x_i|\right)^2 &\leq \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \\
&\Downarrow \\
\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{i=1}^{n} |x_i| &\leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2} = \|x\|_2.
\end{aligned}$$

Vagyis $c_1 = 1$ választással kész is vagyunk.

b) Most vizsgáljuk meg az egyenlőtlenség másik oldalát.

$$\exists\ c_2 > 0 : \quad c_2 \cdot \|\mathbf{x}\|_2 \leq \|\mathbf{x}\|_\infty$$

Mivel

$$\begin{array}{rcl} \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 & \leq & n \cdot \left(\max_{i=1}^{n} |x_i| \right)^2 \\ & \Downarrow & \\ \|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2} & \leq & \sqrt{n} \cdot \max_{i=1}^{n} |x_i| = \sqrt{n} \cdot \|\mathbf{x}\|_\infty . \end{array}$$

Vagyis $c_2 = \sqrt{n}$ választással beláttuk az egyenlőtlenséget.

Ezzel megmutattuk, hogy a 2-es és ∞ vektornormák ekvivalensek.

5. Az eddigieknek megfelelően most is két részre bontjuk a feladat megoldását.

a) Először megmutatjuk, hogy

$$\exists\ c_1 > 0 : \quad c_1 \cdot \|\mathbf{x}\|_2 \leq \|\mathbf{x}\|_1 .$$

A pozitív tagú összeg négyzetre emeléséből következik, hogy

$$\begin{array}{rcl} \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i| \right)^2 & = & (|x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|)^2 = \\ & = & |x_1|^2 + |x_2|^2 + \ldots + |x_n|^2 + \\ & + & 2 \cdot |x_1||x_2| + \ldots + 2 \cdot |x_2||x_3| + \ldots + 2 \cdot |x_{n-1}||x_n| \geq \\ & \geq & \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 . \end{array}$$

Négyzetgyököt vonva ebből már következik a bizonyítandó állítás.

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2} \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| = \|\mathbf{x}\|_1$$

Vagyis $c_1 \geq 1$ választással kész is vagyunk az egyenlőtlenség egyik oldalával.

b) Most vizsgáljuk meg az egyenlőtlenség másik oldalát.

$$\exists\ c_2 > 0 : \quad c_2 \cdot \|\mathbf{x}\|_1 \leq \|\mathbf{x}\|_2$$

A bizonyítást a Cauchy-Bunyakovszkij-Schwarz-egyenlőtlenséggel az

$$\widetilde{\mathbf{x}} = (\,|x_i|\,)_{i=1}^{n}, \quad \mathbf{e} = (\,1\,)_{i=1}^{n}$$

vektorokra felírva kapjuk.

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i| \right)^2 = < \widetilde{\mathbf{x}}\,;\, \mathbf{e} >^2 \leq \|\widetilde{\mathbf{x}}\|_2^2 \cdot \|\mathbf{e}\|_2^2 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} 1 = n \cdot \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 .$$

Innen gyökvonással $c_2 = \sqrt{n}$.

6. Induljunk ki a definícióból.

$$\|\mathbf{A}\|_1 = \sup_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{Ax}\|_1}{\|\mathbf{x}\|_1}$$

Becsüljük felülről a tört számlálóját. Használjuk közben az abszolútértékre vonatkozó háromszög-egyenlőtlenséget és cseréljük meg az összegzés sorrendjét.

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{Ax}\|_1 &= \sum_{i=1}^{n} |(\mathbf{Ax})_i| = \sum_{i=1}^{n} \left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right| \leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \cdot |x_j| = \\
&= \sum_{j=1}^{n} |x_j| \cdot \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \leq \max_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ik}| \cdot \sum_{j=1}^{n} |x_j| = \\
&= \max_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ik}| \cdot \|\mathbf{x}\|_1
\end{aligned}$$

$\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ esetén $\|\mathbf{x}\|_1$ normával végigosztva az egyenlőtlenséget kapjuk, hogy

$$\frac{\|\mathbf{Ax}\|_1}{\|\mathbf{x}\|_1} \leq \max_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ik}|.$$

Most már csak azt kell megmutatnunk, hogy $\exists\ \mathbf{x} \in \mathbb{K}^n$, amelyre teljesül az egyenlőség.

Legyen $\mathbf{x} = \mathbf{e_p}$, vagyis az $\mathbf{x}$ legyen a p. kanonikus bázis vektor, amely a p. pozícióban 1 és a többi helyen nulla. A p legyen az az oszlopa a mátrixnak, ahol maximális lesz az elemek abszolútérték összege.

$$\sum_{i=1}^{n} |a_{ip}| = \max_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ik}|$$

Ebben az esetben az $\|\mathbf{x}\|_1 = 1$ és teljesül az egyenlőség.

$$\frac{\|\mathbf{Ax}\|_1}{\|\mathbf{x}\|_1} = \|\mathbf{Ax}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |a_{ip}|$$

3.2.2. Mátrixnormák

7. **a)** Igazolnunk kell, hogy teljesülnek a vektornorma tulajdonságai. Ehhez a $\|.\|_v$ -vel jelölt vektornorma tulajdonságait használjuk fel.

1) $\|\mathbf{x}\|_T = \|\mathbf{Tx}\|_v = 0 \Longleftrightarrow \mathbf{Tx} = \mathbf{0} \Longleftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$

2) $\|\lambda\mathbf{x}\|_T = \|\lambda\mathbf{Tx}\|_v = |\lambda| \cdot \|\mathbf{Tx}\|_v = |\lambda| \cdot \|\mathbf{x}\|_T$

3) $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|_T = \|\mathbf{T}(\mathbf{x}+\mathbf{y})\|_v \leq \|\mathbf{Tx}\|_v + \|\mathbf{Ty}\|_v = \|\mathbf{x}\|_T + \|\mathbf{y}\|_T$
Tehát a norma tulajdonságok teljesülnek.

b) A vektornorma által indukált mátrixnorma

$$\|\mathbf{A}\|_T = \max_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{Ax}\|_T}{\|\mathbf{x}\|_T} = \max_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{TAx}\|_v}{\|\mathbf{Tx}\|_v} =$$

.

az $\mathbf{y} := \mathbf{Tx}$ helyettesítéssel

$$= \max_{\mathbf{y}\neq\mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{TAT}^{-1}\mathbf{y}\|_v}{\|\mathbf{y}\|_v} = \|\mathbf{TAT}^{-1}\|.$$

8. A kért mátrixnormák:

$$\|\mathbf{A}\|_1 = \max_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| = \max_{j=1}^{n}\{|-1|+1\,;0+2\} = 2,$$

$$\|\mathbf{A}\|_\infty = \max_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| = \max_{i=1}^{n}\{|-1|+0\,;1+2\} = 3,$$

$$\|\mathbf{A}\|_2 = \sqrt{\max_{i=1}^{n} \lambda_i(\mathbf{A}^*\mathbf{A})}.$$

Határozzuk meg $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$ sajátértékeit.

$$\begin{aligned} |\mathbf{A}^*\mathbf{A} - \mathbf{I}\lambda| &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(4-\lambda) - 4 = \lambda^2 - 6\lambda + 4 = 0 \\ &\to \quad \lambda_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36-16}}{2} = 3 \pm \sqrt{5} \end{aligned}$$

Innen látszik, hogy $\lambda_1 = 3+\sqrt{5}, \quad \lambda_2 = 3-\sqrt{5}$.
Innen a spektrálsugár $\rho(\mathbf{A}^*\mathbf{A}) = \max_{i=1}^{n} \lambda_i(\mathbf{A}^*\mathbf{A}) = 3+\sqrt{5}$. Gyökvonással a 2 -es norma

$$\|\mathbf{A}\|_2 = \sqrt{3+\sqrt{5}}$$

9. Mivel a mátrix szimmetrikus, ezért az 1-es és ∞ normája megegyezik.

$$\|\mathbf{A}\|_1 = \max_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| = \max_{j=1}^{n}\{4+2\,;2+4\} = 6$$

$$\|\mathbf{A}\|_\infty = \max_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| = \max_{i=1}^{n}\{4+2\,;2+4\} = 6$$

Mivel a megadott mátrix szimmetrikus, ezért a spektrálnormát az eredeti mátrix spektrálsugárával számíthatjuk.

$$\|\mathbf{A}\|_2 = \max_{i=1}^{n} |\lambda_i(\mathbf{A})|$$

$$\begin{aligned} |\mathbf{A} - \mathbf{I}\lambda| &= \begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 \\ 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)^2 - 4 = \lambda^2 - 8\lambda + 12 = 0 \\ &\to \quad \lambda_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64-48}}{2} = 4 \pm 2 \end{aligned}$$

Innen látszik, hogy $\lambda_1 = 2$ és $\lambda_2 = 6$, így $\rho(\mathbf{A}) = 6$ és

$$\|\mathbf{A}\|_2 = 6.$$

10. Mivel a mátrix szimmetrikus, ezért az 1-es és ∞ normája megegyezik.

$$\|\mathbf{A}\|_1 = \max_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| = \max_{j=1}^{n}\{4+0+|-1|; 0+4+1; |-1|+1+4\} = \{5;5;6\} = 6$$

$$\|\mathbf{A}\|_\infty = \max_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| = \max_{i=1}^{n}\{4+0+|-1|; 0+4+1; |-1|+1+4\} = \{5;5;6\} = 6$$

Mivel a megadott mátrix szimmetrikus, ezért a spektrálnormát az eredeti mátrix spektrálsugarával számíthatjuk.

$$\|\mathbf{A}\|_2 = \max_{i=1}^{n} |\lambda_i(\mathbf{A})|$$

$$|\mathbf{A} - \mathbf{I}\lambda| = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & 4-\lambda & 1 \\ -1 & 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
&= (4-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 \\ 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} + (-1) \cdot \begin{vmatrix} 0 & 4-\lambda \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = \\
&= (4-\lambda) \cdot ((4-\lambda)^2 - 1) - (4-\lambda) = \\
&= (4-\lambda) \cdot ((4-\lambda)^2 - 1 - 1) = (4-\lambda) \cdot (\lambda^2 - 8\lambda + 14) = 0 \\
&\to \lambda_{2,3} = \frac{8 \pm \sqrt{64-56}}{2} = 4 \pm \sqrt{2}
\end{aligned}$$

Innen látszik, hogy $\lambda_1 = 4$ és $\lambda_2 = 4 + \sqrt{2}$, $\lambda_3 = 4 - \sqrt{2}$, így az eredmény

$$\|\mathbf{A}\|_2 = 4 + \sqrt{2}.$$

11. Legyen $\|.\|_m$ indukált mátrixnorma. Ekkor igaz, hogy $\|\mathbf{I}\|_m = 1$. Ez minden indukált mátrixnormára igaz, így ha a *Frobenius* mátrixnorma is indukált lenne, akkor rá is teljesülnie kellene ennek a tulajdonságnak. Nézzük meg $n \neq 1$ esetén.

$$\|\mathbf{I}\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} 1^2} = \sqrt{n^2} = n \neq 1$$

Következésképpen a *Frobenius* mátrixnorma nem indukált mátrixnorma.

12. A csupa egyesekből álló vektor 2-es vektornormája

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |1|^2} = \sqrt{n}.$$

Ha olyan mátrixot keresünk, melynek minden eleme azonos, akkor a *Frobenius* mátrix definíciója alapján

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{A}\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2} &= \sqrt{n} \\
\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |a|^2 &= n \\
n^2 \cdot a &= n \\
a &= \frac{1}{n}.
\end{aligned}$$

Tehát egy lehetséges megoldás

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} \end{bmatrix}.$$

13. Definíció szerint $\rho(A) = \max_{i=1}^{n} |\lambda_i(A)|$.

Induljunk ki a sajátérték egyenletből, jelöljük λ -val az $\mathbf{A}$ sajátértékét és $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ -val a hozzá tartozó sajátvektort. Az első lépésben megszorozzuk mind a két oldalt $\mathbf{x}^*$-gal, majd vesszük a normáját.

$$\begin{aligned} \mathbf{Ax} &= \lambda \cdot \mathbf{x} \\ \mathbf{Axx}^* &= \lambda \cdot \mathbf{xx}^* \\ \|\mathbf{A}(\mathbf{xx}^*)\| &= \|\lambda \cdot \mathbf{xx}^*\| \end{aligned}$$

A háromszög-egyenlőtlenség és a mátrix normájára vonatkozó azonosság felhasználásával és az $\|\mathbf{xx}^*\| \neq 0$-val való osztással kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{xx}^*\| \geq \|\mathbf{A}(\mathbf{xx}^*)\| &= \|\lambda \cdot \mathbf{xx}^*\| = |\lambda| \cdot \|\mathbf{xx}^*\| \\ \|\mathbf{A}\| &\geq |\lambda| \end{aligned}$$

Mivel ez $\forall\ \lambda$ sajátértékre igaz, így a legnagyobbra is igaz, vagyis

$$\rho(A) = \max_{i=1}^{n} |\lambda_i(A)| \leq \|A\|$$

Ezzel igazoltuk az állítást.

14. Az $\mathbf{A}$ mátrix normális mátrix, ha $\mathbf{A}^*\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A}^*$.

Ha $\mathbf{A}$ mátrix normális, akkor $\exists\ \mathbf{U}$ unitér mátrix, amelyre $\mathbf{U}^*\mathbf{A}\mathbf{U} = \mathbf{D} = diag(\lambda_i(\mathbf{A}))$, azaz diagonalizálható és átlójában a sajátértékek vannak.
$\mathbf{U}$ unitér azt jelenti, hogy $\mathbf{U}^*\mathbf{U} = \mathbf{U}\mathbf{U}^* = \mathbf{I}$ és így $\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}^*$.

Induljunk ki $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$-ból.

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^*\mathbf{A} &= (\mathbf{UDU}^*)^* \cdot \mathbf{UDU}^* \\ &= \underbrace{\mathbf{U}^{**}}_{\mathbf{U}} \mathbf{D}^* \underbrace{\mathbf{U}^*\mathbf{U}}_{\mathbf{I}} \mathbf{DU}^* \\ &= \mathbf{UD}^*\mathbf{DU}^* \end{aligned}$$

Tehát $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$ sajátértékeire

$$\begin{aligned} \lambda_i(\mathbf{A}^*\mathbf{A}) &= \lambda_i(\mathbf{D}^*\mathbf{D}) = |\lambda_i(\mathbf{D})|^2 = |\lambda_i(\mathbf{A})|^2 \\ \rho(\mathbf{A}^*\mathbf{A}) &= \max \lambda_i(\mathbf{A}^*\mathbf{A}) = (\max |\lambda_i(\mathbf{A})|)^2 = \rho(\mathbf{A})^2 = \|\mathbf{A}\|_2^2 \end{aligned}$$

Ezzel bebizonyítottuk az állítást.

15. **a)** Mivel a 2-es norma a jól ismert euklideszi távolság fogalom interpretációja, ezért ebben a pontban azt kell megmutatnunk, hogy az unitér transzformáció távolságtartó.

$$\|\mathbf{Qx}\|_2^2 = (\mathbf{Qx})^*\mathbf{Qx} = \mathbf{x}^*\mathbf{Q}^*\mathbf{Qx} = \mathbf{x}^*\mathbf{x} = \|\mathbf{x}\|_2^2$$

b) Az indukált mátrixnorma definícióját és az előző pontban bizonyított állítást felhasználva

$$\|\mathbf{Q}\|_2 = \sup_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{Qx}\|_2}{\|\mathbf{x}\|_2} = \sup_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{x}\|_2}{\|\mathbf{x}\|_2} = 1.$$

c) Ismét az indukált mátrixnorma definícióját és az **a)** pontbeli állítást használjuk.

$$\|\mathbf{QA}\|_2 = \sup_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{QAx}\|_2}{\|\mathbf{x}\|_2} = \sup_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{Ax}\|_2}{\|\mathbf{x}\|_2} = \|\mathbf{A}\|_2$$

$$\|\mathbf{AQ}\|_2 = \sup_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{AQx}\|_2}{\underbrace{\|\mathbf{x}\|_2}_{\|\mathbf{Qx}\|_2}} = \sup_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{A}(\mathbf{Qx})\|_2}{\|\underbrace{\mathbf{Qx}}_{\mathbf{y}:=\mathbf{Qx}}\|_2} = \sup_{\mathbf{y}\neq\mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{Ay}\|_2}{\|\mathbf{y}\|_2} = \|\mathbf{A}\|_2$$

Tehát ezzel igazoltuk az állítást.

16. Nézzük először, mit jelentenek a feladatban szereplő fogalmak.
Az $\mathbf{A}$ mátrix *Frobenius* normája definíció szerint

$$\|\mathbf{A}\|_F = \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

egy tetszőleges $\mathbf{B}$ mátrix nyoma (trace)

$$tr(\mathbf{B}) = \sum_{i=1}^{n} b_{ii}.$$

Az $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$ mátrix főátlójában lévő elemek az alábbiak.

$$(\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{ii} = \sum_{j=1}^{n} \overline{a_{ji}} \cdot a_{ij} = \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2$$

Ezt felhasználva, kiszámoljuk az $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$ mátrix nyomát(trace).

$$tr(A^*A) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} |a_{ji}|^2\right) = \|\mathbf{A}\|_F^2$$

Ezzel készen is vagyunk a bizonyítással.

17. Induljunk ki a $\mathbf{QA}$ mátrix *Frobenius* norma négyzetéből és használjuk fel az előző feladatban bebizonyított állítást.

$$\|\mathbf{QA}\|_F^2 = tr\left((\mathbf{QA})^* \cdot \mathbf{QA}\right) = tr(\mathbf{A}^* \cdot \underbrace{\mathbf{Q}^*\mathbf{Q}}_{=\mathbf{I}} \cdot \mathbf{A}) = tr(\mathbf{A}^* \cdot \mathbf{A}) = \|\mathbf{A}\|_2^F$$

Alkalmazzuk a most és eddig megmutatott összefüggéseket! Mivel $\mathbf{A}$ és $\mathbf{A}^*$ *Frobenius* normája megegyezik, így

$$\|\mathbf{AQ}\|_F^2 = \|((\mathbf{AQ})^*)\|_F^2 = \|\mathbf{Q}^* \cdot \mathbf{A}^*\|_F^2 = \|\mathbf{A}^*\|_F^2 = \|\mathbf{A}\|_F^2.$$

Ezzel az állítást bebizonyítottuk.

18. Ha $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$ szimmetrikus, akkor $\exists$ $\mathbf{Q}$ unitér mátrix, amelyre

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}^* \cdot \mathbf{A}^*\mathbf{A} \cdot \mathbf{Q} &= \mathbf{D} = diag(\lambda_i(\mathbf{A}^*\mathbf{A})) \\ (\mathbf{AQ})^* \cdot \mathbf{AQ} &= \mathbf{D}. \end{aligned}$$

Induljunk ki $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$ sajátértékeinek összegéből!

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(\mathbf{A}^*\mathbf{A}) = tr(\mathbf{D}) = tr\left((\mathbf{AQ})^* \cdot \mathbf{AQ}\right)$$

Most felhasználjuk az előző két példában bebizonyított összefüggést.

$$tr\left((\mathbf{AQ})^* \cdot \mathbf{AQ}\right) = \|\mathbf{AQ}\|_F^2 = \|\mathbf{A}\|_F^2$$

Ezzel be is bizonyítottuk a kívánt összefüggést.

19. Mindkét állításhoz használjuk fel az előző eredményeket. Ne felejtsük el, hogy a $\lambda_i(\mathbf{A}^*\mathbf{A})$ sajátértékek nem negatívak!

a) Induljunk ki az $\mathbf{A}$ spektrálnorma négyzetéből.

$$\begin{aligned} \|\mathbf{A}\|_2^2 &= \max_{i=1}^{n} \lambda_i(\mathbf{A}^*\mathbf{A}) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(\mathbf{A}^*\mathbf{A}) = \\ &= \|A\|_F^2 \leq n \cdot \max_{i=1}^{n} \lambda_i(\mathbf{A}^*\mathbf{A}) = n \cdot \|\mathbf{A}\|_2^2 \end{aligned}$$

Tehát mind a két oldalból négyzetgyököt vonva kapjuk az alábbi összefüggést.

$$\|\mathbf{A}\|_2 \leq \|\mathbf{A}\|_F \leq \sqrt{n}\|\mathbf{A}\|_2$$

Ez pedig a megadott mátrixnormára az ekvivalencia definíciója.

b) A $\|.\|_v$ vektornorma és a $\|.\|_m$ mátrixnorma illeszkedik, ha minden $\mathbf{A}$ mátrixra és $\mathbf{x}$ vektorra

$$\|\mathbf{Ax}\|_v \leq \|\mathbf{A}\|_m \cdot \|\mathbf{x}\|_v.$$

A 2 -es mátrixnorma illeszkedik az őt indukáló 2 -es vektornormához. Az előző feladatbeli norma becslést felhasználva

$$\|\mathbf{Ax}\|_2 \leq \|\mathbf{A}\|_2 \cdot \|\mathbf{x}\|_2 \leq \|\mathbf{A}\|_F \cdot \|\mathbf{x}\|_2.$$

Tehát a $\|.\|_2$ vektornorma és a $\|.\|_F$ mátrixnorma illeszkednek.

3.2.3. Kondíciószám

20. Legyen $\|.\|_m$ mátrixnorma és $\mathbf{A} \in \mathbb{K}^{nxn}$ $(n \in \mathbb{N})$ invertálható mátrix.

A kondíciószám fogalma: $cond_m(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}\|_m \cdot \|\mathbf{A}^{-1}\|_m$.

A feladat megoldásához első lépésként meg kell határoznunk az $\mathbf{A}$ mátrix inverzét.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} \Longrightarrow \mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Ezután a megfelelő mátrixnormákat kell meghatároznunk.

a) Először az 1-es mátrixnormához tartozó kondíciószámot határozzuk meg.

$$\begin{aligned} \|\mathbf{A}\|_1 &= \max\{4,9\} = 9 \\ \|\mathbf{A^{-1}}\|_1 &= \max\{10,3\} = 10 \\ cond_1(\mathbf{A}) &= 9 \cdot 10 = 90 \end{aligned}$$

b) Most a ∞ mátrixnormához tartozó kondíciószámot határozzuk meg.

$$\begin{aligned} \|\mathbf{A}\|_\infty &= \max\{3,10\} = 10 \\ \|\mathbf{A^{-1}}\|_\infty &= \max\{9,4\} = 9 \\ cond_\infty(\mathbf{A}) &= 10 \cdot 9 = 90 \end{aligned}$$

Vegyük észre, hogy 2×2-es esetre mindig megegyezik az 1-es és ∞ mátrixnormákhoz tartozó kondíciószám. Ennek a meggondolását az olvasóra bízzuk.

21. Az előző feladatban leírtaknak megfelelően első lépésként meghatározzuk az **A** mátrix inverzét.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow \mathbf{A^{-1}} = \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Most már csak a megfelelő mátrixnormákat kell meghatároznunk.

a) Először a 2-es mátrixnormához tartozó kondíciószámot határozzuk meg. Mivel a mátrix szim metrikus, ezért egyszerűbben számolható a mátrixnorma.

$$\|\mathbf{A}\|_2 = \rho(\mathbf{A}) = \max|\lambda_i(\mathbf{A})|$$

Ehhez ki kell számítanunk a mátrix sajátértékeit.

$$\begin{aligned} |\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 4 = 0 \\ \lambda^2 - 2\lambda - 3 &= 0 \\ \lambda_{1,2} &= \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = 1 \pm 2 \end{aligned}$$

Tehát a mátrix sajátértékei: $\lambda_1 = -1$ és $\lambda_2 = 3$.

A 2 -es norma szimmetrikus mátrix esetén a maximális abszolútértékű sajátérték,

$$\|\mathbf{A}\|_2 = 3.$$

Most már csak az inverz mátrixra kell ugyanezt megismételni. Egy egyszerűsítéssel élünk és nem a fent bemutatott módszert ismételjük meg. Mivel az $\mathbf{A^{-1}}$ sajátértéke az **A** sajátértékének reciproka, így

$$\|\mathbf{A}^{-1}\|_2 = \max\left|\frac{1}{\lambda_i}\right| = \frac{1}{\min|\lambda_i|} = \frac{1}{1} = 1.$$

Ezt felhasználva

$$cond_2(\mathbf{A}) = \frac{\max|\lambda_i|}{\min|\lambda_i|} = \frac{3}{1} = 3.$$

b) A következő lépésben meghatározzuk a *Frobenius* márixnormához tartozó kondíciószámot.

$$\begin{aligned} \|\mathbf{A}\|_F &= (1^2+2^2+2^2+1^2)^{\frac{1}{2}} = (1+4+4+1)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10} \\ \|\mathbf{A^{-1}}\|_F &= \frac{1}{3}((-1)^2+2^2+2^2+(-1)^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}(1+4+4+1)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}\sqrt{10} \\ cond_F(\mathbf{A}) &= \sqrt{10} \cdot \frac{1}{3}\sqrt{10} = \frac{10}{3} \end{aligned}$$

Mivel $\mathbf{A}$ szimmetrikus mátrix, ezért $\|\mathbf{A}\|_2$ a legkisebb norma és $\rho(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}\|_2$.
Az $\mathbf{A^{-1}}$-re ugyanez igaz, tehát a $cond_2(\mathbf{A})$ a legkisebb kondíciószám.

22. Az előző feladatban leírtaknak megfelelően első lépésként meghatározzuk az $\mathbf{A}$ mátrix inverzét.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \Longrightarrow \mathbf{A^{-1}} = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Ezután a megfelelő mátrixnormákat kell meghatároznunk.

a) Először az 1-es mátrixnormához tartozó kondíciószámot határozzuk meg.

$$\begin{aligned} \|\mathbf{A}\|_1 &= \max\{\,2,2\} = 2 \\ \|\mathbf{A^{-1}}\|_1 &= \max\left\{\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right\} = \frac{3}{2} \\ cond_1(\mathbf{A}) &= 2 \cdot \frac{3}{2} = 3 \end{aligned}$$

b) Most a ∞ mátrixnormához tartozó kondíciószámot határozzuk meg.

$$\begin{aligned} \|\mathbf{A}\|_\infty &= \max\{\,1,3\} = 3 \\ \|\mathbf{A^{-1}}\|_\infty &= \max\{\,1,1\} = 1 \\ cond_\infty(\mathbf{A}) &= 3 \cdot 1 = 3 \end{aligned}$$

c) A következőkben a 2-es mátrixnormához tartozó kondíciószámot határozzuk meg. Az $\|\mathbf{A}\|_2$-t már a 8. feladatban meghatároztuk $\|\mathbf{A}\|_2 = \sqrt{3+\sqrt{5}}$.
Az $\|\mathbf{A^{-1}}\|_2$-hoz először az $(\mathbf{A^{-1}})^*\mathbf{A^{-1}}$ mátrix sajátértékeit kell meghatároznunk.

$$(\mathbf{A^{-1}})^*\mathbf{A^{-1}} = \begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

A karakterisztikus polinomja

$$\begin{aligned} |(\mathbf{A^{-1}})^*\mathbf{A^{-1}} - \lambda\mathbf{I}| &= \begin{vmatrix} \frac{5}{4}-\lambda & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4}-\lambda \end{vmatrix} = \\ &= \left(\left(\frac{5}{4}-\lambda\right)\left(\frac{1}{4}-\lambda\right) - \frac{1}{16}\right) = \lambda^2 - \frac{6}{4}\lambda + \frac{1}{4} = 0 \\ 4\lambda^2 - 6\lambda + 1 &= 0. \\ \lambda_{1,2} &= \frac{6 \pm \sqrt{36-16}}{8} = \frac{6 \pm \sqrt{20}}{8} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{4} \end{aligned}$$

Tehát a mátrix sajátértékei: $\lambda_1 = \frac{3-\sqrt{5}}{4}$ és $\lambda_2 = \frac{3+\sqrt{5}}{4}$.
Innen

$$\rho((\mathbf{A^{-1}})^*\mathbf{A^{-1}}) = \frac{3+\sqrt{5}}{4} \quad \Rightarrow \quad \|\mathbf{A^{-1}}\|_2 = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{4}} = \frac{\sqrt{3+\sqrt{5}}}{2}.$$

A 2-es kondíciószám

$$cond_2(\mathbf{A}) = \sqrt{3+\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{3+\sqrt{5}}}{2} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

Egy kevesebb számolást igénylő megoldást is mutatunk. Az $(\mathbf{A^{-1}})^*\mathbf{A^{-1}}$ mátrix sajátértékeit meghatározhatjuk közvetlenül az $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$ mátrix sajátértékeiből, ugyanis

$$(\mathbf{A^{-1}})^*\mathbf{A^{-1}} = (\mathbf{A}\mathbf{A}^*)^{-1}, \quad \text{és} \quad \mathbf{A}\mathbf{A}^* = \mathbf{A^{-1}}(\mathbf{A}\mathbf{A}^*)\mathbf{A} = \mathbf{A}^*\mathbf{A},$$

vagyis $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$ és $\mathbf{A}\mathbf{A}^*$ hasonló, a sajátértékeik megegyeznek. Az $(\mathbf{A}\mathbf{A}^*)^{-\mathbf{1}}$ sajátértékei az $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$ sajátértékeinek reciprokai, azaz $\frac{1}{3-\sqrt{5}}$ és $\frac{1}{3+\sqrt{5}}$.

$$\rho((\mathbf{A^{-1}})^*\mathbf{A^{-1}}) = \frac{1}{3-\sqrt{5}} = \frac{3+\sqrt{5}}{4} \quad \Rightarrow \quad \|\mathbf{A^{-1}}\|_2 = \frac{\sqrt{3+\sqrt{5}}}{2}$$

d) Már csak a *Frobenius* márixnormához tartozó kondíciószámot kell meghatároznunk.

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{A}\|_F &= ((-1)^2+0^2+1^2+2^2)^{\frac{1}{2}} = (1+0+1+4)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{6} \\
\|\mathbf{A^{-1}}\|_F &= \frac{1}{2}((-2)^2+0^2+1^2+1^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(4+0+1+1)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{6} \\
cond_F(\mathbf{A}) &= \sqrt{6}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{6} = \frac{6}{2} = 3
\end{aligned}$$

23. Az előző feladatban leírtaknak megfelelően első lépésként meghatározzuk az **A** mátrix inverzét.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \Longrightarrow \mathbf{A^{-1}} = \frac{1}{12}\cdot\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

Már csak a megfelelő mátrixnormákat kell meghatároznunk.

a) Először az 1-es mátrixnormához tartozó kondíciószámot határozzuk meg.

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{A}\|_1 &= \max\{6,6\} = 6 \\
\|\mathbf{A^{-1}}\|_1 &= \frac{1}{12}\cdot\max\{6,6\} = \frac{1}{2} \\
cond_1(\mathbf{A}) &= 6\cdot\frac{1}{2} = 3
\end{aligned}$$

b) Most a ∞ mátrixnormához tartozó kondíciószámot határozzuk meg.

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{A}\|_\infty &= \max\{6,6\} = 6 \\
\|\mathbf{A^{-1}}\|_\infty &= \frac{1}{12}\cdot\max\{6,6\} = \frac{1}{2} \\
cond_\infty(\mathbf{A}) &= 6\cdot\frac{1}{2} = 3
\end{aligned}$$

c) A következőkben a 2-es mátrixnormához tartozó kondíciószámot határozzuk meg.

$$\begin{aligned}
|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}| &= \begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 \\ 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)^2 - 2\cdot 2 = 0 \\
\lambda^2 - 8\lambda + 12 &= 0 \\
\lambda_{1,2} &= \frac{8\pm\sqrt{64-48}}{2} = \frac{8\pm 4}{2} = 4\pm 2
\end{aligned}$$

Tehát a mátrix sajátértékei: $\lambda_1 = 2$ és $\lambda_2 = 6$.

Számolhatunk kondíciószámot közvetlenül a sajátértékekből

$$cond_2(\mathbf{A}) = \frac{\max|\lambda_i|}{\min|\lambda_i|} = \frac{6}{2} = 3.$$

d) Most már csak a *Frobenius* márixnormához tartozó kondíciószámot kell meghatároznunk.

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{A}\|_F &= (4^2+2^2+2^2+4^2)^{\frac{1}{2}} = (16+4+4+16)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10} \\
\|\mathbf{A^{-1}}\|_F &= \frac{1}{12}(4^2+(-2)^2+(-2)^2+4^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{12}(16+4+4+16)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{12}\sqrt{40} = \frac{\sqrt{10}}{6} \\
cond_F(\mathbf{A}) &= 2\sqrt{10}\cdot\frac{\sqrt{10}}{6} = \frac{10}{3}
\end{aligned}$$

24. Induljunk ki az $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ lineáris egyenletrendszer megoldásából úgy, hogy felhasználjuk az $\mathbf{A}=\mathbf{QR}$ felbontást!

$$\mathbf{Ax}=\mathbf{b} \quad\Longleftrightarrow\quad \begin{aligned} \mathbf{QRx} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{Rx} &= \mathbf{Q}^*\mathbf{b} \end{aligned}$$

Korábban láttuk, hogy az unitér mátrixok esetén az ortogonális transzformációk normatartóak, így

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{A}\|_2 &= \|\mathbf{QR}\|_2 = \|\mathbf{R}\|_2 \\
\|\mathbf{A^{-1}}\|_2 &= \|(\mathbf{QR})^{-1}\|_2 = \|\mathbf{R^{-1}}\cdot\mathbf{Q}^*\|_2 = \|\mathbf{R}^{-1}\|_2
\end{aligned}$$

vagyis $cond_2(\mathbf{A}) = cond_2(\mathbf{R})$.

Látjuk hogy az eredeti és a felső háromszögmátrixú lineáris egyenletrendszer kondíciószáma megegyezik, ez azt jelenti, hogy a **QR** felbontás nem változtatja meg a lineáris egyenletrendszer érzékenységét.

25. A Cholesky felbontásból $\mathbf{A}=\mathbf{LL^T}$. Elvégezve az **L** mátrix-szal egy hasonlósági transzformációt azt kapjuk, hogy

$$\mathbf{L^{-1}AL} = \mathbf{L^TL}.$$

Ez azt jelenti, hogy $\mathbf{LL^T}$ és $\mathbf{L^TL}$ hasonlóak, a sajátértékeik megegyeznek, így a spektrálsugaruk is.

$$\rho\,(\mathbf{A}) = \rho\,(\mathbf{LL^T}) = \rho\,(\mathbf{L^TL})$$

A 2-es (spektrálnorma) definíciójából

$$\|\mathbf{L}\|_2^2 = \varrho(\mathbf{L^TL}) = \varrho(\mathbf{LL^T}) = \|\mathbf{L^T}\|_2^2 \quad\Rightarrow\quad \|\mathbf{L}\|_2 = \|\mathbf{L^T}\|_2.$$

A fenti gondolatmenetet ismételjük meg az $\mathbf{L^{-1}}$-re. Mivel

$$\mathbf{A^{-1}} = (\mathbf{LL^T})^{-\mathbf{1}} = (\mathbf{L^T})^{-\mathbf{1}}\cdot\mathbf{L^{-1}} = (\mathbf{L^{-1}})^{\mathbf{T}}\cdot\mathbf{L^{-1}},$$

az **L** mátrix-szal elvégezve egy hasonlósági transzformációt

$$\mathbf{L^{-1}A^{-1}L} = \mathbf{L^{-1}}\cdot(\mathbf{L^{-1}})^{\mathbf{T}}.$$

Tehát $(\mathbf{L^{-1}})^{\mathbf{T}}\cdot\mathbf{L^{-1}}$ és $\mathbf{L^{-1}}\cdot(\mathbf{L^{-1}})^{\mathbf{T}}$ hasonlóak, a sajátértékeik megegyeznek, így a spektrálsugaruk is.

$$\rho\,(\mathbf{A^{-1}}) = \rho\,((\mathbf{L^{-1}})^{\mathbf{T}}\cdot\mathbf{L^{-1}}) = \rho\,(\,\mathbf{L^{-1}}\cdot(\mathbf{L^{-1}})^{\mathbf{T}})$$

A 2-es (spektrálnorma) definíciójából

$$\|\mathbf{L^{-1}}\|_2^2 = \varrho(\,(\mathbf{L^{-1}})^{\mathbf{T}}\cdot\mathbf{L^{-1}}) = \varrho(\,\mathbf{L^{-1}}\cdot(\mathbf{L^{-1}})^{\mathbf{T}}) = \|(\mathbf{L^{-1}})^{\mathbf{T}}\|_2^2 \quad\Rightarrow\quad \|\mathbf{L^{-1}}\|_2 = \|(\mathbf{L^{-1}})^{\mathbf{T}}\|_2.$$

Innen látjuk, hogy

$$cond_2(\mathbf{L}) = \|\mathbf{L}\|_2 \cdot \|\mathbf{L^{-1}}\|_2 = \|\mathbf{L^T}\|_2 \cdot \|(\mathbf{L^T})^{-1}\|_2 = cond_2(\mathbf{L^T}).$$

Mivel $\mathbf{A}$ és $\mathbf{A^{-1}}$ is szimmetrikus mátrix, a 2-es mátrixnorma a spektrálsugarukból közvetlenül is számolható.

$$\|\mathbf{A}\|_2 = \rho(\mathbf{A}) = \|\mathbf{L}\|_2^2, \quad \|\mathbf{A^{-1}}\|_2 = \rho(\mathbf{A^{-1}}) = \|\mathbf{L^{-1}}\|_2^2$$

Ezzel minden részletet bizonyítottunk a befejezéshez.

$$\|\mathbf{A}\|_2 \cdot \|\mathbf{A^{-1}}\|_2 = cond_2(\mathbf{A}) = (cond_2(\mathbf{L}))^2$$

4. fejezet

LINEÁRIS EGYENLETRENDSZER MEGOLDÁSÁNAK ITERÁCIÓS MÓDSZEREI

4.1. Feladatok

4.1.1. Egyszerű iteráció

1. Adott az $\mathbf{x_{k+1}} = \mathbf{B}\mathbf{x_k} + \mathbf{c}$ egyenlőség, ahol

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0,4 & 0,1 & 0 \\ 0,1 & 0,3 & 0,2 \\ 0 & 0,1 & 0,4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 0,1 \\ 0,5 \\ 0,1 \end{bmatrix}$$

Konvergens-e $\forall\ \mathbf{x_0} \in \mathbb{R}^3$-re? Írjuk fel a hibabecslést! Hány lépés kell a 10^{-3} pontosság eléréséhez? Melyik lineáris egyenletrendszer megoldásához konvergál?

2. Adott az $\mathbf{x_{k+1}} = \mathbf{B}\mathbf{x_k} + \mathbf{c}$ egyenlőség, ahol

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0,1 & 0,3 & 0,1 \\ 0,5 & 0,3 & 0,1 \\ 0 & 0,4 & 0,1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 0,2 \\ 0,3 \\ 0,1 \end{bmatrix}$$

Konvergens-e $\forall\ \mathbf{x_0} \in \mathbb{R}^3$-re? Írjuk fel a hibabecslést! Hány lépés kell a 10^{-3} pontosság eléréséhez? Melyik lineáris egyenletrendszer megoldásához konvergál?

3. Adott az $\mathbf{x_{k+1}} = \mathbf{B}\mathbf{x_k} + \mathbf{c}$ egyenlőség, ahol

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0,2 & 0,3 \\ 0,7 & 0,1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 0,1 \\ 0,3 \end{bmatrix}$$

Konvergens-e $\forall\ \mathbf{x_0} \in \mathbb{R}^2$-re? Írjuk fel a hibabecslést! Hány lépés kell a 10^{-2} pontosság eléréséhez? Melyik lineáris egyenletrendszer megoldásához konvergál?

4. Adott az $\mathbf{x_{k+1}} = \mathbf{B}\mathbf{x_k} + \mathbf{c}$ egyenlőség, ahol

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0,2 & 0,2 & 0,3 & 0,3 \\ 0,2 & 0,2 & 0,1 & 0,1 \\ 0,3 & 0,1 & 0,2 & 0,2 \\ 0,3 & 0,1 & 0,2 & 0,2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 0,1 \\ 0,2 \\ 0,3 \\ 0,4 \end{bmatrix}$$

Konvergens-e $\forall\ \mathbf{x_0} \in \mathbb{R}^4$-re? Írjuk fel a hibabecslést! Hány lépés kell a 10^{-4} pontosság eléréséhez? Melyik lineáris egyenletrendszer megoldásához konvergál?

4.1.2. Jacobi-iteráció

5. Legyen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Konvergál-e a mátrixra felírt $J(1)$?

6. Legyen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -\frac{1}{2} & \frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

Konvergál-e a mátrixra felírt $J(1)$?

7. Legyen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ \frac{2}{3} & 2 & 0 \\ \frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Konvergál-e a mátrixra felírt $J(1)$?

8. Legyen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -5 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Megoldható-e a lineáris egyenletrendszer Jacobi-iterációval? Ha igen, akkor végezzünk 2 lépést!

9. Legyen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Megoldható-e a lineáris egyenletrendszer Jacobi-iterációval? Ha igen, akkor végezzünk 2 lépést!

10. Legyen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Megoldható-e a lineáris egyenletrendszer Jacobi-iterációval? Ha igen, akkor végezzünk 3 lépést!

4.1.3. Gauss–Seidel-iteráció

11. Legyen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Konvergál-e a mátrixra felírt $S(1)$?

12. Legyen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -2 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Konvergál-e a mátrixra felírt $S(1)$?

13. Legyen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Konvergál-e a mátrixra felírt $S(1)$?

14. Legyen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{8} \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Konvergál-e a mátrixra felírt $S(1)$?

15. Legyen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Konvergál-e a mátrixra felírt $S(1)$?

16. Legyen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Megoldható-e a feladat Gauss-Seidel-iterációval? Ha igen, akkor végezzünk 3 lépést!

17. Legyen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Megoldható-e a feladat Gauss-Seidel-iterációval? Ha igen, akkor végezzünk 2 lépést! Hány lépés kell a 10^{-3} pontosság eléréséhez?

18. Legyen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Megoldható-e a feladat Gauss-Seidel-iterációval? Ha igen, akkor végezzünk 2 lépést! Hány lépés kell a 10^{-3} pontosság eléréséhez?

19. Legyen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Megoldható-e a feladat Gauss-Seidel-iterációval? Ha igen, akkor végezzünk 2 lépést! Hány lépés kell a 10^{-2} pontosság eléréséhez?

20. Legyen
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$
Megoldható-e a feladat Gauss-Seidel-iterációval? Ha igen, akkor végezzünk 2 lépést! Hány lépés kell a 10^{-3} pontosság eléréséhez?

4.1.4. Paraméteres iterációk: csillapított Jacobi-iteráció és a relaxációs módszer

21. Legyen
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$
Alkalmazzuk az **A** mátrixra a csillapított Jacobi-iterációt! Milyen ω-ra lesz konvergens? Melyik ω-ra lesz optimális?

22. Legyen
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -4 & 3 & -4 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$
Alkalmazzuk az **A** mátrixra a csillapított Jacobi-iterációt! Milyen ω-ra lesz konvergens?

23. Legyen
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$
Alkalmazzuk az **A** mátrixra a csillapított Jacobi-iterációt! Milyen ω-ra lesz konvergens? Melyik ω-ra lesz optimális?

24. Legyen
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$
Alkalmazzuk az **A** mátrixra a csillapított Jacobi-iterációt! Milyen ω-ra lesz konvergens? Melyik ω-ra lesz optimális?

25. Legyen
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$
Alkalmazzuk az **A** mátrixra a csillapított Jacobi-iterációt! Milyen ω-ra lesz konvergens? Melyik ω-ra lesz optimális?

26. Legyen
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$
Vizsgáljuk meg az **A**-ra felírt relaxációs módszert! Adjunk olyan ω paramétert, melyre a módszer gyorsabb a Gauss–Seidel-iterációnál!

27. Legyen
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix}$$
Alkalmazzuk az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ lineáris egyenletrendszerre a relaxációs módszert!
$\omega = \frac{1}{2}$ esetén számítsuk ki a relaxációs módszer két lépését az $\mathbf{x_0} = \mathbf{0}$ kezdővektorral! Adjunk olyan ω paramétert, melyre a módszer gyorsabb a Gauss–Seidel-iterációnál!

28. Legyen
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$$
Alkalmazzuk az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ lineáris egyenletrendszerre a relaxációs módszert! $\omega = \frac{1}{2}$ paraméter esetén hajtsuk végre a relaxációs módszer két lépését! Milyen ω-ra lesz konvergens? Melyik ω-ra lesz optimális?

29. Legyen
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$
Konvergál-e a mátrixra felírt relaxációs módszer? Milyen ω-ra lesz konvergens? Melyik ω-ra lesz optimális?

4.1.5. Richardson-iteráció

30. Tekintsük az
$$\mathbf{x_{k+1}} = \left(\mathbf{I} - \frac{2}{c}\mathbf{A}\right)\mathbf{x_k} + \frac{2}{c}\mathbf{b}$$
Richardson-iterációt az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ lineáris egyenletrendszer megoldására,
ahol $\mathbf{A}$ szimmetrikus, pozitív definit mátrix és $c \in \mathbb{R}^+ : \ \rho(\mathbf{A}) < c$.
Igazoljuk, hogy $\forall\ \mathbf{x_0}$-ra konvergens!

31. Legyen
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$
Alkalmazzuk az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ lineáris egyenletrendszerre a 30. feladatban szereplő Richardson-iterációt és bizonyítsuk a módszer konvergenciáját, ha tudjuk, hogy $\rho(\mathbf{A}) < 6 = c$.
Az $\mathbf{x_0} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^3$ kezdővektorral végezzünk két lépést és adjuk meg az iteráció hibabecslését.

32. Tekintsük az
$$\mathbf{x_{k+1}} = \left(\mathbf{I} - \frac{7}{9c}\mathbf{A}\right)\mathbf{x_k} + \frac{7}{9c}\mathbf{b}$$
Richardson-iterációt az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ lineáris egyenletrendszer megoldására,
ahol $\mathbf{A}$ szimmetrikus, pozitív definit mátrix és $c \in \mathbb{R}^+ : \ \rho(\mathbf{A}) < c$.
Igazoljuk, hogy $\forall\ \mathbf{x_0}$-ra konvergens!

33. Tekintsük az
$$\mathbf{x_{k+1}} = \left(\mathbf{I} - \frac{1}{5c}\mathbf{A}\right)\mathbf{x_k} + \frac{1}{5c}\mathbf{b}$$
Richardson-iterációt az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ lineáris egyenletrendszer megoldására,
ahol $\mathbf{A}$ szimmetrikus, pozitív definit mátrix és $c \in \mathbb{R}^+ : \ \rho(\mathbf{A}) < c$.
Igazoljuk, hogy $\forall\ \mathbf{x_0}$-ra konvergens!

34. Legyen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Alkalmazzuk az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ lineáris egyenletrendszerre a Richardson-iterációt! Milyen $p \in \mathbb{R}$ esetén konvergens? Mi az optimális paraméter?

35. Legyen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Alkalmazzuk az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ lineáris egyenletrendszerre a Richardson-iterációt! Milyen $p \in \mathbb{R}$ esetén konvergens? Mi az optimális paraméter?

4.1.6. ILU-algoritmus

36. Legyen

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 8 & 4 & 0 \\ -12 & -8 & -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Konvergál-e az ILU-algoritmus? Ha igen, akkor tegyünk meg 2 lépést! Hány lépés kell a 10^{-3} pontosság eléréséhez?

37. Legyen

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 8 & 8 & 8 \\ 0 & 6 & 6 \\ 2 & 5 & 10 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Konvergál-e az ILU-algoritmus? Ha igen, akkor tegyünk meg 2 lépést! Hány lépés kell a 10^{-3} pontosság eléréséhez?

38. Legyen

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 5 & 5 & 8 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Konvergál-e az ILU-algoritmus? Ha igen, akkor tegyünk meg 2 lépést! Hány lépés kell a 10^{-2} pontosság eléréséhez?

39. Legyen

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 5 \\ 4 & 6 & 4 \\ 0 & 5 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Konvergál-e az ILU-algoritmus? Ha igen, akkor tegyünk meg 2 lépést! Hány lépés kell a 10^{-3} pontosság eléréséhez?

40. Legyen

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Konvergál-e az ILU-algoritmus? Ha igen, akkor tegyünk meg 2 lépést! Hány lépés kell a 10^{-4} pontosság eléréséhez?

4.2. Megoldások

4.2.1. Egyszerű iteráció

1. Első lépésként meg kell vizsgálni a konvergenciát. Ehhez használjuk fel az elégséges feltételt.

Elégséges feltétel:
Ha valamely illeszkedő mátrixnormában az átmenetmátrixra $\|\mathbf{B}\| < 1$, akkor $\forall\ \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ -ből indítva az iterációt, konvergens lesz az $(\mathbf{x_k})$ iterációs sorozat. Tehát a konvergencia sem $\mathbf{x}_0$-tól, sem pedig c-től nem függ.

Konkrét példánkra

$$\|\mathbf{B}\|_1 = \max_{j=1}^{3} \sum_{i=1}^{3} |a_{ij}| = 0,6 < 1,$$

tehát $\forall\ \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^3$ -re konvergens.

Hibabecslés:
A k. közelítő vektorra adott hibabecslés alakja

$$\|\mathbf{x_k} - \mathbf{x}^*\| \leq \frac{q^k}{1-q}\, \|\mathbf{x_1} - \mathbf{x_0}\|,$$

ahol $q = \|\mathbf{B}\|$ a kontrakciós együttható.

Ahhoz, hogy a képletet alkalmazzuk, ki kell számítanunk $\mathbf{x_1}$ -et. Ehhez ki kell számolnunk az iteráció első lépését. Mivel bármely $\mathbf{x_0}$ -ból indítva az iteráció konvergens, ezért válasszunk egy kezdővektort. Legyen $\mathbf{x_0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$.

$$\mathbf{x_1} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{x_0} + \mathbf{c} = \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 0,1 \\ 0,5 \\ 0,1 \end{bmatrix}$$

Így már kiszámolható a hibabecslés. ($q = \|\mathbf{B}\|_1 = 0,6$ a $\mathbf{B}$ mátrix 1-es normája.)

$$\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}^*\|_1 \leq \frac{0,6^k}{1-0,6} \cdot 0,7$$

Lépésszám:
Meg kell határoznunk a lépésszámot a 10^{-3} pontosság eléréséhez.

$$\frac{0,6^k}{1-0,6} \cdot 0,7 \leq 10^{-3}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{3}{5}\right)^k \cdot \frac{7}{4} &\leq 10^{-3} \\ \frac{7}{4} \cdot 10^3 &\leq \left(\frac{5}{3}\right)^k \\ \lg\left(\frac{7}{4} \cdot 10^3\right) &\leq k \cdot \lg\left(\frac{5}{3}\right) \\ k &\geq \frac{\lg\left(\frac{7}{4} \cdot 10^3\right)}{\lg\left(\frac{5}{3}\right)} \approx 14,6 \end{aligned}$$

Tehát $k \geq 15$ lépés elegendő a 10^{-3} pontosság eléréséhez.

Utolsó lépésként azt kell meghatároznunk, hogy melyik lineáris egyenletrendszer megoldásához konvergál az iteráció. Az iteráció $\mathbf{x}$ határértékére (a fixpontra)

$$\mathbf{x} = \mathbf{B}\mathbf{x} + \mathbf{c} \quad \Longleftrightarrow \quad \underbrace{(\mathbf{I} - \mathbf{B})}_{\mathbf{A}}\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}.$$

Tehát a megoldás

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0,4 & 0,1 & 0 \\ 0,1 & 0,3 & 0,2 \\ 0 & 0,1 & 0,4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,6 & -0,1 & 0 \\ -0,1 & 0,7 & -0,2 \\ 0 & -0,1 & 0,6 \end{bmatrix}, \\
\mathbf{b} &= \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 0,1 \\ 0,5 \\ 0,1 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

2. Első lépésként meg kell vizsgálni a konvergenciát. Ehhez használjuk fel az elégséges feltételt.

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{B}\|_1 &= \max_{j=1}^{3} \sum_{i=1}^{3} |a_{ij}| = 1 \qquad \Rightarrow \text{Nem alkalmas!} \\
\|\mathbf{B}\|_\infty &= \max_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} |a_{ij}| = 0,9 < 1
\end{aligned}$$

Tehát $\forall\ \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^3$-re konvergens.

Hibabecslés:
Az alábbi képletet alkalmazzuk.

$$\|\mathbf{x_k} - \mathbf{x}^*\| \leq \frac{q^k}{1-q} \|\mathbf{x_1} - \mathbf{x_0}\|$$

Ahhoz, hogy a képletet alkalmazni tudjuk, ki kell számítanunk $\mathbf{x_1}$ -et. Ehhez ki kell számolnunk az iteráció első lépését. Mivel minden $\mathbf{x_0}$-ból indítva az iteráció konvergens, ezért válasszunk egy kezdővektort. Legyen $\mathbf{x_0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$.

$$\mathbf{x_1} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{x_0} + \mathbf{c} = \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 0,2 \\ 0,3 \\ 0,1 \end{bmatrix}$$

A $\mathbf{B}$ mátrix ∞-normája alkalmas q-nak, így már kiszámolható a hibabecslés a ∞ normában.

$$\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}^*\|_\infty \leq \frac{0,9^k}{1-0,9} \cdot 0,3$$

Lépésszám:

Meg kell határoznunk a lépésszámot a 10^{-3} pontosság eléréséhez.

$$\begin{aligned}
\frac{0,9^k}{0,1}\cdot 0,3 &\leq 10^{-3}\\
\left(\frac{9}{10}\right)^k\cdot 3 &\leq 10^{-3}\\
3\cdot 10^3 &\leq \left(\frac{10}{9}\right)^k\\
\lg\left(3\cdot 10^3\right) &\leq k\cdot\lg\left(\frac{10}{9}\right)\\
k &\geq \frac{\lg\left(3\cdot 10^3\right)}{\lg\left(\frac{10}{9}\right)}\approx 75,99
\end{aligned}$$

Tehát $k\geq 80$ lépés elég a 10^{-3} pontosság eléréséhez.

Utolsó lépésként azt kell meghatároznunk, hogy melyik lineáris egyenletrendszer megoldásához konvergál az iteráció. Az iteráció $\mathbf{x}$ határértékére (a fixpontra)

$$\mathbf{x}=\mathbf{B}\mathbf{x}+\mathbf{c}\quad\Longleftrightarrow\quad\underbrace{(\mathbf{I}-\mathbf{B})}_{\mathbf{A}}\mathbf{x}=\mathbf{b}\quad\Longleftrightarrow\quad\mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{b}.$$

Tehát a megoldás

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} &= \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0,1&0,3&0,1\\0,5&0,3&0,1\\0&0,4&0,1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0,9&-0,3&-0,1\\-0,5&0,7&-0,1\\0&-0,4&0,9\end{bmatrix}\\
\mathbf{b} &= \mathbf{c}=\begin{bmatrix}0,2\\0,3\\0,1\end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

3. A feladat megoldásához először meg kell vizsgálni a konvergencia teljesülését. Ehhez használjuk fel az elégséges feltételt.

$$\|\mathbf{B}\|_1=\max_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{2}|a_{ij}|=0,9<1$$

Mivel találtunk olyan illeszkedő mátrixnormát, aminek az értéke kisebb mint 1, ezért $\forall\ \mathbf{x}_0\in\mathbb{R}^3$-re konvergens.

Hibabecslés.
Az alábbi képletet alkalmazzuk.

$$\|\mathbf{x_k}-\mathbf{x}^*\|\leq\frac{q^k}{1-q}\|\mathbf{x_1}-\mathbf{x_0}\|$$

Ahhoz, hogy a képletet alkalmazni tudjuk, ki kell számítanunk $\mathbf{x_1}$ -et. Ehhez ki kell számolnunk az iteráció első lépését. Mivel minden $\mathbf{x_0}$-ból indítva az iteráció konvergens, ezért válasszunk egy kezdővektort. Legyen $\mathbf{x_0}=\begin{bmatrix}0&0&0\end{bmatrix}^T$.

$$\mathbf{x_1}=\mathbf{B}\cdot\mathbf{x_0}+\mathbf{c}=\mathbf{c}=\begin{bmatrix}0,1\\0,3\end{bmatrix}$$

Így már kiszámolható a hibabecslés. ($\mathbf{B}$ mátrix egyes normája alkalmas q-nak.)

$$\|\mathbf{x_k} - \mathbf{x}^*\|_1 \le \frac{0,9^k}{1-0,9} \cdot 0,4$$

Lépésszám:
Meg kell határoznunk a lépésszámot a 10^{-2} pontosság eléréséhez.

$$\begin{aligned}
\frac{0,9^k}{0,1} \cdot 0,4 &\le 10^{-2} \\
\left(\frac{9}{10}\right)^k \cdot 4 &\le 10^{-2} \\
4 \cdot 10^2 &\le \left(\frac{10}{9}\right)^k \\
\lg\left(4 \cdot 10^2\right) &\le k \cdot \lg\left(\frac{10}{9}\right) \\
k &\ge \frac{\lg\left(4 \cdot 10^2\right)}{\lg\left(\frac{10}{9}\right)} \approx 56,87
\end{aligned}$$

Tehát $k \ge 57$ lépés elég a 10^{-2} pontosság eléréséhez.

Utolsó lépésként azt kell meghatároznunk, hogy melyik lineáris egyenletrendszer megoldásához konvergál az iteráció. Az iteráció $\mathbf{x}$ határértékére (a fixpontra)

$$\mathbf{x} = \mathbf{B}\mathbf{x} + \mathbf{c} \iff \underbrace{(\mathbf{I} - \mathbf{B})}_{\mathbf{A}}\mathbf{x} = \mathbf{b} \iff \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}.$$

Tehát a megoldás

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0,2 & 0,3 \\ 0,7 & 0,1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,8 & -0,3 \\ -0,7 & 0,1 \end{bmatrix} \\
\mathbf{b} &= \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 0,1 \\ 0,3 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

4. Első lépésként meg kell vizsgálni a konvergenciát. Ehhez használjuk fel az elégséges feltételt:

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{B}\|_1 &= \max_{j=1}^{4} \sum_{i=1}^{4} |a_{ij}| = 1 \quad \Rightarrow \text{Nem alkalmas!} \\
\|\mathbf{B}\|_\infty &= \max_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{4} |a_{ij}| = 1 \quad \Rightarrow \text{Nem alkalmas!} \\
\|\mathbf{B}\|_F &= \sqrt{\sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{4} |a_{ij}|^2} = \sqrt{0,72} \approx 0,85 < 1
\end{aligned}$$

Tehát $\forall \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^3$-re konvergens.

Hibabecslés.
Az alábbi képletet alkalmazzuk.

$$\|\mathbf{x_k} - \mathbf{x}^*\| \le \frac{q^k}{1-q} \|\mathbf{x_1} - \mathbf{x_0}\|$$

Ahhoz, hogy a képletet alkalmazni tudjuk, ki kell számítanunk $\mathbf{x_1}$ -et. Ehhez ki kell számolnunk az iteráció első lépését. Mivel minden $\mathbf{x_0}$-ból indítva az iteráció konvergens, ezért válasszunk egy kezdővektort. Legyen $\mathbf{x_0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$.

$$\mathbf{x_1} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{x_0} + \mathbf{c} = \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 0,1 \\ 0,2 \\ 0,3 \\ 0,4 \end{bmatrix}$$

A hibabecslés így már kiszámolható. Mivel a $\|.\|_F$ norma illeszkedik a $\|.\|_2$ normára, ezért a hibabecslésben használhatjuk a vektoroknál a $\|.\|_2$ normát. ($\mathbf{B}$ mátrix $\|.\|_F$-normája alkalmas q-nak.)

$$\|\mathbf{x_k} - \mathbf{x}^*\|_2 \leq \frac{0,85^k}{1-0,85} \cdot 0,55$$

Lépésszám:
Meg kell határoznunk a lépésszámot a 10^{-4} pontosság eléréséhez.

$$\begin{aligned}
\frac{0,85^k}{0,15} \cdot 0,55 &\leq 10^{-4} \\
\left(\frac{17}{20}\right)^k \cdot \frac{11}{3} &\leq 10^{-4} \\
\frac{11}{3} \cdot 10^4 &\leq \left(\frac{20}{17}\right)^k \\
\lg\left(\frac{11}{3} \cdot 10^4\right) &\leq k \cdot \lg\left(\frac{20}{17}\right) \\
k &\geq \frac{\lg\left(\frac{11}{3} \cdot 10^4\right)}{\lg\left(\frac{20}{17}\right)} \approx 50,5
\end{aligned}$$

Tehát $k \geq 51$ lépés elég a 10^{-4} pontosság eléréséhez.

Utolsó lépésként azt kell meghatároznunk, hogy melyik lineáris egyenletrendszer megoldásához konvergál az iteráció. Az iteráció $\mathbf{x}$ határértékére (a fixpontra)

$$\mathbf{x} = \mathbf{B}\mathbf{x} + \mathbf{c} \quad \Longleftrightarrow \quad \underbrace{(\mathbf{I} - \mathbf{B})}_{\mathbf{A}}\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}.$$

Tehát a megoldás

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0,2 & 0,2 & 0,3 & 0,3 \\ 0,2 & 0,2 & 0,1 & 0,1 \\ 0,3 & 0,1 & 0,2 & 0,2 \\ 0,3 & 0,1 & 0,2 & 0,2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0,8 & -0,2 & -0,3 & -0,3 \\ -0,2 & 0,8 & -0,1 & -0,1 \\ -0,3 & -0,1 & 0,8 & -0,2 \\ -0,3 & -0,1 & -0,2 & 0,8 \end{bmatrix} \\
\mathbf{b} &= \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 0,1 \\ 0,2 \\ 0,3 \\ 0,4 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

4.2.2. Jacobi-iteráció

5. A továbbiakban a Jacobi-módszerre a $J(1)$ rövidítést fogjuk használni, utalva ezzel arra, hogy a csillapított Jacobi-iterációban $\omega = 1$ paraméterrel kapjuk meg a Jacobi-iterációt.
Tudjuk, hogy

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{x} = -\mathbf{D^{-1}}(\mathbf{L} + \mathbf{U})\mathbf{x} + \mathbf{b}.$$

Innen a Jacobi-iteráció

$$\mathbf{x_{k+1}} = \underbrace{-\mathbf{D^{-1}}(\mathbf{L} + \mathbf{U})}_{\textit{átmenetmátrix}} \cdot \mathbf{x_k} + \underbrace{\mathbf{D^{-1}b}}_{\mathbf{c}}.$$

Első lépésként meg kell határoznunk az átmenetmátrixot.

$$\mathbf{B}_{J(1)} = -\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L} + \mathbf{U})$$

ahol

$$\mathbf{A} = \mathbf{L} + \mathbf{D} + \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Tehát

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{J(1)} &= -\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 0 \end{bmatrix} \\ &= -\begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Mivel megkaptuk az átmenetmátrixot, meg kell vizsgálnunk, hogy melyik konvergencia tétel feltételei teljesülnek. Először megvizsgáljuk az elégséges feltételt.

$$\begin{aligned} \|\mathbf{B}_{J(1)}\|_1 &= 4 \\ \|\mathbf{B}_{J(1)}\|_\infty &= 4 \\ \|\mathbf{B}_{J(1)}\|_F &= \sqrt{18} > 4 \end{aligned}$$

Mint látható mindegyik normával kapott eredmény nagyobb, mint egy, tehát az elégséges feltétel ebben az esetben nem használható.

Megjegyzés. Ha a mátrixban találhatóak 1-nél nagyobb elemek, akkor az elégséges feltétel nem használható.

Mivel az elégséges feltételt nem tudtuk használni, a szükséges és elégséges feltételt kell alkalmaznunk

Szükséges és elégséges feltétel:
$\forall\ \mathbf{x_0} \in \mathbb{R}^n$-ből indított iteráció konvergens $\Leftrightarrow \rho(\mathbf{B}) < 1$, ahol $\rho(\mathbf{B}) = \max_{i=1}^n |\lambda_i|$ a B mátrix spektrálsugara. A spektrálsugár nagysága mutatja a konvergencia gyorsaságát.

A sajátértékek meghatározásához írjuk fel a karakterisztikus polinomot!

$$
\begin{aligned}
\det(\mathbf{B}_{J(1)} - \lambda \mathbf{I}) &= \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & -2 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 2 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} = \\
&= -\lambda \cdot \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -\lambda \\ 2 & q \end{vmatrix} = \\
&= -\lambda(\lambda^2 - 2) - 2(-\lambda - 2) - 2(2 + 2\lambda) = \\
&= -\lambda^3 + 2\lambda + 2\lambda + 4 - 4 - 4\lambda = \\
&= -\lambda^3 = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda_{1,2,3} = 0}
\end{aligned}
$$

A sajátértékek alapján a mátrix spektrálsugara

$$
\rho(\mathbf{B}_{J(1)}) = \max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, |\lambda_3|\} = 0 < 1,
$$

így $\forall\ \mathbf{x_0} \in \mathbb{R}^3$-re $J(1)$ konvergens lesz!
Ha az átmenetmátrix spektrálsugara nulla, akkor véges iterációra számíthatunk, legfeljebb n lépésben konvergál.

6. Első lépésként meg kell határoznunk az átmenetmátrixot.

$$
\mathbf{A} = \mathbf{L} + \mathbf{D} + \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{4}{3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

Tehát

$$
\begin{aligned}
\mathbf{B}_{J(1)} &= -\mathbf{D^{-1}}(\mathbf{L} + \mathbf{U}) = -\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{4}{3} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \\
&= -\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -\frac{3}{8} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ \frac{3}{8} & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Vizsgáljuk meg a konvergenciát! Először az elégséges feltételt vizsgáljuk.

$$
\begin{aligned}
\|\mathbf{B}_{J(1)}\|_1 &= 2 \\
\|\mathbf{B}_{J(1)}\|_\infty &= 2 \\
\|\mathbf{B}_{J(1)}\|_F &= \sqrt{4 + \frac{9}{64}} > 2
\end{aligned}
$$

Mint látható mindegyik normával kapott eredmény nagyobb mint egy, tehát az elégséges feltétel ebben az esetben nem használható, ezért a szükséges és elégséges feltételt kell alkalmaznunk.
A sajátértékek meghatározásához írjuk fel a karakterisztikus polinomot!

$$
\begin{aligned}
\det(\mathbf{B}_{J(1)} - \lambda \mathbf{I}) &= \begin{vmatrix} -\lambda & -2 \\ \frac{3}{8} & -\lambda \end{vmatrix} = \\
&= \lambda^2 + \frac{3}{4} = 0 \quad \Rightarrow \quad |\lambda_{1,2}| = \sqrt{\frac{3}{4}}
\end{aligned}
$$

Mint látható a sajátértékek komplex számok, de $\rho(\mathbf{B}_{J(1)}) = \sqrt{\frac{3}{4}} < 1$, így a konvergencia teljesül.

7. Első lépésként meg kell határoznunk az átmenetmátrixot.

$$\mathbf{B}_{J(1)} = -\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L}+\mathbf{U}),$$

ahol

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}+\mathbf{D}+\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{8} & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tehát

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{J(1)} &= -\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{8} & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= -\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{8} & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= -\begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 \\ -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4} & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Az átmenetmátrixot megkapva, lehetőségünk van a konvergencia vizsgálatára. Mivel $|a_{13}| > 1$, ezért az elégséges feltétel biztosan nem teljesül. A szükséges és elégséges feltétel teljesülését kell megvizsgálnunk. A sajátértékek meghatározásához írjuk fel a karakterisztikus polinomot.

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{B}_{J(1)} - \lambda\mathbf{I}) &= \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & -3 \\ -\frac{1}{3} & -\lambda & 0 \\ -\frac{1}{4} & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \\ &= -\lambda \cdot (\lambda^2) - 3 \cdot \left(-\frac{\lambda}{4}\right) = \\ &= -\lambda^3 + \frac{3}{4}\lambda = 0 \quad \Rightarrow \boxed{\lambda_1 = 0} \\ &\Rightarrow -\lambda^2 + \frac{3}{4} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 = \frac{3}{4} \\ &\Rightarrow \boxed{\lambda_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}}, \quad \boxed{\lambda_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2}} \end{aligned}$$

Most már tudjuk a mátrix spektrálsugarát.

$$\rho(\mathbf{B}_{J(1)}) = \max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, |\lambda_3|\} = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,866 < 1$$

Tehát a Jacobi-iteráció konvergens a megadott mátrixra.

8. Első lépésként meg kell vizsgálnunk, hogy a feladatra konvergens-e a Jacobi-iteráció.

Először ki kell számolni az átmenetmátrixot.

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}_{J(1)} &= -\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L}+\mathbf{U}) = \\
&= -\begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \\
&= -\begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \\
&= -\begin{bmatrix} 0 & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Megkaptuk az átmenetmátrixot, az elégséges feltételt kell megvizsgálnunk.

$$\|\mathbf{B}_{J(1)}\|_1 = \frac{2}{3} < 1$$

Mivel találtunk olyan illeszkedő normát, aminek az értéke egynél kisebb, így $\forall\ \mathbf{x_0} \in \mathbb{R}^3$-ből indítva az iterációt, konvergens lesz. Ezzel tehát beláttuk, hogy a feladat megoldható Jacobi-iterációval.
Ahhoz, hogy kiszámoljuk az első két lépést, alkalmas $\mathbf{x_0}$-t kell választanunk. Mivel bármilyen $\mathbf{x_0}$ jó, ezért a legegyszerűbb megoldás az $\mathbf{x_0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T = \mathbf{0}$ vektor. Tudjuk, hogy

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{x} = -\mathbf{D^{-1}}(\mathbf{L}+\mathbf{U})\mathbf{x} + \mathbf{b}.$$

Innen a Jacobi-iteráció

$$\mathbf{x_{k+1}} = \underbrace{-\mathbf{D^{-1}}(\mathbf{L}+\mathbf{U})}_{\text{átmenetmátrix}} \cdot \mathbf{x_k} + \underbrace{\mathbf{D^{-1}b}}_{\mathbf{c}}.$$

Most

$$\mathbf{B}_{J(1)} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

1. lépés:

$$\mathbf{x_1} = -\mathbf{D^{-1}}(\mathbf{L}+\mathbf{U}) \cdot \mathbf{x_0} + \mathbf{D^{-1}b} = \mathbf{B}_{J(1)} \cdot \mathbf{0} + \mathbf{c} = \mathbf{c} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

2. lépés:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x_2} &= -\mathbf{D^{-1}}(\mathbf{L}+\mathbf{U}) \cdot \mathbf{x_1} + \mathbf{D^{-1}b} = \mathbf{B}_{J(1)} \cdot \mathbf{x_1} + \mathbf{c} = \\
&= \begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} \frac{1}{10} \\ \frac{11}{90} \\ \frac{11}{90} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{10} \\ \frac{41}{90} \\ \frac{26}{90} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

9. Első lépésként meg kell vizsgálnunk, hogy a feladatra konvergens-e a Jacobi-iteráció. Először ki kell számolni az átmenetmátrixot.

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}_{J(1)} &= -\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L}+\mathbf{U}) = \\
&= -\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \\
&= -\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \\
&= -\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Megkaptuk az átmenetmátrixot, az elégséges feltételt kell megvizsgálnunk.

$$\|\mathbf{B}_{J(1)}\|_\infty = \frac{1}{2} < 1$$

Mivel találtunk olyan illeszkedő normát, aminek az értéke kisebb, mint egy, teljesül az a feltétel, hogy $\forall \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^3$-ből indítva az iterációt, konvergens lesz. Ezzel tehát beláttuk, hogy a feladat megoldható Jacobi-iterációval.

Ahhoz, hogy kiszámoljuk az első két lépést, alkalmas $\mathbf{x_0}$-t kell választanunk. Mivel bármilyen $\mathbf{x_0}$ jó, ezért a legkézenfekvőbb megoldás az $\mathbf{x_0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T = \mathbf{0}$ vektor. Az

$$\mathbf{x_{k+1}} = -\mathbf{D^{-1}}(\mathbf{L}+\mathbf{U}) \cdot \mathbf{x_k} + \mathbf{D^{-1}b}$$

képletet felhasználva, könnyen elvégezhetjük az első két lépést.

1. lépés:

$$\mathbf{x_1} = -\mathbf{D^{-1}}(\mathbf{L}+\mathbf{U}) \cdot \mathbf{x_0} + \mathbf{D^{-1}b} = \mathbf{B}_{J(1)} \cdot \mathbf{0} + \mathbf{c} = \mathbf{c} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \\ 1 \end{bmatrix}$$

2. lépés:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_2 &= -\mathbf{D^{-1}}(\mathbf{L}+\mathbf{U}) \cdot \mathbf{x_1} + \mathbf{D^{-1}b} = \mathbf{B}_{J(1)} \cdot \mathbf{x_1} + \mathbf{c} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{8} \\ -\frac{1}{4} \\ 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

10. Első lépésként meg kell vizsgálnunk, hogy a feladatra konvergens-e a Jacobi-iteráció. Először ki kell számolni az átmenetmátrixot.

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}_{J(1)} &= -\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L}+\mathbf{U}) = \\
&= -\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 0 \end{bmatrix} = \\
&= -\begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Megkaptuk az átmenetmátrixot, az elégséges feltételt kell megvizsgálnunk. Mivel a mátrix elemei kivétel nélkül egynél nagyobb számok, ezért az elégséges feltételt nem lehet alkalmazni. A szükséges és elégséges feltételt kell alkalmazni. A sajátértékek meghatározásához írjuk fel a karakterisztikus polinomot.

$$\begin{aligned}
\det(\mathbf{B}_{J(1)} - \lambda\mathbf{I}) &= \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & -2 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 2 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} = \\
&= -\lambda \cdot \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -\lambda \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = \\
&= -\lambda(\lambda^2 - 2) - 2(-\lambda - 2) - 2(2 + 2\lambda) = \\
&= -\lambda^3 + 2\lambda + 2\lambda + 4 - 4 - 4\lambda = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad -\lambda^3 = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda_{1,2,3} = 0}
\end{aligned}$$

Az átmenetmátrix spektrálsugara

$$\rho(\mathbf{B}_{J(1)}) = \max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, |\lambda_3|\} = 0 < 1.$$

Ezzel tehát beláttuk, hogy a Jacobi-iteráció bármely $\mathbf{x_0}$ vektorra konvergens, így a feladat megoldható Jacobi-iterációval.
Ahhoz, hogy kiszámoljuk az első három lépést, alkalmas $\mathbf{x_0}$-t kell választanunk. A legegyszerűbb megoldás az $\mathbf{x_0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T = \mathbf{0}$ vektor. Az

$$\mathbf{x_{k+1}} = -\mathbf{D^{-1}}(\mathbf{L} + \mathbf{U}) \cdot \mathbf{x_k} + \mathbf{D^{-1}b}$$

képletet felhasználva, könnyen elvégezhetjük az első három lépést.

1. lépés:

$$\mathbf{x_1} = -\mathbf{D^{-1}}(\mathbf{L} + \mathbf{U}) \cdot \mathbf{x_0} + \underbrace{\mathbf{D^{-1}b}}_{\mathbf{c}} = \mathbf{B}_{J(1)} \cdot \mathbf{0} + \mathbf{c} = \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2. lépés:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x_2} &= \mathbf{B}_{J(1)} \cdot \mathbf{x_1} + \mathbf{c} = \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

3. lépés:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x_3} &= \mathbf{B}_{J(1)} \cdot \mathbf{x_2} + \mathbf{c} = \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

4.2.3. Gauss–Seidel-iteráció

1. A továbbiakban a Gauss–Seidel-iterációra az $S(1)$ rövidítést fogjuk használni, utalva ezzel arra, hogy a relaxációs módszerben $\omega = 1$ paraméterrel kapjuk meg a Gauss–Seidel-iterációt. Tudjuk, hogy

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{x} = -(\mathbf{D}+\mathbf{L})^{-\mathbf{1}}\mathbf{Ux} + (\mathbf{D}+\mathbf{L})^{-\mathbf{1}}\mathbf{b}.$$

Innen a Jacobi-iteráció

$$\mathbf{x_{k+1}} = \underbrace{-(\mathbf{D}+\mathbf{L})^{-\mathbf{1}}\mathbf{U}}_{\text{átmenetmátrix}} \cdot \mathbf{x_k} + \underbrace{(\mathbf{D}+\mathbf{L})^{-\mathbf{1}}\mathbf{b}}_{\mathbf{c}}.$$

A feladatunk, hogy meghatározzuk, hogy az $\mathbf{A}$ mátrixra felírt Gauss-Seidel-iteráció konvergens-e. Ehhez első lépésként az átmenetmátrixot kell kiszámítanunk. Tudjuk, hogy

$$\mathbf{B}_{S(1)} = -(\mathbf{L}+\mathbf{D})^{-1}\mathbf{U}$$

ahol,

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}+\mathbf{D}+\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ezt felhasználva kapjuk meg a $\mathbf{B}_{S(1)}$ mátrixot.

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{S(1)} &= -\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \\ &= -\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \\ &= -\begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

A konvergencia vizsgálatához először megpróbáljuk használni az elégséges feltételt.

Elégséges feltétel:
Ha valamely illeszkedő mátrixnormában az átmenetmátrixra $\|\mathbf{B}\| < 1$, akkor $\forall\ \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ -ből indítva az iterációt, konvergens lesz az $(\mathbf{x_k})$ iterációs sorozat.

$$\begin{aligned} \|\mathbf{B}_{S(1)}\|_1 &= 1,5 \\ \|\mathbf{B}_{S(1)}\|_\infty &= 1 \\ \|\mathbf{B}_{S(1)}\|_F &= \sqrt{\frac{5}{4}} \end{aligned}$$

Mivel nem találtunk olyan mátrixnormát, ami kisebb lenne egynél, ezért a szükséges és elégséges feltételt használjuk.

Szükséges és elégséges feltétel:
$\forall\ \mathbf{x_0} \in \mathbb{R}^n$-ből indított iteráció konvergens $\Leftrightarrow \rho(\mathbf{B}) < 1$, ahol $\rho(\mathbf{B}) = \max_{i=1}^n |\lambda_i|$ a B mátrix spektrálsugara.

A sajátértékek meghatározásához írjuk fel a karakterisztikus polinomot!

$$\begin{aligned}
\det(\mathbf{B}_{S(1)} - \lambda\mathbf{I}) &= \begin{vmatrix} -\lambda & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}-\lambda & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}-\lambda \end{vmatrix} = \\
&= -\lambda\left(\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)\left(-\frac{1}{2}-\lambda\right) - \left(-\frac{1}{4}\right)\right) = \\
&= -\lambda\left(\lambda^2 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) = -\lambda^3 = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda_{1,2,3} = 0}
\end{aligned}$$

A sajátértékek segítségével kiszámoljuk a spektrálsugarat.

$$\rho(\mathbf{B}_{J(1)}) = \max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, |\lambda_3|\} = 0 < 1$$

Ezzel tehát beláttuk, hogy az $\mathbf{A}$ mátrixra felírt S(1) iteráció konvergens.
Ha az átmenetmátrix spektrálsugara nulla, akkor véges iterációra számíthatunk, legfeljebb n lépésben konvergál.

2. A feladatunk, hogy meghatározzuk, hogy az $\mathbf{A}$ mátrixra felírt Gauss-Seidel-iteráció konvergens-e. Ehhez első lépésként az átmenetmátrixot kell kiszámítanunk.

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}_{S(1)} &= -(\mathbf{L}+\mathbf{D})^{-1}\mathbf{U} = \\
&= -\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -2 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \\
&= -\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 3 & -8 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \\
&= -\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 3 & \frac{3}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -3 & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

A konvergencia vizsgálatához először megpróbáljuk az elégséges feltételt használni. Mivel a mátrixban találhatóak egynél nagyobb elemek is, ezért az elégséges feltétel nem teljesül. A szükséges és elégséges feltétellel kell próbálkoznunk. A sajátértékek meghatározásához írjuk fel a karakterisztikus polinomot!

$$\begin{aligned}
\det(\mathbf{B}_{S(1)} - \lambda\mathbf{I}) &= \begin{vmatrix} -\lambda & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & -1-\lambda & -\frac{1}{2} \\ 0 & -3 & -\frac{3}{2}-\lambda \end{vmatrix} = \\
&= -\lambda\left((-1-\lambda)\left(-\frac{3}{2}-\lambda\right) - \left(-\frac{1}{2}\right)(-3)\right) = \\
&= -\lambda\left(\frac{3}{2} + \lambda + \frac{3}{2}\lambda + \lambda^2 - \frac{3}{2}\right) = \\
&= -\lambda^3 - \frac{5}{2}\lambda^2 = 0 \quad \Rightarrow \boxed{\lambda_{1,2} = 0} \\
&= -\lambda - \frac{5}{2} = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda_3 = -\frac{5}{2}}
\end{aligned}$$

Mivel találtunk egynél nagyobb sajátértéket, ezért a spektrálsugár is nagyobb lesz egynél.

$$\rho(\mathbf{B}_{J(1)}) = \max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, |\lambda_3|\} = \frac{5}{2} > 1$$

Mint látható nem teljesül a szükséges és elégséges feltétel, ezért a konvergencia nem teljesül minden kezdővektorra!

3. A feladatunk, hogy meghatározzuk, hogy az **A** mátrixra felírt Gauss-Seidel-iteráció konvergens-e. Ehhez első lépésként az átmenetmátrixot kell kiszámítanunk.

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}_{S(1)} &= -(\mathbf{L}+\mathbf{D})^{-1}\mathbf{U} = \\
&= -\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \\
&= -\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \\
&= -\begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -8 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 8 & -6 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Mivel a mátrixban egynél nagyobb abszolút értékű elemek vannak, ezért az elégséges feltétel nem használható. A szükséges és elégséges feltétellel kell próbálkoznunk. A sajátértékek meghatározásához írjuk fel a karakterisztikus polinomot!

$$\begin{aligned}
\det(\mathbf{B}_{S(1)} - \lambda\mathbf{I}) &= \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & -2 \\ 0 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & 8 & -6-\lambda \end{vmatrix} = \\
&= -\lambda\left((2-\lambda)(-6-\lambda)+8\right) = \\
&= -\lambda(12-2\lambda+6\lambda+\lambda^2+8) = 0 \quad \Rightarrow \boxed{\lambda_1 = 0} \\
&\Rightarrow \lambda^2+4\lambda-4 = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda_{2,3} = -2 \pm \sqrt{8}}
\end{aligned}$$

Mivel találtunk egynél nagyobb sajátértéket, ezért a spektrálsugár is nagyobb lesz egynél.

$$\rho(\mathbf{B}_{J(1)}) = \max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, |\lambda_3|\} = 2+\sqrt{8} > 1$$

Mint látható nem teljesül a szükséges és elégséges feltétel, ezért a konvergencia nem teljesül minden kezdővektorra.

4. A feladatunk, hogy meghatározzuk, hogy az **A** mátrixra felírt Gauss-Seidel-iteráció konvergens-e. Ehhez első lépésként az átmenetmátrixot kell kiszámítanunk.

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}_{S(1)} &= -(\mathbf{L}+\mathbf{D})^{-1}\mathbf{U} = \\
&= -\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \\
&= -\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \\
&= -\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{8} \\ 0 & -1 & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{8} \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Mivel a mátrixban egynél nagyobb abszolút értékű elemek vannak, ezért az elégséges feltétel nem használható. A szükséges és elégséges feltétellel kell próbálkoznunk. A sajátértékek meghatározásához írjuk fel a karakterisztikus polinomot!

$$\begin{aligned}
\det(\mathbf{B}_{S(1)} - \lambda\mathbf{I}) &= \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}-\lambda & -\frac{1}{8} \\ 0 & 1 & \frac{1}{4}-\lambda \end{vmatrix} = \\
&= -\lambda\left(\left(-\frac{1}{2}-\lambda\right)\left(\frac{1}{4}-\lambda\right) - \left(-\frac{1}{8}\right)\right) = \\
&= -\lambda\left(-\frac{1}{8}+\frac{1}{2}\lambda-\frac{1}{4}\lambda+\lambda^2+\frac{1}{8}\right) = \\
&= -\lambda^3 - \frac{1}{4}\lambda^2 = 0 \quad \Rightarrow \boxed{\lambda_{1,2} = 0} \\
& \quad -\lambda - \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda_3 = -\frac{1}{4}}
\end{aligned}$$

A sajátértékek segítségével az átmenetmátrix spektrálsugara kiszámítható.

$$\rho(\mathbf{B}_{J(1)}) = \max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, |\lambda_3|\} = \frac{1}{4} < 1$$

Mivel a spektrálsugár egynél kisebb, ezért az **A** mátrixra felírt S(1) iteráció konvergens minden kezdővektorra.

5. A feladatunk, hogy eldöntsük, az **A** mátrixra felírt Gauss-Seidel-iteráció konvergens-e. Ehhez első lépésként az átmenetmátrixot kell kiszámítanunk.

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}_{S(1)} &= -(\mathbf{L}+\mathbf{D})^{-1}\mathbf{U} = \\
&= -\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \\
&= -\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \\
&= -\begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & -4 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -4 & -1 \\ 0 & -4 & -4 \\ 0 & 4 & 4 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Mivel a mátrixban egynél nagyobb abszolút értékű elemek vannak, ezért az elégséges feltételt nem használhatjuk. A szükséges és elégséges feltételt kell alkalmaznunk. A sajátértékek meghatározásához írjuk fel a karakterisztikus polinomot!

$$\begin{aligned}
\det(\mathbf{B}_{S(1)} - \lambda\mathbf{I}) &= \begin{vmatrix} -\lambda & -4 & -1 \\ 0 & -4-\lambda & -4 \\ 0 & 4 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \\
&= -\lambda\left((-4-\lambda)(4-\lambda) - (-4)\cdot 4)\right) = \\
&= -\lambda(-16+4\lambda-4\lambda+\lambda^2+16) = \\
&= -\lambda^3 = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda_{1,2,3} = 0}
\end{aligned}$$

A sajátértékek segítségével az átmenetmátrix spektrálsugara kiszámítható.

$$\rho(\mathbf{B}_{J(1)}) = \max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, |\lambda_3|\} = 0 < 1$$

Ha az átmenetmátrix spektrálsugara nulla, akkor véges iterációra számíthatunk, legfeljebb n lépésben konvergál.

6. A feladatunk, hogy eldöntsük, az $\mathbf{A}$ mátrixra felírt Gauss-Seidel-iteráció konvergens-e. Ehhez első lépésként az átmenetmátrixot kell kiszámítanunk.

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}_{S(1)} &= -(\mathbf{L}+\mathbf{D})^{-1}\mathbf{U} = \\
&= -\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \\
&= -\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \\
&= -\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Mivel a mátrixban vannak egy abszolútértékű elemek, ezért az elégséges feltételt nem használhatjuk. A szükséges és elégséges feltételt kell alkalmaznunk. A sajátértékek meghatározásához írjuk fel a karakterisztikus polinomot!

$$\begin{aligned}
\det(\mathbf{B}_{S(1)} - \lambda\mathbf{I}) &= \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & -1 \\ 0 & -\lambda & -1 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \\
&= -\lambda(\lambda^2 - 0) = \\
&= -\lambda^3 = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda_{1,2,3} = 0}
\end{aligned}$$

Mivel az átmenetmátrix felsőháromszög alakú és diagonálisában nullák vannak, ezért ránézésre is látszik, hogy a nulla háromszoros sajátértéke. Az átmenetmátrix spektrálsugara így nulla.

$$\rho(\mathbf{B}_{J(1)}) = \max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, |\lambda_3|\} = 0 < 1$$

Ha az átmenetmátrix spektrálsugara nulla, akkor véges iterációra számíthatunk, legfeljebb n lépésben konvergál.

Ahhoz, hogy kiszámoljuk az első három lépést, alkalmas $\mathbf{x_0}$-t kell választanunk. Mivel bármilyen $\mathbf{x_0}$ -ra konvergens, ezért a legegyszerűbb megoldás az $\mathbf{x_0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T = \mathbf{0}$ vektor. Tudjuk, hogy

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{x} = -(\mathbf{D}+\mathbf{L})^{-1}\mathbf{Ux} + (\mathbf{D}+\mathbf{L})^{-1}\mathbf{b}.$$

Innen a Gauss-Seidel-iteráció

$$\mathbf{x_{k+1}} = \underbrace{-(\mathbf{D}+\mathbf{L})^{-1}\mathbf{U}}_{\textit{átmenetmátrix}} \cdot \mathbf{x_k} + \underbrace{(\mathbf{D}+\mathbf{L})^{-1}\mathbf{b}}_{\mathbf{c}}.$$

Ezt felhasználva, el tudjuk végezni az iteráció első három lépését.

1. lépés:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x_1} &= -(\mathbf{L}+\mathbf{D})^{-1}\mathbf{U} \cdot \mathbf{x_0} + (\mathbf{L}+\mathbf{D})^{-1}\mathbf{b} = \mathbf{B}_{S(1)} \cdot \mathbf{0} + \mathbf{c} = \\
&= \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

2. lépés:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x_2} &= -(\mathbf{L}+\mathbf{D})^{-1}\mathbf{U} \cdot \mathbf{x_1} + (\mathbf{L}+\mathbf{D})^{-1}\mathbf{b} = \mathbf{B}_{S(1)} \cdot \mathbf{x_1} + \mathbf{c} = \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

3. lépés:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x_3} &= -(\mathbf{L}+\mathbf{D})^{-1}\mathbf{U}\cdot\mathbf{x_2}+(\mathbf{L}+\mathbf{D})^{-1}\mathbf{b}=\mathbf{B}_{S(1)}\cdot\mathbf{x_2}+\mathbf{c}= \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Mint látható, az iteráció a 2. lépéstől kezdve ugyanazt a vektort adja. Ez az

$$\mathbf{x}=-(\mathbf{D}+\mathbf{L})^{-1}\mathbf{U}\mathbf{x}+(\mathbf{D}+\mathbf{L})^{-1}\mathbf{b}$$

fixpontegyenlet- illetve a vele ekvivalens $\mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{b}$ lineáris egyenletrendszer megoldása.

A továbbiakban megmutatjuk, hogy az iteráció az átmenetmátrix meghatározása nélkül is elvégezhető, vagyis nincs szükség mátrix invertálásra az iterációs lépések számításához. Ehhez az iterációt szorozzuk meg balról $(\mathbf{D}+\mathbf{L})$-el, majd rendezzük át a következőképpen.

$$\begin{aligned}
\mathbf{x_{k+1}} &= -(\mathbf{D}+\mathbf{L})^{-1}\mathbf{U}\cdot\mathbf{x_k}+(\mathbf{D}+\mathbf{L})^{-1}\mathbf{b} \\
(\mathbf{D}+\mathbf{L})\cdot\mathbf{x_{k+1}} &= -\mathbf{U}\cdot\mathbf{x_k}+\mathbf{b} \\
\mathbf{D}\cdot\mathbf{x_{k+1}} &= -\mathbf{L}\cdot\mathbf{x_{k+1}}-\mathbf{U}\cdot\mathbf{x_k}+\mathbf{b} \\
\mathbf{x_{k+1}} &= -\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L}\cdot\mathbf{x_{k+1}}+\mathbf{U}\cdot\mathbf{x_k}-\mathbf{b})
\end{aligned}$$

Koordinátákkal felírva

$$x_i^{(k+1)}=-\frac{1}{a_{ii}}\left(\sum_{j=1}^{i-1}a_{ij}x_j^{(k+1)}+\sum_{j=i+1}^{n}a_{ij}x_j^{(k)}-b_i\right),\quad i=1,\ldots,n.$$

A képletből látszik, hogy a következő koordináta közelítéséhez a már kiszámított új koordinátát használjuk. 3×3-as mátrix esetén az alakja

$$\begin{aligned}
x_1^{(1)} &= -\frac{1}{a_{11}}\cdot\left(a_{12}\cdot x_2^{(0)}+a_{13}\cdot x_3^{(0)}-b_1\right) \\
x_2^{(1)} &= -\frac{1}{a_{22}}\cdot\left(a_{21}\cdot x_1^{(1)}+a_{23}\cdot x_3^{(0)}-b_2\right) \\
x_3^{(1)} &= -\frac{1}{a_{33}}\cdot\left(a_{31}\cdot x_1^{(1)}+a_{32}\cdot x_2^{(1)}-b_3\right).
\end{aligned}$$

Alkalmazzuk ebben az alakban a konkrét iterációt!

1. lépés:

$$\begin{aligned}
x_1^{(1)} &= -\frac{1}{1}\cdot\left(0\cdot x_2^{(0)}+1\cdot x_3^{(0)}-1\right)=-(0+0-1)=1 \\
x_2^{(1)} &= -\frac{1}{1}\cdot\left(0\cdot x_1^{(1)}-1\cdot x_3^{(0)}-1\right)=-(0-0-1)=1 \\
x_3^{(1)} &= -\frac{1}{1}\cdot\left(1\cdot x_1^{(1)}+1\cdot x_2^{(1)}-1\right)=-(1+1-1)=-1
\end{aligned}$$

2. lépés:

$$\begin{aligned}
x_1^{(2)} &= -\frac{1}{1}\cdot\left(0\cdot x_2^{(1)}+1\cdot x_3^{(1)}-1\right)=-(0-1-1)=2 \\
x_2^{(2)} &= -\frac{1}{1}\cdot\left(0\cdot x_1^{(2)}-1\cdot x_3^{(1)}-1\right)=-(0-(-1)-1)=0 \\
x_3^{(2)} &= -\frac{1}{1}\cdot\left(1\cdot x_1^{(2)}+1\cdot x_2^{(2)}-1\right)=-(2+0-1)=-1
\end{aligned}$$

3. lépés:

$$\begin{aligned}
x_1^{(3)} &= -\frac{1}{1}\cdot\left(0\cdot x_2^{(2)}+1\cdot x_3^{(2)}-1\right)=-(0+(-1)-1)=2\\
x_2^{(3)} &= -\frac{1}{1}\cdot\left(0\cdot x_1^{(3)}-1\cdot x_3^{(2)}-1\right)=-(0-(-1)-1)=0\\
x_3^{(3)} &= -\frac{1}{1}\cdot\left(1\cdot x_1^{(3)}+1\cdot x_2^{(3)}-1\right)=-(2+0-1)=-1
\end{aligned}$$

Látjuk, hogy a korábbi számolással egyező eredményt kaptunk.

7. Meg kell vizsgálnunk, hogy az $\mathbf{A}$ mátrixra felírt Gauss-Seidel-iteráció konvergens-e. Ehhez első lépésként az átmenetmátrixot kell kiszámítanunk.

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}_{S(1)} &= -(\mathbf{L}+\mathbf{D})^{-\mathbf{1}}\mathbf{U}=\\
&= -\begin{bmatrix}4&0&0\\-1&4&0\\0&-1&4\end{bmatrix}^{-1}\cdot\begin{bmatrix}0&-1&0\\0&0&-1\\0&0&0\end{bmatrix}=\\
&= -\begin{bmatrix}\frac{1}{4}&0&0\\\frac{1}{16}&\frac{1}{4}&0\\\frac{1}{64}&\frac{1}{16}&\frac{1}{4}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0&-1&0\\0&0&-1\\0&0&0\end{bmatrix}=\\
&= -\begin{bmatrix}0&-\frac{1}{4}&0\\0&-\frac{1}{16}&-\frac{1}{4}\\0&-\frac{1}{64}&-\frac{1}{16}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&\frac{1}{4}&0\\0&\frac{1}{16}&\frac{1}{4}\\0&\frac{1}{64}&\frac{1}{16}\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

A konvergencia bizonyításához az elégséges feltételt alkalmazzuk.

$$\|\mathbf{B}_{S(1)}\|_\infty=\frac{5}{16}<1$$

A kapott eredmény egynél kisebb, tehát a Gauss-Seidel-iterációval mindig konvergens sorozatot kapunk. Ahhoz, hogy kiszámoljuk az első 2 lépést, alkalmas $\mathbf{x_0}$-t kell választanunk. Mivel bármilyen $\mathbf{x_0}$ jó, ezért a legegyszerűbb megoldás az $\mathbf{x_0}=\begin{bmatrix}0&0&0\end{bmatrix}^T=\mathbf{0}$ vektor. Az

$$\mathbf{x_{k+1}}=-(\mathbf{L}+\mathbf{D})^{-1}\mathbf{U}\cdot\mathbf{x_k}+(\mathbf{L}+\mathbf{D})^{-1}\mathbf{b}$$

sorozattal tudjuk az iteráció lépéseit kiszámolni. Ezt felhasználva végezzük el az iteráció első két lépését!

1. lépés:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x_1} &= (\mathbf{L}+\mathbf{D})^{-1}\mathbf{U}\cdot\mathbf{x_0}+(\mathbf{L}+\mathbf{D})^{-1}\mathbf{b}=\mathbf{B}_{S(1)}\cdot\mathbf{0}+\mathbf{c}=\\
&= \mathbf{c}=\begin{bmatrix}\frac{1}{4}&0&0\\\frac{1}{16}&\frac{1}{4}&0\\\frac{1}{64}&\frac{1}{16}&\frac{1}{4}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2\\6\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{13}{8}\\\frac{29}{32}\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

2. lépés:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x_2} &= (\mathbf{L}+\mathbf{D})^{-1}\mathbf{U}\cdot\mathbf{x_1}+(\mathbf{L}+\mathbf{D})^{-1}\mathbf{b}=\mathbf{B}_{S(1)}\cdot\mathbf{x_1}+\mathbf{c}=\\
&= \begin{bmatrix}0&\frac{1}{4}&0\\0&\frac{1}{16}&\frac{1}{4}\\0&\frac{1}{64}&\frac{1}{16}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{13}{8}\\\frac{29}{32}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{13}{8}\\\frac{29}{32}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{29}{32}\\\frac{125}{64}\\\frac{253}{256}\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Végezzük el a két lépést az előző feladatban ismertetett módon, az átmenetmátrix felhasználása nélkül is! A következő koordináta közelítéséhez a már kiszámított új koordinátát használjuk.
1. lépés:

$$\begin{aligned}
x_1^{(1)} &= -\frac{1}{4}\cdot\left(-x_2^{(0)}+0\cdot x_3^{(0)}-2\right)=-\frac{1}{4}(0+0-2)=\frac{1}{2}\\
x_2^{(1)} &= -\frac{1}{4}\cdot\left(-x_1^{(1)}-x_3^{(0)}-6\right)=-\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2}-0-6\right)=\frac{13}{8}\\
x_3^{(1)} &= -\frac{1}{4}\cdot\left(0\cdot x_1^{(1)}-x_2^{(1)}-2\right)=-\frac{1}{4}\left(0-\frac{13}{8}-2\right)=\frac{29}{32}
\end{aligned}$$

2. lépés:

$$\begin{aligned}
x_1^{(2)} &= -\frac{1}{1}\cdot\left(-x_2^{(1)}+0\cdot x_3^{(1)}-2\right)=-\frac{1}{4}\left(-\frac{13}{8}+0-2\right)=\frac{29}{32}\\
x_2^{(2)} &= -\frac{1}{1}\cdot\left(-x_1^{(2)}-x_3^{(1)}-6\right)=-\frac{1}{4}\left(-\frac{29}{32}-\frac{29}{32}-6\right)=\frac{125}{64}\\
x_3^{(2)} &= -\frac{1}{1}\cdot\left(0\cdot x_1^{(2)}-x_2^{(2)}-2\right)=-\frac{1}{4}\left(0-\frac{125}{64}-2\right)=\frac{253}{256}
\end{aligned}$$

Látjuk, hogy a korábbi számolással egyező eredményt kaptunk. Ez a megoldás akkor előnyös, ha nem kell kiszámolni az átmenetmátrixot. Ha csak konvergenciát kellett volna a feladatban bizonyítani, azt megtehettük volna az átmenetmátrix nélkül is, hiszen a Gauss–Seidel-iteráció konvergencia tétele szimmetrikus, pozitív definit mátrixok esetén (a konkrét $\mathbf{A}$ ilyen) garantálja a konvergenciát.

Utolsó feladatunk, hogy kiszámoljuk a lépésszámot a 10^{-3} pontosság eléréséhez.
($q=\frac{5}{16}$ a kontrakciós együttható, a $\mathbf{B}_{S(1)}$ mátrix $\|.\|_\infty$ normája.)

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{x_k}-\mathbf{x}^*\|_\infty \leq \frac{q^k}{1-q}\|\mathbf{x_1}-\mathbf{x_0}\|_\infty &\leq 10^{-3}\\
\frac{\left(\frac{5}{16}\right)^k}{1-\frac{5}{16}}\cdot\left\|\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{13}{8}\\ \frac{29}{32}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\right\|_\infty &\leq 10^{-3}\\
\left(\frac{5}{16}\right)^k\cdot\frac{\frac{13}{8}}{\frac{11}{16}}=\left(\frac{5}{16}\right)^k\cdot\frac{13}{8}\cdot\frac{16}{11} &\leq 10^{-3}\\
\frac{26}{11}\cdot 10^3 &\leq \left(\frac{16}{5}\right)^k\\
\lg\left(\frac{26}{11}\cdot 10^3\right) &\leq k\cdot\lg\left(\frac{16}{5}\right)\\
\frac{\lg\left(\frac{26}{11}\cdot 10^3\right)}{\lg\left(\frac{16}{5}\right)}\approx 6,68 &\leq k
\end{aligned}$$

Mint látható $k\geq 7$ iterációs lépés elvégzése után elérjük a 10^{-3} pontosságot.

8. A feladat megoldásához először azt kell megvizsgálnunk, hogy $\forall\ \mathbf{x_0}\in\mathbb{R}^3$-ből indítva az iterációt, konvergens-e. Ehhez ki kell számolnunk az átmenetmátrixot.

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}_{S(1)} &= -(\mathbf{L}+\mathbf{D})^{-\mathbf{1}}\mathbf{U} = \\
&= -\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \\
&= -\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{16} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{32} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \\
&= -\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{1}{8} & \frac{11}{16} \\ 0 & \frac{1}{16} & -\frac{11}{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{8} & -\frac{11}{16} \\ 0 & -\frac{1}{16} & \frac{11}{32} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

A konvergencia vizsgálatához az elégséges feltételt alkalmazzuk.

$$\|\mathbf{B}_{S(1)}\|_\infty = \frac{13}{16} < 1$$

A kapott eredmény egynél kisebb, tehát teljesül a konvergencia. Az első 2 lépés kiszámolásához, alkalmas $\mathbf{x_0}$-t kell választanunk. Mivel bármilyen $\mathbf{x_0}$ alaklmas, ezért a legegyszerűbb megoldás az $\mathbf{x_0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T = \mathbf{0}$ vektor. Az

$$\mathbf{x_{k+1}} = -(\mathbf{L}+\mathbf{D})^{-1}\mathbf{U} \cdot \mathbf{x_k} + (\mathbf{L}+\mathbf{D})^{-1}\mathbf{b}$$

sorozattal tudjuk az iteráció lépéseit kiszámolni. Végezzük el az iteráció első két lépését!

1. lépés:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x_1} &= (\mathbf{L}+\mathbf{D})^{-1}\mathbf{U} \cdot \mathbf{x_0} + (\mathbf{L}+\mathbf{D})^{-1}\mathbf{b} = \mathbf{B}_{S(1)} \cdot \mathbf{0} + \mathbf{c} = \\
&= \mathbf{c} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{16} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{32} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{16} \\ \frac{1}{32} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

2. lépés:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x_2} &= (\mathbf{L}+\mathbf{D})^{-1}\mathbf{U} \cdot \mathbf{x_1} + (\mathbf{L}+\mathbf{D})^{-1}\mathbf{b} = \mathbf{B}_{S(1)} \cdot \mathbf{x_1} + \mathbf{c} = \\
&= \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{8} & -\frac{11}{16} \\ 0 & -\frac{1}{16} & \frac{11}{32} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{16} \\ \frac{1}{32} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{16} \\ \frac{1}{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{35}{128} \\ \frac{47}{512} \\ \frac{47}{1024} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Utolsó feladatunk, hogy kiszámoljuk a lépésszámot a 10^{-3} pontosság eléréséhez.
($q = \frac{13}{16}$ a kontrakciós együttható, a $\mathbf{B}_{S(1)}$ mátrix $\|.\|_\infty$ normája.)

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{x_k} - \mathbf{x}^*\|_\infty \leq \frac{\left(\frac{13}{16}\right)^k}{1-\frac{13}{16}} \cdot \left\| \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{16} \\ \frac{1}{32} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\|_\infty &\leq 10^{-3} \\
\left(\frac{13}{16}\right)^k \cdot \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{16}} = \left(\frac{13}{16}\right)^k \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{16}{3} &\leq 10^{-3} \\
\frac{4}{3} \cdot 10^3 &\leq \left(\frac{16}{13}\right)^k \\
\lg\left(\frac{4}{3} \cdot 10^3\right) &\leq k \cdot \lg\left(\frac{16}{13}\right) \\
\frac{\lg\left(\frac{4}{3} \cdot 10^3\right)}{\lg\left(\frac{16}{13}\right)} \approx 34,65 &\leq k
\end{aligned}$$

Látható, hogy $k \geq 35$ iterációs lépés elvégzése után elérjük a 10^{-3} pontosságot.

9. A feladat megoldásához először azt kell megvizsgálnunk, hogy $\forall\ \mathbf{x_0} \in \mathbb{R}^3$-ből indítva az iterációt, konvergens lesz-e. Ehhez ki kell számolnunk az átmenetmátrixot.

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}_{S(1)} &= -(\mathbf{L}+\mathbf{D})^{-\mathbf{1}}\mathbf{U} = \\
&= -\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \\
&= -\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{4} & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \\
&= -\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Alkalmazhatjuk az elégséges feltételt.

$$\|\mathbf{B}_{S(1)}\|_1 = \frac{2}{3} < 1$$

Az átmenetmátrix normája egynél kisebb, tehát teljesül a konvergencia. Az első 2 lépés kiszámolásához, alkalmas $\mathbf{x_0}$-t választunk. Mivel bármilyen $\mathbf{x_0}$-ra konvergens az iteráció, ezért a legegyszerűbb megoldás az $\mathbf{x_0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T = \mathbf{0}$ vektor. Az

$$\mathbf{x_{k+1}} = -(\mathbf{L}+\mathbf{D})^{-1}\mathbf{U}\cdot\mathbf{x_k} + (\mathbf{L}+\mathbf{D})^{-1}\mathbf{b}$$

sorozattal tudjuk az iteráció lépéseit kiszámolni.
1. lépés:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x_1} &= (\mathbf{L}+\mathbf{D})^{-1}\mathbf{U}\cdot\mathbf{x_0} + (\mathbf{L}+\mathbf{D})^{-1}\mathbf{b} = \mathbf{B}_{S(1)}\cdot\mathbf{0} + \mathbf{c} = \\
&= \mathbf{c} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{4} & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{6} \\ \frac{3}{4} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

2. lépés:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x_2} &= (\mathbf{L}+\mathbf{D})^{-1}\mathbf{U}\cdot\mathbf{x_1} + (\mathbf{L}+\mathbf{D})^{-1}\mathbf{b} = \mathbf{B}_{S(1)}\cdot\mathbf{x_1} + \mathbf{c} = \\
&= \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{6} \\ \frac{3}{4} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{6} \\ \frac{3}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{48} \\ \frac{5}{72} \\ \frac{47}{48} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Utolsó feladatunk, hogy kiszámoljuk a lépésszámot a 10^{-3} pontosság eléréséhez.
($q = \frac{2}{3}$ a kontrakciós együttható, a $\mathbf{B}_{S(1)}$ mátrix $\|.\|_1$ normája.)

$$\|\mathbf{x_k} - \mathbf{x}^*\|_\infty \leq \frac{q^k}{1-q}\|\mathbf{x_1} - \mathbf{x_0}\|_1 \leq 10^{-2}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^k}{1-\frac{2}{3}} \cdot \left\| \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{6} \\ \frac{3}{4} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\|_1 &\leq 10^{-2} \\
\left(\frac{2}{3}\right)^k \cdot \frac{\frac{7}{6}}{\frac{1}{3}} = \left(\frac{2}{3}\right)^k \cdot \frac{7}{6} \cdot 3 &\leq 10^{-2} \\
\frac{7}{2} \cdot 10^2 &\leq \left(\frac{3}{2}\right)^k \\
\lg\left(\frac{7}{2} \cdot 10^2\right) &\leq k \cdot \lg\left(\frac{3}{2}\right) \\
\frac{\lg\left(\frac{7}{2} \cdot 10^2\right)}{\lg\left(\frac{3}{2}\right)} \approx 14,45 &\leq k
\end{aligned}
$$

Tehát $k \geq 15$ iterációs lépés elvégzése után elérjük a 10^{-2} pontosságot!

10. A feladat megoldásához először azt kell megvizsgálnunk, hogy $\forall\ \mathbf{x_0} \in \mathbb{R}^3$-ből indítva az iterációt, konvergens lesz-e. Ehhez ki kell számolnunk az átmenetmátrixot.

$$
\begin{aligned}
\mathbf{B}_{S(1)} &= -(\mathbf{L}+\mathbf{D})^{-\mathbf{1}}\mathbf{U} = \\
&= -\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \\
&= -\begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ -\frac{2}{25} & \frac{1}{5} & 0 \\ \frac{13}{50} & \frac{1}{10} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \\
&= -\begin{bmatrix} 0 & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & -\frac{6}{25} & -\frac{12}{25} \\ 0 & \frac{39}{50} & \frac{3}{50} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & \frac{6}{25} & \frac{12}{25} \\ 0 & -\frac{39}{50} & -\frac{3}{50} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Alkalmazhatjuk az elégséges feltételt.

$$
\|\mathbf{B}_{S(1)}\|_\infty = \frac{21}{25} < 1
$$

Az átmenetmátrix normája egynél kisebb, tehát teljesül a konvergencia. Az első 2 lépés kiszámolásához, alkalmas $\mathbf{x_0}$-t választunk. Mivel bármilyen $\mathbf{x_0}$-ra konvergens az iteráció, ezért a legegyszerűbb megoldás az $\mathbf{x_0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T = \mathbf{0}$ vektor. Az

$$
\mathbf{x_{k+1}} = -(\mathbf{L}+\mathbf{D})^{-1}\mathbf{U} \cdot \mathbf{x_k} + (\mathbf{L}+\mathbf{D})^{-1}\mathbf{b}
$$

sorozattal tudjuk az iteráció lépéseit kiszámolni.

1. lépés:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x_1} &= (\mathbf{L}+\mathbf{D})^{-1}\mathbf{U} \cdot \mathbf{x_0} + (\mathbf{L}+\mathbf{D})^{-1}\mathbf{b} = \mathbf{B}_{S(1)} \cdot \mathbf{0} + \mathbf{c} = \\
&= \mathbf{c} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ -\frac{2}{25} & \frac{1}{5} & 0 \\ \frac{13}{50} & \frac{1}{10} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{3}{25} \\ -\frac{7}{50} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

2. lépés:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x_2} &= (\mathbf{L}+\mathbf{D})^{-1}\mathbf{U} \cdot \mathbf{x_1} + (\mathbf{L}+\mathbf{D})^{-1}\mathbf{b} = \mathbf{B}_{S(1)} \cdot \mathbf{x_1} + \mathbf{c} = \\
&= \begin{bmatrix} 0 & -\frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & \frac{6}{25} & \frac{12}{25} \\ 0 & -\frac{39}{50} & -\frac{3}{50} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{3}{25} \\ -\frac{7}{50} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{3}{25} \\ -\frac{7}{50} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{39}{250} \\ \frac{51}{625} \\ -\frac{563}{2500} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Utolsó feladatunk, hogy kiszámoljuk a lépésszámot a 10^{-3} pontosság eléréséhez. ($q = \frac{21}{25}$ a kontrakciós együttható, a $\mathbf{B}_{S(1)}$ mátrix $\|.\|_\infty$ normája.)

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{x_k} - \mathbf{x}^*\|_\infty &\leq \frac{q^k}{1-q}\|\mathbf{x_1} - \mathbf{x_0}\|_\infty \leq 10^{-3} \\
\frac{\left(\frac{21}{25}\right)^k}{1-\frac{21}{25}} \cdot \left\| \begin{bmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{3}{25} \\ -\frac{7}{50} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\|_\infty &\leq 10^{-3} \\
\left(\frac{21}{25}\right)^k \cdot \frac{\frac{1}{5}}{\frac{4}{25}} = \left(\frac{21}{25}\right)^k \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{25}{4} &\leq 10^{-3} \\
\frac{5}{4} \cdot 10^3 &\leq \left(\frac{25}{21}\right)^k \\
\lg\left(\frac{5}{4} \cdot 10^3\right) &\leq k \cdot \lg\left(\frac{25}{21}\right) \\
\frac{\lg\left(\frac{5}{4} \cdot 10^3\right)}{\lg\left(\frac{25}{21}\right)} \approx 40,90 &\leq k
\end{aligned}$$

Tehát $k \geq 41$ iterációs lépés elvégzése után elérjük a 10^{-3} pontosságot!

4.2.4. Paraméteres iterációk: csillapított Jacobi-iteráció és a relaxációs módszer

11. A feladatunk, hogy megállapítsuk, hogy a csillapított Jacobi-iteráció milyen ω esetén lesz konvergens. A módszer képletét a következőképpen származtathatjuk.

$$\begin{aligned}
\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \quad &\Leftrightarrow \quad \omega\mathbf{x} = -\omega\mathbf{D^{-1}}(\mathbf{L}+\mathbf{U})\mathbf{x} + \mathbf{D^{-1}b} \quad \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow \quad (1-\omega)\mathbf{x} + \omega\mathbf{x} &= (1-\omega)\mathbf{x} - \omega\mathbf{D^{-1}}(\mathbf{L}+\mathbf{U})\mathbf{x} + \mathbf{D^{-1}b} \quad \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow \quad \mathbf{x} &= \left((1-\omega)\mathbf{I} - \omega\mathbf{D^{-1}}(\mathbf{L}+\mathbf{U})\right)\mathbf{x} + \mathbf{D^{-1}b}
\end{aligned}$$

A kapott fixpontegyenletből felírhatjuk az iteráció képletét.

$$\mathbf{x_{k+1}} = \overbrace{((1-\omega)\mathbf{I} - \omega\underbrace{\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L}+\mathbf{U})}_{\mathbf{B}_{J(1)}})}^{\mathbf{B}_{J(\omega)}}\mathbf{x_k} + \omega\mathbf{D}^{-1}\mathbf{b}$$

Mint látható a képletben megtalálható a $\mathbf{B}_{J(1)}$ mátrix is, mely a Jacobi-iteráció átmenetmátrixa. Azt is észrevehetjük, hogy a képletben az $\omega = 1$ választással visszakapjuk az egyszerű Jacobi-iteráció képletét. Ahhoz, hogy megállapítsuk, pontosan melyek azok az ω-k, melyekre konvergens a módszer, a szükséges és elégséges feltételt kell alkalmaznunk.

Szükséges és elégséges feltétel:
$\forall\ \mathbf{x_0} \in \mathbb{R}^n$-ből indítva az iterációt konvergens lesz pontosan akkor, ha $\rho(\mathbf{B}) < 1$, ahol $\rho(\mathbf{B}) = \max_{i=1}^n |\lambda_i|$ a B mátrix spektrálsugara.

A feltétel alkalmazásához ki kell számítanunk a $\mathbf{B}_{J(\omega)}$ mátrixot. Először azonban érdemes meghatároznunk a $\mathbf{B}_{J(1)}$ mátrixot.

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}_{J(1)} &= -\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L}+\mathbf{U}) = \\
&= -\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \\
&= -\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \\
&= -\begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Ebből már könnyen származtatható a $\mathbf{B}_{J(\omega)}$ mátrix.

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}_{J(\omega)} &= (1-\omega)\mathbf{I} - w\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L}+\mathbf{U}) = (1-\omega)\mathbf{I} + w\mathbf{B}_{J(1)} = \\
&= \begin{bmatrix} 1-\omega & 0 & 0 \\ 0 & 1-\omega & 0 \\ 0 & 0 & 1-\omega \end{bmatrix} + \omega \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} 1-\omega & \frac{\omega}{4} & 0 \\ \frac{\omega}{4} & 1-\omega & \frac{\omega}{4} \\ 0 & \frac{\omega}{4} & 1-\omega \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

A szükséges és elégséges feltétel használatához szükségünk van a $\mathbf{B}_{J(\omega)}$ mátrix sajátértékeire. Írjuk fel a karakterisztikus polinomot!

$$\begin{aligned}
\det(\mathbf{B}_{J(\omega)} - \lambda\mathbf{I}) &= \begin{vmatrix} 1-\omega-\lambda & \frac{\omega}{4} & 0 \\ \frac{\omega}{4} & 1-\omega-\lambda & \frac{\omega}{4} \\ 0 & \frac{\omega}{4} & 1-\omega-\lambda \end{vmatrix} = \\
&= (1-\omega-\lambda)\left((1-\omega-\lambda)^2 - \left(\frac{\omega}{4}\right)^2\right) - \frac{\omega}{4}\left((1-\omega-\lambda)\frac{\omega}{4}\right) = \\
&= (1-\omega-\lambda)\left((1-\omega-\lambda)^2 - \left(\frac{\omega}{4}\right)^2 - \left(\frac{\omega}{4}\right)^2\right) = \\
&= (1-\omega-\lambda)\left((1-\omega-\lambda)^2 - \frac{\omega^2}{8}\right) = \\
&= (1-\omega-\lambda)\left((1-\omega-\lambda) - \frac{\omega}{\sqrt{8}}\right)\left((1-\omega-\lambda) + \frac{\omega}{\sqrt{8}}\right) = 0
\end{aligned}$$

A három sajátérték paraméteres alakja a következő lesz.

$$\begin{aligned}
1-\omega-\lambda_1(\omega) = 0 \quad &\Rightarrow \quad \boxed{\lambda_1(\omega) = 1-\omega} \\
1-\omega-\lambda_2(\omega) - \frac{\omega}{\sqrt{8}} = 0 \quad &\Rightarrow \quad \boxed{\lambda_2(\omega) = 1-\omega-\frac{\omega}{\sqrt{8}}} \\
1-\omega-\lambda_3(\omega) + \frac{\omega}{\sqrt{8}} = 0 \quad &\Rightarrow \quad \boxed{\lambda_3(\omega) = 1-\omega+\frac{\omega}{\sqrt{8}}}.
\end{aligned}$$

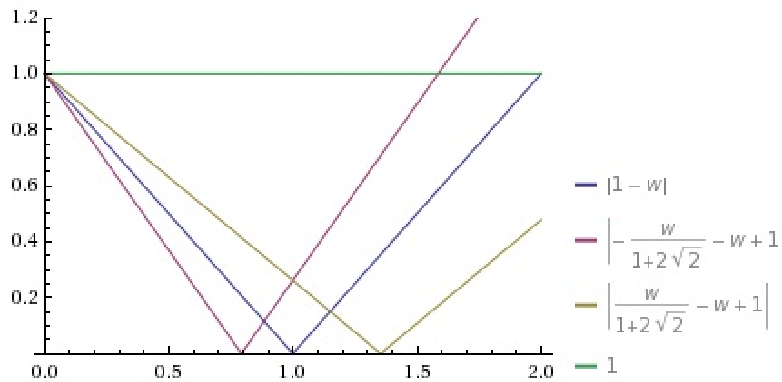
Ahhoz, hogy az iteráció konvergens legyen a spektrálsugárnak kisebbnek kell lennie egynél.

$$\rho(\mathbf{B}_{J(\omega)}) = \max\{|\lambda_1(\omega)|, |\lambda_2(\omega)|, |\lambda_3(\omega)|\} < 1$$

Látjuk, hogy a kapott függvények az abszolút értéken belül lineárisan függnek ω-tól, így grafikonjuk V alakú lesz. A könnyebb átláthatóság kedvéért érdemes felrajzolnunk a függvényeket. Ehhez először ki kell számítani az x tengellyel való metszéspontokat.

$$\begin{aligned}
\lambda_1(\omega) = 1 - \omega = 0 \quad &\Rightarrow \quad \omega_1 = 1 \\
\lambda_2(\omega) = 1 - \omega - \frac{\omega}{\sqrt{8}} = 0 \quad &\Rightarrow \quad \omega_2 = \frac{1}{1 + \frac{1}{\sqrt{8}}} = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{8}+1} \\
\lambda_3(\omega) = 1 - \omega + \frac{\omega}{\sqrt{8}} = 0 \quad &\Rightarrow \quad \omega_3 = \frac{1}{1 - \frac{1}{\sqrt{8}}} = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{8}-1}
\end{aligned}$$

A metszéspontok meghatározása után már fel lehet rajzolni az ábrát.



4.1. ábra.

Amint az 4.1 ábrán is látható, arra az intervallumra lesz szükségünk, ahol mind a három függvény grafikonja 1 alatt van. Ez a $(0,\, 2\omega_2)$ intervallum, hiszen ha $2 \cdot \omega_2$-nél nagyobb ω, akkor $|\lambda_2|$ nagyobb lesz egynél, illetve ha ω kisebb 0, akkor a helyzet ugyanez. Tehát

$$\omega \in (0,\, 2\omega_2)$$

esetén bármely kezdővektorra konvergens lesz a csillapított Jacobi-iteráció.
Az ábráról az is leolvasható, hogy az optimális ω-t a $\lambda_2(\omega)$ és $\lambda_3(\omega)$ függvények metszéspontjánál kapjuk.

$$\begin{aligned}
|\lambda_2(\omega_{opt})| &= |\lambda_3(\omega_{opt})| \\
\lambda_2(\omega_{opt}) &= -\lambda_3(\omega_{opt}) \\
1 - \omega_{opt} - \frac{\omega_{opt}}{\sqrt{8}} &= -(1 - \omega_{opt} + \frac{\omega_{opt}}{\sqrt{8}}) \\
1 - \omega_{opt} - \frac{\omega_{opt}}{\sqrt{8}} &= -1 + \omega_{opt} - \frac{\omega_{opt}}{\sqrt{8}} \\
\omega_{opt} &= 1
\end{aligned}$$

Tehát az optimális paraméter $\omega_{opt} = 1$, azaz a Jacobi-iteráció gyorsabb bármely paraméteres változatánál.

12. A feladatunk, hogy megállapítsuk, hogy a csillapított Jacobi-iteráció milyen ω esetén lesz konvergens. Ehhez első lépésként írjuk fel az iteráció képletét.

$$\mathbf{x_{k+1}} = \overbrace{\left((1-\omega)\mathbf{I} - \omega \underbrace{\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L}+\mathbf{U})}_{\mathbf{B}_{J(1)}}\right)}^{\mathbf{B}_{J(\omega)}} \mathbf{x_k} + \omega \mathbf{D}^{-1}\mathbf{b}$$

Mint látható a képletben megtalálható a $\mathbf{B}_{J(1)}$ mátrix is. Ahhoz, hogy megállapítsuk, hogy milyen ω-ra konvergens, alkalmaznunk kell a szükséges és elégséges feltételt. A feltétel alkalmazásához ki kell számítanunk a $\mathbf{B}_{J(\omega)}$ mátrixot. Érdemes előbb a $\mathbf{B}_{J(1)}$ mátrixot kiszámolnunk.

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}_{J(1)} &= -\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L}+\mathbf{U}) = \\
&= -\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -4 & 0 & -4 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} = \\
&= -\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -4 & 0 & -4 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} = \\
&= -\begin{bmatrix} 0 & -\frac{2}{3} & 0 \\ -\frac{4}{3} & 0 & -\frac{4}{3} \\ 0 & -\frac{2}{3} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{4}{3} & 0 & \frac{4}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Ebből már könnyen származtatható a $\mathbf{B}_{J(\omega)}$ mátrix.

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}_{J(\omega)} &= (1-\omega)\mathbf{I} - w\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L}+\mathbf{U}) = (1-\omega)\mathbf{I} + w\mathbf{B}_{J(1)} = \\
&= \begin{bmatrix} 1-\omega & 0 & 0 \\ 0 & 1-\omega & 0 \\ 0 & 0 & 1-\omega \end{bmatrix} + \omega \begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{4}{3} & 0 & \frac{4}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} 1-\omega & \frac{2\omega}{3} & 0 \\ \frac{4\omega}{3} & 1-\omega & \frac{4\omega}{3} \\ 0 & \frac{2\omega}{3} & 1-\omega \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

A szükséges és elégséges feltétel használatához szükségünk van a $\mathbf{B}_{J(\omega)}$ mátrix sajátértékeire. Írjuk fel a karakterisztikus polinomot!

$$\begin{aligned}
\det(\mathbf{B}_{J(\omega)} - \lambda\mathbf{I}) &= \begin{vmatrix} 1-\omega-\lambda & \frac{2\omega}{3} & 0 \\ \frac{4\omega}{3} & 1-\omega-\lambda & \frac{4\omega}{3} \\ 0 & \frac{2\omega}{3} & 1-\omega-\lambda \end{vmatrix} = \\
&= (1-\omega-\lambda)\left((1-\omega-\lambda)^2 - \frac{8\omega^2}{9}\right) - \frac{2\omega}{3}\left((1-\omega-\lambda)\frac{4\omega}{3}\right) = \\
&= (1-\omega-\lambda)\left((1-\omega-\lambda)^2 - \frac{8\omega^2}{9} - \frac{8\omega^2}{9}\right) = \\
&= (1-\omega-\lambda)\left((1-\omega-\lambda)^2 - \frac{16\omega^2}{9}\right) = \\
&= (1-\omega-\lambda)\left((1-\omega-\lambda) - \frac{4\omega}{3}\right)\left((1-\omega-\lambda) + \frac{4\omega}{3}\right) = 0
\end{aligned}$$

A három sajátérték paraméteres alakja a következő lesz.

$$\begin{aligned}
1-\omega-\lambda_1(\omega) = 0 \quad &\Rightarrow \quad \boxed{\lambda_1(\omega) = 1-\omega} \\
1-\omega-\lambda_2(\omega) - \frac{4\omega}{3} = 0 \quad &\Rightarrow \quad \boxed{\lambda_2(\omega) = 1-\omega-\frac{4\omega}{3}} \\
1-\omega-\lambda_3(\omega) + \frac{4\omega}{3} = 0 \quad &\Rightarrow \quad \boxed{\lambda_3(\omega) = 1-\omega+\frac{4\omega}{3}}
\end{aligned}$$

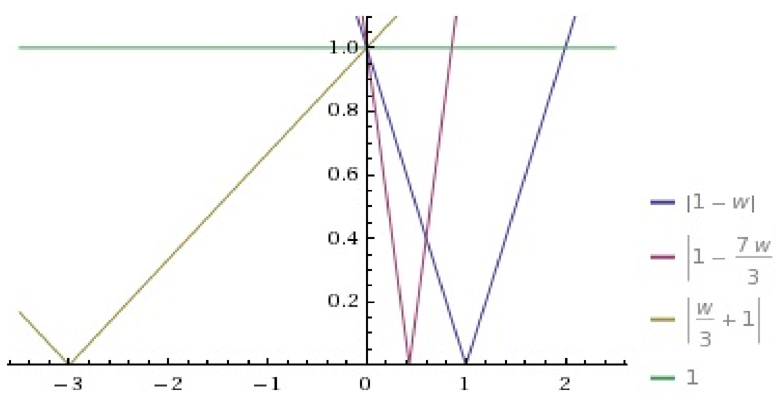
Ahhoz, hogy az iteráció konvergens legyen, a spektrálsugárnak kisebbnek kell lennie egynél.

$$\rho(\mathbf{B}_{J(\omega)}) = \max\{|\lambda_1(\omega)|, |\lambda_2(\omega)|, |\lambda_3(\omega)|\} < 1$$

Látjuk, hogy a kapott függvények az abszolút értéken belül lineárisan függnek ω-tól, így grafikonjuk V alakú lesz. A könnyebb átláthatóság kedvéért érdemes felrajzolnunk a függvényeket. Ehhez ki kell számítani az x tengellyel való metszéspontokat.

$$\begin{aligned}
\lambda_1(\omega) = 1 - \omega = 0 \quad &\Rightarrow \quad \omega_1 = 1\\
\lambda_2(\omega) = 1 - \omega - \frac{4\omega}{3} = 0 \quad &\Rightarrow \quad \omega_2 = \frac{1}{1+\frac{4}{3}} = \frac{3}{7}\\
\lambda_3(\omega) = 1 - \omega + \frac{4\omega}{3} = 0 \quad &\Rightarrow \quad \omega_3 = \frac{1}{1-\frac{4}{3}} = -3
\end{aligned}$$

A metszéspontok meghatározása után már fel tudjuk rajzolni az ábrát.



4.2. ábra.

Azok az ω-k lennének jók, ahol mindhárom függvény grafikon 1 alatt van, hiszen ekkor lenne a spektrálsugár kisebb egynél. Azonban - mint az a 4.2 ábrán is látható - nincs olyan pont ahol mindhárom függvény 1 alatt lenne. Mindhárom metszi az y tengelyt az 1 pontban, azonban, ha $\omega > 0$, akkor a $|\lambda_3(\omega)| > 1$, ha $\omega < 0$ akkor $|\lambda_1(\omega)| > 1$ és $|\lambda_2(\omega)| > 1$. Ebből következik, hogy nincs olyan ω amire konvergens lenne!

13. Az a feladatunk, hogy megállapítsuk, hogy a csillapított Jacobi-iteráció milyen ω esetén lesz konvergens. Ehhez első lépésként írjuk fel az iteráció képletét.

$$\mathbf{x_{k+1}} = \overbrace{((1-\omega)\mathbf{I} - \omega\,\underbrace{\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L}+\mathbf{U})}_{\mathbf{B}_{J(1)}})}^{\mathbf{B}_{J(\omega)}}\mathbf{x_k} + \omega\mathbf{D}^{-1}\mathbf{b}$$

Mint látható a képletben megtalálható a $\mathbf{B}_{J(1)}$ mátrix is. Ahhoz, hogy megállapítsuk, hogy milyen ω-ra konvergens, alkalmaznunk kell a szükséges és elégséges feltételt. A feltétel alkalmazásához ki kell számítanunk a $\mathbf{B}_{J(\omega)}$ mátrixot. Először azonban érdemes külön kiszámolni a $\mathbf{B}_{J(1)}$ mátrixot.

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}_{J(1)} &= -\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L}+\mathbf{U}) = \\
&= -\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} = \\
&= -\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} = \\
&= -\begin{bmatrix} 0 & -\frac{2}{3} & 0 \\ -\frac{2}{3} & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{2}{3} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Ezután már fel tudjuk írni a $\mathbf{B}_{J(\omega)}$ mátrixot.

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}_{J(\omega)} &= (1-\omega)\mathbf{I} - w\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L}+\mathbf{U}) = (1-\omega)\mathbf{I} + w\mathbf{B}_{J(1)} = \\
&= \begin{bmatrix} 1-\omega & 0 & 0 \\ 0 & 1-\omega & 0 \\ 0 & 0 & 1-\omega \end{bmatrix} + \omega \begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} 1-\omega & \frac{2\omega}{3} & 0 \\ \frac{2\omega}{3} & 1-\omega & \frac{2\omega}{3} \\ 0 & \frac{2\omega}{3} & 1-\omega \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

A szükséges és elégséges feltétel használatához szükségünk van a $\mathbf{B}_{J(\omega)}$ mátrix sajátértékeire. Írjuk fel a karakterisztikus polinomot!

$$\begin{aligned}
\det(\mathbf{B}_{J(\omega)} - \lambda\mathbf{I}) &= \begin{vmatrix} 1-\omega-\lambda & \frac{2\omega}{3} & 0 \\ \frac{2\omega}{3} & 1-\omega-\lambda & \frac{2\omega}{3} \\ 0 & \frac{2\omega}{3} & 1-\omega-\lambda \end{vmatrix} = \\
&= (1-\omega-\lambda)\left((1-\omega-\lambda)^2 - \frac{4\omega^2}{9}\right) - \frac{2\omega}{3}\left((1-\omega-\lambda)\frac{2\omega}{3}\right) \\
&= (1-\omega-\lambda)\left((1-\omega-\lambda)^2 - \frac{4\omega^2}{9} - \frac{4\omega^2}{9}\right) = \\
&= (1-\omega-\lambda)\left((1-\omega-\lambda)^2 - \frac{8\omega^2}{9}\right) = \\
&= (1-\omega-\lambda)\left((1-\omega-\lambda) - \frac{\sqrt{8}\omega}{3}\right)\left((1-\omega-\lambda) + \frac{\sqrt{8}\omega}{3}\right) = 0
\end{aligned}$$

A három sajátérték paraméteres alakja a következő lesz.

$$\begin{aligned}
1-\omega-\lambda_1(\omega) = 0 \quad &\Rightarrow \quad \boxed{\lambda_1(\omega) = 1-\omega} \\
1-\omega-\lambda_2(\omega) - \frac{\sqrt{8}\omega}{3} = 0 \quad &\Rightarrow \quad \boxed{\lambda_2(\omega) = 1-\omega-\frac{\sqrt{8}\omega}{3}} \\
1-\omega-\lambda_3(\omega) + \frac{\sqrt{8}\omega}{3} = 0 \quad &\Rightarrow \quad \boxed{\lambda_3(\omega) = 1-\omega+\frac{\sqrt{8}\omega}{3}}
\end{aligned}$$

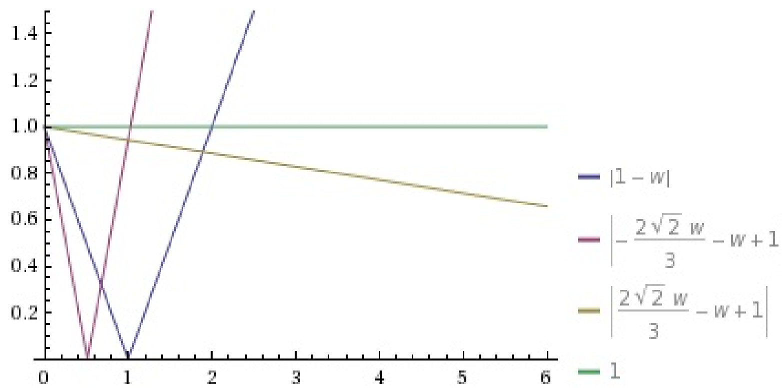
Ahhoz, hogy az iteráció konvergens legyen, a spektrálsugárnak kisebbnek kell lennie egynél.

$$\rho(\mathbf{B}_{J(\omega)}) = \max\{|\lambda_1(\omega)|, |\lambda_2(\omega)|, |\lambda_3(\omega)|\} < 1$$

A könnyebb átláthatóság kedvéért érdemes felrajzolnunk a függvényeket. Ehhez ki kell számítani az x tengellyel vett metszéspontokat.

$$\lambda_1(\omega) = 1 - \omega = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_1 = 1$$
$$\lambda_2(\omega) = 1 - \omega - \frac{\sqrt{8}\omega}{3} = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_2 = \frac{1}{1 + \frac{\sqrt{8}}{3}}$$
$$\lambda_3(\omega) = 1 - \omega + \frac{\sqrt{8}\omega}{3} = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_3 = \frac{1}{1 - \frac{\sqrt{8}}{3}}$$

A metszéspontok meghatározása után már fel lehet rajzolni az ábrát.



4.3. ábra.

Amint az a 4.3 ábrán is látható, arra az intervallumra lesz szükségünk ahol mind a három függvény grafikon 1 alatt van. Ez a $(0, 2\omega_2)$ intervallum, hiszen ha $2\omega_2$-nél nagyobb ω, akkor $|\lambda_2|$ nagyobb lesz egynél, bár a többi 1 alatt marad, de a λ_2 miatt a spektrálsugár így is nagyobb lesz 1-nél. Ha $\omega < 0$ akkor mind a három függvény egynél nagyobb. Tehát

$$\omega \in (0, 2\omega_2)$$

esetén bármely kezdővektorra konvergens lesz a csillapított Jacobi-iteráció.
Az ábráról az is leolvasható, hogy az optimális ω-t a λ_2 és λ_3 metszéspontjánál kapjuk.

$$\begin{aligned}
|\lambda_2(\omega_{opt})| &= |\lambda_3(\omega_{opt})| \\
\lambda_2(\omega_{opt}) &= -\lambda_3(\omega_{opt}) \\
1 - \omega_{opt} - \frac{\sqrt{8}\omega_{opt}}{3} &= -(1 - \omega_{opt} + \frac{\sqrt{8}\omega_{opt}}{3}) \\
1 - \omega_{opt} - \frac{\sqrt{8}\omega_{opt}}{3} &= -1 + \omega_{opt} - \frac{\sqrt{8}\omega_{opt}}{3} \\
\omega_{opt} &= 1
\end{aligned}$$

Tehát az optimális paraméter $\omega_{opt} = 1$, azaz a Jacobi-iteráció gyorsabb bármely paraméteres változatánál.

14. Az a feladatunk, hogy megállapítsuk, hogy a csillapított Jacobi-iteráció milyen ω esetén lesz konvergens $\forall\ \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^3$-re. Ehhez először írjuk fel az iteráció képletét.

$$\mathbf{x_{k+1}} = \overbrace{((1-\omega)\mathbf{I} - \omega \underbrace{\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L}+\mathbf{U})}_{\mathbf{B}_{J(1)}})}^{\mathbf{B}_{J(\omega)}} \mathbf{x_k} + \omega \mathbf{D}^{-1}\mathbf{b}$$

Mint látható, a képletben megtalálható a $\mathbf{B}_{J(1)}$ mátrix is. Ahhoz, hogy megállapítsuk, hogy milyen ω-ra konvergens, alkalmaznunk kell a szükséges és elégséges feltételt. A feltétel alkalmazásához ki kell számítanunk a $\mathbf{B}_{J(\omega)}$ mátrixot. Először azonban érdemes külön kiszámolni a $\mathbf{B}_{J(1)}$ mátrixot, így később egyszerűbb lesz felírni a $\mathbf{B}_{J(\omega)}$ mátrixot.

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}_{J(1)} &= -\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L}+\mathbf{U}) = \\
&= -\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \\
&= -\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \\
&= -\begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Ezután már fel tudjuk írni a $\mathbf{B}_{J(\omega)}$ mátrixot.

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}_{J(\omega)} &= (1-\omega)\mathbf{I} - w\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L}+\mathbf{U}) = (1-\omega)\mathbf{I} + w\mathbf{B}_{J(1)} = \\
&= \begin{bmatrix} 1-\omega & 0 & 0 \\ 0 & 1-\omega & 0 \\ 0 & 0 & 1-\omega \end{bmatrix} - \omega \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} 1-\omega & 0 & -\frac{\omega}{4} \\ -\omega & 1-\omega & -\omega \\ -\omega & 0 & 1-\omega \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

A szükséges és elégséges feltétel használatához szükségünk van a $\mathbf{B}_{J(\omega)}$ mátrix sajátértékeire. Írjuk fel a karakterisztikus polinomot!

$$\begin{aligned}
\det(\mathbf{B}_{J(\omega)} - \lambda\mathbf{I}) &= \begin{vmatrix} 1-\omega-\lambda & 0 & -\frac{\omega}{4} \\ -\omega & 1-\omega-\lambda & -\omega \\ -\omega & 0 & 1-\omega-\lambda \end{vmatrix} = \\
&= (1-\omega-\lambda)((1-\omega-\lambda)^2 + 0\cdot\omega) - \frac{\omega}{4}(\omega(1-\omega-\lambda)) = \\
&= (1-\omega-\lambda)\left((1-\omega-\lambda)^2 - \frac{\omega^2}{4}\right) = \\
&= (1-\omega-\lambda)\left((1-\omega-\lambda) - \frac{\omega}{2}\right)\left((1-\omega-\lambda) + \frac{\omega}{2}\right) = 0
\end{aligned}$$

A három sajátérték paraméteres alakja a következő lesz.

$$\begin{aligned}
1-\omega-\lambda_1(\omega) = 0 \quad &\Rightarrow \quad \boxed{\lambda_1(\omega) = 1-\omega} \\
1-\omega-\lambda_2(\omega) - \frac{\omega}{2} = 0 \quad &\Rightarrow \quad \boxed{\lambda_2(\omega) = 1-\omega-\frac{\omega}{2}} \\
1-\omega-\lambda_3(\omega) + \frac{\omega}{2} = 0 \quad &\Rightarrow \quad \boxed{\lambda_3(\omega) = 1-\omega+\frac{\omega}{2}}
\end{aligned}$$

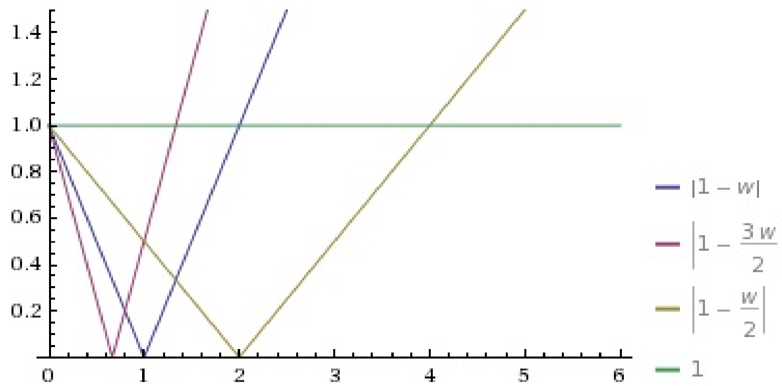
Ahhoz, hogy az iteráció konvergens legyen, a spektrálsugárnak kisebbnek kell lennie egynél.

$$\rho(\mathbf{B}_{J(\omega)}) = \max\{|\lambda_1(\omega)|, |\lambda_2(\omega)|, |\lambda_3(\omega)|\} < 1$$

A könnyebb átláthatóság kedvéért érdemes felrajzolni a függvényeket. Ehhez ki kell számítani az x tengellyel való metszéspontokat.

$$\lambda_1(\omega) = 1 - \omega = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_1 = 1$$
$$\lambda_2(\omega) = 1 - \omega - \frac{\omega}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_2 = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$
$$\lambda_3(\omega) = 1 - \omega + \frac{\omega}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_3 = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

A metszéspontok meghatározása után már fel lehet rajzolni az ábrát.



4.4. ábra.

Amint az a 4.4 ábrán is látható, arra az intervallumra lesz szükségünk ahol mind a három függvénygrafikon 1 alatt van. Ez a $(0, 2\omega_2)$ intervallum, hiszen ha $2\omega_2$-nél nagyobb ω, akkor $|\lambda_2|$ nagyobb lesz egynél, emiatt a spektrálsugár meghaladja egyet. Ha $\omega < 0$ akkor mind a három függvény egynél nagyobb. Tehát

$$\omega \in (0, \frac{4}{3})$$

esetén bármely kezdővektorra konvergens lesz a csillapított Jacobi-iteráció.
Az ábráról az is leolvasható, hogy az optimális ω-t a λ_2 és λ_3 metszéspontjánál kapjuk:

$$\begin{aligned}
|\lambda_2(\omega_{opt})| &= |\lambda_3(\omega_{opt})\\
\lambda_2(\omega_{opt}) &= -\lambda_3(\omega_{opt})\\
1 - \omega_{opt} - \frac{\omega_{opt}}{2} &= -(1 - \omega_{opt} + \frac{\omega_{opt}}{2})\\
1 - \omega_{opt} - \frac{\omega_{opt}}{2} &= -1 + \omega_{opt} - \frac{\omega_{opt}}{2}\\
\omega_{opt} &= 1
\end{aligned}$$

Tehát az optimális paraméter $\omega_{opt} = 1$, azaz a Jacobi-iteráció gyorsabb bármely paraméteres változatánál.

15. Az a feladatunk, hogy megállapítsuk, hogy a csillapított Jacobi-iteráció milyen ω esetén lesz konvergens. Ehhez első lépésként írjuk fel az iteráció képletét.

$$\mathbf{x_{k+1}} = \overbrace{((1-\omega)\mathbf{I} - \omega\underbrace{\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L}+\mathbf{U})}_{\mathbf{B}_{J(1)}})}^{\mathbf{B}_{J(\omega)}}\mathbf{x_k} + \omega\mathbf{D}^{-1}\mathbf{b}$$

Mint látható a képletben megtalálható a $\mathbf{B}_{J(1)}$ mátrix is. Ahhoz, hogy megállapítsuk, hogy milyen ω-ra konvergens, alkalmaznunk kell a szükséges és elégséges feltételt. A feltétel alkalmazásához ki kell számítanunk a $\mathbf{B}_{J(\omega)}$ mátrixot. Érdemes előbb a $\mathbf{B}_{J(1)}$ mátrixot kiszámolnunk.

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}_{J(1)} &= -\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L}+\mathbf{U}) = \\
&= -\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \\
&= -\begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \\
&= -\begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} & 0 & \frac{3}{5} \\ \frac{2}{5} & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Ezután már fel tudjuk írni a $\mathbf{B}_{J(\omega)}$ mátrixot:

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}_{J(\omega)} &= (1-\omega)\mathbf{I} - w\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L}+\mathbf{U}) = (1-\omega)\mathbf{I} + w\mathbf{B}_{J(1)} = \\
&= \begin{bmatrix} 1-\omega & 0 & 0 \\ 0 & 1-\omega & 0 \\ 0 & 0 & 1-\omega \end{bmatrix} - \omega \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} & 0 & \frac{3}{5} \\ \frac{2}{5} & 0 & 0 \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} 1-\omega & 0 & -\frac{2\omega}{5} \\ -\frac{3\omega}{5} & 1-\omega & -\frac{3\omega}{5} \\ -\frac{2\omega}{5} & 0 & 1-\omega \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

A szükséges és elégséges feltétel használatához szükségünk van a $\mathbf{B}_{J(\omega)}$ mátrix sajátértékeire. Írjuk fel a karakterisztikus polinomot!

$$\begin{aligned}
\det(\mathbf{B}_{J(\omega)} - \lambda\mathbf{I}) &= \begin{vmatrix} 1-\omega-\lambda & 0 & -\frac{2\omega}{5} \\ -\frac{3\omega}{5} & 1-\omega-\lambda & -\frac{3\omega}{5} \\ -\frac{2\omega}{5} & 0 & 1-\omega-\lambda \end{vmatrix} = \\
&= (1-\omega-\lambda)(1-\omega-\lambda)^2 - \frac{2\omega}{5}\left(\frac{2\omega}{5}(1-\omega-\lambda)\right) = \\
&= (1-\omega-\lambda)\left((1-\omega-\lambda)^2 - \frac{4\omega^2}{25}\right) = \\
&= (1-\omega-\lambda)\left((1-\omega-\lambda) - \frac{2\omega}{5}\right)\left((1-\omega-\lambda) + \frac{2\omega}{5}\right) = 0
\end{aligned}$$

A három sajátérték paraméteres alakja a következő lesz.

$$1-\omega-\lambda_1(\omega) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\lambda_1(\omega) = 1-\omega}$$

$$1-\omega-\lambda_2(\omega) - \frac{2\omega}{5} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\lambda_2(\omega) = 1-\omega-\frac{2\omega}{5}}$$

$$1-\omega-\lambda_3(\omega) + \frac{2\omega}{5} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\lambda_3(\omega) = 1-\omega+\frac{2\omega}{5}}$$

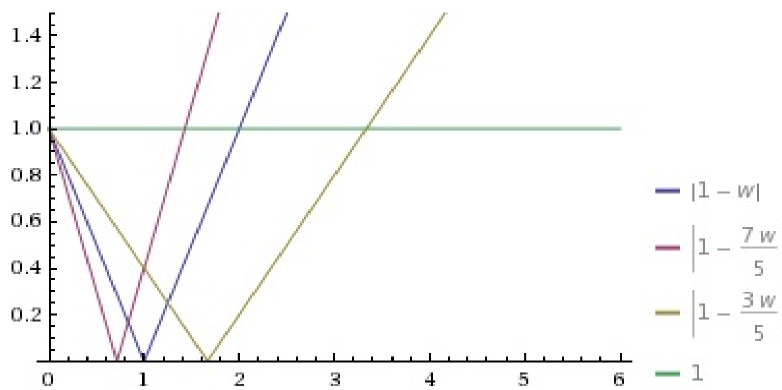
Ahhoz, hogy az iteráció konvergens legyen, a spektrálsugárnak kisebbnek kell lennie egynél.

$$\rho(\mathbf{B}_{J(\omega)}) = \max\{|\lambda_1(\omega)|, |\lambda_2(\omega)|, |\lambda_3(\omega)|\} < 1$$

A könnyebb átláthatóság kedvéért érdemes felrajzolni a függvényeket. Ehhez ki kell számítani az x tengellyel való metszéspontokat.

$$\begin{aligned} \lambda_1(\omega) = 1-\omega = 0 \quad &\Rightarrow \quad \omega_1 = 1 \\ \lambda_2(\omega) = 1-\omega-\frac{2\omega}{5} = 0 \quad &\Rightarrow \quad \omega_2 = \frac{1}{1+\frac{2}{5}} = \frac{5}{7} \\ \lambda_3(\omega) = 1-\omega+\frac{2\omega}{5} = 0 \quad &\Rightarrow \quad \omega_3 = \frac{1}{1-\frac{2}{5}} = \frac{5}{3} \end{aligned}$$

A metszéspontok meghatározása után már fel lehet rajzolni az ábrát.



4.5. ábra.

Amint az a 4.5 ábrán is látható, arra az intervallumra lesz szükségünk ahol mind a három függvény grafikon 1 alatt van. Ez a $(0, 2\omega_2)$ intervallum, hiszen ha $2\omega_2$-nél nagyobb ω, akkor $|\lambda_2|$ nagyobb lesz egynél, emiatt a spektrálsugár meghaladja egyet. Ha $\omega < 0$, akkor mind a három függvény egynél nagyobb. Tehát

$$\omega \in (0, \frac{10}{7})$$

esetén bármely kezdővektorra konvergens lesz a csillapított Jacobi-iteráció.
Az ábráról az is leolvasható, hogy az optimális ω-t a λ_2 és λ_3 metszéspontjánál kapjuk.

$$\begin{aligned} |\lambda_2(\omega_{opt})| &= |\lambda_3(\omega_{opt})| \\ \lambda_2(\omega_{opt}) &= -\lambda_3(\omega_{opt}) \\ 1-\omega_{opt}-\frac{2\omega_{opt}}{5} &= -(1-\omega_{opt}+\frac{2\omega_{opt}}{5}) \\ 1-\omega_{opt}-\frac{2\omega_{opt}}{5} &= -1+\omega_{opt}-\frac{2\omega_{opt}}{5} \\ \omega_{opt} &= 1 \end{aligned}$$

Tehát az optimális paraméter $\omega_{opt} = 1$, azaz a Jacobi-iteráció gyorsabb bármely paraméteres változatánál.

16. A relaxációs módszer képletét a következőképpen származtathatjuk. Induljunk ki a Gauss–Seidel-iteráció fixpontegyenletté való átrendezéséből.

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{x} = -(\mathbf{D}+\mathbf{L})^{-1}\mathbf{Ux} + (\mathbf{D}+\mathbf{L})^{-1}\mathbf{b}$$

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{D}+\mathbf{L})\mathbf{x} &= -\mathbf{U}\mathbf{x}+\mathbf{b} \quad |\cdot\omega \\
\mathbf{D}\mathbf{x} &= \mathbf{D}\mathbf{x} \quad |\cdot(1-\omega) \\
\omega(\mathbf{D}+\mathbf{L})\mathbf{x}+(1-\omega)\mathbf{D}\mathbf{x} &= [-\omega\mathbf{U}+(1-\omega)\mathbf{D}]\cdot\mathbf{x}+\omega\mathbf{b} \\
(\mathbf{D}+\omega\mathbf{L})\mathbf{x} &= [(1-\omega)\mathbf{D}-\omega\mathbf{U}]\cdot\mathbf{x}+\omega\mathbf{b} \\
\mathbf{x} &= (\mathbf{D}+\omega\mathbf{L})^{-1}[(1-\omega)\mathbf{D}-\omega\mathbf{U}]\cdot\mathbf{x}+\omega(\mathbf{D}+\omega\mathbf{L})^{-1}\mathbf{b}
\end{aligned}
$$

A fixpontegyenletből felírhatjuk az iteráció képletét.

$$
\mathbf{x_{k+1}} = \underbrace{(\mathbf{D}+\omega\mathbf{L})^{-1}[(1-\omega)\mathbf{D}-\omega\mathbf{U}]}_{\mathbf{B}_{S(\omega)}}\cdot\mathbf{x_k} + \underbrace{\omega(\mathbf{D}+\omega\mathbf{L})^{-1}\mathbf{b}}_{\mathbf{c}_{S(\omega)}}
$$

Írjuk fel a konkrét **A**-ra a relaxációs módszer átmenetmátrixát!

$$
\begin{aligned}
\mathbf{B}_{S(\omega)} &= (\mathbf{D}+\omega\mathbf{L})^{-1}[(1-\omega)\mathbf{D}-\omega\mathbf{U}] = \\
&= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ \omega & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \left(\begin{bmatrix} 2(1-\omega) & 0 \\ 0 & 1-\omega \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -2\omega \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) = \\
&= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2}\omega & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2(1-\omega) & 2\omega \\ 0 & 1-\omega \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} 1-\omega & \omega \\ -\omega(1-\omega) & -\omega^2+1-\omega \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

$\omega = 1$ esetén a Gauss–Seidel-iteráció átmenetmátrixa

$$
\mathbf{B}_{S(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.
$$

Mivel a mátrix sajátértékei: 0 és -1, ezért $\rho(\mathbf{B}_{S(1)}) = 1$, így a Gauss–Seidel iteráció általában nem konvergál. Keressünk olyan ω paramétert, melyre a módszer konvergál!
Például $\omega = \frac{1}{2}$ esetén

$$
\mathbf{B}_{S(\frac{1}{2})} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}.
$$

Látjuk, hogy $\|\mathbf{B}_{S(\frac{1}{2})}\|_1 = \frac{3}{4}$, így a módszer konvergens minden kezdővektorra.

17. A relaxációs módszer néhány lépésének számolásához nincs szükségünk az átmenetmátrixra, helyette a módszer koordinátás alakját használjuk. Ennek előnye, hogy nem kell mátrix inverzet számolni hozzá. A koordinátánkénti számoláshoz alakítsuk át a formulát.
$(\mathbf{D}+\omega\mathbf{L})$-el szorozzuk be az iterációt.

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{D}+\omega\mathbf{L})\cdot\mathbf{x_{k+1}} &= [(1-\omega)\mathbf{D}-\omega\mathbf{U}]\cdot\mathbf{x_k}+\omega\mathbf{b} \\
\mathbf{D}\cdot\mathbf{x_{k+1}} &= -\omega\mathbf{L}\cdot\mathbf{x_{k+1}}-\omega\mathbf{U}\cdot\mathbf{x_k}+\omega\mathbf{b}+(1-\omega)\mathbf{D}\cdot\mathbf{x_k} \\
\mathbf{x_{k+1}} &= \underbrace{-\omega\mathbf{D^{-1}}\cdot[\,\mathbf{L}\cdot\mathbf{x_{k+1}}+\mathbf{U}\cdot\mathbf{x_k}-\mathbf{b}\,]}_{\omega\mathbf{x_{k+1}}^{S(1)}}+(1-\omega)\mathbf{x_k}
\end{aligned}
$$

Mint látható a képlet felírható a Gauss–Seidel-iteráció $k+1$. lépésével és a k. közelítő vektor segítségével. Írjuk fel a koordinátás alakot is (a koordináták alsó indexbe, a lépés száma felső indexbe kerül).

$$
x_i^{(k+1)} = -\frac{\omega}{a_{ii}} \left(\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} + \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)} - b_i \right) + (1-\omega)x_i^{(k)}, \quad i = 1,\dots,n.
$$

A kapott alakból könnyen számolható az iteráció egy lépése. Azt is észrevehetjük, hogy a képletben $\omega = 1$ választással visszakapjuk a Gauss–Seidel-iteráció képletét.
2×2-es mátrix esetén az k. lépés alakja

$$\begin{aligned}
x_1^{(k+1)} &= -\frac{\omega}{a_{11}} \cdot \left(a_{12} \cdot x_2^{(k)} - b_1\right) + (1-\omega)x_1^{(k)} \\
x_2^{(k+1)} &= -\frac{\omega}{a_{22}} \cdot \left(a_{21} \cdot x_1^{(k+1)} - b_2\right) + (1-\omega)x_2^{(k)}
\end{aligned}$$

Alkalmazzuk $\omega = \frac{1}{2}$ esetén a konkrét iteráció két lépését!
1. lépés:

$$\begin{aligned}
x_1^{(1)} &= -\frac{\omega}{4} \cdot \left(x_2^{(0)} - 3\right) + (1-\omega)x_1^{(0)} = \left(-\frac{1}{8}\right) \cdot (-3) = \frac{3}{8} \\
x_2^{(1)} &= -\frac{\omega}{4} \cdot \left(x_1^{(1)} - (-3)\right) + (1-\omega)x_2^{(0)} = \left(-\frac{1}{8}\right)\left(\frac{3}{8} + 3\right) = -\frac{27}{64}
\end{aligned}$$

2. lépés:

$$\begin{aligned}
x_1^{(2)} &= -\frac{\omega}{4} \cdot \left(x_2^{(1)} - 3\right) + (1-\omega)x_1^{(1)} = \\
&= \left(-\frac{1}{8}\right) \cdot \left(-\frac{27}{64} - 3\right) + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{8}\right) = \frac{219}{512} + \frac{3}{16} = \frac{315}{512} \\
x_2^{(2)} &= -\frac{\omega}{4} \cdot \left(x_1^{(2)} - (-3)\right) + (1-\omega)x_2^{(1)} = \\
&= \left(-\frac{1}{8}\right)\left(\frac{315}{512} + 3\right) + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{27}{64}\right) = -\frac{1851}{4096} - \frac{27}{128} = -\frac{2715}{4096}
\end{aligned}$$

Ahhoz, hogy konvergenciát bizonyítsunk valamely paraméter esetén, használhatjuk a tanult konvergenciatételeket.

1. Tétel: Ha a relaxációs módszer konvergens, akkor $\omega \in (0;2)$.
Ez azt jelenti, hogy az $\omega \leq 0$ és $2 \leq \omega$ paraméterekkel nem kell foglalkoznunk konvergencia vizsgálat esetén.

2. Tétel: Ha az $\mathbf{A}$ mátrix szimmetrikus, pozitív definit és $\omega \in (0;2)$, akkor a relaxációs módszer bármely kezdővektorra konvergens.

A feladatban megadott mátrixra a 2. Tétel feltételei teljesülnek, ezért $\omega \in (0;2)$ esetén a relaxációs módszer konvergens. Írjuk fel a konkrét $\mathbf{A}$-ra a relaxációs módszer átmenetmátrixát!

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}_{S(\omega)} &= (\mathbf{D} + \omega\mathbf{L})^{-1}[(1-\omega)\mathbf{D} - \omega\mathbf{U}] = \\
&= \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ \omega & 4 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \left(\begin{bmatrix} 4(1-\omega) & 0 \\ 0 & 4(1-\omega) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & \omega \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \\
&= \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{16}\omega & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4(1-\omega) & \omega \\ 0 & 4(1-\omega) \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} 1-\omega & -\frac{1}{4}\omega \\ -\frac{1}{4}\omega(1-\omega) & \frac{1}{16}\omega^2 + 1 - \omega \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

A Maple V program segítségével megkaphatjuk a mátrix sajátértékeit, amelyből a spektrálsugár számolható.

$$\lambda_{1,2}(\omega) = 1 - \omega + \frac{1}{32}\omega^2 \pm \frac{1}{32}\omega\sqrt{\omega^2 - 64\omega + 64}$$

Mivel ezek nagyon bonyolultak, ezért más megoldást választunk ω keresésére.
$\omega = 1$ esetén a Gauss–Seidel-iteráció átmenetmátrixa

$$\mathbf{B}_{S(1)} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{16} \end{bmatrix}.$$

Mivel a mátrix sajátértékei: 0 és $\frac{1}{16}$, ezért $\rho(\mathbf{B}_{S(1)}) = \frac{1}{16}$, így a Gauss–Seidel iteráció konvergál minden kezdővektorra. Keressünk olyan ω paramétert, melyre a módszer gyorsabb! A spektrálsugár alapján számolni komplikált lenne, helyette mátrixnormával dolgozunk.
$\|\mathbf{B}_{S(1)}\|_1 = \frac{5}{16} = 0,3125$, ezért olyan paramétert keresünk, melyre az átmenetmátrix 1-es normája ennél kisebb. Például $\omega = 1,01$ esetén

$$\mathbf{B}_{S(1,01)} = \begin{bmatrix} -0,01 & -0,2525 \\ 0,002525 & 0,05375625 \end{bmatrix}.$$

Látjuk, hogy $\|\mathbf{B}_{S(1,01)}\|_1 = |-0,2525| + 0,05375625 = 0,30625625$, így az 1-es normában számolt kontrakciós együttható kisebb, mint $\omega = 1$ esetén. Ebben a vektornormában jobb becslés adható a módszerre.

18. Írjuk fel a koordinátás alakot, mellyel az iterációt végezzük.

$$x_i^{(k+1)} = -\frac{\omega}{a_{ii}} \left(\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} + \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} - b_i \right) + (1-\omega) x_i^{(k)}, \quad i = 1, \ldots, n$$

3×3-as mátrix esetén az k. lépés alakja

$$\begin{aligned}
x_1^{(k+1)} &= -\frac{\omega}{a_{11}} \cdot \left(a_{12} \cdot x_2^{(k)} + a_{13} \cdot x_3^{(k)} - b_1 \right) + (1-\omega) x_1^{(k)} \\
x_2^{(k+1)} &= -\frac{\omega}{a_{22}} \cdot \left(a_{21} \cdot x_1^{(k+1)} + a_{23} \cdot x_3^{(k)} - b_2 \right) + (1-\omega) x_2^{(k)} \\
x_2^{(k+1)} &= -\frac{\omega}{a_{33}} \cdot \left(a_{31} \cdot x_1^{(k+1)} + a_{32} \cdot x_2^{(k+1)} - b_3 \right) + (1-\omega) x_3^{(k)}
\end{aligned}$$

Alkalmazzuk $\omega = \frac{1}{2}$ esetén a konkrét iteráció két lépését az $\mathbf{x_0} = \mathbf{0}$ kezdővektorral!
1. lépés:

$$\begin{aligned}
x_1^{(1)} &= -\frac{\omega}{4} \cdot \left(-x_2^{(0)} - 2 \right) + (1-\omega) x_1^{(0)} = \left(-\frac{1}{8} \right) \cdot (-2) = \frac{1}{4} \\
x_2^{(1)} &= -\frac{\omega}{4} \cdot \left(-x_1^{(1)} - x_3^{(0)} - 6 \right) + (1-\omega) x_2^{(0)} = \left(-\frac{1}{8} \right) \left(-\frac{1}{4} - 6 \right) = \frac{25}{32} \\
x_3^{(1)} &= -\frac{\omega}{4} \cdot \left(-x_2^{(1)} - 2 \right) + (1-\omega) x_3^{(0)} = \left(-\frac{1}{8} \right) \left(\frac{25}{32} - 2 \right) = \frac{39}{256}
\end{aligned}$$

2. lépés:

$$\begin{aligned}
x_1^{(2)} &= -\frac{\omega}{4} \cdot \left(-x_2^{(1)} - 2 \right) + (1-\omega) x_1^{(1)} = \\
&= \left(-\frac{1}{8} \right) \cdot \left(-\frac{1}{4} - 2 \right) + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{4} \right) = \frac{9}{32} + \frac{1}{8} = \frac{13}{32} \\
x_2^{(2)} &= -\frac{\omega}{4} \cdot \left(-x_1^{(2)} - 6 \right) + (1-\omega) x_2^{(1)} = \\
&= \left(-\frac{1}{8} \right) \left(\frac{13}{32} - 6 \right) + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{25}{32} \right) = \frac{179}{256} + \frac{25}{64} = \frac{279}{256} \\
x_3^{(2)} &= -\frac{\omega}{4} \cdot \left(-x_2^{(2)} - 2 \right) + (1-\omega) x_3^{(1)} = \\
&= \left(-\frac{1}{8} \right) \left(\frac{279}{256} - 2 \right) + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{39}{256} \right) = \frac{233}{2048} + \frac{39}{512} = \frac{389}{2048}
\end{aligned}$$

A feladatban megadott mátrixra a 2. Tétel feltételei teljesülnek, ezért $\omega \in (0;2)$ esetén a relaxációs módszer konvergens. Nézzük a speciálisan tridiagonális mátrixokra igaz konvergenciatételt!

3. Tétel: Ha az $\mathbf{A}$ mátrix szimmetrikus, pozitív definit és tridiaginális, akkor a Jacobi-iteráció, a Gauss–Seidel-iteráció és a relaxációs módszer $\omega \in (0;2)$ esetén bármely kezdővektorra konvergens. Az optimális paraméter

$$\omega_{opt} = \frac{2}{1+\sqrt{1-\rho(\mathbf{B}_{J(1)})}} \in (0;2)$$

Az optimális paraméterre az optimális spektrálsugár értéke

$$\rho(\mathbf{B}_{S(\omega_{opt})}) = \omega_{opt} - 1 < \rho(\mathbf{B}_{S(1)}) = \rho(\mathbf{B}_{J(1)})^2, \quad \text{ha } \rho(\mathbf{B}_{J(1)}) > 0.$$

Ha $\rho(\mathbf{B}_{J(1)}) = 0$, akkor

$$\rho(\mathbf{B}_{S(\omega_{opt})}) = \rho(\mathbf{B}_{S(1)}) = \rho(\mathbf{B}_{J(1)}) = 0.$$

Számítsuk ki a Jacobi-iteráció átmenetmátrixát, hogy alkalmazni tudjuk a tételt!

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}_{J(1)} &= -\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L}+\mathbf{U}) = \\
&= -\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

A karakterisztikus polinomja

$$\begin{aligned}
\det(\mathbf{B}_{J(1)} - \lambda\mathbf{I}) &= \begin{vmatrix} -\lambda & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & -\lambda & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & -\lambda \end{vmatrix} = \\
&= -\lambda \cdot (\lambda^2 - \frac{1}{16}) - \frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{1}{4}\lambda\right) = \\
&= -\lambda^3 + \frac{1}{8}\lambda = 0 \quad \Rightarrow \boxed{\lambda_1 = 0} \\
&\Rightarrow -\lambda^2 + \frac{1}{8} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 = \frac{1}{8} \\
&\Rightarrow \boxed{\lambda_2 = \frac{1}{\sqrt{8}}}, \quad \boxed{\lambda_3 = -\frac{1}{\sqrt{8}}}
\end{aligned}$$

Most már tudjuk az átmenetmátrix spektrálsugarát.

$$\rho(\mathbf{B}_{J(1)}) = \max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, |\lambda_3|\} = \frac{1}{\sqrt{8}}$$

A 3. Tétel képletébe helyettesítve

$$\begin{aligned}
\omega_{opt} &= \frac{2}{1+\sqrt{1-\frac{1}{8}}} = \frac{8}{4+\sqrt{14}} \approx 1,0334 \\
\rho(\mathbf{B}_{S(\omega_{opt})}) &= \omega_{opt} - 1 \approx 0,0334.
\end{aligned}$$

19. A feladatban megadott mátrixra a 2. Tétel feltételei teljesülnek, ezért $\omega \in (0;2)$ esetén a relaxációs módszer konvergens. Sőt a 3. Tétel feltételei is teljesülnek. Alkalmazzuk rá ez utóbbit. Számítsuk ki a Jacobi-iteráció átmenetmátrixát!

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}_{J(1)} &= -\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L}+\mathbf{U}) = \\
&= -\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

A karakterisztikus polinomja

$$\begin{aligned}
\det(\mathbf{B}_{J(1)} - \lambda\mathbf{I}) &= \begin{vmatrix} -\lambda & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\lambda & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\lambda \end{vmatrix} = \\
&= -\lambda \cdot (\lambda^2 - \frac{1}{4}) - \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\lambda\right) = \\
&= -\lambda^3 + \frac{1}{4}\lambda = 0 \quad \Rightarrow \boxed{\lambda_1 = 0} \\
&\Rightarrow -\lambda^2 + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 = \frac{1}{2} \\
&\Rightarrow \boxed{\lambda_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}}, \quad \boxed{\lambda_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}}}
\end{aligned}$$

Most már tudjuk az átmenetmátrix spektrálsugarát.

$$\rho(\mathbf{B}_{J(1)}) = \max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, |\lambda_3|\} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

A 3. Tétel képletébe helyettesítve

$$\begin{aligned}
\omega_{opt} &= \frac{2}{1+\sqrt{1-\frac{1}{2}}} = \frac{4}{2+\sqrt{2}} \approx 1,1716 \\
\rho(\mathbf{B}_{S(\omega_{opt})}) &= \omega_{opt} - 1 \approx 0,1716.
\end{aligned}$$

4.2.5. Richardson-iteráció

20. A feladatunk, hogy megállapítsuk konvergens lesz-e a Richardson-iteráció. Ehhez kétféle megoldási módszert használhatunk.

1. módszer:
Hivatkozunk a Richardson-iteráció tanult konvergencia tételére, mely szerint szimmetrikus és pozitív definit $\mathbf{A}$ mátrixra $p \in \left(0, \frac{2}{\rho(\mathbf{A})}\right)$ paraméter esetén az

$$\mathbf{x_{k+1}} = (\mathbf{I} - p \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{x_k} + p \cdot \mathbf{b}$$

iteráció bármely kezdővektorra konvergens.
Felhasználva, hogy $0 < \rho(\mathbf{A}) < c$, fel tudjuk írni a következő egyenlőtlenséget.

$$0 < \rho(\mathbf{A}) < c \quad \Rightarrow \quad 0 < p = \frac{2}{c} < \frac{2}{\rho(\mathbf{A})} \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{c} \in \left(0, \frac{2}{\rho(\mathbf{A})}\right)$$

Ezzel beláttuk, hogy a Richardson-iteráció konvergens lesz $\forall\ \mathbf{x_0}$-ra!

2. módszer:
A szükséges és elégséges feltételt is használhatjuk, azaz vizsgálhatjuk konkrétan az átmenetmátrix spektrálsugarát, $\rho(\mathbf{B}) < 1$ teljesülését.

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{0} = -\frac{2}{c}\mathbf{A}\cdot\mathbf{x} + \frac{2}{c}\,\mathbf{b} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{x} = \left(\mathbf{I} - \frac{2}{c}\mathbf{A}\right)\cdot\mathbf{x} + \frac{2}{c}\,\mathbf{b}$$

Írjuk fel a fixpontegyenletből a Richardson-iterációt!

$$\mathbf{x_{k+1}} = \left(\mathbf{I} - \frac{2}{c}\mathbf{A}\right)\cdot\mathbf{x_k} + \frac{2}{c}\,\mathbf{b}$$

Látjuk, hogy az átmenetmátrix $\mathbf{B} = \left(\mathbf{I} - \frac{2}{c}\mathbf{A}\right)$.
Írjuk fel a kapcsolatot $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ sajátértékei között! Sejtés: $\lambda_i(\mathbf{B}) = 1 - \frac{2}{c}\lambda_i$.
Ezt könnyen beláthatjuk az $\mathbf{A}$ mátrixra felírt sajátérték egyenletből.

$$\begin{aligned}
\mathbf{Av}_i &= \lambda_i\mathbf{v}_i \\
-\frac{2}{c}\mathbf{Av}_i &= -\frac{2}{c}\lambda_i\mathbf{v}_i \\
\mathbf{v}_i - \frac{2}{c}\mathbf{Av}_i &= \mathbf{v}_i - \frac{2}{c}\lambda_i\mathbf{v}_i \\
\underbrace{\left(\mathbf{I} - \frac{2}{c}\mathbf{A}\right)}_{\mathbf{B}}\mathbf{v}_i &= \left(1 - \frac{2}{c}\lambda_i\right)\mathbf{v}_i
\end{aligned}$$

Vizsgáljuk meg, hogy az $\mathbf{A}$ sajátértékeire felírt feltétel mit ad $\mathbf{B}$ sajátértékeire.

$$\begin{aligned}
0 < \lambda_i < c& \\
0 < \frac{2}{c}\lambda_i < 2& \\
-1 < \frac{2}{c}\lambda_i - 1 < 1& \\
-1 < 1 - \frac{2}{c}\lambda_i < 1& \quad \Rightarrow \quad \left|1 - \frac{2}{c}\lambda_i\right| < 1
\end{aligned}$$

Ezzel tehát beláttuk, hogy $\rho(\mathbf{B}) < 1$ teljesül, azaz a Richardson-iteráció bármely kezdővektorra konvergens lesz!

21. Legyen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

A Gersgorin tételből tudjuk, hogy $\mathbf{A}$ pozitív definit és sajátértékeire a $2 \le \lambda_i \le 6$ becslés adható. Azonban a Gersgorin tétel ismerete nélkül a sajátértékek előállításával is megoldható a feladat.

$$\begin{aligned}
\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) &= \begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 4-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \\
&= (4-\lambda)((4-\lambda)^2 - 1) + (-1)\cdot(4-\lambda) = \\
&= (4-\lambda)((4-\lambda)^2 - 2) = (4-\lambda)(4-\lambda-\sqrt{2})(4-\lambda+\sqrt{2}) = 0
\end{aligned}$$

Innen a sajátértékek:

$$\lambda_1 = 4, \quad \lambda_2 = 4 - \sqrt{2}, \quad \lambda_3 = 4 + \sqrt{2}.$$

Látjuk hogy a feladat kitűzésében szereplő $\rho(\mathbf{A}) < 6$ korlát helyes.
Alkalmazzuk az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ lineáris egyenletrendszerre a 30. példában szereplő Richardson-iterációt.

$$\mathbf{x_{k+1}} = \left(\mathbf{I} - \frac{2}{6}\mathbf{A}\right) \cdot \mathbf{x_k} + \frac{2}{6}\,\mathbf{b} = \underbrace{\left(\mathbf{I} - \frac{1}{3}\mathbf{A}\right)}_{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{x_k} + \underbrace{\frac{1}{3}\,\mathbf{b}}_{\mathbf{c}}$$

Látjuk, hogy a $p = \frac{1}{3}$ paramétert kell alkalmaznunk a Richardson-iterációban. A 30. feladat megoldásában bizonyítottuk a módszer konvergenciáját bármely kezdőértékre. Számítsuk ki az iteráció $\mathbf{B}$ átmenetmátrixát és $\mathbf{c}$ vektorát.

$$\begin{aligned}
\mathbf{B} &= \mathbf{I} - \frac{1}{3}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} = \\
&= \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \\
\mathbf{c} &= \frac{1}{3}\,\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{2}{3} \\ 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Végezzünk két lépést az iterációval az $\mathbf{x_0} = \mathbf{0}$ vektorból indulva!

1. lépés:

$$\mathbf{x_1} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{x_0} + \mathbf{c} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{0} + \mathbf{c} = \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{2}{3} \\ 1 \end{bmatrix}$$

2. lépés:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x_2} &= \mathbf{B} \cdot \mathbf{x_1} + \mathbf{c} = \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{2}{3} \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{2}{3} \\ 1 \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} -\frac{1}{9} \\ \frac{4}{9} \\ -\frac{1}{9} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{2}{3} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{8}{9} \\ \frac{10}{9} \\ \frac{8}{9} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

A k. közelítő vektorra adott hibabecslés alakja

$$\|\mathbf{x_k} - \mathbf{x}^*\|_2 \le \frac{q^k}{1-q}\,\|\mathbf{x_1} - \mathbf{x_0}\|_2,$$

ahol $q = \|\mathbf{B}\|_F = \frac{\sqrt{7}}{3} \approx 0,88 < 1$ a kontrakciós együttható és

$$\|\mathbf{x_1} - \mathbf{x_0}\|_2 = \|\mathbf{x_1}\|_2 = \sqrt{\frac{10}{3}}.$$

Mivel a könnyen számolható mátrixnormák közül csak a *Frobenius*-norma egynél kisebb, így a hibabecslést a hozzá illeszkedő 2-es vektornormában kell felírnunk. Az iteráció hibabecslése

$$\|\mathbf{x_k} - \mathbf{x}^*\|_2 \le \frac{\left(\frac{\sqrt{7}}{3}\right)^k}{1 - \frac{\sqrt{7}}{3}} \cdot \sqrt{\frac{10}{3}} \approx (0,88)^k \cdot 15,46.$$

22. El kell döntenünk, hogy konvergens lesz-e a Richardson-iteráció. Ehhez kétféle megoldási módszert használhatunk.

1. módszer:
Hivatkozunk a Richardson-iteráció tanult konvergencia tételére, mely szerint szimmetrikus és pozitív definit $\mathbf{A}$ mátrixra $p \in \left(0, \frac{2}{\rho(\mathbf{A})}\right)$ paraméter esetén az

$$\mathbf{x_{k+1}} = (\mathbf{I} - p \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{x_k} + p \cdot \mathbf{b}$$

iteráció bármely kezdővektorra konvergens.
Felhasználva, hogy $0 < \rho(\mathbf{A}) < c$, fel tudjuk írni a következő egyenlőtlenséget.

$$0 < \rho(\mathbf{A}) < c < \frac{9}{7} c$$

$$p = \frac{7}{9c} < \frac{1}{\rho(\mathbf{A})} < \frac{2}{\rho(\mathbf{A})} \quad \Rightarrow \quad p = \frac{7}{9c} \in \left(0, \frac{2}{\rho(\mathbf{A})}\right)$$

Ezzel beláttuk, hogy a Richardson-iteráció konvergens lesz $\forall\ \mathbf{x_0}$-ra!

2. módszer:
A szükséges és elégséges feltételt is használhatjuk, azaz vizsgálhatjuk konkrétan az átmenetmátrix spektrálsugarát, $\rho(\mathbf{B}) < 1$ teljesülését.

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{0} = -\frac{7}{9c}\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \frac{7}{9c}\mathbf{b} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{x} = \left(\mathbf{I} - \frac{7}{9c}\mathbf{A}\right) \cdot \mathbf{x} + \frac{7}{9c}\mathbf{b}$$

Írjuk fel a fixpontegyenletből a Richardson-iterációt!

$$\mathbf{x_{k+1}} = \left(\mathbf{I} - \frac{7}{9c}\mathbf{A}\right) \cdot \mathbf{x_k} + \frac{7}{9c}\mathbf{b}$$

Látjuk, hogy az átmenetmátrix $\mathbf{B} = \left(\mathbf{I} - \frac{7}{9c}\mathbf{A}\right)$.
Írjuk fel a kapcsolatot $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ sajátértékei között! Sejtés: $\lambda_i(\mathbf{B}) = 1 - \frac{7}{9c}\lambda_i$.
Ezt könnyen beláthatjuk az $\mathbf{A}$ mátrixra felírt sajátérték egyenletből.

$$\begin{aligned}
\mathbf{Av}_i &= \lambda_i \mathbf{v}_i \\
-\frac{7}{9c}\mathbf{Av}_i &= -\frac{7}{9c}\lambda_i \mathbf{v}_i \\
\mathbf{v}_i - \frac{7}{9c}\mathbf{Av}_i &= \mathbf{v}_i - \frac{7}{9c}\lambda_i \mathbf{v}_i \\
\underbrace{\left(\mathbf{I} - \frac{7}{9c}\mathbf{A}\right)}_{\mathbf{B}} \mathbf{v}_i &= \left(1 - \frac{7}{9c}\lambda_i\right) \mathbf{v}_i
\end{aligned}$$

Vizsgáljuk meg, hogy az $\mathbf{A}$ sajátértékeire felírt feltétel mit ad $\mathbf{B}$ sajátértékeire.

$$\begin{gathered}
0 < \lambda_i < c \\
0 < \frac{7}{9c}\lambda_i < \frac{7}{9c} \cdot c = \frac{7}{9} < 1 \\
-1 < \frac{7}{9c}\lambda_i - 1 < 0 \\
0 < 1 - \frac{7}{9c}\lambda_i < 1 \quad \Rightarrow \quad \left|1 - \frac{7}{9c}\lambda_i\right| < 1
\end{gathered}$$

Ezzel tehát beláttuk, hogy $\rho(\mathbf{B}) < 1$ teljesül, azaz a Richardson-iteráció bármely kezdővektorra konvergens lesz!

23. Be kell bizonyítanununk, hogy konvergens lesz a Richardson-iteráció. Ezt kétféle módszerrel is beláthatjuk.
1. módszer:
Hivatkozunk a Richardson-iteráció tanult konvergencia tételére, mely szerint szimmetrikus és pozitív definit $\mathbf{A}$ mátrixra $p \in \left(0, \frac{2}{\rho(\mathbf{A})}\right)$ paraméter esetén az

$$\mathbf{x_{k+1}} = (\mathbf{I} - p \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{x_k} + p \cdot \mathbf{b}$$

iteráció bármely kezdővektorra konvergens.
Felhasználva, hogy $0 < \rho(\mathbf{A}) < c$, fel tudjuk írni a következő egyenlőtlenséget.

$$\begin{aligned} 0 < \rho(\mathbf{A}) < c \\ 0 < \frac{c}{2} < \frac{\rho(\mathbf{A})}{2} \\ \frac{1}{5c} < \frac{1}{c} < \frac{2}{c} < \frac{2}{\rho(\mathbf{A})} \quad \Rightarrow \quad p = \frac{1}{5c} \in \left(0, \frac{2}{\rho(\mathbf{A})}\right) \end{aligned}$$

Mivel teljesül, hogy $p = \frac{1}{5c} \in \left(0, \frac{2}{\rho(\mathbf{A})}\right)$, ezért a Richardson-iteráció konvergens lesz $\forall\ \mathbf{x}_0$-ra!

2. módszer:
A szükséges és elégséges feltételt is használhatjuk, azaz vizsgálhatjuk konkrétan az átmenetmátrix spektrálsugarát, $\rho(\mathbf{B}) < 1$ teljesülését.

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{0} = -\frac{7}{3c}\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \frac{7}{3c}\,\mathbf{b} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{x} = \left(\mathbf{I} - \frac{7}{3c}\mathbf{A}\right) \cdot \mathbf{x} + \frac{7}{3c}\,\mathbf{b}$$

Írjuk fel a fixpontegyenletből a Richardson-iterációt!

$$\mathbf{x_{k+1}} = \left(\mathbf{I} - \frac{1}{5c}\mathbf{A}\right) \cdot \mathbf{x_k} + \frac{1}{5c}\,\mathbf{b}$$

Látjuk, hogy az átmenetmátrix $\mathbf{B} = \left(\mathbf{I} - \frac{1}{5c}\mathbf{A}\right)$.
Írjuk fel a kapcsolatot $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ sajátértékei között! Sejtés: $\lambda_i(\mathbf{B}) = 1 - \frac{1}{5c}\lambda_i$.
Ezt könnyen beláthatjuk az $\mathbf{A}$ mátrixra felírt sajátérték egyenletből.

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{v}_i &= \lambda_i \mathbf{v}_i \\ -\frac{1}{5c}\mathbf{A}\mathbf{v}_i &= -\frac{1}{5c}\lambda_i \mathbf{v}_i \\ \mathbf{v}_i - \frac{1}{5c}\mathbf{A}\mathbf{v}_i &= \mathbf{v}_i - \frac{1}{5c}\lambda_i \mathbf{v}_i \\ \underbrace{\left(\mathbf{I} - \frac{1}{5c}\mathbf{A}\right)}_{\mathbf{B}}\mathbf{v}_i &= \left(1 - \frac{1}{5c}\lambda_i\right)\mathbf{v}_i \end{aligned}$$

Vizsgáljuk meg, hogy az $\mathbf{A}$ sajátértékeire felírt feltétel mit ad $\mathbf{B}$ sajátértékeire.

$$\begin{aligned} 0 < \lambda_i < c \\ 0 < \frac{1}{5c}\lambda_i < \frac{1}{5c} \cdot c = \frac{1}{5} < 1 \\ -1 < \frac{1}{5c}\lambda_i - 1 < 0 \\ 0 < 1 - \frac{1}{5c}\lambda_i < 1 \quad \Rightarrow \quad \left|1 - \frac{1}{5c}\lambda_i\right| < 1 \end{aligned}$$

Ezzel tehát beláttuk, hogy $\rho(\mathbf{B}) < 1$ teljesül, azaz a Richardson-iteráció bármely kezdővektorra konvergens lesz!

24. Hivatkozunk a Richardson-iteráció tanult konvergencia tételére. Legyenek

$$0 < m := \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_n =: M$$

az **A** mátrix sajátértékei. A tétel szerint szimmetrikus és pozitív definit **A** mátrixra az

$$\mathbf{x_{k+1}} = (\mathbf{I} - p \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{x_k} + p \cdot \mathbf{b}$$

iteráció pontosan a $p \in \left(0, \frac{2}{M}\right)$ paraméterek esetén konvergens bármely kezdővektorra.
A módszer optimális paramétere, melyre a leggyorsabb a konvergencia $p_{opt} = \frac{2}{M+m}$.
Az átmenetmátrix spektrálsugara $\varrho(\mathbf{B}_{p_{opt}}) = \frac{M-m}{M+m}$.

Látjuk, hogy a feladat megoldásához az **A** mátrix sajátértékeit ismernünk kell.
Írjuk fel az **A** karakterisztikus polinomját!

$$\begin{aligned}
\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) &= \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 4-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \\
&= (4-\lambda)((4-\lambda)^2 - 1) + (-1) \cdot (4-\lambda) = \\
&= (4-\lambda)((4-\lambda)^2 - 2) = (4-\lambda)(4-\lambda-\sqrt{2})(4-\lambda+\sqrt{2}) = 0
\end{aligned}$$

Innen a sajátértékek:

$$\lambda_1 = 4, \quad \lambda_2 = 4 - \sqrt{2}, \quad \lambda_3 = 4 + \sqrt{2}.$$

A tételben szereplő jelöléseket használva

$$m = 4 - \sqrt{2}, \quad M = 4 + \sqrt{2}.$$

Tehát az iteráció a $p \in (0; \frac{2}{4+\sqrt{2}})$ paraméterek esetén konvergens bármely kezdővektorra és

$$p_{opt} = \frac{2}{M+m} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

az optimális paraméter. Ekkor az átmenetmátrix spektrálsugara

$$\varrho(\mathbf{B}_{p_{opt}}) = \frac{M-m}{M+m} = \frac{2\sqrt{2}}{8} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

25. Hivatkozunk a Richardson-iteráció tanult konvergencia tételére. Legyenek

$$0 < m = \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_n = M$$

az **A** mátrix sajátértékei. A tétel szerint szimmetrikus és pozitív definit **A** mátrixra az

$$\mathbf{x_{k+1}} = (\mathbf{I} - p \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{x_k} + p \cdot \mathbf{b}$$

iteráció pontosan a $p \in \left(0, \frac{2}{M}\right)$ paraméterek esetén konvergens bármely kezdővektorra.
A módszer optimális paramétere, melyre a leggyorsabb a konvergencia $p_{opt} = \frac{2}{M+m}$.
Látjuk, hogy a feladat megoldásához az **A** mátrix sajátértékeit ismernünk kell.
Írjuk fel az **A** karakterisztikus polinomját!

$$\begin{aligned}
\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \\
&= (2-\lambda)^2 - 1) = (2-\lambda-1)(2-\lambda+1) = (1-\lambda)(3-\lambda) = 0
\end{aligned}$$

Innen a sajátértékek a tételben szereplő jelöléseket használva

$$\lambda_1 = 1 = m, \quad \lambda_2 = 3 = M.$$

Tehát az iteráció a $p \in (0; \frac{2}{3})$ paraméterek esetén konvergens bármely kezdővektorra és

$$p_{opt} = \frac{2}{M+m} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

az optimális paraméter. Ekkor az átmenetmátrix spektrálsugara

$$\varrho(\mathbf{B}_{p_{opt}}) = \frac{M-m}{M+m} = \frac{3-1}{3+1} = \frac{1}{2}.$$

4.2.6. ILU-algoritmus

26. Írjuk fel először az ILU-algoritmus konstrukcióját.

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \quad \Leftrightarrow \quad (\mathbf{P} - \mathbf{Q})\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{Px} = \mathbf{Qx} + \mathbf{b} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{x} = \mathbf{P^{-1}Qx} + \mathbf{P^{-1}b}$$

A fixpontegyenletből az iteráció alakja

$$\mathbf{x_{k+1}} = \underbrace{\mathbf{P}^{-1}\mathbf{Q}}_{\textit{átmenetmátrix}} \mathbf{x_k} + \underbrace{\mathbf{P}^{-1}\mathbf{b}}_{\mathbf{c}}.$$

A feladat megoldásához először ki kell számolnunk az átmenetmátrixot.

$$\begin{aligned}
\mathbf{B} &= \mathbf{P^{-1}Q} = \\
&= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 8 & 4 & 0 \\ -12 & -8 & -2 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -1 & \frac{1}{4} & 0 \\ 1 & -1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Mint látható, a mátrixban kis elemek találhatók, ezért a konvergencia vizsgálatához alkalmazható az elégséges feltétel.

$$\|\mathbf{B}\|_\infty = \frac{2}{3} < 1$$

A kapott eredmény egynél kisebb, tehát teljesül a konvergencia bármely kezdőértékre. Az első 2 lépés kiszámolásához, alkalmas $\mathbf{x_0}$-t kell választanunk. Mivel bármilyen $\mathbf{x_0}$ jó, ezért a legegyszerűbb az $\mathbf{x_0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T = \mathbf{0}$ vektort választani. Végezzük el az iteráció első két lépését!

1. lépés:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x_1} &= \mathbf{P}^{-1}\mathbf{Q} \cdot \mathbf{x_0} + \mathbf{P}^{-1}\mathbf{b} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{0} + \mathbf{c} = \mathbf{c} = \\
&= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -1 & \frac{1}{4} & 0 \\ 1 & -1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

2. lépés:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x_2} &= \mathbf{P}^{-1}\mathbf{Q}\cdot\mathbf{x_1}+\mathbf{P}^{-1}\mathbf{b}=\mathbf{B}\cdot\mathbf{x_1}+\mathbf{c}= \\
&= \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{7}{12} \\ -\frac{7}{6} \\ \frac{7}{6} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Számoljuk a lépésszámot a 10^{-3} pontosság eléréséhez.
($q=\frac{2}{3}$ megegyezik a $\mathbf{B}$ mátrix $\|.\|_\infty$ normájával.)

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{x_k}-\mathbf{x}^*\|_\infty = \frac{q^k}{1-q}\|\mathbf{x_1}-\mathbf{x_0}\|_\infty &\leq 10^{-3} \\
\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^k}{1-\frac{2}{3}}\cdot\left\|\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right\|_\infty &\leq 10^{-3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{2}{3}\right)^k\cdot\frac{1}{\frac{1}{3}}=\left(\frac{2}{3}\right)^k\cdot 3 &\leq 10^{-3} \\
3\cdot 10^3 &\leq \left(\frac{3}{2}\right)^k \\
\lg\left(3\cdot 10^3\right) &\leq k\cdot\lg\left(\frac{3}{2}\right) \\
\frac{\lg\left(3\cdot 10^3\right)}{\lg\left(\frac{3}{2}\right)}\approx 19,75 &\leq k
\end{aligned}$$

Mint látható $k\geq 20$ iterációs lépés elvégzése után elérjük a 10^{-3} pontosságot.

27. A feladat megoldásához először ki kell számolnunk az átmenetmátrixot.

$$\begin{aligned}
\mathbf{B} &= \mathbf{P^{-1}Q}= \\
&= \begin{bmatrix} 8 & 8 & 8 \\ 0 & 6 & 6 \\ 2 & 5 & 10 \end{bmatrix}^{-1}\cdot\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}= \\
&= \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & -\frac{1}{6} & 0 \\ \frac{1}{20} & \frac{4}{15} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{20} & -\frac{1}{10} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{4}{5} & 0 & 0 \\ -\frac{3}{10} & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Mivel a mátrixban kis elemek vannak, ezért a konvergencia vizsgálatához alkalmazható az elégséges feltétel.

$$\|\mathbf{B}\|_\infty=\frac{4}{5}<1$$

A kapott eredmény egynél kisebb, tehát teljesül a konvergencia. Ahhoz, hogy kiszámoljuk az első 2 lépést, alkalmas $\mathbf{x_0}$-t kell választanunk. Mivel bármilyen $\mathbf{x_0}$ jó, ezért a legegyszerűbb az $\mathbf{x_0}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T=\mathbf{0}$ vektort venni. Az iteráció alakja

$$\mathbf{x_{k+1}}=\mathbf{P}^{-1}\mathbf{Q}\cdot\mathbf{x_k}+\mathbf{P}^{-1}\mathbf{b}=\mathbf{B}\cdot\mathbf{x_k}+\mathbf{c}.$$

Ezt felhasználva, el tudjuk végezni az iteráció első két lépését.

1. lépés:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x_1} &= \mathbf{P}^{-1}\mathbf{Q}\cdot\mathbf{x_0}+\mathbf{P}^{-1}\cdot\mathbf{b}=\mathbf{B}\cdot\mathbf{0}+\mathbf{c}=\mathbf{c}=\\
&= \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & -\frac{1}{6} & 0 \\ \frac{1}{20} & \frac{4}{15} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{20} & -\frac{1}{10} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

2. lépés:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x_2} &= \mathbf{P}^{-1}\mathbf{Q}\cdot\mathbf{x_1}+\mathbf{P}^{-1}\cdot\mathbf{b}=\mathbf{B}\cdot\mathbf{x_1}+\mathbf{c}=\\
&= \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{4}{5} & 0 & 0 \\ -\frac{3}{10} & 0 & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{3}{5} \\ -\frac{7}{20} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Utolsó feladatunk, hogy kiszámoljuk a lépésszámot a 10^{-3} pontosság eléréséhez. ($q=\frac{4}{5}$ megegyezik a $\mathbf{B}$ mátrix $\|.\|_\infty$ normájával.)

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{x_k}-\mathbf{x}^*\|_\infty = \frac{q^k}{1-q}\|\mathbf{x_1}-\mathbf{x_0}\|_\infty &\leq 10^{-3}\\
\frac{\left(\frac{4}{5}\right)^k}{1-\frac{4}{5}}\cdot\left\|\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right\|_\infty &\leq 10^{-3}\\
\left(\frac{4}{5}\right)^k\cdot\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{5}}=\left(\frac{4}{5}\right)^k\cdot\frac{5}{2} &\leq 10^{-3}\\
\frac{5}{2}\cdot 10^3 &\leq \left(\frac{5}{4}\right)^k\\
\lg\left(\frac{5}{2}\cdot 10^3\right) &\leq k\cdot\lg\left(\frac{5}{4}\right)\\
\frac{\lg\left(\frac{5}{2}\cdot 10^3\right)}{\lg\left(\frac{5}{4}\right)}\approx 35,06 &\leq k
\end{aligned}$$

Amint az látható $k\geq 36$ iterációs lépés elvégzése után elérjük a 10^{-3} pontosságot.

28. A feladat megoldásához először ki kell számolnunk az átmenetmátrixot.

$$\begin{aligned}
\mathbf{B} &= \mathbf{P^{-1}Q}=\\
&= \begin{bmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 5 & 5 & 8 \end{bmatrix}^{-1}\cdot\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}=\\
&= \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{5}{18} & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ -\frac{5}{24} & \frac{5}{72} & \frac{1}{8} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -\frac{5}{9} & 0 & -\frac{5}{9} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{5}{36} & 0 & \frac{5}{36} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

A mátrixban kis elemek találhatók, ezért a konvergencia vizsgálatához érdemes az elégséges feltétel alkalmazásával próbálkozni.

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{B}\|_1 &= \frac{37}{36}>1\Rightarrow \text{Nem alkalmas!}\\
\|\mathbf{B}\|_\infty &= \frac{10}{9}>1\Rightarrow \text{Nem alkalmas!}\\
\|\mathbf{B}\|_F &= \frac{\sqrt{1138}}{36}\approx 0,9371<1
\end{aligned}$$

Az $\|.\|_1$ és $\|.\|_\infty$ is nagyobb egynél, de a $\|.\|_F$ egynél kisebb, tehát teljesül a konvergencia. Ahhoz, hogy kiszámoljuk az első 2 lépést, alkalmas $\mathbf{x_0}$-t kell választanunk. Mivel bármilyen $\mathbf{x_0}$ jó, ezért a legegyszerűbb az $\mathbf{x_0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T = \mathbf{0}$ vektort venni. Az iteráció alakja

$$\mathbf{x_{k+1}} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{Q} \cdot \mathbf{x_k} + \mathbf{P}^{-1}\mathbf{b} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{x_k} + \mathbf{c}.$$

Ezt felhasználva, el tudjuk végezni az iteráció első két lépését.

1. lépés:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x_1} &= \mathbf{P}^{-1}\mathbf{Q} \cdot \mathbf{x}_0 + \mathbf{P}^{-1} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{0} + \mathbf{c} = \mathbf{c} = \\
&= \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{5}{18} & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ -\frac{5}{24} & \frac{5}{72} & \frac{1}{8} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{9} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{36} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

2. lépés:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x_2} &= \mathbf{P}^{-1}\mathbf{Q} \cdot \mathbf{x_1} + \mathbf{P}^{-1} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{x_1} + \mathbf{c} = \\
&= \begin{bmatrix} -\frac{5}{9} & 0 & -\frac{5}{9} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{5}{36} & 0 & \frac{5}{36} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{9} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{36} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{9} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{36} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{108} \\ \frac{13}{36} \\ -\frac{7}{432} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Utolsó feladatunk, hogy kiszámoljuk a lépésszámot a 10^{-2} pontosság eléréséhez.
($q = 0,9371$ megegyezik a $\mathbf{B}$ mátrix $\|.\|_F$ normájával, és mivel a $\|.\|_F$ illeszkedik a $\|.\|_2$ normára, ezért használhatjuk a vektoroknál a 2-es normát.)

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{x_k} - \mathbf{x}^*\|_2 = \frac{q^k}{1-q}\|\mathbf{x_1} - \mathbf{x_0}\|_2 &\leq 10^{-2} \\
\frac{\left(\frac{\sqrt{1138}}{36}\right)^k}{1 - \frac{\sqrt{1138}}{36}} \cdot \left\| \begin{bmatrix} \frac{1}{9} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{36} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\|_2 &\leq 10^{-2} \\
(0,9371)^k \cdot \frac{0,3525}{0,0629} = (0,9371)^k \cdot 5,6 &\leq 10^{-2} \\
5,6 \cdot 10^2 &\leq (1,0672)^k \\
\lg\left(5,6 \cdot 10^2\right) &\leq k \cdot \lg(1,0672) \\
\frac{\lg\left(5,6 \cdot 10^2\right)}{\lg(1,0672)} \approx 97,3 &\leq k
\end{aligned}$$

Mint látható $k \geq 98$ iterációs lépés elvégzése után elérjük a 10^{-2} pontosságot.

29. Első lépésként azt kell megvizsgálnunk, hogy $\forall\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$-ből indítva az iterációt, konvergens lesz-e. Ehhez ki kell számolnunk az átmenetmátrixot.

$$\begin{aligned}
\mathbf{B} &= \mathbf{P^{-1}Q} = \\
&= \begin{bmatrix} 5 & 4 & 5 \\ 4 & 6 & 4 \\ 0 & 5 & 4 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} \frac{1}{14} & \frac{9}{56} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{2}{7} & \frac{5}{14} & 0 \\ \frac{5}{14} & -\frac{25}{56} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Mivel a mátrixban kis elemek vannak, ezért a konvergencia vizsgálatához alkalmazható az elégséges feltétel.

$$\|\mathbf{B}\|_\infty = \frac{1}{2} < 1$$

A kapott eredmény egynél kisebb, tehát teljesül a konvergencia. Ahhoz, hogy kiszámoljuk az első 2 lépést, alkalmas $\mathbf{x_0}$-t kell választanunk. Mivel bármilyen $\mathbf{x_0}$ jó, ezért a legegyszerűbb az $\mathbf{x_0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T = \mathbf{0}$ vektort venni. Az iteráció alakja

$$\mathbf{x_{k+1}} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{Q} \cdot \mathbf{x_k} + \mathbf{P}^{-1}\mathbf{b} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{x_k} + \mathbf{c}.$$

Ezt felhasználva, el tudjuk végezni az iteráció első két lépését.

1. lépés:

$$\begin{aligned} \mathbf{x_1} &= \mathbf{P}^{-1}\mathbf{Q} \cdot \mathbf{x_0} + \mathbf{P}^{-1} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{0} + \mathbf{c} = \mathbf{c} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{14} & \frac{9}{56} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{2}{7} & \frac{5}{14} & 0 \\ \frac{5}{14} & -\frac{25}{56} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

2. lépés:

$$\begin{aligned} \mathbf{x_2} &= \mathbf{P}^{-1}\mathbf{Q} \cdot \mathbf{x_1} + \mathbf{P}^{-1} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{x_1} + \mathbf{c} = \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} \\ 0 \\ \frac{3}{4} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Utolsó feladatunk, hogy kiszámoljuk a lépésszámot a 10^{-3} pontosság eléréséhez. ($q = \frac{1}{2}$ megegyezik a $\mathbf{B}$ mátrix $\|.\|_\infty$ normájával.)

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x_k} - \mathbf{x}^*\|_\infty = \frac{q^k}{1-q}\|\mathbf{x_1} - \mathbf{x_0}\|_\infty &\leq 10^{-3} \\ \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^k}{1-\frac{1}{2}} \cdot \left\| \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\|_\infty &\leq 10^{-3} \\ \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot 2 &\leq 10^{-3} \\ 2 \cdot 10^3 &\leq (2)^k \\ \lg\left(2 \cdot 10^3\right) &\leq k \cdot \lg(2) \\ \frac{\lg\left(2 \cdot 10^3\right)}{\lg(2)} \approx 10,97 &\leq k \end{aligned}$$

Amint az látható $k \geq 11$ iterációs lépés elvégzése után elérjük a 10^{-3} pontosságot!

30. Első lépésként azt kell megvizsgálnunk, hogy $\forall\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$-ből indítva az iterációt, konvergens lesz-e. Ehhez ki kell számolnunk az átmenetmátrixot.

$$\mathbf{B} = \mathbf{P^{-1}Q} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

Mivel a mátrixban kis elemek vannak, ezért a konvergencia vizsgálatához alkalmazható az elégséges feltétel.

$$\|\mathbf{B}\|_\infty = \frac{1}{2} < 1$$

A kapott eredmény egynél kisebb, tehát teljesül a konvergencia. Ahhoz, hogy kiszámoljuk az első 2 lépést, alkalmas $\mathbf{x_0}$-t kell választanunk. Mivel bármilyen $\mathbf{x_0}$ jó, ezért a legegyszerűbb az $\mathbf{x_0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^T = \mathbf{0}$ vektort venni. Az iteráció alakja

$$\mathbf{x_{k+1}} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{Q} \cdot \mathbf{x_k} + \mathbf{P}^{-1}\mathbf{b} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{x_k} + \mathbf{c}.$$

Ezt felhasználva, el tudjuk végezni az iteráció első két lépését.

1. lépés:

$$\begin{aligned} \mathbf{x_1} &= \mathbf{P}^{-1}\mathbf{Q} \cdot \mathbf{x_0} + \mathbf{P}^{-1} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{0} + \mathbf{c} = \mathbf{c} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

2. lépés:

$$\begin{aligned} \mathbf{x_2} &= \mathbf{P}^{-1}\mathbf{Q} \cdot \mathbf{x_1} + \mathbf{P}^{-1} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{x_1} + \mathbf{c} = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{5} \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Végül ki kell számolnunk a lépésszámot a 10^{-4} pontosság eléréséhez. ($q = \frac{1}{2}$ megegyezik a $\mathbf{B}$ mátrix $\|.\|_\infty$ normájával.)

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x_k} - \mathbf{x}^*\|_\infty = \frac{q^k}{1-q}\|\mathbf{x_1} - \mathbf{x_0}\|_\infty &\le 10^{-4} \\ \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^k}{1-\frac{1}{2}} \cdot \| \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \|_\infty &\le 10^{-4} \\ \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot 2 &\le 10^{-4} \\ 2 \cdot 10^4 &\le (2)^k \\ \lg\left(2 \cdot 10^4\right) &\le k \cdot \lg(2) \\ \frac{\lg\left(2 \cdot 10^4\right)}{\lg(2)} \approx 14,29 &\le k \end{aligned}$$

Amint az látható $k \geq 15$ iterációs lépés elvégzése után elérjük a 10^{-4} pontosságot!

5. fejezet

Sajátérték feladatok

5.1. Feladatok

5.1.1. Sajátérték becslések

1. Tegyük fel, hogy az $\mathbf{A}$ mátrix valós elemű és a Gersgorin körei diszjunktak. Igazoljuk, hogy a sajátértékei valósak!

2. Az $\mathbf{A} = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$ szimmetrikus mátrix elemeinek segítségével adjunk olyan $\mu \in \mathbb{R}$ számot, hogy az $\mathbf{A} + \mu \cdot \mathbf{I}$ mátrix pozitív definit legyen!

3. Alkalmazzuk a Gersgorin tételt a megadott szimmetrikus mátrixra!

a) Írjuk fel a mátrix Gersgorin köreit!

b) Adjunk becslést a mátrix sajátértékeire!

c) Egy paraméteres diagonális hasonlósági transzformációval igazoljuk a mátrix invertálhatóságát!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

4. Alkalmazzuk a Gersgorin tételt a megadott szimmetrikus mátrixra!

a) Írjuk fel a mátrix Gersgorin köreit!

b) Adjunk becslést a mátrix sajátértékeire!

c) Egy paraméteres diagonális hasonlósági transzformációval adjunk jobb becslést a 6 körüli sajátértékre!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

5. Alkalmazzuk a Gersgorin tételt a megadott szimmetrikus mátrixra!

a) Írjuk fel a mátrix Gersgorin köreit!

b) Adjunk becslést a mátrix sajátértékeire!

c) Egy paraméteres diagonális hasonlósági transzformációval adjunk jobb becslést a 4 körüli sajátértékre!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

6. Alkalmazzuk a Gersgorin tételt a megadott mátrixra!

a) Írjuk fel a mátrix Gersgorin köreit!

b) Adjunk becslést a mátrix sajátértékeire!

c) Invertálható-e a mátrix?

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

7. Alkalmazzuk a Gersgorin tételt a megadott szimmetrikus mátrixra!

a) Írjuk fel a mátrix Gersgorin köreit!

b) Adjunk becslést a mátrix sajátértékeire!

c) Egy paraméteres diagonális hasonlósági transzformációval igazoljuk, hogy a mátrix pozitív definit!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

5.1.2. Sajátértékprobléma érzékenysége

8. Igazoljuk, hogy az $\mathbf{A} = \mathbf{UDV}^* \in \mathbb{C}^{n\times m}$ szinguláris felbontásában

a) $\mathbf{U}$ oszlopai az $\mathbf{AA}^*$ sajátvektorai,

b) $\mathbf{V}$ oszlopai az $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$ sajátvektorai.

c) Mit mondhatunk az $\mathbf{AA}^*$ és az $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$ sajátértékeiről?

9. Adjuk meg az $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}(\varepsilon)$ és az $\mathbf{A}(\delta)$ mátrixok sajátértékeit és sajátvektorait!

a) Vizsgáljuk meg $\mathbf{A}(\varepsilon)$ sajátértékeit és sajátvektorait $\varepsilon \to 0$ esetén!

b) Vizsgáljuk meg $\mathbf{A}(\delta)$ sajátértékeit és sajátvektorait $\delta \to 0$ esetén!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}(\varepsilon) = \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}(\delta) = \begin{bmatrix} 1 & \delta \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

10. Adjuk meg az $\mathbf{A}$ és az $\mathbf{A(t)}$ mátrixok sajátértékeit és sajátvektorait! Vizsgáljuk meg $\mathbf{A(t)}$ sajátértékeit és sajátvektorait $t \to 0$ esetén!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A(t)} = \begin{bmatrix} 1 + t\cos(\frac{2}{t}) & t\sin(\frac{2}{t}) \\ t\sin(\frac{2}{t}) & 1 - t\cos(\frac{2}{t}) \end{bmatrix}$$

5.1.3. Karakterisztikus polinom meghatározására alkalmas módszerek

11. A Fagyejev-féle "trace" módszer segítségével írjuk fel a megadott mátrix karakterisztikus polinomját!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

12. A Fagyejev-féle "trace" módszer segítségével írjuk fel a megadott mátrix karakterisztikus polinomját!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

13. A Fagyejev-féle "trace" módszer segítségével írjuk fel a megadott mátrix karakterisztikus polinomját!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 6 \end{bmatrix}$$

14. A Fagyejev-féle "trace" módszer segítségével írjuk fel a megadott mátrix karakterisztikus polinomját!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$$

15. A Fagyejev-féle "trace" módszer segítségével írjuk fel a megadott mátrix karakterisztikus polinomját!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

16. A Fagyejev-féle "trace" módszer segítségével írjuk fel a megadott mátrix karakterisztikus polinomját!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

17. A megadott tridiagonális mátrixra írjuk fel a karakterisztikus polinom rekurzióját!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

18. A megadott tridiagonális mátrixra írjuk fel a karakterisztikus polinom rekurzióját! Alkalmazzuk az intervallum felezés módszerének egy lépését a sajátérték közelítésére, a kiindulási intervallum a Gersgorin tételből kapott $[0; 4]$ intervallum legyen.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

5.1.4. Hatványmódszer és inverz iteráció

19. Adjunk becslést az $\mathbf{A}$ mátrix maximális abszolút értékű sajátértékére! Használjuk a hatvány módszert az $\mathbf{x_0}$ vektorból indítva!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x_0} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

20. Adjunk becslést az $\mathbf{A}$ mátrix maximális abszolút értékű sajátértékére! Használjuk a hatvány módszert az $\mathbf{x_0}$ vektorból indítva!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x_0} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

21. Adjunk becslést az $\mathbf{A}$ mátrix maximális abszolút értékű sajátértékére! Használjuk a hatvány módszert az $\mathbf{x_0}$ vektorból indítva!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x_0} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

22. Adjunk becslést az $\mathbf{A}$ mátrix maximális abszolút értékű sajátértékére a hatvány módszer első 4 lépését végrehajtva az $\mathbf{x_0}$ vektorból kiindulva.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x_0} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

23. Közelítsük az $\mathbf{A}$ mátrix domináns sajátértékét hatvány módszer segítségével az $\mathbf{x_0}$ vektorból kiindulva.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x_0} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

24. Az $\mathbf{A}$ mátrix domináns sajátértékének közelítésére használjuk az $\mathbf{x_0}$ vektort! Alkalmazzuk az alábbi két módszert:

a) A maximális abszolútértékű komponensek hányadosával.

b) A Rayleigh-hányadossal (ez akkor ad jobb eredményt, ha az $\mathbf{A}$ mátrix szimmetrikus).

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x_0} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

25. Az $\mathbf{A}$ mátrix domináns sajátértékének közelítésére használjuk az $\mathbf{x_0}$ vektort! Alkalmazzuk az alábbi két módszert:

a) A maximális abszolútértékű komponensek hányadosával.

b) A Rayleigh-hányadossal (ez akkor ad jobb eredményt, ha az $\mathbf{A}$ mátrix szimmetrikus).

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -2 & -4 \\ -2 & 2 & 2 \\ -4 & 2 & 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x_0} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

26. Számítsuk ki az inverz iteráció segítségével az $\mathbf{A}$ mátrix legkisebb abszolút értékű sajátértékét! Használjuk az $\mathbf{x_0}$ kezdő vektort!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x_0} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

27. Számítsa ki az inverz iteráció segítségével az $\mathbf{A}$ mátrix legkisebb abszolút értékű sajátértékét, használja az $\mathbf{x_0}$ vektort! Alkalmazza az alábbi két módszert:

a) A maximális abszolútértékű komponensek hányadosával.

b) A Rayleigh-hányadossal (az $\mathbf{A}$ mátrix szimmetrikus).

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x_0} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

5.1.5. Rangszám csökkentés

28. Legyen $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertálható mátrix és tegyük fel, hogy ismerjük a λ_1 sajátértékét és $\mathbf{v_1}$ sajátvektorát ($\|\mathbf{v_1}\|_2 = 1$). Keressünk olyan $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ vektort, melyre $\mathbf{y^T v_1} = \lambda_1$ teljesül. Igazoljuk, hogy a

$$\mathbf{B} := \mathbf{A} - \mathbf{v_1} \cdot \mathbf{y^T}$$

mátrix sajátértékei

$$\lambda_1(\mathbf{B}) = 0, \quad \lambda_i(\mathbf{B}) = \lambda_i \ \ (i = 1, \ldots, n),$$

sajátvektorai

$$\mathbf{u_1} = \mathbf{v_1}, \quad \mathbf{u_i} = \mathbf{v_i} - \frac{\mathbf{y^T v_i}}{\lambda_i}\mathbf{v_1} \ \ (i = 1, \ldots, n).$$

29. Tegyük fel, hogy az $\mathbf{A}$ mátrix egy sajátértékét és sajátvektorát már ismerjük (hatványmódszerrel vagy inverz iterációval már meghatároztuk őket), jelöljük őket λ_1, $\mathbf{v_1}$-gyel. Legyen

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}(\mathbf{u}) = \mathbf{I} - \mathbf{2uu^T}, \quad \mathbf{u} = \frac{\mathbf{v_1} - \mathbf{e_1}}{\|\mathbf{v_1} - \mathbf{e_1}\|_2}$$

egy Householder transzformáció. Ekkor a transzformáció tükröző tulajdonsága miatt

$$\mathbf{Hv_1} = \mathbf{e_1}.$$

a) Igazoljuk, hogy

$$\mathbf{HAH}\,\mathbf{e_1} = \boldsymbol{\lambda_1}\,\mathbf{e_1},$$

vagyis a mátrix alakja

$$\mathbf{HAH} = \left[\begin{array}{c|c} \lambda_1 & \mathbf{b^T} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{B} \end{array}\right]$$

és $\mathbf{B}$ sajátértékei: $\lambda_2, \ldots, \lambda_n$, vagyis az $\mathbf{A}$ többi sajátértékével egyeznek. Így az $\mathbf{A}$ mátrix sajátértékeit a továbbiakban a $\mathbf{B}$ redukált mátrix segítségével kereshetjük.

b) Ha ismerjük $\mathbf{B}$ sajátértékeit és sajátvektorait, hogyan kapjuk meg az eredeti $\mathbf{A}$ sajátértékeit, sajátvektorait?

5.1.6. Jacobi módszer

30. Határozzuk meg a következő mátrix sajátértékeit és sajátvektorait a Jacobi módszer segítségével!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

31. Határozzuk meg az $\mathbf{A}$ mátrix sajátértékeit és sajátvektorait a Jacobi-forgatás segítségével!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

32. Határozzuk meg az $\mathbf{A}$ mátrix sajátértékeit és sajátvektorait a Jacobi módszer segítségével!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

33. Végezzük el az $\mathbf{A}$ mátrixon az $(i, j) = (1, 2)$ pozíciókhoz tartozó Jacobi-forgatást!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

34. Végezzük el az $\mathbf{A}$ mátrixon az $(i, j) = (2, 3)$ pozíciókhoz tartozó Jacobi-forgatást!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

5.2. Megoldások

5.2.1. Sajátérték becslések

1. Mivel az $\mathbf{A}$ mátrix elemei valósak, ezért a Gersgorin középpontok is valósak. A diszjunkt Gersgorin körökből az következik, hogy minden körben található egy sajátérték. Már csak azt kell belátnunk, hogy ezek valósak. Valós elemű mátrix karakterisztikus polinomja valós együtthatós polinom, melynek gyökei lehetnek komplexek, de akkor a komplex gyök konjugáltja is gyök, vagyis mindkettő sajátértéke a mátrixnak. A körönkénti egy sajátérték kizárja a komplex konjugált gyökpárokat, tehát minden sajátérték valós.

2. Jelöljük $R_i = \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$ -vel az eredeti mátrix Gersgorin köreinek sugarait. Mivel csak a diagonális elemeit változtattuk, ezért az $\mathbf{A} + \mu \cdot \mathbf{I}$ mátrixra felírt sugarak ugyanezek, a középpontok $a_{ii} + \mu$ -re változnak. Mivel az $\mathbf{A} = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$ mátrix szimmetrikus, az $\mathbf{A} + \mu \cdot \mathbf{I}$ mátrix is szimmetrikus, így a sajátértékei valósak. A Gersgorin körök valós vetületét kell csak figyelnünk a sajátérték becslésnél. Így

$$G_i = [\,(a_{ii} + \mu) - R_i\,;\,(a_{ii} + \mu) + R_i\,] \quad (i = 1, \ldots, n).$$

A pozitív definitséghez biztosítanunk kell, hogy minden sajátérték pozitív legyen. Ez a sugarakkal felírva azt jelenti, hogy a becslő intervallum a pozitív oldalra essen, azaz

$$(a_{ii} + \mu) - R_i \geq 0 \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Tehát μ -re a következő feltételt kapjuk

$$\mu \geq R_i - a_{ii} \quad (i = 1, \ldots, n) \quad \Rightarrow \quad \mu \geq \max\{R_i - a_{ii} : i = 1, \ldots, n\}.$$

3. **a)** Írjuk táblázatba a Gersgorin körök középpontjait és sugarait ($R_i = \sum_{j\neq i} |a_{ij}|$)!

a_{ii}	-2	2	6
R_i	1	2	1

Mivel a megadott mátrix szimmetrikus, ezért a sajátértékei valósak, így a Gersgorin köröknek csak a valós vetületét kell néznünk.

$$G_1 = [-3;-1], \quad G_2 = [\,0;4\,], \quad G_3 = [\,5;7\,]$$

b) Az $\mathbf{A}$ mátrix sajátértékei a G_i körök úniójában vannak. Mivel a körök diszjunktak, ezért mindegyik Gersgorin kör tartalmaz egy sajátértéket. Tehát a sajátértékek becslése

$$\lambda_1 \in [-3;-1] \quad \lambda_2 \in [\,0;4\,] \quad \lambda_3 \in [\,5;7\,].$$

c) Legyen $\mathbf{D} = diag(1,d,1)$ diagonális mátrix, $d > 0$ paraméter. Számítsuk ki a $\mathbf{B} = \mathbf{DAD^{-1}}$ mátrixot és alkalmazzuk rá a Gersgorin tételt. Mivel $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ hasonló, ezért a sajátértékeik megegyeznek, így az $\mathbf{A}$ sajátértékeire kapunk újabb becslést. Az invertálhatóság ekvivalens azzal, hogy 0 nem sajátérték. Ugyanis

$$\det(\mathbf{A} - 0\cdot\mathbf{I}) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \det(\mathbf{A}) \neq 0.$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{DAD^{-1}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{d} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & \frac{1}{d} & 0 \\ d & 2 & d \\ 0 & \frac{1}{d} & 6 \end{bmatrix}$$

A $\mathbf{B}$ mátrixra a Gersgorin körök középpontjai és sugarai ($r_i = \sum_{j\neq i} |b_{ij}|$)

b_{ii}	-2	2	6
r_i	$\frac{1}{d}$	$2d$	$\frac{1}{d}$

Mivel a mátrix szimmetrikus, ezért a sajátértékei valósak, így a Gersgorin köröknek csak a valós vetületét kell néznünk.

$$\widetilde{G}_1 = \left[-2 - \frac{1}{d}\,; -2 + \frac{1}{d}\right], \quad \widetilde{G}_2 = [\,2-2d\,;\,2+2d\,], \quad \widetilde{G}_3 = \left[6 - \frac{1}{d}\,; 6 + \frac{1}{d}\right]$$

Az invertálhatósághoz elegendő ha biztosítjuk, hogy egyik Gersgorin kör sem tartalmazza a 0 -t, azaz

$$\begin{array}{lclcl} -2 + \frac{1}{d} < 0 & \to & \frac{1}{d} < 2 & \to & \frac{1}{2} < d \\ 2 - 2d > 0 & \to & 2 > 2d & \to & 1 > d \\ 6 - \frac{1}{d} > 0 & \to & 6 > \frac{1}{d} & \to & d > \frac{1}{6} \end{array}$$

Ha $\frac{1}{2} < d < 1$, akkor $\mathbf{B}$ és így $\mathbf{A}$ is invertálható. Például $d = \frac{3}{4}$ esetén

$$\widetilde{G}_1 = \left[-2 - \frac{4}{3}\,; -2 + \frac{4}{3}\right] = \left[-\frac{10}{3}\,; -\frac{2}{3}\right]$$
$$\widetilde{G}_2 = \left[2 - \frac{3}{2}\,; 2 + \frac{3}{2}\right] = \left[\frac{1}{2}\,; \frac{7}{2}\right]$$
$$\widetilde{G}_3 = \left[6 - \frac{4}{3}\,; 6 + \frac{4}{3}\right] = \left[\frac{14}{3}\,; \frac{22}{3}\right]$$

látszik, hogy egyik kör sem tartalmazza a 0-t, így nem lehet sajátérték.

4. **a)** Írjuk táblázatba a Gersgorin körök középpontjait és sugarait ($R_i = \sum_{j\neq i} |a_{ij}|$)!

a_{ii}	-1	1	6
R_i	3	3	2

Mivel a megadott mátrix szimmetrikus, ezért a sajátértékei valósak, így a Gersgorin köröknek csak a valós vetületét kell néznünk.

$$G_1 = [-4; 2\,], \quad G_2 = [-2; 4\,], \quad G_3 = [\,4; 8\,]$$

b) Az $\mathbf{A}$ mátrix sajátértékei a G_i körök úniójában vannak. Mivel a körök nem diszjunktak, ezért nem teljesül, hogy mindegyik Gersgorin kör tartalmaz egy sajátértéket. Tehát a sajátértékek becslése

$$\lambda_{1,2,3} \in [-4; 2\,] \cup [-2; 4\,] \cup [\,4; 8\,] = [-4; 8\,].$$

c) Legyen $\mathbf{D} = diag(1, 1, d\,)$ diagonális mátrix, $d > 0$ paraméter. Számítsuk ki a $\mathbf{B} = \mathbf{DAD^{-1}}$ mátrixot és alkalmazzuk rá a Gersgorin tételt. Mivel $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ hasonló, ezért a sajátértékeik megegyeznek, így az $\mathbf{A}$ sajátértékeire kapunk újabb becslést.

$$\mathbf{B} = \mathbf{DAD^{-1}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -\frac{1}{d} \\ 2 & 1 & \frac{1}{d} \\ -d & d & 6 \end{bmatrix}$$

A $\mathbf{B}$ mátrixra a Gersgorin körök középpontjai és sugarai ($r_i = \sum_{j\neq i} |b_{ij}|$)

b_{ii}	-1	1	6
r_i	$2+\frac{1}{d}$	$2+\frac{1}{d}$	$2d$

Mivel a mátrix szimmetrikus, ezért a sajátértékei valósak, így a Gersgorin köröknek csak a valós vetületét kell néznünk.

$$\begin{aligned} \widetilde{G}_1 &= \left[-1-\left(2+\frac{1}{d}\right); -1+\left(2+\frac{1}{d}\right)\right] = \left[-3-\frac{1}{d}\,;\, 1+\frac{1}{d}\right] \\ \widetilde{G}_2 &= \left[1-\left(2+\frac{1}{d}\right); 1+\left(2+\frac{1}{d}\right)\right] = \left[-1-\frac{1}{d}\,;\, 3+\frac{1}{d}\right] \\ \widetilde{G}_3 &= [\,6-2d\,;\, 6+2d\,] \end{aligned}$$

A 6 körüli sajátértékre akkor kapunk jobb becslést a korábbinál, ha a Gersgorin köre diszjunkt a többitől és a sugara kisebb, mint korábban. A $\widetilde{G}_3$ sugarát $2d$ -t minimalizáljuk, feltéve hogy $\widetilde{G}_1$ és $\widetilde{G}_2$ nem ér össze $\widetilde{G}_3$ -mal.

$$\begin{aligned} &1+\frac{1}{d} < 6-2d \\ &3+\frac{1}{d} < 6-2d \quad \to \quad 2d-3+\frac{1}{d} < 0 \quad \to \quad 2d^2-3d+1<0 \end{aligned}$$

Mivel $1+\frac{1}{d} < 3+\frac{1}{d}$, ezért elég a második egyenlőtlenséget megoldanunk.

$$d_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{4} = \frac{3 \pm 1}{4} \quad \to \quad d_1 = 1, \quad d_2 = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} < d < 1.$$

Tehát minimalizáljuk d -t, feltéve hogy $\frac{1}{2} < d < 1$.

$d = 0,51$ -et választva

$$\widetilde{G}_1 = \left[-3 - \frac{1}{d}\,;\, 1 + \frac{1}{d}\right] = [-4,9608\,;\, 2,9608\,]$$
$$\widetilde{G}_2 = \left[-1 - \frac{1}{d}\,;\, 3 + \frac{1}{d}\right] = [-2,9608\,;\, 4,9608\,]$$
$$\widetilde{G}_3 = [\,6 - 2d\,;\, 6 + 2d\,] = [\,4,98\,;\, 7,02\,]$$

Látjuk, hogy $\widetilde{G}_3$ külön álló kör, ezért a 6 körüli sajátérték becslése

$$\lambda_3 \in [\,4,98\,;\, 7,02\,].$$

5. **a)** Írjuk táblázatba a Gersgorin körök középpontjait és sugarait ($R_i = \sum_{j\neq i} |a_{ij}|$)!

a_{ii}	-1	1	4
R_i	3	2	1

Mivel a megadott mátrix szimmetrikus, ezért a sajátértékei valósak, így a Gersgorin köröknek csak a valós vetületét kell néznünk.

$$G_1 = [-4; 2\,], \quad G_2 = [-1; 3\,], \quad G_3 = [\,3; 5\,]$$

b) Az $\mathbf{A}$ mátrix sajátértékei a G_i körök uniójában vannak. Mivel a körök nem diszjunktak, ezért nem teljesül, hogy mindegyik Gersgorin kör tartalmaz egy sajátértéket. Tehát a sajátértékek becslése

$$\lambda_{1,2,3} \in [-4; 2\,] \cup [-1; 3\,] \cup [\,3; 5\,] = [-4; 5\,].$$

c) Legyen $\mathbf{D} = diag(1, 1, d\,)$ diagonális mátrix, $d > 0$ paraméter. Számítsuk ki a $\mathbf{B} = \mathbf{DAD^{-1}}$ mátrixot és alkalmazzuk rá a Gersgorin tételt. Mivel $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ hasonló, ezért a sajátértékeik megegyeznek, így az $\mathbf{A}$ sajátértékeire kapunk újabb becslést.

$$\mathbf{B} = \mathbf{DAD^{-1}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & \frac{1}{d} \\ 2 & 1 & 0 \\ d & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

A $\mathbf{B}$ mátrixra a Gersgorin körök középpontjai és sugarai ($r_i = \sum_{j\neq i} |b_{ij}|$)

b_{ii}	-1	1	4
r_i	$2 + \frac{1}{d}$	2	d

Mivel a mátrix szimmetrikus, ezért a sajátértékei valósak, így a Gersgorin köröknek csak a valós vetületét kell néznünk.

$$\widetilde{G}_1 = \left[-1 - \left(2 + \frac{1}{d}\right); -1 + \left(2 + \frac{1}{d}\right)\right] = \left[-3 - \frac{1}{d}\,;\, 1 + \frac{1}{d}\right]$$
$$\widetilde{G}_2 = [\,1 - 2\,;\, 1 + 2\,] = [-1; 3\,]$$
$$\widetilde{G}_3 = [\,4 - d\,;\, 4 + d]$$

A 4 körüli sajátértékre akkor kapunk jobb becslést a korábbinál, ha a Gersgorin köre diszjunkt a többitől és a sugara kisebb, mint korábban. A $\widetilde{G}_3$ sugarát d -t minimalizáljuk, feltéve hogy $\widetilde{G}_1$ és $\widetilde{G}_2$ nem ér össze $\widetilde{G}_3$ -mal.

$$1 + \frac{1}{d} < 4 - d \quad \rightarrow \quad d - 3 + \frac{1}{d} < 0 \quad \rightarrow d^2 - 3d + 1 \quad < 0$$
$$3 < 4 - d \quad \rightarrow \quad d < 1$$

A másodfokú egyenlőtlenség megoldása

$$d_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-4}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$d_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \approx 2,618034, \quad d_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \approx 0,381966 \quad \Rightarrow \quad 0,382 \le d \le 2,618.$$

Tehát minimalizáljuk d -t, feltéve hogy $0,382 \le d < 1$.

$d = 0,382$ -et választva

$$\widetilde{G}_1 = \left[-3 - \frac{1}{d}\,;\, 1 + \frac{1}{d}\right] = [-5,6178\,;\, 3,6178\,]$$
$$\widetilde{G}_2 = [-1; 3\,]$$
$$\widetilde{G}_3 = [\,4-d\,;\, 4+d] = [\,3,618\,;\, 4,382\,]$$

Látjuk, hogy $\widetilde{G}_3$ külön álló kör, ezért a 4 körüli sajátérték becslése

$$\lambda_3 \in [\,3,618\,;\, 4,382\,].$$

6. **a)** Írjuk táblázatba a Gersgorin körök középpontjait és sugarait ($R_i = \sum_{j \ne i} |a_{ij}|$)!

a_{ii}	-3	4	-4
R_i	2	1	3

A Gersgorin körök

$$G_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z - (-3)| \le 2\}$$
$$G_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z - 4| \le 1\}$$
$$G_3 = \{z \in \mathbb{C} : |z - (-4)| \le 3\}$$

b) Az $\mathbf{A}$ mátrix sajátértékei a G_i körök úniójában vannak. Mivel a $G_1 \cup G_3$ diszjunkt a G_2-től, ezért $G_1 \cup G_3$ tartalmaz két sajátértéket és G_2 egyet. Tehát a sajátértékek becslése

$$\lambda_{1,3} \in G_1 \cup G_3, \quad \lambda_2 \in G_2.$$

c) Az invertálhatóság ekvivalens azzal, hogy 0 nem sajátérték. Ugyanis

$$\det(\mathbf{A} - 0 \cdot \mathbf{I}) \ne 0 \quad \Leftrightarrow \quad \det(\mathbf{A}) \ne 0.$$

Mivel egyik kör sem tartalmazza a 0-t, így nem lehet sajátérték, tehát a mátrix invertálható.

Megjegyzés: A Gersgorin tételben a sugár képlete $R_i = \sum_{j \ne i} |a_{ij}|$. Mivel $\mathbf{A}$ és $\mathbf{A^T}$ sajátértékei megegyeznek, ezért ha $\mathbf{A^T}$ -ra alkalmazzuk a Gersgorin tételt, akkor a sugár képlete $\widetilde{R}_i = \sum_{j \ne i} |a_{ji}|$, vagyis oszloponként kell összeadnunk a diagonálison kívüli elemek abszolút értékét. Így egy újabb becslést kapunk a sajátértékekre. Ebben a példában

$$\widetilde{G}_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z - (-3)| \le 3\}$$
$$\widetilde{G}_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z - 4| \le 1\}$$
$$\widetilde{G}_3 = \{z \in \mathbb{C} : |z - (-4)| \le 2\}$$

Tehát a sajátértékek becslése

$$\lambda_{1,3} \in \widetilde{G}_1 \cup \widetilde{G}_3, \quad \lambda_2 \in \widetilde{G}_2.$$

Ezzel a becsléssel nem bizonyítható az invertálhatóság, mert $0 \in \widetilde{G}_1$.

7. **a)** Írjuk táblázatba a Gersgorin körök középpontjait és sugarait ($R_i = \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$)!

a_{ii}	4	5	4
R_i	3	2	1

Mivel a megadott mátrix szimmetrikus, ezért a sajátértékei valósak, így a Gersgorin köröknek csak a valós vetületét kell néznünk.

$$G_1 = [\,1; 7\,], \quad G_2 = [\,3; 7\,], \quad G_3 = [\,3; 5\,]$$

b) Az $\mathbf{A}$ mátrix sajátértékei a G_i körök uniójában vannak. Nincsenek diszjunkt Gersgorin körök, így

$$\lambda_{1,2,3} \in [\,1; 7\,]$$

c) A fenti becslés biztosítja a pozitív definitséget, garantálja hogy minden sajátérték pozitív.

5.2.2. Sajátértékprobléma érzékenysége

8. Tekintsük az $\mathbf{A} = \mathbf{UDV}^* \in \mathbb{C}^{n \times m}$ szinguláris felbontást és vezessük be a következő jelöléseket:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{U} = (\mathbf{u_1}, \ldots, \mathbf{u_n}) \in \mathbb{C}^{n \times n}, \quad \mathbf{V} = (\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_m}) \in \mathbb{C}^{m \times m},\\
&\mathbf{D} = diag(\sigma_1, \ldots, \sigma_r, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{C}^{n \times m},\\
&\ r = rang(\mathbf{A}), \quad \sigma_1 \geq \ldots \geq \sigma_r > 0.
\end{aligned}$$

a) Ennek felhasználásával írjuk fel az $\mathbf{AA}^*$ mátrixot.

$$\mathbf{AA}^* = \mathbf{UDV}^*(\mathbf{UDV}^*)^* = \mathbf{UDV}^*\mathbf{VD}^*\mathbf{U}^* = \mathbf{UDD}^*\mathbf{U}^*$$

Innen

$$\begin{gathered}
\mathbf{AA}^* \cdot \mathbf{U} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{DD}^*\\
\mathbf{AA}^* \cdot (\mathbf{u_1}, \ldots, \mathbf{u_n}) = (\mathbf{u_1}, \ldots, \mathbf{u_n}) \cdot \mathbf{DD}^* = (\sigma_\mathbf{1}^\mathbf{2}\mathbf{u_1}, \ldots, \sigma_\mathbf{r}^\mathbf{2}\mathbf{u_r}, \mathbf{0}, \ldots, \mathbf{0}),
\end{gathered}$$

ami épp azt jelenti, hogy $\mathbf{U}$ oszlopai az $\mathbf{AA}^*$ sajátvektorai.

c) Az $\mathbf{AA}^*$ sajátértékei

$$\sigma_1^2, \ldots, \sigma_r^2, 0, \ldots, 0.$$

b) A szinguláris felbontás segítségével írjuk fel az $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$ mátrixot.

$$\mathbf{A}^*\mathbf{A} = (\mathbf{UDV}^*)^*\mathbf{UDV}^* = \mathbf{VD}^*\mathbf{U}^*\mathbf{UDV}^* = \mathbf{VD}^*\mathbf{DV}^*$$

Innen

$$\begin{gathered}
\mathbf{A}^*\mathbf{A} \cdot \mathbf{V} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{D}^*\mathbf{D}\\
\mathbf{A}^*\mathbf{A} \cdot (\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_m}) = (\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_m}) \cdot \mathbf{D}^*\mathbf{D} = (\sigma_\mathbf{1}^\mathbf{2}\mathbf{v_1}, \ldots, \sigma_\mathbf{r}^\mathbf{2}\mathbf{v_r}, \mathbf{0}, \ldots, \mathbf{0}),
\end{gathered}$$

ami épp azt jelenti, hogy $\mathbf{V}$ oszlopai az $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$ sajátvektorai.

c) Az $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$ sajátértékei

$$\sigma_1^2, \ldots, \sigma_r^2, 0, \ldots, 0.$$

9. Az $\mathbf{A} = I$ egységmátrix sajátértékei: $\lambda_{1,2} = 1$. A hozzátartozó sajátvektorok:

$$\mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

a) Határozzuk meg az $\mathbf{A}(\varepsilon)$ mátrix sajátértékeit és sajátvektorait. Először számítsuk ki a karakterisztikus polinom gyökeit.

$$\det(\mathbf{A}(\varepsilon) - \lambda \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & \varepsilon \\ \varepsilon & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - \varepsilon^2 = 0, \quad \to \quad \lambda_{1,2} = 1 \pm \varepsilon$$

Látjuk, hogy $\varepsilon \to 0$ esetén $\mathbf{A}(\varepsilon)$ sajátértékei konvergálnak az $\mathbf{A}$ sajátértékeihez.

A $\lambda_1 = 1+\varepsilon$ sajátértékhez tartozó sajátvektor meghatározásához keressük a következő lineáris egyenletrendszer egységnyi normájú megoldásvektorát.

$$\begin{bmatrix} -\varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & -\varepsilon \end{bmatrix} \cdot \mathbf{v_1} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v_1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

A $\lambda_2 = 1-\varepsilon$ sajátértékhez tartozó sajátvektor meghatározásához keressük a következő lineáris egyenletrendszer egységnyi normájú megoldásvektorát.

$$\begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix} \cdot \mathbf{v_2} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Látjuk, hogy a kapott sajátvektorok nem függenek az ε értékétől, így $\varepsilon \to 0$ esetén az $\mathbf{A}(\varepsilon)$ sajátvektorai nem konvergálnak az $\mathbf{A}$ sajátvektoraihoz.

b) Határozzuk meg az $\mathbf{A}(\delta)$ mátrix sajátértékeit és sajátvektorait. Mivel $\mathbf{A}(\delta)$ diagonális mátrix, ezért sajátértékeit az átlójáról olvashatjuk le: $\lambda_{1,2} = 1$ A sajátvektorok meghatározásához keressük a következő lineáris egyenletrendszer egységnyi normájú megoldásvektorát.

$$\begin{bmatrix} 0 & \delta \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{v_1} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Mivel a lineáris egyenletrendszer mátrixának rangja 1, ezért nincs másik lineárisan független sajátvektor. Így $\delta \to 0$ esetén csak a $\mathbf{v_1}$ sajátvektort kapjuk meg, $\mathbf{v_2}$-t nem.

10. Az $\mathbf{A} = I$ egységmátrix sajátértékei: $\lambda_{1,2} = 1$. A hozzátartozó sajátvektorok:

$$\mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Határozzuk meg az $\mathbf{A}(\mathbf{t})$ mátrix sajátértékeit és sajátvektorait. Először számítsuk ki a karakterisztikus polinom gyökeit.

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A}(\mathbf{t}) - \lambda \mathbf{I}) &= \begin{vmatrix} 1 + t\cos(\frac{2}{t}) - \lambda & t\sin(\frac{2}{t}) \\ t\sin(\frac{2}{t}) & 1 - t\cos(\frac{2}{t}) - \lambda \end{vmatrix} = \\ &= (1 - \lambda + t\cos(\frac{2}{t}))(1 - \lambda - t\cos(\frac{2}{t})) - t^2\sin^2(\frac{2}{t}) = \\ &= (1-\lambda)^2 - t^2\cos^2(\frac{2}{t}) - t^2\sin^2(\frac{2}{t}) = (1-\lambda)^2 - t^2 = 0 \to \quad \lambda_{1,2} = 1 \pm t \end{aligned}$$

Ellenőrizzük a sajátegyenletbe való behelyettesítéssel, hogy a $\lambda_1 = 1 + t$ és $\lambda_2 = 1 - t$ sajátértékhez tartozó sajátvektorok

$$\mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} \cos(\frac{1}{t}) \\ \sin(\frac{1}{t}) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v_2} = \begin{bmatrix} \sin(\frac{1}{t}) \\ -\cos(\frac{1}{t}) \end{bmatrix}.$$

Látjuk, hogy $t \to 0$ esetén $\mathbf{A(t)} \to \mathbf{A}$ elemenként, sőt az $1 \pm t$ sajátértékek is konvergálnak $\mathbf{A}$ sajátértékeihez. Tekintsük most a $t_k = \frac{1}{k\pi}$, $(k \in \mathbb{N})$ nullához tartó sorozatot, ekkor $\frac{1}{t_k} = k\pi$, $\cos(\frac{1}{t_k}) = \cos(k\pi) = (-1)^k$, $\sin(\frac{1}{t_k}) = \sin(k\pi) = 0$, így

$$\mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} (-1)^k \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ (-1)^{k+1} \end{bmatrix}.$$

Ez azt jelenti, hogy $k \to \infty$ esetén a sajátvektorok divergálnak.

5.2.3. Karakterisztikus polinom meghatározására alkalmas módszerek

11. Számítsuk ki a Fagyejev-féle "trace" módszerbeli S_k -kat $k = 1, 2$ -re.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A^2} = \begin{bmatrix} 25 & 24 \\ 24 & 25 \end{bmatrix}$$

$$S_1 = tr(\mathbf{A}) = 3 + 3 = 6$$
$$S_2 = tr(\mathbf{A^2}) = 25 + 25 = 50$$

A karakterisztikus polinom együtthatóira

$$\begin{aligned} S_1 + p_1 = 0 \quad &\to \quad p_1 = -S_1 = -6 \\ S_2 + p_1 S_1 + 2p_2 = 0 \quad &\to \quad p_2 = -\frac{1}{2}(S_2 + p_1 S_1) = -\frac{1}{2}(50 + (-6) \cdot 6) = -7. \end{aligned}$$

Az $\mathbf{A}$ karakterisztikus polinomja

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 6\lambda - 7.$$

12. Számítsuk ki a Fagyejev-féle "trace" módszerbeli S_k -kat $k = 1, 2$ -re.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A^2} = \begin{bmatrix} 9 & 8 \\ 40 & 41 \end{bmatrix}$$

$$S_1 = tr(\mathbf{A}) = 2 + 6 = 8$$
$$S_2 = tr(\mathbf{A^2}) = 9 + 41 = 50$$

A karakterisztikus polinom együtthatóira

$$\begin{aligned} S_1 + p_1 = 0 \quad &\to \quad p_1 = -S_1 = -8 \\ S_2 + p_1 S_1 + 2p_2 = 0 \quad &\to \quad p_2 = -\frac{1}{2}(S_2 + p_1 S_1) = -\frac{1}{2}(50 + (-8) \cdot 8) = 7. \end{aligned}$$

Az $\mathbf{A}$ karakterisztikus polinomja

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 8\lambda + 7.$$

13. Számítsuk ki a Fagyejev-féle "trace" módszerbeli S_k -kat $k = 1, 2$ -re.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A^2} = \begin{bmatrix} 25 & 28 \\ 42 & 60 \end{bmatrix}$$

$$S_1 = tr(\mathbf{A}) = 1 + 6 = 7$$
$$S_2 = tr(\mathbf{A^2}) = 25 + 60 = 85$$

A karakterisztikus polinom együtthatóira

$$S_1 + p_1 = 0 \quad \rightarrow \quad p_1 = -S_1 = -7$$
$$S_2 + p_1 S_1 + 2p_2 = 0 \quad \rightarrow \quad p_2 = -\frac{1}{2}(S_2 + p_1 S_1) = -\frac{1}{2}(85 + (-7) \cdot 7) = -18.$$

Az $\mathbf{A}$ karakterisztikus polinomja

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 7\lambda - 18.$$

14. Számítsuk ki a Fagyejev-féle "trace" módszerbeli S_k -kat $k = 1, 2$ -re.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A^2} = \begin{bmatrix} 37 & 12 \\ 12 & 37 \end{bmatrix}$$

$$S_1 = tr(\mathbf{A}) = 6 + 6 = 12$$
$$S_2 = tr(\mathbf{A^2}) = 37 + 37 = 74$$

A karakterisztikus polinom együtthatóira

$$S_1 + p_1 = 0 \quad \rightarrow \quad p_1 = -S_1 = -12$$
$$S_2 + p_1 S_1 + 2p_2 = 0 \quad \rightarrow \quad p_2 = -\frac{1}{2}(S_2 + p_1 S_1) = -\frac{1}{2}(74 + (-12) \cdot 12) = 35.$$

Az $\mathbf{A}$ karakterisztikus polinomja

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 12\lambda + 35.$$

15. Számítsuk ki a Fagyejev-féle "trace" módszerbeli S_k -kat $k = 1, 2, 3$ -ra.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A^2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 20 & 16 & 20 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A^3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 84 & 64 & 84 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$S_1 = tr(\mathbf{A}) = 1 + 4 + 1 = 6$$
$$S_2 = tr(\mathbf{A^2}) = 1 + 16 + 1 = 18$$
$$S_3 = tr(\mathbf{A^3}) = 1 + 64 + 1 = 66$$

A karakterisztikus polinom együtthatóira

$$S_1 + p_1 = 0 \quad \rightarrow \quad p_1 = -S_1 = -6$$
$$S_2 + p_1 S_1 + 2p_2 = 0 \quad \rightarrow \quad p_2 = -\frac{1}{2}(S_2 + p_1 S_1) = -\frac{1}{2}(18 + (-6) \cdot 6) = 9$$
$$S_3 + p_1 S_2 + p_2 S_1 + 3p_3 = 0 \quad \rightarrow \quad p_3 = -\frac{1}{3}(S_3 + p_1 S_2 + p_2 S_1) =$$
$$= -\frac{1}{3}(66 + (-6) \cdot 18 + 9 \cdot 6) = -\frac{12}{3} = -4.$$

Az $\mathbf{A}$ karakterisztikus polinomja

$$P(\lambda) = \lambda^3 - 6\lambda^2 + 9\lambda - 4.$$

16. Számítsuk ki a Fagyejev-féle "trace" módszerbeli S_k -kat $k = 1, 2, 3$ -ra.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A^2} = \begin{bmatrix} 5 & -4 & 1 \\ -4 & 6 & -4 \\ 1 & -4 & 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A^3} = \begin{bmatrix} 14 & -14 & 6 \\ -14 & 20 & -14 \\ 6 & -14 & 14 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} S_1 &= tr(\mathbf{A}) = 2 + 2 + 2 = 6 \\ S_2 &= tr(\mathbf{A^2}) = 5 + 6 + 5 = 16 \\ S_3 &= tr(\mathbf{A^3}) = 14 + 20 + 14 = 48 \end{aligned}$$

A karakterisztikus polinom együtthatóira

$$\begin{aligned} S_1 + p_1 = 0 \quad &\rightarrow \quad p_1 = -S_1 = -6 \\ S_2 + p_1 S_1 + 2p_2 = 0 \quad &\rightarrow \quad p_2 = -\frac{1}{2}(S_2 + p_1 S_1) = -\frac{1}{2}(16 + (-6)\cdot 6) = 10 \\ S_3 + p_1 S_2 + p_2 S_1 + 3p_3 = 0 \quad &\rightarrow \quad p_3 = -\frac{1}{3}(S_3 + p_1 S_2 + p_2 S_1) = \\ &= -\frac{1}{3}(48 + (-6)\cdot 16 + 10 \cdot 6) = -4. \end{aligned}$$

Az $\mathbf{A}$ karakterisztikus polinomja

$$P(\lambda) = \lambda^3 - 6\lambda^2 + 10\lambda - 4 = (\lambda - 2)(\lambda^2 - 4\lambda + 2).$$

17. Az $\mathbf{A} = tridiag(\beta_{i-1}, \alpha_i, \gamma_i)$ mátrixra

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 & 0 \\ \beta_1 & \alpha_2 & \gamma_2 \\ 0 & \beta_2 & \alpha_3 \end{bmatrix}.$$

A karakterisztikus polinom rekurziója

$$\begin{aligned} p_0(\lambda) &= 1 \\ p_1(\lambda) &= \alpha_1 - \lambda \\ p_k(\lambda) &= (\alpha_k - \lambda)\cdot p_{k-1}(\lambda) - \beta_{k-1}\gamma_{k-1}\cdot p_{k-2}(\lambda) \quad (k = 2, 3). \end{aligned}$$

A képleteket alkalmazzuk a megadott mátrixra

$$\begin{aligned} p_0(\lambda) &= 1 \\ p_1(\lambda) &= 1 - \lambda \\ p_2(\lambda) &= (4 - \lambda)\cdot p_1(\lambda) - 4\cdot 0\cdot p_0(\lambda) = (4 - \lambda)\cdot p_1(\lambda) \\ p_3(\lambda) &= (1 - \lambda)\cdot p_2(\lambda) - 0\cdot 4\cdot p_1(\lambda) = (1 - \lambda)\cdot p_2(\lambda). \end{aligned}$$

A kapott $p_3(\lambda)$ az $\mathbf{A}$ mátrix karakterisztikus polinomja.

18. Az $\mathbf{A} = tridiag(\beta_{i-1}, \alpha_i, \gamma_i)$ szimmetrikus mátrixra $\beta_i = \gamma_i \ \ (i = 1, 2)$,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 & 0 \\ \beta_1 & \alpha_2 & \gamma_2 \\ 0 & \beta_2 & \alpha_3 \end{bmatrix}.$$

A karakterisztikus polinom rekurziója

$$\begin{aligned} p_0(\lambda) &= 1 \\ p_1(\lambda) &= \alpha_1 - \lambda \\ p_k(\lambda) &= (\alpha_k - \lambda) \cdot p_{k-1}(\lambda) - \beta_{k-1}\gamma_{k-1} \cdot p_{k-2}(\lambda) \quad (k = 2, 3). \end{aligned}$$

A képleteket alkalmazzuk a megadott mátrixra

$$\begin{aligned} p_0(\lambda) &= 1 \\ p_1(\lambda) &= 2 - \lambda \\ p_2(\lambda) &= (2 - \lambda) \cdot p_1(\lambda) - (-1) \cdot (-1) \cdot p_0(\lambda) = (2 - \lambda) \cdot p_1(\lambda) - 1 \\ p_3(\lambda) &= (2 - \lambda) \cdot p_2(\lambda) - (-1) \cdot (-1) \cdot p_1(\lambda) = (2 - \lambda) \cdot p_2(\lambda) - p_1(\lambda). \end{aligned}$$

A kapott $p_3(\lambda)$ az $\mathbf{A}$ mátrix karakterisztikus polinomja. Készítsünk egy táblázatot, ahová a p_k polinomok helyettesítéseit írjuk be. A $[0; 4]$ intervallumból indulunk az intervallumfelezéssel, majd megfelezzük az intervallumot.

x_i	$p_0(x_i)$	$p_1(x_i)$	$p_2(x_i)$	$p_3(x_i)$
0	1	$2 - 0 = 1$	$(2 - 0) \cdot 1 - 1 = 1$	$(2 - 0) \cdot 1 - 1 = 1$
4	1	$2 - 4 = -2$	$(2 - 4) \cdot (-2) - 1 = 3$	$(2 - 4) \cdot 3 - (-2) = -4$
2	1	$2 - 2 = 0$	$(2 - 2) \cdot 0 - 1 = -1$	$(2 - 2) \cdot (-1) - 0 = 0$

Nem kell tovább folytatnunk a módszert, mert $p_3(2) = 0$, vagyis a karakterisztikus polinomnak gyöke a 2.

5.2.4. Hatványmódszer és inverz iteráció

19. A hatvány módszer az $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{nxn}$ mátrix maximális abszolút értékű sajátértékének és a hozzátartozó sajátvektorának a meghatározására alkalmas. A módszer egy iterációs megoldást szolgáltat a következő formában.

Legyen $\mathbf{x_0} \in \mathbb{R}^n$ kezdővektor, ekkor

$$\mathbf{x_k} := \mathbf{A}\mathbf{x_{k-1}} \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Nézzük meg a módszert a konkrét példánkon.
Első lépésként el kell készítenünk az $\mathbf{x_k}$ vektorokat.

$$\mathbf{x_1} = \mathbf{A}\mathbf{x_0} \quad \longrightarrow \quad \mathbf{x_1} = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x_2} = \mathbf{A}\mathbf{x_1} \quad \longrightarrow \quad \mathbf{x_2} = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 \\ 25 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x_3} = \mathbf{A}\mathbf{x_2} \quad \longrightarrow \quad \mathbf{x_3} = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 25 \\ 25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 125 \\ 125 \end{bmatrix}$$

Ebből közelítést adhatunk a maximális abszolútértékű sajátértékre. Keretezve jelöljük a vektor végtelen normájának megfelelő elemét, melynek pozíciója szükséges a hányadosképzéshez.

$$\mathbf{x_0} = \begin{bmatrix} \boxed{1} \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x_1} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix} \qquad \longrightarrow \qquad \lambda_1^{(1)} = \frac{x_1^{(1)}}{x_0^{(1)}} = \frac{5}{1} = 5$$

$$\mathbf{x_1} = \begin{bmatrix} \boxed{5} \\ 5 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x_2} = \begin{bmatrix} 25 \\ 25 \end{bmatrix} \qquad \longrightarrow \qquad \lambda_1^{(2)} = \frac{x_2^{(1)}}{x_1^{(1)}} = \frac{25}{5} = 5$$

$$\mathbf{x_2} = \begin{bmatrix} \boxed{25} \\ 25 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x_3} = \begin{bmatrix} 125 \\ 125 \end{bmatrix} \qquad \longrightarrow \qquad \lambda_1^{(3)} = \frac{x_3^{(1)}}{x_2^{(1)}} = \frac{125}{25} = 5$$

Tehát a maximális abszolútértékű sajátérték közelítése: $\lambda_1 = 5$.

Ellenőrizhetjük a közelítésünket. Mivel a sajátérték gyöke a karakterisztikus polinomnak.

$$P(\lambda) = (7-\lambda)(1-\lambda) + 8 = 0 \longrightarrow P(5) = (7-5)(1-5) + 8 = 2 \cdot (-4) + 8 = 0 \checkmark$$

20. Az előbbi feladatban ismertetett módszer segítségével oldjuk meg a feladatot, vagyis első lépésként el kell készítenünk az $\mathbf{x_k}$ vektorokat.

$$\mathbf{x_1} = \mathbf{A}\mathbf{x_0} \qquad \longrightarrow \qquad \mathbf{x_1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x_2} = \mathbf{A}\mathbf{x_1} \qquad \longrightarrow \qquad \mathbf{x_2} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 24 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x_3} = \mathbf{A}\mathbf{x_2} \qquad \longrightarrow \qquad \mathbf{x_3} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 13 \\ 24 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 85 \\ 172 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x_4} = \mathbf{A}\mathbf{x_3} \qquad \longrightarrow \qquad \mathbf{x_4} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 85 \\ 172 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 601 \\ 1200 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x_5} = \mathbf{A}\mathbf{x_4} \qquad \longrightarrow \qquad \mathbf{x_5} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 601 \\ 1200 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4201 \\ 8404 \end{bmatrix}$$

Ebből közelítést adhatunk a maximális abszolútértékű sajátértékre.

$$\mathbf{x_0} = \begin{bmatrix} \boxed{1} \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} \qquad \longrightarrow \qquad \lambda_1^{(1)} = \frac{x_1^{(1)}}{x_0^{(1)}} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\mathbf{x_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ \boxed{4} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x_2} = \begin{bmatrix} 13 \\ 24 \end{bmatrix} \qquad \longrightarrow \qquad \lambda_1^{(2)} = \frac{x_2^{(2)}}{x_1^{(2)}} = \frac{24}{4} = 6$$

$$\mathbf{x_2} = \begin{bmatrix} 13 \\ \boxed{24} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x_3} = \begin{bmatrix} 85 \\ 172 \end{bmatrix} \qquad \longrightarrow \qquad \lambda_1^{(3)} = \frac{x_3^{(2)}}{x_2^{(2)}} = \frac{172}{24} = 7.1667$$

$$\mathbf{x_3} = \begin{bmatrix} 85 \\ \boxed{172} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x_4} = \begin{bmatrix} 601 \\ 1200 \end{bmatrix} \qquad \longrightarrow \qquad \lambda_1^{(4)} = \frac{x_4^{(2)}}{x_3^{(2)}} = \frac{1200}{172} = 6.9767$$

$$\mathbf{x_4} = \begin{bmatrix} 601 \\ \boxed{1200} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x_5} = \begin{bmatrix} 4201 \\ 8404 \end{bmatrix} \qquad \longrightarrow \qquad \lambda_1^{(5)} = \frac{x_5^{(2)}}{x_4^{(2)}} = \frac{8404}{1200} = 7.0033$$

Tehát a maximális abszolútértékű sajátérték közelítése: $\lambda_1 = 7$.

Könnyen ellenőrizhetjük a közelítésünket, hiszen a sajátérték gyöke a karakterisztikus polinomnak.

$$P(\lambda) = (1-\lambda)(5-\lambda) - 12 = 0 \longrightarrow P(7) = (1-7)(5-7) - 12 = (-6) \cdot (-2) - 12 = 0 \checkmark$$

21. Az előbbi feladatban ismertetett módszer segítségével oldjuk meg a feladatot, vagyis első lépésként el kell készítenünk az $\mathbf{x_k}$ vektorokat.

$$\mathbf{x_1} = \mathbf{A}\mathbf{x_0} \quad \longrightarrow \quad \mathbf{x_1} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x_2} = \mathbf{A}\mathbf{x_1} \quad \longrightarrow \quad \mathbf{x_2} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x_3} = \mathbf{A}\mathbf{x_2} \quad \longrightarrow \quad \mathbf{x_3} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 25 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 125 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ebből közelítést adhatunk a maximális abszolútértékű sajátértékre.

$$\mathbf{x_0} = \begin{bmatrix} \boxed{1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x_1} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \longrightarrow \quad \lambda_1^{(1)} = \frac{x_1^{(1)}}{x_0^{(1)}} = \frac{5}{1} = 5$$

$$\mathbf{x_1} = \begin{bmatrix} \boxed{5} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x_2} = \begin{bmatrix} 25 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \longrightarrow \quad \lambda_1^{(2)} = \frac{x_2^{(1)}}{x_1^{(1)}} = \frac{25}{5} = 5$$

$$\mathbf{x_2} = \begin{bmatrix} \boxed{25} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x_3} = \begin{bmatrix} 125 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \longrightarrow \quad \lambda_1^{(3)} = \frac{x_3^{(1)}}{x_2^{(1)}} = \frac{125}{25} = 5$$

Tehát a maximális abszolútértékű sajátérték közelítése: $\lambda_1 = 5$.

Könnyen ellenőrizhetjük a közelítésünket, hiszen a sajátérték gyöke a karakterisztikus polinomnak.

$$P(\lambda) = (5-\lambda)\left[(1-\lambda)(3-\lambda)-2\right] = 0 \longrightarrow P(5) = (5-5)\left[(1-5)(3-5)-2\right] = 0\cdot 6 = 0 \checkmark$$

22. Az előbbi feladatban ismertetett módszer segítségével oldjuk meg a feladatot, vagyis első lépésként el kell készítenünk az $\mathbf{x_k}$ vektorokat.

$$\mathbf{x_1} = \mathbf{A}\mathbf{x_0} \quad \longrightarrow \quad \mathbf{x_1} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 11 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x_2} = \mathbf{A}\mathbf{x_1} \quad \longrightarrow \quad \mathbf{x_2} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23 \\ 42 \\ 83 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x_3} = \mathbf{A}\mathbf{x_2} \quad \longrightarrow \quad \mathbf{x_3} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 23 \\ 42 \\ 83 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 152 \\ 296 \\ 591 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x_4} = \mathbf{A}\mathbf{x_3} \quad \longrightarrow \quad \mathbf{x_4} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 152 \\ 296 \\ 591 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1047 \\ 2078 \\ 4155 \end{bmatrix}$$

Ebből közelítést adhatunk a maximális abszolútértékű sajátértékre.

$$\mathbf{x_0} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \boxed{1} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x_1} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 11 \end{bmatrix} \qquad \longrightarrow \qquad \lambda_1^{(1)} = \frac{x_1^{(3)}}{x_0^{(3)}} = \frac{11}{1} = 11$$

$$\mathbf{x_1} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ \boxed{11} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x_2} = \begin{bmatrix} 23 \\ 42 \\ 83 \end{bmatrix} \qquad \longrightarrow \qquad \lambda_1^{(2)} = \frac{x_2^{(3)}}{x_1^{(3)}} = \frac{83}{11} \approx 7,546$$

$$\mathbf{x_2} = \begin{bmatrix} 23 \\ 42 \\ \boxed{83} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x_3} = \begin{bmatrix} 152 \\ 296 \\ 591 \end{bmatrix} \qquad \longrightarrow \qquad \lambda_1^{(3)} = \frac{x_3^{(3)}}{x_2^{(3)}} = \frac{591}{83} \approx 7,12$$

$$\mathbf{x_3} = \begin{bmatrix} 152 \\ 296 \\ \boxed{591} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x_3} = \begin{bmatrix} 1047 \\ 2078 \\ 4155 \end{bmatrix} \qquad \longrightarrow \qquad \lambda_1^{(4)} = \frac{x_4^{(3)}}{x_3^{(3)}} = \frac{4155}{591} \approx 7,03$$

Tehát a maximális abszolútértékű sajátérték közelítése: $\lambda_1 = 7$.

Könnyen ellenőrizhetjük a közelítésünket, hiszen a sajátérték gyöke a karakterisztikus polinomnak.

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= (3-\lambda)(2-\lambda)(5-\lambda) - 4(2-\lambda) - 4(3-\lambda) + 4 && \longrightarrow \\ P(7) &= (3-7)(2-7)(5-7) - 4\cdot(2-7) - 4\cdot(3-7) + 4 && = \\ &= (-40) - 4\cdot(-5) - 4\cdot(-4) + 4 = -40 + 20 + 16 + 4 && = \quad 0 \checkmark \end{aligned}$$

23. Első lépésként készítsük el az $\mathbf{x_k}$ vektorokat.

$$\mathbf{x_1} = \mathbf{A}\mathbf{x_0} \qquad \longrightarrow \qquad \mathbf{x_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 12 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x_2} = \mathbf{A}\mathbf{x_1} \qquad \longrightarrow \qquad \mathbf{x_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 12 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 56 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x_3} = \mathbf{A}\mathbf{x_2} \qquad \longrightarrow \qquad \mathbf{x_3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 56 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 232 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Vegyük észre, hogy 3 lépés elegendő a domináns sajátérték becslésére.

$$\mathbf{x_0} = \begin{bmatrix} 1 \\ \boxed{1} \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 12 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \longrightarrow \qquad \lambda_1^{(1)} = \frac{x_1^{(2)}}{x_0^{(2)}} = \frac{12}{1} = 12$$

$$\mathbf{x_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ \boxed{12} \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 56 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \longrightarrow \qquad \lambda_1^{(2)} = \frac{x_2^{(2)}}{x_1^{(2)}} = \frac{56}{12} = \frac{14}{3} \approx 4,667$$

$$\mathbf{x_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ \boxed{56} \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x_3} = \begin{bmatrix} 1 \\ 232 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \longrightarrow \qquad \lambda_1^{(3)} = \frac{x_3^{(2)}}{x_2^{(2)}} = \frac{232}{56} = \frac{29}{7} \approx 4,143$$

Tehát a maximális abszolútértékű sajátértékre a sejtés: $\lambda_1 = 4$.

A sejtés ellenőrzésére használjuk a karakterisztikus polinomot.

$$P(\lambda) = (1-\lambda)(4-\lambda)(1-\lambda) \longrightarrow P(4) = (1-4)(4-4)(1-4) = (-3)\cdot 0 \cdot (-3) = 0 \checkmark$$

24. **a)** Oldjuk meg először a már bemutatott módszer segítségével a feladatot.

Első lépésként készítsük el az $\mathbf{x_k}$ vektorokat.

$$\mathbf{x_1} = \mathbf{A}\mathbf{x_0} \qquad \longrightarrow \qquad \mathbf{x_1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x_2} = \mathbf{A}\mathbf{x_1} \qquad \longrightarrow \qquad \mathbf{x_2} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x_3} = \mathbf{A}\mathbf{x_2} \qquad \longrightarrow \qquad \mathbf{x_3} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ -13 \end{bmatrix}$$

Vegyük észre, hogy 3 lépés elegendő a domináns sajátérték becslésére.

$$\mathbf{x_0} = \begin{bmatrix} \boxed{1} \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x_1} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad \longrightarrow \qquad \lambda_1^{(1)} = \frac{x_1^{(1)}}{x_0^{(1)}} = \frac{2}{1} = 2$$

$$\mathbf{x_1} = \begin{bmatrix} \boxed{2} \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x_2} = \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \end{bmatrix} \qquad \longrightarrow \qquad \lambda_1^{(2)} = \frac{x_2^{(1)}}{x_1^{(1)}} = \frac{5}{2} = 3 - \frac{1}{2} = 2,5$$

$$\mathbf{x_2} = \begin{bmatrix} \boxed{5} \\ -4 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x_3} = \begin{bmatrix} 14 \\ -13 \end{bmatrix} \qquad \longrightarrow \qquad \lambda_1^{(3)} = \frac{x_3^{(1)}}{x_2^{(1)}} = \frac{14}{5} = 3 - \frac{1}{5} = 2,8$$

Tehát a maximális abszolútértékű sajátértékre a sejtés: $\lambda_1 = 3$.

b) Mivel szimmetrikus mátrixról van szó, így alkalmazható a Rayleigh-hányados módszer. Ebben az esetben is ki kell számolnunk az $\mathbf{x_k}$ vektorokat, így az előző pontban meghatározott vektorokat használjuk fel. A különbség az előző módszerhez képest, hogy ebben az esetben nem a maximális abszolút értékű elemet, illetve annak pozícóját alkalmazzuk, hanem az alábbi skalárisszorzatokat alkalmazzuk a hányadosok kiszámítására.

$$\begin{aligned} \frac{< x_0, x_1 >}{< x_0, x_0 >} &= \frac{2}{1} \\ \frac{< x_1, x_2 >}{< x_1, x_1 >} &= \frac{14}{5} = 3 - \frac{1}{5} = 2,8 \\ \frac{< x_2, x_3 >}{< x_2, x_2 >} &= \frac{122}{41} = 3 - \frac{1}{41} = 2,976 \end{aligned}$$

Tehát a sejtés itt is $\lambda_1 = 3$, de vegyük észre, hogy ebben az esetben 3 lépés után pontosabb a becslés, mint az előző módszerrel.

A sejtés ellenőrzésére használjuk a karakterisztikus polinomot.

$$P(\lambda) = (2-\lambda)^2 - 1 \longrightarrow P(3) = (2-3)^2 - 1 = 1 - 1 = 0 \checkmark$$

25. **a)** Az előző feladat megoldásához hasonlóan először a maximális abszolútértékű komponensek hányadosával oldjuk meg a feladatot, tehát elkészítjük az $\mathbf{x_k}$ vektorokat.

$$\mathbf{x_1} = \mathbf{A}\mathbf{x_0} \qquad \longrightarrow \qquad \mathbf{x_1} = \begin{bmatrix} 5 & -2 & -4 \\ -2 & 2 & 2 \\ -4 & 2 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x_2} = \mathbf{A}\mathbf{x_1} \qquad \longrightarrow \qquad \mathbf{x_2} = \begin{bmatrix} 5 & -2 & -4 \\ -2 & 2 & 2 \\ -4 & 2 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -21 \\ 12 \\ 23 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x_3} = \mathbf{A}\mathbf{x_2} \qquad \longrightarrow \qquad \mathbf{x_3} = \begin{bmatrix} 5 & -2 & -4 \\ -2 & 2 & 2 \\ -4 & 2 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -21 \\ 12 \\ 23 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -221 \\ 112 \\ 223 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x_4} = \mathbf{A}\mathbf{x_3} \qquad \longrightarrow \qquad \mathbf{x_4} = \begin{bmatrix} 5 & -2 & -4 \\ -2 & 2 & 2 \\ -4 & 2 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -221 \\ 112 \\ 223 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2221 \\ 1112 \\ 2223 \end{bmatrix}$$

Vegyük észre, hogy 4 lépés elegendő a domináns sajátérték becslésére.

$$\mathbf{x_0} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \boxed{1} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x_1} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad \longrightarrow \qquad \lambda_1^{(1)} = \frac{x_1^{(3)}}{x_0^{(3)}} = \frac{3}{1} = 3$$

$$\mathbf{x_1} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ \boxed{3} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x_2} = \begin{bmatrix} -21 \\ 12 \\ 23 \end{bmatrix} \qquad \longrightarrow \qquad \lambda_1^{(2)} = \frac{x_2^{(3)}}{x_1^{(3)}} = \frac{23}{3} \approx 7,667$$

$$\mathbf{x_2} = \begin{bmatrix} -21 \\ 12 \\ \boxed{23} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x_3} = \begin{bmatrix} -221 \\ 112 \\ 223 \end{bmatrix} \qquad \longrightarrow \qquad \lambda_1^{(3)} = \frac{x_3^{(3)}}{x_2^{(3)}} = \frac{223}{23} \approx 9,696$$

$$\mathbf{x_3} = \begin{bmatrix} -221 \\ 112 \\ \boxed{223} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x_3} = \begin{bmatrix} -2221 \\ 1112 \\ 2223 \end{bmatrix} \qquad \longrightarrow \qquad \lambda_1^{(3)} = \frac{x_4^{(3)}}{x_3^{(3)}} = \frac{2223}{223} \approx 9,969$$

Tehát a maximális abszolútértékű sajátértékre a sejtés: $\lambda_1 = 10$.

b) Mivel **A** szimmetrikus mátrix, ezért alkalmazható a Rayleigh-hányados módszer.

Ebben az esetben is ki kell számolnunk az $\mathbf{x_k}$ vektorokat, így az előző pontban meghatározott vektorokat használjuk fel. A különbség az előző módszerhez képest, hogy ebben az esetben nem a maximális abszolútértékű elemet, illetve annak pozícóját alkalmazzuk, hanem az alábbi skalárisszorzatokat alkalmazzuk a hányadosok kiszámítására.

$$\begin{aligned}
\frac{< x_0, x_1 >}{< x_0, x_0 >} &= \frac{4}{3} \approx 1,333 \\
\frac{< x_1, x_2 >}{< x_1, x_1 >} &= \frac{114}{14} = \frac{57}{7} = 8,143 \\
\frac{< x_2, x_3 >}{< x_2, x_2 >} &= \frac{1114}{114} = \frac{557}{57} = 9,772 \\
\frac{< x_3, x_4 >}{< x_3, x_3 >} &= \frac{11114}{1114} = \frac{5557}{557} = 9,977
\end{aligned}$$

Tehát a sejtés itt is $\lambda_1 = 10$, de vegyük észre, hogy ebben az esetben pontosabb a becslés, mint az előző módszerrel.

A sejtés ellenőrzésére használjuk a karakterisztikus polinomot.

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= (5-\lambda)^2(2-\lambda) - 8(5-\lambda) - 16(2-\lambda) + 32 \longrightarrow \\ P(10) &= (-5)^2 \cdot (-8) - 8 \cdot (-5) - 16 \cdot (-8) + 32 = -200 + 40 + 128 + 32 = 0 \checkmark \end{aligned}$$

26. Az inverz iteráció lényege megegyezik a hatvány iteráció vezér gondolatával. A különbség két helyen jelentkezik, az egyik, hogy nem az eredeti mátrixon dolgozunk, hanem annak inverzén. Itt fontos megjegyezni, hogy ebből következően természetesen az inverz iteráció csak invertálható mátrixokra működik. A másik fontos különbség, hogy nem a legnagyobb, hanem a legkisebb abszolút értékű sajátérték becsléshez ad segítséget a módszer, ellentétben a hatványiterációval.

Első lépésként határozzuk meg a mátrix inverzét.

$$\mathbf{A^{-1}} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$$

Ezt követően a lépések megegyeznek a hatványmódszernél megismertekkel, vagyis meghatározzuk az $\mathbf{x_k}$ vektorokat.

$$\mathbf{x_1} = \mathbf{A^{-1}x_0} \qquad \longrightarrow \qquad \mathbf{x_1} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{7} \\ \frac{4}{7} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x_2} = \mathbf{A^{-1}x_1} \qquad \longrightarrow \qquad \mathbf{x_2} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{5}{7} \\ \frac{4}{7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{37}{49} \\ -\frac{24}{49} \end{bmatrix}$$

Ezt követően pedig a már megszokott módon meghatározzuk a közelítő sorozat elemeit.

$$\mathbf{x_0} = \begin{bmatrix} \boxed{1} \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x_1} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{7} \\ \frac{4}{7} \end{bmatrix} \quad \longrightarrow \quad \lambda_1^{(1)} = \frac{x_1^{(1)}}{x_0^{(1)}} = \frac{-\frac{5}{7}}{1} = -\frac{5}{7}$$

$$\mathbf{x_1} = \begin{bmatrix} \boxed{-\frac{5}{7}} \\ \frac{4}{7} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x_2} = \begin{bmatrix} \frac{37}{49} \\ -\frac{24}{49} \end{bmatrix} \quad \longrightarrow \quad \lambda_1^{(2)} = \frac{x_2^{(1)}}{x_1^{(1)}} = \frac{\frac{37}{49}}{-\frac{5}{7}} = -\frac{38}{49} \cdot \frac{7}{5} = -\frac{37}{35} = -1.0571$$

Tehát a sejtés $\lambda_2 = -1$.

A sejtés ellenőrzésére használjuk a karakterisztikus polinomot.

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= (1-\lambda)(5-\lambda) - 12 \longrightarrow \\ P(-1) &= (1-(-1))(5-(-1)) - 12 = (2 \cdot 6) - 12 = 0 \checkmark \end{aligned}$$

27. **a)** Először a maximális abszolútértékű komponensek hányadosával oldjuk meg a feladatot.

Első lépésként meghatározzuk a mátrix inverzét.

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

A következő lépés az, hogy meghatározzuk az $\mathbf{x_k}$ vektorokat.

$$\mathbf{x_1} = \mathbf{A^{-1}x_0} \qquad \longrightarrow \qquad \mathbf{x_1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x_2} = \mathbf{A^{-1}x_1} \qquad \longrightarrow \qquad \mathbf{x_2} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{9} \\ \frac{4}{9} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x_3} = \mathbf{A^{-1}x_2} \qquad \longrightarrow \qquad \mathbf{x_3} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{5}{9} \\ \frac{4}{9} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{14}{27} \\ \frac{13}{27} \end{bmatrix}$$

Tehát közelítő sorozat elemei

$$\mathbf{x_0} = \begin{bmatrix} \boxed{1} \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x_1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} \qquad \longrightarrow \qquad \lambda_1^{(1)} = \frac{x_1^{(1)}}{x_0^{(1)}} = \frac{\frac{2}{3}}{1} = \frac{2}{3}$$

$$\mathbf{x_1} = \begin{bmatrix} \boxed{\frac{2}{3}} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x_2} = \begin{bmatrix} \frac{5}{9} \\ \frac{4}{9} \end{bmatrix} \qquad \longrightarrow \qquad \lambda_1^{(2)} = \frac{x_2^{(1)}}{x_1^{(1)}} = \frac{\frac{5}{9}}{\frac{2}{3}} = \frac{5}{9} \cdot \frac{3}{2} = \frac{5}{6} = 1 - \frac{1}{6}$$

$$\mathbf{x_2} = \begin{bmatrix} \boxed{\frac{5}{9}} \\ \frac{4}{9} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x_3} = \begin{bmatrix} \frac{14}{27} \\ \frac{13}{27} \end{bmatrix} \qquad \longrightarrow \qquad \lambda_1^{(3)} = \frac{x_3^{(1)}}{x_2^{(1)}} = \frac{\frac{14}{27}}{\frac{5}{9}} = \frac{14}{27} \cdot \frac{9}{5} = \frac{14}{15} = 1 - \frac{1}{15}.$$

Tehát a sejtés $\lambda_2 = 1$.

b) Nézzük meg a Rayleigh-hányados segítségével.

$$\begin{aligned} \frac{< x_0, x_1 >}{< x_0, x_0 >} &= \frac{2}{3} = 1 - \frac{1}{3} \\ \frac{< x_1, x_2 >}{< x_1, x_1 >} &= \frac{14}{15} = 1 - \frac{1}{15} \\ \frac{< x_2, x_3 >}{< x_2, x_2 >} &= \frac{122}{123} = 1 - \frac{1}{123} \approx 1 \end{aligned}$$

Tehát a sejtés itt is $\lambda_2 = 1$. Mint a korábbi feladatnál is láttuk, a Rayleigh-hányados pontosabb becslést ad, mint az előző módszer.

A rend kedvéért ellenőrizzük a sejtésünket a karakterisztikus polinom segítségével.

$$P(\lambda) = (2 - \lambda)^2 - 1 \longrightarrow P(1) = 1 - 1 = 0 \checkmark$$

5.2.5. Rangszám csökkentés

28. Ellenőrizzük, hogy **B**-nek a 0 sajátértékhez tartozó sajátvektora $\mathbf{v_1}$.

$$\begin{aligned} \mathbf{Bv_1} &= (\mathbf{A} - \mathbf{v_1} \cdot \mathbf{y^T}) \cdot \mathbf{v_1} = \mathbf{Av_1} - \mathbf{v_1} \cdot \mathbf{y^T v_1} = \\ &= \lambda_\mathbf{1} \mathbf{v_1} - (\mathbf{y^T v_1}) \cdot \mathbf{v_1} = \lambda_\mathbf{1} \mathbf{v_1} - \lambda_\mathbf{1} \mathbf{v_1} = \mathbf{0} = 0 \cdot \mathbf{v_1} \end{aligned}$$

Bebizonyítjuk, hogy **B**-nek a λ_i sajátértékhez tartozó sajátvektora

$$\mathbf{u_1} = \mathbf{v_i} - \frac{\mathbf{y^T v_i}}{\lambda_i} \mathbf{v_1}.$$

Felhasználjuk, hogy $\mathbf{y^T v_1} = \lambda_1$, $\mathbf{Av_1} = \lambda_\mathbf{1} \cdot \mathbf{v_1}$ és $\mathbf{Av_i} = \lambda_\mathbf{i} \cdot \mathbf{v_i}$.

$$\begin{aligned} \mathbf{Bu_i} &= (\mathbf{A} - \mathbf{v_1} \cdot \mathbf{y^T}) \left(\mathbf{v_i} - \frac{\mathbf{y^T v_i}}{\lambda_i} \mathbf{v_1} \right) = \\ &= \mathbf{Av_i} - \mathbf{v_1} \cdot \mathbf{y^T v_i} - \frac{\mathbf{y^T v_i}}{\lambda_i} \mathbf{Av_1} + \mathbf{v_1} \cdot \mathbf{y^T} \cdot \frac{\mathbf{y^T v_i}}{\lambda_i} \mathbf{v_1} = \\ &= \lambda_\mathbf{i} \mathbf{v_i} - \mathbf{y^T v_i} \cdot \mathbf{v_1} - \frac{\mathbf{y^T v_i}}{\lambda_i} \lambda_\mathbf{1} \mathbf{v_1} + \frac{\mathbf{y^T v_i}}{\lambda_i} \mathbf{v_1} \cdot \mathbf{y^T v_1} = \\ &= \lambda_\mathbf{i} \mathbf{v_i} - \mathbf{y^T v_i} \cdot \mathbf{v_1} - \frac{\mathbf{y^T v_i}}{\lambda_i} \lambda_\mathbf{1} \mathbf{v_1} + \frac{\mathbf{y^T v_i}}{\lambda_i} \mathbf{v_1} \cdot \lambda_1 = \\ &= \lambda_\mathbf{i} \mathbf{v_i} - \mathbf{y^T v_i} \cdot \mathbf{v_1} = \lambda_i \cdot (\mathbf{v_i} - \frac{\mathbf{y^T v_i}}{\lambda_i} \mathbf{v_1}) = \lambda_i \cdot \mathbf{u_i} \end{aligned}$$

Ezzel a bizonyítandó állítást beláttuk.

29. **a)** Az állítás a Householder transzformáció tulajdonságából egyszerűen adódik. Mivel

$$\mathbf{He_1} = \mathbf{H}(\mathbf{Hv_1}) = \mathbf{H^2v_1} = \mathbf{v_1},$$
$$\mathbf{HAH\,e_1} = \mathbf{HAv_1} = \mathbf{H}\cdot\lambda_1\mathbf{v_1} = \lambda_1\cdot\mathbf{Hv_1} = \lambda_1\,\mathbf{e_1},$$

ami **HAH**-nak a megadott blokkosítását jelenti. Mivel **HAH** hasonló az **A** mátrixhoz, ezért a sajátártékeik megegyeznek. **HAH** egyik sajárértéke a λ_1, a többi a **B** megfelelő sajátértékeivel egyezik. Ezzel a feladat első részét beláttuk.

b) A továbbiakban tegyük fel, hogy meghatároztuk a **B** $\lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sajátértékeit és $\mathbf{u_2}, \ldots, \mathbf{u_n}$ sajátvektorait. Ezek segítségével szeretnénk az eredeti **A** mátrix sajátvektorait előállítani. A **HAH** mátrix sajátegyenlete

$$\left[\begin{array}{c|c} \lambda_1 & \mathbf{b^T} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{B} \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c} \beta_\mathbf{i} \\ \hline \mathbf{u_i} \end{array}\right] = \lambda_i \cdot \left[\begin{array}{c} \beta_\mathbf{i} \\ \hline \mathbf{u_i} \end{array}\right].$$

Felírva a blokkos szorzásokat, a következő egyenleteket kapjuk

$$\lambda_1\cdot\beta_i + \mathbf{b^T u_i} = \lambda_\mathbf{i}\cdot\beta_\mathbf{i}$$
$$\mathbf{Bu_i} = \lambda_\mathbf{i}\mathbf{u_i}.$$

Innen β_i-t kifejezhetjük, ha $\lambda_i \neq \lambda_1$.

$$\beta_i = \frac{\mathbf{b^T u_i}}{\lambda_1 - \lambda_i}$$

Ha $\lambda_i = \lambda_1$, akkor $\mathbf{b^T u_i} = 0$-nak kell lennie (másképp ellentmondást kapunk), ekkor β_i értéke bármi lehet. Tehát az $\mathbf{u_i}$ sajátvektort ezzel a β_i-vel kell kiegészítenünk, hogy megkapjuk **HAH** sajátvektorait.

$$\mathbf{HAH}\left[\begin{array}{c} \beta_\mathbf{i} \\ \hline \mathbf{u_i} \end{array}\right] = \lambda_i \cdot \left[\begin{array}{c} \beta_\mathbf{i} \\ \hline \mathbf{u_i} \end{array}\right]$$

H-val balról szorozva

$$\mathbf{AH}\left[\begin{array}{c} \beta_\mathbf{i} \\ \hline \mathbf{u_i} \end{array}\right] = \lambda_i \cdot \mathbf{H}\left[\begin{array}{c} \beta_\mathbf{i} \\ \hline \mathbf{u_i} \end{array}\right].$$

Ebből látszik, hogy **A** sajátvektorai

$$\mathbf{v_i} = \mathbf{H}\left[\begin{array}{c} \beta_\mathbf{i} \\ \hline \mathbf{u_i} \end{array}\right].$$

5.2.6. Jacobi módszer

30. A Jacobi módszer célja a mátrix főátlón kívüli elemeinek iteratív eljárással történő kinullázása úgy, hogy végeredményben a $diag(\lambda_i(\mathbf{A}))$ mátrixhoz jussunk. Hogyan is működik a módszer?

Szimmetrikus mátrixok ortogonális hasonlósági transzformációval diagonális alakra hozhatóak, azaz **A** szimmetrikus mátrixhoz $\exists$ **Q** ortogonális mátrix, melyre

$$\mathbf{Q^T A Q} = \mathbf{D},$$

ahol **D** diagonálisában a mátrix sajátértékei szerepelnek, **Q** oszlopai pedig a megfelelő sajátvektorok. Olyan ortogonális mátrixokból álló $(\mathbf{Q_k})$ sorozatot készítünk, amelyre

$$\lim_{k\to\infty} \mathbf{Q_1}\cdot\mathbf{Q_2}\cdot\ldots\cdot\mathbf{Q_k} = \mathbf{Q}$$

Legyen $\mathbf{A}^0 = A$ és

$$\mathbf{A^k} := \mathbf{Q_k^T} \cdot \mathbf{A^{k-1}} \cdot \mathbf{Q_k}, \quad k = 1, 2, \dots$$

ahol $\mathbf{Q_k}$ egy adott (i,j) pozícióhoz tartozó forgatási mátrix $(i<j)$, melyre

$$\begin{aligned} \mathbf{Q_k}(i,i) &= \cos\varphi = & c \\ \mathbf{Q_k}(i,j) &= \sin\varphi = & s \\ \mathbf{Q_k}(j,j) &= \cos\varphi = & c \\ \mathbf{Q_k}(j,i) &= -\sin\varphi = & -s \end{aligned}$$

A mátrix többi eleme megegyezik az egységmátrix elemeivel, tehát a mátrix általános alakja a következő.

$$\mathbf{Q_k} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & & & & & & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & & & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \boxed{\cos\varphi} & 0 & & & \boxed{\sin\varphi} & 0 & \vdots \\ & \vdots & 0 & 1 & & & 0 & & \\ & & \vdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots & & \\ & \vdots & 0 & & & 1 & 0 & \vdots & \\ \vdots & 0 & \boxed{-\sin\varphi} & & & 0 & \boxed{\cos\varphi} & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & & & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & & & & & & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A φ szög értékét úgy fogjuk meghatározni, hogy a hasonlósági transzformáció után kapott mátrixra $a_{ij}^{(k)} = a_{ji}^{(k)} = 0$ legyen.

Nézzük meg a konkrét példa megoldását.

Mivel a mátrixunk 2×2 méretű, ezért ebben az esetben csak az $(i,j) = (1,2)$ pozíciójú elemet kell kinullázni, vagyis ebben az esetben a Jacobi módszer egy lépésével megkapjuk a pontos sajátértékeket és sajátvektorokat. Legyen

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix}$$

Határozzuk meg c és s értékét úgy, hogy az $\mathbf{A^{(1)}} = \mathbf{Q^T} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{Q}$ mátrixra $a_{12}^{(1)} = 0$ legyen.

$$\begin{aligned} \mathbf{A^{(1)}} = \mathbf{Q^T A Q} \quad &= \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 2c+s & -c-2s \\ 2s-c & -s+2c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 2c^2+2sc+2s^2 & s^2-c^2 \\ s^2-c^2 & 2s^2-2sc+2c^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+2sc & s^2-c^2 \\ s^2-c^2 & 2-2sc \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Mivel φ-t úgy választjuk, hogy $s^2 - c^2 = \cos 2\varphi = 0$ legyen, ezért $\varphi = \frac{\pi}{4}$ lesz.

Így $c = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ és $s = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ miatt $\mathbf{Q}$ és $\mathbf{A^{(1)}}$mátrix a következő lesz.

$$\mathbf{Q} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A^{(1)}} = \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Az $\mathbf{A}$ mátrix sajátértékei a hasonlósági transzformáció miatt az $\mathbf{A^{(1)}} = \mathbf{D}$ mátrix átlójából és sajátvektorai a $\mathbf{Q}$ oszlopaiból leolvashatók.

$$\lambda_1 = 3, \qquad \mathbf{v_1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$
$$\lambda_2 = 1, \qquad \mathbf{v_2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

31. Az előző feladat megoldásában megismert elemi módszer helyett használjuk annak általános változatát, melyben a mátrix elemeiből képlettel számolható $c = \cos(\varphi)$ és $s = \sin(\varphi)$ értéke. A $\mathbf{Q_k}$ mátrix meghatározásához szükséges az $a_{ij}^{(k-1)} \neq 0$ érték, mely a forgatási (i,j) pozícióhoz tartozik. A képletek az alábbi összefüggésből könnyen származtathatóak.

$$\frac{(c^2 - s^2)}{2 \cdot c \cdot s} = \frac{\left(a_{jj}^{(k-1)} - a_{ii}^{(k-1)}\right)}{2 \cdot a_{ij}^{(k-1)}} = \frac{\cos 2\varphi}{\sin 2\varphi} = ctg2\varphi =: p$$

A trigonometrikus összefüggések felhasználásával könnyen adódnak a következő képletek. Ezek csak kézi számolásra alkalmasak, gépi megvalósítás esetén egy stabilabb képletet alkalmazunk.

$$\begin{aligned} \cos 2\varphi &= \frac{p}{\sqrt{1+p^2}} \\ c := \cos\varphi &= \sqrt{\frac{1+\cos 2\varphi}{2}} \\ s := \sin\varphi &= \sqrt{\frac{1-\cos 2\varphi}{2}} \end{aligned}$$

Ezeket felhasználva könnyen adódik a feladat megoldása.

$$\begin{aligned} p &= \frac{(a_{jj} - a_{ii})}{2 \cdot a_{ij}} = \frac{3-3}{2 \cdot 4} = 0 \\ \cos 2\varphi &= \frac{p}{\sqrt{1+p^2}} = \frac{0}{\sqrt{1+0}} = 0 \\ c &= \cos\varphi = \sqrt{\frac{1+0}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ s &= \sin\varphi = \sqrt{\frac{1-0}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

Tehát $\mathbf{Q}$ és $\mathbf{A^{(1)}}$ mátrixok a következőképpen alakulnak.

$$\mathbf{Q} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A^{(1)}} = \mathbf{D} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 14 \end{bmatrix}$$

Tehát az $\mathbf{A}$ mátrix sajátértékei és sajátvektorai könnyen leolvashatóak az eredmény mátrixokból.

$$\lambda_1 = -2, \qquad \mathbf{v_1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$
$$\lambda_2 = 14, \qquad \mathbf{v_2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

32. Az előző feladatban megismert képletek segítségével oldjuk meg a feladatot.

$$\begin{aligned} p &= \frac{(a_{jj}-a_{ii})}{2\cdot a_{ij}} = \frac{5-4}{2\cdot\frac{1}{2}} = 1 \\ \cos 2\varphi &= \frac{p}{\sqrt{1+p^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ c &= \cos\varphi = \sqrt{\frac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}{2}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \\ s &= \sin\varphi = \sqrt{\frac{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}{2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \end{aligned}$$

Tehát $\mathbf{Q}$ és $\mathbf{A^{(1)}}$ mátrixok a következőképpen alakulnak.

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} & \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} & \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A^{(1)}} = \mathbf{D} = \begin{bmatrix} \frac{9-\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{9+\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

Tehát az $\mathbf{A}$ mátrix sajátértékei és sajátvektorai könnyen leolvashatóak az eredmény mátrixokból.

$$\lambda_1 = \frac{9-\sqrt{2}}{2}, \qquad \mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = \frac{9+\sqrt{2}}{2}, \qquad \mathbf{v_2} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \\ \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \end{bmatrix}$$

33. Használjuk a korábbi feladatoknál megismert képleteket a feladat megoldásához.

$$ctg 2\varphi = \frac{a_{22}-a_{11}}{2a_{12}} = \frac{2-2}{2\cdot(-1)} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2\varphi = \frac{\pi}{2} \Longrightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}$$

$$\begin{aligned} c := \cos\varphi = \cos\frac{\pi}{4} &= \frac{\sqrt{2}}{2} \\ s := \sin\varphi = \sin\frac{\pi}{4} &= \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Tehát ennek segítségével kiszámítva $\mathbf{A^{(1)}} = \mathbf{Q^T A Q}$ mátrixot, adódik a következő.

$$\begin{aligned} \mathbf{A^{(1)}} = \mathbf{Q^T A Q} &= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 3 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Látjuk, hogy a Jacobi forgatás után a diagonálison kívüli korábbi 0 elemek feltöltődnek és az $(1,2)$, valamint a $(2,1)$ pozíción lesznek 0 elemek. Viszont fontos megjegyezni (a módszer konvergencia tételének bizonyításában egy fontos észrevétel), hogy a k. lépésben a diagonálison kívüli elemek négyzetösszege $(N(\mathbf{A^{(k)}}))$ csökken, éppen az $\mathbf{A^{(k-1)}}$ mátrix eliminálandó elemeinek négyzetével, vagyis $2\cdot(a_{ij}^{(k-1)})^2$-tel.

$$N(\mathbf{A})=4,\quad N(\mathbf{A^{(1)}})=4\cdot\frac{1}{2}=2=(a_{12})^2+(a_{21})^2$$

34. Használjuk a korábbi feladatoknál megismert képleteket a feladat megoldásához.

$$ctg2\varphi=\frac{a_{33}-a_{22}}{2a_{23}}=\frac{3-3}{2\cdot 2}=0\quad\Rightarrow\quad 2\varphi=\frac{\pi}{2}\Longrightarrow\varphi=\frac{\pi}{4}$$

$$\begin{aligned} c:=\cos\varphi=\cos\frac{\pi}{4} &= \frac{\sqrt{2}}{2}\\ s:=\sin\varphi=\sin\frac{\pi}{4} &= \frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

$$\mathbf{Q}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\frac{\sqrt{2}}{2}&-\frac{\sqrt{2}}{2}\\0&\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\begin{bmatrix}\sqrt{2}&0&0\\0&1&-1\\0&1&1\end{bmatrix}$$

Tehát ennek segítségével kiszámítva $\mathbf{A^{(1)}}=\mathbf{Q^TAQ}$ mátrixot, adódik a következő.

$$\begin{aligned}\mathbf{A^{(1)}}=\mathbf{Q^TAQ} &= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\begin{bmatrix}\sqrt{2}&0&0\\0&1&1\\0&-1&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}3&2&0\\2&3&2\\0&2&3\end{bmatrix}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\begin{bmatrix}\sqrt{2}&0&0\\0&1&-1\\0&1&1\end{bmatrix}=\\ &=\begin{bmatrix}3&\sqrt{2}&-\sqrt{2}\\\sqrt{2}&5&0\\-\sqrt{2}&0&1\end{bmatrix}\end{aligned}$$

Látjuk, hogy a Jacobi forgatás után a diagonálison kívüli korábbi 0 elemek feltöltődnek és a $(2,3)$, valamint a $(3,2)$ pozíción lesznek 0 elemek. A diagonálison kívüli elemek négyzetösszege $(N(\mathbf{A}))$ csökken $(a_{23})^2+(a_{32})^2=2^2+2^2=8$-cal.

$$N(\mathbf{A})=16,\quad N(\mathbf{A^{(1)}})=4\cdot 2=8$$

6. fejezet

Polinom interpoláció

6.1. Feladatok

6.1.1. Az interpolációs polinom Lagrange- és Newton-alakja, hibája

1. Tekintsük az $f(x) = \sqrt{x}$ függvényt és az $1, 4, 9$ alappontokat.

a) Írjuk fel az interpolációs polinom Lagrange-alakját!

b) Írjuk fel az interpolációs polinom Newton-alakját!

c) Közelítsük $f(2) = \sqrt{2}$-t az interpolációs polinommal!

d) Becsüljük a hibát az $x = 2$ pontban és az $[1; 9]$ intervallumon!

2. Írjuk fel az (x_i, y_i) pontokon interpoláló polinom Newton-alakját!

x_i	-2	-1	0	1	2
y_i	-15	-4	-1	0	5

3. Határozzuk meg az $f(x) = \log_2(x)$ függvényt az $1, 2, 4$ pontokban interpoláló polinomot (P). Adjuk meg $f(3)$ közelítését $P(3)$ segítségével és becsüljük a hibáját hibaformulával!

4. Határozzuk meg az $f(x) = \sqrt{x} + 1$ függvényt az $1, 4, 9$ pontokban interpoláló polinomot. Adjuk meg a hibabecslését az $[1; 9]$ intervallumon!

5. Határozzuk meg az $f(x) = 2^x$ függvényt a $-1, 0, 1, 2$ pontokban interpoláló polinomot (P). Adjuk meg a $\sqrt{2}$ racionális közelítését $P(\frac{1}{2})$ segítségével és becsüljük a hibáját!

6. Határozzuk meg az $f(x) = 3^x$ függvényt a $-1, 0, 1, 2$ pontokban interpoláló polinomot (P). Adjuk meg a $\sqrt{3}$ racionális közelítését $P(\frac{1}{2})$ segítségével és becsüljük a hibáját!

7. Határozzuk meg az $f(x) = \cos(\pi \cdot x)$ függvényt a $0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1$ pontokban interpoláló polinomot. Adjuk meg az $f(\frac{1}{6})$ racionális közelítését a polinom segítségével és becsüljük a hibát a megadott pontban (hibaformulával)!

8. Határozzuk meg az $f(x) = \sin(\pi \cdot x)$ függvényt a $0, \frac{1}{6}, \frac{5}{6}, 1$ pontokban interpoláló polinomot. Adjuk meg az $f(\frac{1}{3})$ racionális közelítését a polinom segítségével és becsüljük a hibát a megadott pontban (hibaformulával)!

9. Jelöljük P-vel az $f(x) = x \cdot e^{-x}$ függvényt a $0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1$ pontokban interpoláló polinomot. Lássuk be a polinom kiszámítása nélkül, hogy

$$\left| f\left(\frac{1}{2}\right) - P\left(\frac{1}{2}\right) \right| \leq 0,0015.$$

10. Jelöljük P-vel az $f(x) = x^6$ függvényt a 0, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{4}$, 1 pontokban interpoláló polinomot. Lássuk be a polinom kiszámítása nélkül, hogy

$$\left|f\left(\frac{1}{2}\right) - P\left(\frac{1}{2}\right)\right| \leq 0,1.$$

11. Határozzuk meg az $f(x) = \sin(\frac{\pi}{2} \cdot x)$ függvényt a 0, $\frac{1}{3}$, $\frac{5}{3}$, 2 pontokban interpoláló polinomot. Adjuk meg az $f(\frac{2}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ racionális közelítését a polinom segítségével és becsüljük a hibáját a megadott pontban és a $[0;2]$ intervallumon!

12. Határozzuk meg az $f(x) = \log_2(x)$ függvényt az $1, 2, 4, 8$ pontokban interpoláló polinomot (P). Adjuk meg $f(3)$ közelítését $P(3)$ segítségével és becsüljük a hibáját hibaformulával!

13. Igazoljuk, hogy ha $f \in C^2[a;b]$ és P_1 az a és b pontokban interpoláló polinom, akkor

$$|f(x) - P_1(x)| \leq \frac{M_2}{8} \cdot (b-a)^2,$$

ahol $M_2 = \|f''\|_\infty = \max\{|f''(x)| : \ x \in [a;b]\}$!

14. Az $f(x) = \cos(x)$ függvény $[0;\pi]$-beli értéktáblázatát szeretnénk elkészíteni. Adjuk meg a h lépésköz értékét, hogy milyen sűrűn tegyük a függvény értékeit a táblázatba, ha a táblázatban nem szereplő értékekre lineáris interpolációt alkalmazunk és azt szeretnénk, hogy a hiba 10^{-6}-nál kisebb legyen!

15. Igazoljuk, hogy ha $f \in C^{n+1}[a;b]$ és P_n az n-edfokú interpoláló interpolációs polinom, akkor

$$|f(x) - P_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{4(n+1)} \cdot h^{n+1},$$

ahol $h = \max_{i=1}^n |x_i - x_{i-1}|$ és $M_{n+1} = \|f^{(n+1)}\|_\infty$!

16. Az $f(x) = \frac{1}{x+3}$ függvényt interpoláljuk az $\{x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, \ldots, x_n^{(n)}\}$ különböző pontokból álló alappontrendszeren, ahol az alappontok kifeszítik a $[0\,;1]$ intervallumot, ha $n \to \infty$. Egyenletesen konvergál-e az interpolációs polinomok sorozata a függvényhez?

17. Az $f(x) = \frac{2x+5}{x^2+5x+6}$ függvényt interpoláljuk az $\{x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, \ldots, x_n^{(n)}\}$ különböző pontokból álló alappontrendszeren, ahol az alappontok kifeszítik a $[0\,;1]$ intervallumot, ha $n \to \infty$. Egyenletesen konvergál-e az interpolációs polinomok sorozata a függvényhez?

18. A P polinom az $x_1, \ldots, x_{n-1}$ pontokban interpolálja f-et, a Q pedig az $x_2, \ldots, x_n$ pontokban. Igazoljuk, hogy

$$P(x) + \frac{x_1 - x}{x_n - x_1} \cdot (P(x) - Q(x))$$

az $x_1, \ldots, x_n$ pontokban interpolálja f-et!

19. Jelöljük ℓ_k-val a Lagrange-alappolinomokat.

a) Igazoljuk, hogy $\forall x \in \mathbb{R}: \quad \sum_{k=0}^n \ell_k(x) = 1.$

b) Igazoljuk, hogy $\forall x \in \mathbb{R}: \quad \sum_{k=0}^n x_k \cdot \ell_k(x) = x.$

c) Igazoljuk, hogy $\forall x \in \mathbb{R}: \quad \sum_{k=0}^n (x_k)^n \cdot \ell_k(x) = x^n.$

20. Tekintsük a $-1, 0, 1$ alappontrendszert és az $1, x^2, x^4$ függvényrendszert. Igazoljuk, hogy általában nem létezik egy adott függvénynek a fenti függvényrendszer szerinti interpolációs polinomja!

21. Tegyük fel, hogy $f(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ alakú n-edfokú polinom. Tetszőleges $x_0, \ldots, x_n$ különböző alappontok esetén mennyi lesz az $f[x_0, \ldots, x_n]$ osztott differencia értéke?

22. Legyen P egy n-edfokú polinom és $x_0, \ldots, x_k$ különböző alappontok. Igazoljuk, hogy

$$\forall\ k > n : \quad f[x_0, \ldots, x_k] = 0.$$

23. Közelítsük az $f(x) = x^{n+1}$ függvényt az $x_0, \ldots, x_n$ alappontokra felírt interpolációs polinomjával! (A polinomot nem kell felírni.) Adjunk hibabecslést, majd ennek felhasználásával igazoljuk, hogy

$$f[x_0, \ldots, x_n] = \sum_{i=0}^{n} x_i.$$

24. Az $x_0 < x_1 < x_2 < x_3$ alappontokhoz tartozó Lagrange-alappolinomokat jelöljük $\ell_0, \ell_1, \ell_2, \ell_3$ -mal. Mutassuk meg, hogy

$$\forall x \in [x_1; x_2] : \quad \ell_1(x) + \ell_2(x) \geq 1.$$

25. Tekintsük az $a \leq x_0 < \ldots < x_n \leq b$ és a $c \leq y_0 < \ldots < y_k \leq d$ alappontrendszert.
Legyenek $f(x_i, y_j)$ adott függvényértékek ($i = 0, \ldots, n$ és $j = 0, \ldots, k$).
Jelöljük $\ell_i^{(1)}(x)$-szel az $[a\,; b]$ -beli alappontokra felírt és $\ell_j^{(2)}(y)$-nal a $[c\,; d]$ -beli alappontokra felírt Lagrange-alappolinomokat. Készítsük el az $\ell_{ij}(x, y) = \ell_i^{(1)}(x) \cdot \ell_j^{(2)}(y)$ kétváltozós alappolinomokat. Igazoljuk, hogy ekkor

$$P(x, y) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} f(x_i, y_j) \cdot \ell_{ij}(x, y)$$

x-ben n-edfokú, y-ban k-adfokú kétváltozós interpolációs polinom.

6.1.2. Csebisev polinomok alkalmazása

26. Közelítsük az $f(x) = \sin(\frac{\pi}{2}x)$, $x \in [-1; 1]$ függvényt elsőfokú interpolációs polinommal, hogy a közelítés hibája minimális legyen a $C[-1; 1]$ normában! Mik lesznek az alappontok és mekkora a hiba maximuma a megadott intervallumon?

27. Közelítsük az $f(y) = y^3 - y$, $y \in [0; 2]$ függvényt másodfokú interpolációs polinommal, hogy a közelítés hibája minimális legyen a $C[0; 2]$ normában! Mik lesznek az alappontok és mekkora a hiba maximuma a megadott intervallumon?

28. Közelítsük az $f(y) = \cos(y)$, $y \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ függvényt másodfokú interpolációs polinommal, hogy a közelítés hibája minimális legyen! Mik lesznek az alappontok és mekkora a hiba maximuma a megadott intervallumon?

Vissza a tartalomhoz

29. Tekintsük az $f(y) = \frac{2}{\pi}y + \sin(y), \;\; y \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ függvényt.

a) Határozzuk meg a $-\frac{\pi}{2}$, 0, $\frac{\pi}{2}$ pontokon interpoláló polinomot (P).

b) Becsüljük a hibáját a $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ intervallumon!

c) Mennyi lenne az elérhető legkisebb hiba a megadott intervallumon, ha az alappontokat szabadon választhatnánk? Mik lennének az alappontok?

6.1.3. Inverz interpoláció

30. Az x_{k-1}, x_k pontokra támaszkodó inverz interpolációval közelítsük az $f(x) = 0$ egyenlet megoldását. Írjunk fel egy közelítést az x_{k+1}-re!

31. Az x_0, x_1, x_2 pontokra támaszkodó inverz interpolációval közelítsük az $f(x) = 0$ egyenlet megoldását. Írjunk fel egy közelítést az x_3-ra!

32. Az inverz interpoláció elvét alkalmazzuk a $\sin(\frac{\pi}{2} \cdot x) = \frac{3}{4}$ megoldására! A 0, $\frac{1}{3}$, 1 alappontokra felírt másodfokú inverz interpolációt használjuk. Számítsuk ki az x_3 közelítő értéket!

33. Az inverz interpoláció elve segítségével az $x_k, f(x_k), f'(x_k)$ felhasználásával írjon fel egy iterációs módszert az $f(x) = 0$ egyenlet gyökének meghatározására.

6.2. Megoldások

6.2.1. Az interpolációs polinom Lagrange- és Newton-alakja, hibája

1. **a)** Az $1, 4, 9$ alappontokhoz tartozó Lagrange-alappolinomok a következők:

$$\ell_0(x) = \frac{(x-4)(x-9)}{(1-4)(1-9)} = \frac{1}{24}(x-4)(x-9)$$

$$\ell_1(x) = \frac{(x-1)(x-9)}{(4-1)(4-9)} = -\frac{1}{15}(x-1)(x-9)$$

$$\ell_2(x) = \frac{(x-1)(x-4)}{(9-1)(9-4)} = \frac{1}{40}(x-1)(x-4).$$

Az $1, 4, 9$ alappontokhoz tartozó függvényértékek rendre $1, 2, 3$.

Ezt felhasználva a másodfokú interpolációs polinom Lagrange-alakja:

$$\begin{aligned} L_2(x) &= 1 \cdot \ell_0(x) + 2 \cdot \ell_1(x) + 3 \cdot \ell_2(x) = \\ &= \frac{1}{24}\,(x-4)(x-9) - \frac{2}{15}\,(x-1)(x-9) + \frac{3}{40}\,(x-1)(x-4). \end{aligned}$$

b) Az alappontok és függvényértékek ismeretében készítsük el az osztott differencia táblázatot.

x_i	$f(x_i)$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$
1	$\boxed{1}$		
4	2	$\frac{2-1}{4-1} = \boxed{\frac{1}{3}}$	
9	3	$\frac{3-2}{9-4} = \frac{1}{5}$	$\frac{\frac{1}{5}-\frac{1}{3}}{9-1} = \boxed{-\frac{1}{60}}$

A táblázat bekeretezett értékei segítségével felírjuk az interpolációs polinom Newton-alakját.

$$N_2(x) = 1 + \frac{1}{3}(x-1) - \frac{1}{60}(x-1)(x-4)$$

c) Az $f(2) = \sqrt{2}$ közelítése az interpolációs polinom felhasználásával

$$N_2(2) = 1 + \frac{1}{3}(2-1) - \frac{1}{60}(2-1)(2-4) = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{30} = \frac{41}{30} \approx 1,3667.$$

d) Az interpoláció hibabecslése az $x \in [1;9]$ pontban

$$|f(x) - P_2(x)| \leq \frac{M_3}{3!}|\omega(x)|,$$

ahol $M_3 = \|f'''\|_\infty = \max\{|f'''(x)| : \ x \in [1;9]\}$.
Számítsuk ki a képletben szereplő mennyiségeket! Az $f(x) = \sqrt{x}$ deriváltjai

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}, \quad f''(x) = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}, \quad f'''(x) = \frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}}.$$

Innen a derivált becslése

$$|f'''(x)| = \frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}} = \frac{3}{8}\frac{1}{\sqrt{x^5}} \leq \frac{3}{8} = M_3$$

illetve

$$|\omega(2)| = |(2-1)(2-4)(2-9)| = 14.$$

Az $x = 2$ pontban a hibabecslés

$$|f(2) - P_2(2)| = \left|\sqrt{2} - \frac{41}{30}\right| \leq \frac{M_3}{3!}|\omega(2)| = \frac{\frac{3}{8}}{6} \cdot 14 = \frac{7}{8}.$$

Számítsuk ki $\|\omega\|_\infty$-t.

$$\omega(x) = (x-1)(x-4)(x-9) = x^3 - 14x^2 + 49x - 36$$

$$\omega'(x) = 3x^2 - 28x + 49$$

Az ω lehetséges szélsőértékei

$$x_{1,2} = \frac{28 \pm \sqrt{28^2 - 4 \cdot 3 \cdot 49}}{6} = \frac{28 \pm 14}{6} = \frac{14 \pm 7}{3}$$

$$x_1 = 7, \quad x_2 = \frac{7}{3}$$

$$\omega(7) = (7-1)(7-4)(7-9) = -36$$

$$\omega\left(\frac{7}{3}\right) = \left(\frac{7}{3} - 1\right)\left(\frac{7}{3} - 4\right)\left(\frac{7}{3} - 9\right) = \frac{400}{27} \approx 14,8$$

Innen $\|\omega\|_\infty = 36$.

Az $x \in [1;9]$ intervallumon a hibabecslés

$$|f(x) - P_2(x)| \leq \frac{M_3}{3!}\|\omega\|_\infty = \frac{\frac{3}{8}}{6} \cdot 36 = \frac{9}{4}.$$

2. Az alappontok és függvényértékek ismeretében készítsük el az osztott differencia táblázatot.

x_i	$f(x_i)$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$\dots$	$\dots$
-2	$\boxed{-15}$				
-1	-4	$\frac{-4-(-15)}{-1-(-2)} = \boxed{11}$			
0	-1	$\frac{-1-(-4)}{0-(-1)} = 3$	$\frac{3-11}{0-(-2)} = \boxed{-4}$		
1	0	$\frac{0-(-1)}{1-0} = 1$	$\frac{1-3}{1-(-1)} = -1$	$\frac{-1-(-4)}{1-(-2)} = \boxed{1}$	
2	5	$\frac{5-0}{2-1} = 5$	$\frac{5-1}{2-0} = 2$	$\frac{2-(-1)}{2-(1)} = 1$	$\frac{1-1}{2-(-2)} = \boxed{0}$

A táblázat bekeretezett értékei segítségével felírjuk az interpolációs polinom Newton-alakját.

$$\begin{aligned} N_4(x) &= -15 + 11(x+2) - 4(x+2)(x+1) + (x+2)(x+1)x = \\ &= -15 + 11x + 22 - 4x^2 - 12x - 8 + x^3 + 3x^2 + 2x = \\ &= x^3 - x^2 + x - 1 \end{aligned}$$

Mivel az interpolációs polinom független az alappontok sorrendjétől, ezért azokat fordítva is felírhatnánk. Az új Newton bázisban az együtthatók a fenti táblázat legalsó sorában szerepelnek, így az új Newton-alak

$$\begin{aligned} N_4(x) &= 5 + 5(x-2) + 2(x-2)(x-1) + (x-2)(x-1)x = \\ &= 5 + 5x - 10 + 2x^2 - 6x + 4 + x^3 - 3x^2 + 2x = \\ &= x^3 - x^2 + x - 1. \end{aligned}$$

Látjuk, hogy ugyanazt a polinomot kaptuk.

3. Az $1, 2, 4$ alappontok és a $0, 1, 2$ függvényértékek ismeretében írjuk fel az interpolációs polinom Newton-alakját. Ehhez készítsük el az osztott differencia táblázatot.

x_i	$f(x_i)$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$
1	$\boxed{0}$		
2	1	$\frac{1-0}{2-1} = \boxed{1}$	
4	2	$\frac{2-1}{4-2} = \frac{1}{2}$	$\frac{\frac{1}{2}-1}{4-1} = \boxed{-\dfrac{1}{6}}$

A táblázat bekeretezett értékei segítségével felírjuk az interpolációs polinom Newton-alakját.

$$P(x) = N_2(x) = 0 + (x-1) - \frac{1}{6}(x-1)(x-2)$$

Az $f(3) = \log_2(3)$ közelítő értéke az interpolációs polinomból

$$P(3) = N_2(3) = 0 + (3-1) - \frac{1}{6}(3-1)(3-2) = 2 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3}.$$

Az $x = 3$ pontban a hibabecslés

$$|f(3) - P(3)| \le \frac{M_3}{3!} |\omega(3)|,$$

ahol $|\omega(3)| = |(3-1)(3-2)(3-4)| = 2.$

Mivel $f(x) = \log_2(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(2)}$, így az f deriváltjai

$$f'(x) = \frac{1}{\ln(2)} x^{-1}, \quad f''(x) = -\frac{1}{\ln(2)} x^{-2} \quad f'''(x) = \frac{2}{\ln(2)} x^{-3},$$

ahonnan $x \in [1;4]$ esetén a becslés

$$|f'''(x)| = \frac{2}{x^3 \ln(2)} \leq \frac{2}{\ln(2)} = M_3.$$

A kapott értékeket a hibabecslésbe helyettesítve

$$|f(3) - P(3)| \leq \frac{\frac{2}{\ln(2)}}{3!} \cdot 2 = \frac{2}{3\ln(2)} \approx 0,96.$$

4. A feladat megoldása az 1. feladat alapján gyorsan felírható. A függvényértékek eggyel nőttek, de az osztott differencia táblázatban csak az első bekeretezett elem változik 2-re.

$$N_2(x) = 2 + \frac{1}{3}(x-1) - \frac{1}{60}(x-1)(x-4).$$

Az $x \in [1;9]$ intervallumon a hibabecslés

$$|f(x) - P_2(x)| \leq \frac{M_3}{3!}\|\omega\|_\infty = \frac{\frac{3}{8}}{6} \cdot 36 = \frac{9}{4}.$$

5. A $-1, 0, 1, 2$ alappontok és az $\frac{1}{2}, 1, 2, 4$ függvényértékek ismeretében írjuk fel az interpolációs polinom Newton-alakját. Ehhez készítsük el az osztott differencia táblázatot.

x_i	$f(x_i)$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$\dots$
-1	$\boxed{\frac{1}{2}}$			
0	1	$\frac{1-\frac{1}{2}}{0-(-1)} = \boxed{\frac{1}{2}}$		
1	2	$\frac{2-1}{1-0} = 1$	$\frac{1-\frac{1}{2}}{1-(-1)} = \boxed{\frac{1}{4}}$	
2	4	$\frac{4-2}{2-1} = 2$	$\frac{2-1}{2-0} = \frac{1}{2}$	$\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}{2-(-1)} = \boxed{\frac{1}{12}}$

A táblázat bekeretezett értékei segítségével felírjuk az interpolációs polinom Newton-alakját.

$$P(x) = N_3(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(x+1) + \frac{1}{4}(x+1)\,x + \frac{1}{12}(x+1)\,x\,(x-1)$$

Az $f(\frac{1}{2}) = \sqrt{2}$ közelítő értéke az interpolációs polinomból

$$P\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}+1\right)\frac{1}{2} + \frac{1}{12}\left(\frac{1}{2}+1\right)\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right) =$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{3}{16} - \frac{3}{96} = \frac{135}{96} = \frac{45}{32} = 1,40625.$$

Az $x = \frac{1}{2}$ pontban a hibabecslés

$$\left|f\left(\frac{1}{2}\right) - P\left(\frac{1}{2}\right)\right| \leq \frac{M_4}{4!}\left|\omega\left(\frac{1}{2}\right)\right|,$$

ahol

$$\left|\omega\left(\frac{1}{2}\right)\right| = \left|\left(\frac{1}{2}+1\right)\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\right| = \frac{9}{16}.$$

Mivel $f(x) = 2^x = e^{x \cdot \ln(2)}$, így az f deriváltjai

$$\begin{aligned} f'(x) &= \ln(2) \cdot 2^x \\ f''(x) &= (\ln(2))^2 \cdot 2^x \\ f'''(x) &= (\ln(2))^3 \cdot 2^x \\ f^{(4)}(x) &= (\ln(2))^4 \cdot 2^x, \end{aligned}$$

ahonnan $x \in [-1; 2]$ esetén

$$|f^{(4)}(x)| \leq (\ln(2))^4 \cdot 2^2 = 4(\ln(2))^4 = M_4.$$

A kapott értékeket a hibabecslésbe helyettesítve

$$\left| f\left(\frac{1}{2}\right) - P\left(\frac{1}{2}\right) \right| \leq \frac{4(\ln(2))^4}{4!} \cdot \frac{9}{16} = \frac{3(\ln(2))^4}{32} \approx 0,0216,$$

6. A $-1, 0, 1, 2$ alappontok és az $\frac{1}{3}, 1, 3, 9$ függvényértékek ismeretében írjuk fel az interpolációs polinom Newton-alakját. Ehhez készítsük el az osztott differencia táblázatot.

x_i	$f(x_i)$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$\dots$
-1	$\boxed{\frac{1}{3}}$			
0	1	$\frac{1-\frac{1}{3}}{0-(-1)} = \boxed{\frac{2}{3}}$		
1	3	$\frac{3-1}{1-0} = 2$	$\frac{2-\frac{2}{3}}{1-(-1)} = \boxed{\frac{2}{3}}$	
2	9	$\frac{9-3}{2-1} = 6$	$\frac{6-2}{2-0} = 2$	$\frac{2-\frac{2}{3}}{2-(-1)} = \boxed{\frac{4}{9}}$

A táblázat bekeretezett értékei segítségével felírjuk az interpolációs polinom Newton-alakját.

$$P(x) = N_3(x) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}(x+1) + \frac{2}{3}(x+1)\,x + \frac{4}{9}(x+1)\,x\,(x-1)$$

Az $f(\frac{1}{2}) = \sqrt{3}$ közelítő értéke az interpolációs polinomból

$$\begin{aligned} P\left(\frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}+1\right) + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}+1\right)\frac{1}{2} + \frac{4}{9}\left(\frac{1}{2}+1\right)\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right) = \\ &= \frac{1}{3} + 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}. \end{aligned}$$

Az $x = \frac{1}{2}$ pontban a hibabecslés

$$\left| f\left(\frac{1}{2}\right) - P\left(\frac{1}{2}\right) \right| \leq \frac{M_4}{4!} \left| \omega\left(\frac{1}{2}\right) \right|,$$

ahol

$$\left| \omega\left(\frac{1}{2}\right) \right| = \left| \left(\frac{1}{2}+1\right)\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right) \right| = \frac{9}{16}.$$

Mivel $f(x) = 3^x = e^{x \cdot \ln(3)}$, így az f deriváltjai

$$\begin{aligned} f'(x) &= \ln(3) \cdot 3^x \\ f''(x) &= (\ln(3))^2 \cdot 3^x \\ f'''(x) &= (\ln(3))^3 \cdot 3^x \\ f^{(4)}(x) &= (\ln(3))^4 \cdot 3^x, \end{aligned}$$

ahonnan $x \in [-1;2]$ esetén

$$|f^{(4)}(x)| \leq (\ln(3))^4 \cdot 3^2 = 9(\ln(3))^4 = M_4.$$

A kapott értékeket a hibabecslésbe helyettesítve

$$\left|f\left(\frac{1}{2}\right) - P\left(\frac{1}{2}\right)\right| \leq \frac{9(\ln(3))^4}{4!} \cdot \frac{9}{16} = \frac{27(\ln(3))^4}{128} \approx 0,3073,$$

7. A $0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1$ alappontok és az $1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -1$ függvényértékek ismeretében írjuk fel az interpolációs polinom Newton-alakját. Ehhez készítsük el az osztott differencia táblázatot.

x_i	$f(x_i)$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$\dots$
0	$\boxed{1}$			
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\frac{1}{2}-1}{\frac{1}{3}-0} = \boxed{-\frac{3}{2}}$		
$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}-\frac{1}{3}} = -3$	$\frac{-3-(-\frac{3}{2})}{\frac{2}{3}-0} = \boxed{-\frac{9}{4}}$	
1	-1	$\frac{-1-(-\frac{1}{2})}{1-\frac{2}{3}} = -\frac{3}{2}$	$\frac{-\frac{3}{2}-(-3)}{1-\frac{1}{3}} = \frac{9}{4}$	$\frac{\frac{9}{4}-(-\frac{9}{4})}{1-0} = \boxed{\frac{9}{2}}$

A táblázat bekeretezett értékei segítségével megkapjuk az interpolációs polinom Newton-alakját.

$$P(x) = N_3(x) = 1 - \frac{3}{2}x - \frac{9}{4}x\left(x - \frac{1}{3}\right) + \frac{9}{2}x\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x - \frac{2}{3}\right)$$

Az $f(\frac{1}{6}) = \cos(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ közelítő értéke az interpolációs polinomból

$$P\left(\frac{1}{6}\right) = 1 - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{6} - \frac{9}{4} \cdot \frac{1}{6}\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{3}\right) + \frac{9}{2} \cdot \frac{1}{6}\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{6} - \frac{2}{3}\right) =$$

$$= 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{7}{8} \approx 0,875.$$

Az $x = \frac{1}{6}$ pontban a hibabecslés

$$\left|f\left(\frac{1}{6}\right) - P\left(\frac{1}{6}\right)\right| \leq \frac{M_4}{4!}\left|\omega\left(\frac{1}{6}\right)\right|,$$

ahol

$$\left|\omega\left(\frac{1}{6}\right)\right| = \left|\frac{1}{6}\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{6} - \frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{6} - 1\right)\right| = \frac{5}{432}.$$

Mivel $f(x) = \cos(\pi \cdot x)$, így az f deriváltjai

$$f'(x) = -\pi \cdot \sin(\pi \cdot x)$$
$$f''(x) = -(\pi)^2 \cdot \cos(\pi \cdot x)$$
$$f'''(x) = (\pi)^3 \cdot \sin(\pi \cdot x)$$
$$f^{(4)}(x) = (\pi)^4 \cdot \cos(\pi \cdot x),$$

ahonnan $x \in [0;1]$ esetén

$$|f^{(4)}(x)| \leq (\pi)^4 = M_4.$$

A kapott értékeket a hibabecslésbe helyettesítve

$$\left|f\left(\frac{1}{6}\right) - P\left(\frac{1}{6}\right)\right| \leq \frac{(\pi)^4}{4!} \cdot \frac{5}{432} \approx 0,045,$$

8. A $0, \frac{1}{6}, \frac{5}{6}, 1$ alappontok és a $0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0$ függvényértékek ismeretében írjuk fel az interpolációs polinom Newton-alakját. Ehhez készítsük el az osztott differencia táblázatot.

x_i	$f(x_i)$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$\dots$
0	$\boxed{0}$			
$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\frac{1}{2}-0}{\frac{1}{6}-0} = \boxed{3}$		
$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}{\frac{5}{6}-\frac{1}{6}} = 0$	$\frac{0-3}{\frac{5}{6}-0} = \boxed{-\frac{18}{5}}$	
1	0	$\frac{0-\frac{1}{2}}{1-\frac{5}{6}} = -3$	$\frac{-3-0}{1-\frac{1}{6}} = -\frac{18}{5}$	$\frac{-\frac{18}{5}-(-\frac{18}{5})}{1-0} = \boxed{0}$

A táblázat bekeretezett értékei segítségével felírjuk az interpolációs polinom Newton-alakját.

$$P(x) = N_3(x) = 3x - \frac{18}{5}\, x \left(x - \frac{1}{6}\right)$$

Az $f(\frac{1}{3}) = \cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ közelítő értéke az interpolációs polinomból

$$P\left(\frac{1}{3}\right) = 3 \cdot \frac{1}{3} - \frac{18}{5} \cdot \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) =$$
$$= 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5} = 0,8.$$

Az $x = \frac{1}{3}$ pontban a hibabecslés

$$\left| f\left(\frac{1}{3}\right) - P\left(\frac{1}{3}\right) \right| \leq \frac{M_4}{4!} \left| \omega\left(\frac{1}{3}\right) \right|,$$

ahol

$$\left| \omega\left(\frac{1}{3}\right) \right| = \left| \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{3} - \frac{5}{6}\right)\left(\frac{1}{3} - 1\right) \right| = \frac{1}{36}.$$

Mivel $f(x) = \sin(\pi \cdot x)$, így az f deriváltjai

$$f'(x) = \pi \cdot \cos(\pi \cdot x)$$
$$f''(x) = -(\pi)^2 \cdot \sin(\pi \cdot x)$$
$$f'''(x) = -(\pi)^3 \cdot \cos(\pi \cdot x)$$
$$f^{(4)}(x) = (\pi)^4 \cdot \sin(\pi \cdot x),$$

ahonnan $x \in [0; 1]$ esetén

$$|f^{(4)}(x)| \leq (\pi)^4 = M_4.$$

A kapott értékeket a hibabecslésbe helyettesítve

$$\left| f\left(\frac{1}{3}\right) - P\left(\frac{1}{3}\right) \right| \leq \frac{(\pi)^4}{4!} \cdot \frac{1}{36} \approx 0,1127,$$

9. Nézzük az $x = \frac{1}{2}$ pontban a hibabecslést

$$\left| f\left(\frac{1}{2}\right) - P\left(\frac{1}{2}\right) \right| \leq \frac{M_4}{4!} \left| \omega\left(\frac{1}{2}\right) \right|,$$

ahol

$$\left| \omega\left(\frac{1}{2}\right) \right| = \left| \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{2} - 1\right) \right| = \frac{1}{144}.$$

Mivel $f(x) = x \cdot e^{-x}$, így az f deriváltjai

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{-x} - x \cdot e^{-x} = (1-x) \cdot e^{-x} \\ f''(x) &= -e^{-x} - (1-x) \cdot e^{-x} = (x-2) \cdot e^{-x} \\ f'''(x) &= e^{-x} - (x-2) \cdot e^{-x} = (3-x) \cdot e^{-x} \\ f^{(4)}(x) &= -e^{-x} - (3-x) \cdot e^{-x} = (x-4) \cdot e^{-x}, \end{aligned}$$

ahonnan $x \in [0;1]$ esetén

$$|f^{(4)}(x)| \le 4 \cdot e^0 = 4 = M_4.$$

A kapott értékeket a hibabecslésbe helyettesítve

$$\left| f\left(\frac{1}{2}\right) - P\left(\frac{1}{2}\right) \right| \le \frac{4}{4!} \cdot \frac{1}{144} = \frac{1}{864} \approx 0,001157.$$

Ezzel bizonyítottuk az egyenlőtlenséget.

10. Nézzük az $x = \frac{1}{2}$ pontban a hibabecslést

$$\left| f\left(\frac{1}{2}\right) - P\left(\frac{1}{2}\right) \right| \le \frac{M_4}{4!} \left| \omega\left(\frac{1}{2}\right) \right|,$$

ahol

$$\left| \omega\left(\frac{1}{2}\right) \right| = \left| \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{5}\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{2} - 1\right) \right| = \frac{1}{160}.$$

Mivel $f(x) = x^6$, így az f deriváltjai

$$\begin{aligned} f'(x) &= 6x^5 \\ f''(x) &= 30x^4 \\ f'''(x) &= 120x^3 \\ f^{(4)}(x) &= 360x^2, \end{aligned}$$

ahonnan $x \in [0;1]$ esetén

$$|f^{(4)}(x)| \le 360 = M_4.$$

A kapott értékeket a hibabecslésbe helyettesítve

$$\left| f\left(\frac{1}{2}\right) - P\left(\frac{1}{2}\right) \right| \le \frac{360}{4!} \cdot \frac{1}{160} = \frac{3}{32} \le \frac{3}{30} = 0,1.$$

Ezzel bizonyítottuk az egyenlőtlenséget.

11. A 8. feladat eredményeit fel tudjuk használni az összehasonlításhoz. A kapott polinomban x helyére $\frac{x}{2}$-t írva megkapjuk az interpolációs polinomot.
Ellenőrzésképpen készítsük el az osztott differencia táblázatot a megadott adatok alapján.

x_i	$f(x_i)$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$\ldots$
0	$\boxed{0}$			
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\frac{1}{2}-0}{\frac{1}{3}-0} = \boxed{\frac{3}{2}}$		
$\frac{5}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}{\frac{5}{3}-\frac{1}{3}} = 0$	$\frac{0-\frac{3}{2}}{\frac{5}{3}-0} = \boxed{-\frac{9}{10}}$	
2	0	$\frac{0-\frac{1}{2}}{2-\frac{5}{3}} = -\frac{3}{2}$	$\frac{-\frac{3}{2}-0}{2-\frac{1}{3}} = -\frac{9}{10}$	$\frac{-\frac{9}{10}-(-\frac{9}{10})}{1-0} = \boxed{0}$

A táblázat bekeretezett értékei segítségével megkapjuk az interpolációs polinom Newton-alakját

$$P(x) = N_3(x) = \frac{3}{2}\,x - \frac{9}{10}\,x\left(x - \frac{1}{3}\right),$$

mely egyezik az 8. feladatból $\frac{x}{2}$ helyettesítéssel kapott eredménnyel.
Az $f(\frac{1}{3}) = \cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ közelítő értéke az interpolációs polinomból

$$P\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3} - \frac{9}{10}\cdot\frac{2}{3}\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right) = \\ = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5} = 0,8.$$

Az $x = \frac{2}{3}$ pontban a hibabecslés

$$\left|f\left(\frac{2}{3}\right) - P\left(\frac{2}{3}\right)\right| \leq \frac{M_4}{4!}\left|\omega\left(\frac{2}{3}\right)\right|,$$

ahol

$$\left|\omega\left(\frac{2}{3}\right)\right| = \left|\frac{2}{3}\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3} - \frac{5}{3}\right)\left(\frac{2}{3} - 1\right)\right| = \frac{2}{27}.$$

Mivel $f(x) = \sin(\frac{\pi}{2}\cdot x)$, így

$$f^{(4)}(x) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^4 \sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot x\right),$$

ahonnan $x \in [0;2]$ esetén

$$|f^{(4)}(x)| \leq \left(\frac{\pi}{2}\right)^4 = M_4.$$

A kapott értékeket a hibabecslésbe helyettesítve

$$\left|f\left(\frac{1}{3}\right) - P\left(\frac{1}{3}\right)\right| \leq \frac{(\frac{\pi}{2})^4}{4!}\cdot\frac{2}{27} \approx 0,0188.$$

12. A feladatot a 3. feladat felhasználásával oldjuk meg. Egy új alappontunk van, amivel az osztott differencia táblázatot kiegészítjük, majd a Newton-alak rekurzióját felhasználva felírjuk az interpolációs polinomot.

x_i	$f(x_i)$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$\dots$
1	$\boxed{0}$			
2	1	$\frac{1-0}{2-1} = \boxed{1}$		
4	2	$\frac{2-1}{4-2} = \frac{1}{2}$	$\frac{\frac{1}{2}-1}{4-1} = \boxed{-\frac{1}{6}}$	
8	3	$\frac{3-2}{8-4} = \frac{1}{4}$	$\frac{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}}{8-2} = -\frac{1}{24}$	$\frac{-\frac{1}{24}-(-\frac{1}{6})}{8-1} = \boxed{\frac{1}{56}}$

A Newton-alak rekurziójából

$$P(x) = N_2(x) + \frac{1}{56}\,(x-1)(x-2)(x-4) = \\ = 0 + (x-1) - \frac{1}{6}\,(x-1)(x-2) + \frac{1}{56}\,(x-1)(x-2)(x-4).$$

Az $f(3) = \log_2(3)$ közelítő értéke az interpolációs polinomból

$$P(3) = N_2(3) + \frac{1}{56}\,(3-1)(3-2)(3-4) = \frac{5}{3} - \frac{1}{28} \approx 1,6309.$$

Az $x = 3$ pontban a hibabecslés

$$|f(3) - P(3)| \le \frac{M_4}{4!} |\,\omega(3)|,$$

ahol $|\omega(3)| = |(3-1)(3-2)(3-4)(3-8)| = 10$.

Mivel $f(x) = \log_2(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(2)}$, ezért

$$f^{(4)}(x) = -\frac{6}{\ln(2)}\, x^{-4},$$

ahonnan $x \in [1;8]$ esetén

$$|f^{(4)}(x)| = \frac{6}{x^4 \ln(2)} \le \frac{6}{\ln(2)} = M_4.$$

A kapott értékeket a hibabecslésbe helyettesítve

$$|f(3) - P(3)| \le \frac{\frac{6}{\ln(2)}}{4!} \cdot 10 = \frac{5}{2\ln(2)} \approx 3,606.$$

13. Nézzük a lineáris interpoláció hibabecslését

$$|f(x) - P_1(x)| \le \frac{M_2}{2} |\omega(x)|,$$

ahol $\omega(x) = (x-a)(x-b)$.

Mivel ω egy parabola, ezért a szélsőértékét az $x = \frac{a+b}{2}$ helyen veszi fel.

$$\left|\omega\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| = \left|\left(\frac{a+b}{2} - a\right)\left(\frac{a+b}{2} - b\right)\right| = \left(\frac{b-a}{2}\right)^2$$

Tehát $\|\omega\|_\infty = \frac{(b-a)^2}{4}$.

Folytatva a hibabecslést a bizonyítandó

$$|f(x) - P_1(x)| \le \frac{M_2}{8} \cdot (b-a)^2$$

alakot kapjuk.

14. A 13. feladatbeli eredményt használjuk a megoldáshoz. Jelöljük h-val az egyenletes felosztás lépésközét, azaz $h = x_k - x_{k-1}\ \ \forall\ k$-ra.

Mivel $f(x) = \cos(x)$, így a második derivált becslésére $M_2 = 1$-et kapunk.

Az $[x_{k-1}; x_k]$ intervallumon a hiba

$$|f(x) - P_1(x)| \le \frac{M_2}{8} \cdot h^2 = \frac{h^2}{8}.$$

A 10^{-6}-nál kisebb hibához

$$\frac{h^2}{8} < 10^{-6} \quad \Leftrightarrow \quad h < \sqrt{8} \cdot 10^{-3} \approx 0,0028.$$

Kevesebb felosztás is elegendő, ha nem egyenletes felosztást választunk. Mivel $M_2 = 1$ éles becslés a $[0\,;\pi]$ intervallum szélein, ezért ott ezt az intervallum hosszat tartanunk kell.

Ahol $|\cos(x)| \le \frac{1}{n^2}$, ott $n \cdot h$ lehet a lépésköz, tehát elhagyhatunk osztópontokat.

15. Az interpoláció hibabecslése $x \in [a;b]$-re

$$|f(x) - P_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|\omega(x)|.$$

Tehát elég belátnunk, hogy

$$|\omega(x)| \leq \frac{n!}{4}\, h^{n+1} \quad \forall\ x \in [a;b].$$

Rögzítsük a $k \in \{1, \dots, n\}$ indexet, melyre $x \in [x_{k-1}; x_k]$.

$$|(x - x_{k-1})(x - x_k)| \leq \frac{h^2}{4},$$

az x_{k-1}, x_k zérushelyekkel rendelkező parabola szélsőértéke. A többi tényezőt külön-külön becsüljük.

$$\begin{aligned}
|x - x_{k-2}| &\leq 2h \\
&\vdots \\
|x - x_1| &\leq (k-1)h \\
|x - x_0| &\leq kh \\
|x - x_{k+1}| &\leq 2h \\
&\vdots \\
|x - x_n| &\leq (n-k-1)h
\end{aligned}$$

A becsléseket felhasználva

$$|\omega(x)| \leq \frac{h^{n+1}}{4} \cdot k! \cdot (n-k-1)! \leq \frac{h^{n+1}}{4} \cdot n!$$

Ezzel az állítást beláttuk.

16. Írjuk fel az $f(x) = \frac{1}{x+3}$ függvény deriváltjait.

$$f'(x) = -(x+3)^{-2}, \quad f''(x) = 2 \cdot (x+3)^{-3}, \quad f'''(x) = -6 \cdot (x+3)^{-4}, \dots$$

Teljes indukcióval belátható, hogy

$$f^{(k)}(x) = (-1)^k \cdot k! \cdot (x+3)^{-(k+1)} = \frac{(-1)^k \cdot k!}{(x+3)^{k+1}}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Az interpoláció hibabecslését felhasználva

$$|f(x) - L_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|\omega(x)|,$$

ahol

$$M_{n+1} = \|f^{n+1}\|_\infty = \max\{|f^{n+1}(\xi)| :\ \xi \in [0;\, 1]\} = \frac{(n+1)!}{3^{n+1}}$$

és $\omega(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i^{(n)})$. Mivel $|\, x - x_i^{(n)}| < 1, \quad \forall\ i = 0, \dots, n$, ezért

$$|\omega(x)| = \prod_{i=0}^{n} |\, x - x_i^{(n)}| < 1.$$

A kapott eredményeket beírva a hibabecslésbe

$$|f(x) - L_n(x)| \leq \frac{(n+1)!}{(n+1)! \cdot 3^{n+1}} = \frac{1}{3^{n+1}} \to 0 \ \ (n \to \infty).$$

17. Készítsük el az $f(x) = \frac{2x+5}{x^2+5x+6}$ racionális törtfüggvény parciális törtekre bontását.
Ellenőrizzük, hogy

$$f(x) = \frac{2x+5}{x^2+5x+6} = \frac{1}{x+3} + \frac{1}{x+2}.$$

Írjuk fel az $f(x) = \frac{1}{x+3}$ és $f(x) = \frac{1}{x+2}$ függvények deriváltjait.

$$f'(x) = -(x+3)^{-2}, \quad f''(x) = 2 \cdot (x+3)^{-3}, \quad f'''(x) = -6 \cdot (x+3)^{-4}, \dots$$

Teljes indukcióval belátható, hogy

$$f^{(k)}(x) = (-1)^k \cdot k! \cdot (x+3)^{-(k+1)} = \frac{(-1)^k \cdot k!}{(x+3)^{k+1}}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Hasonlóan

$$f^{(k)}(x) = (-1)^k \cdot k! \cdot (x+2)^{-(k+1)} = \frac{(-1)^k \cdot k!}{(x+2)^{k+1}}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Az interpoláció hibabecslését felhasználva

$$|f(x) - L_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|\omega(x)|,$$

ahol

$$M_{n+1} = \|f^{n+1}\|_\infty = \max\{|f^{n+1}(\xi)| : \ \xi \in [0;\, 1]\} = (n+1)! \left(\frac{1}{3^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

és $\omega(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i^{(n)})$. Mivel $|\, x - x_i^{(n)}| < 1, \quad \forall\ i = 0, \dots, n$, ezért

$$|\omega(x)| = \prod_{i=0}^{n} |\, x - x_i^{(n)}| < 1.$$

A kapott eredményeket beírva a hibabecslésbe

$$|f(x) - L_n(x)| \leq \frac{(n+1)!}{(n+1)!}\left(\frac{1}{3^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+1}}\right) = \frac{1}{3^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+1}} \to 0 \ \ (n \to \infty).$$

18. $P(x_k) = f(x_k)\ \ \forall\ \ k \in \{1, \dots, n-1\}$, mivel P az $x_1, \dots, x_{n-1}$ pontokban interpolálja f-et.
$Q(x_k) = f(x_k)\ \ \forall\ \ k \in \{2, \dots, n\}$, mivel Q az $x_2, \dots, x_n$ pontokban interpolálja f-et.
Legyen

$$R(x) = P(x) + \frac{x_1 - x}{x_n - x_1}(P(x) - Q(x)).$$

Ellenőrizzük, hogy interpolál-e az $x_1, \dots, x_n$ alappontokban.

$$R(x_1) = P(x_1) + \underbrace{\frac{x_1 - x_1}{x_n - x_1}}_{=0}(P(x_1) - Q(x_1)) = P(x_1) = f(x_1)$$

$k \in \{2, \dots, n-1\}$ esetén

$$R(x_k) = P(x_k) + \frac{x_1 - x_k}{x_n - x_1}\underbrace{(P(x_k) - Q(x_k))}_{=f(x_k)-f(x_k)=0} = P(x_k) = f(x_k)$$

$$R(x_n) = P(x_n) + \underbrace{\frac{x_1 - x_n}{x_n - x_1}}_{=-1}(P(x_n) - Q(x_n)) =$$

$$= P(x_n) - (P(x_n) - Q(x_n)) = Q(x_n) = f(x_n)$$

19. **a)** Az interpoláció pontos az $f \equiv 1$ függvényre, írjuk fel a Lagrange-alakot.

$$1 = f(x) = L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} 1 \cdot \ell_k(x) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

b) Hasonlóan, az interpoláció pontos az $f(x) \equiv x$ függvényre. Írjuk fel a Lagrange-alakját.

$$x = f(x) = L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x_k \cdot \ell_k(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

c) Hasonlóan, az $n+1$ alappontú interpolációs polinom pontos az $f(x) \equiv x^n$ függvényre. Írjuk fel a Lagrange-alakját.

$$x^n = f(x) = L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x_k^k \cdot \ell_k(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

20. Tegyük fel, hogy az interpolációs polinom $P(x) = p_2x^4 + p_1x^2 + p_0$ alakú. Írjuk fel az interpolációs feltételeket.

$$\begin{aligned}
P(-1) &= p_2 \cdot (-1)^4 + p_1 \cdot (-1)^2 + p_0 = p_2 + p_1 + p_0 = f(-1) \\
P(0) &= p_0 = f(0) \\
P(1) &= p_2 \cdot (1)^4 + p_1 \cdot (1)^2 + p_0 = p_2 + p_1 + p_0 = f(1)
\end{aligned}$$

Látszik, hogy ha $f(-1) \neq f(1)$, akkor ellentmondó egyenletrendszert kapunk, melynek nincs megoldása. Például páratlan függvényeket nem tudunk interpolálni az $1, x^2, x^4$ függvényrendszerrel.

21. Az $f(x) = a_nx^n + \ldots + a_1x + a_0$ alakú n-edfokú polinomnak az $x_0, \ldots, x_n$ különböző alappontok esetén felírt interpolációs polinomja azonos önmagával, azaz

$$f(x) \equiv N_n(x).$$

Az $f[x_0, \ldots, x_n]$ osztott differencia a Newton-alak főegyütthatója, így

$$f[x_0, \ldots, x_n] = a_n.$$

22. A P egy n-edfokú polinom, $k > n$ és $x_0, \ldots, x_k$ különböző alappontok esetén a hibaformula

$$P(x) - L_k(x) = \frac{P^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!}\omega(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Tehát $P(x) \equiv L_k(x) \equiv N_k(x)$, így a Newton-alakban

$$\forall k > n: \quad f[x_0, \ldots, x_k] = 0.$$

23. Legyen $f(x) = x^{n+1}$ és P az $x_0, \dots, x_n$ alappontokra felírt n-edfokú interpolációs polinom. A hibaformulából

$$x^{n+1} - P(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot \omega(x) = \frac{(n+1)!}{(n+1)!} \cdot \omega(x) = \omega(x).$$

Hasonlítsuk össze az x^n-es tagok együtthatóját.

Bal oldalon a Newton-alakból: $-f[x_0, \dots, x_n]$,
míg jobboldalon az $\omega(x) = \prod_{k=0}^{n}(x - x_k)$ -ból: $-\sum_{i=0}^{n} x_i$,
így

$$f[x_0, \dots, x_n] = \sum_{i=0}^{n} x_i.$$

24. Az $x_0 < x_1 < x_2 < x_3$ alappontokhoz tartozó Lagrange-alappolinomokat $\ell_0, \ell_1, \ell_2, \ell_3$ -mal jelöljük. Az interpoláció pontos az $f \equiv 1$ függvényre, írjuk fel a Lagrange-alakját.

$$1 = f(x) = L_3(x) = \sum_{k=0}^{3} 1 \cdot \ell_k(x) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Tehát

$$\ell_0(x) + \ell_1(x) + \ell_2(x) + \ell_3(x) = 1.$$

Be kell látnunk, hogy

$$\forall x \in [x_1; x_2]: \quad \ell_1(x) + \ell_2(x) \geq 1.$$

Ehelyett a vele ekvivalens

$$\forall x \in [x_1; x_2]: \quad \ell_0(x) + \ell_3(x) \leq 0$$

egyenlőtlenséget látjuk be. Használjuk a két szélső Lagrange-alappolinom képletét.

$$\begin{aligned}
\ell_0(x) + \ell_3(x) =& \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)} + \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} = \\
=& \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_3)} \left(\frac{x - x_3}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + \frac{-(x - x_0)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} \right) = \\
=& \underbrace{\frac{(x - x_1)(x_2 - x)}{(x_3 - x_0)}}_{\geq 0} \left(\underbrace{\frac{-(x_3 - x)}{(x_1 - x_0)(x_2 - x_0)}}_{<0} + \underbrace{\frac{-(x - x_0)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}}_{<0} \right) \leq 0
\end{aligned}$$

A fenti átalakításból látszik, hogy az $[x_1; x_2]$ intervallumon az első tényező nem negatív, a második pedig negatív. Ezzel a bizonyítandó állítást beláttuk.

25. Legyen $i, s \in \{0, \dots, n\}$ és $j, t \in \{0, \dots, k\}$, az egyváltozós Lagrange-alappolinomok tulajdonságát felhasználva

$$\ell_{ij}(x_s, y_t) = \ell_i^{(1)}(x_s) \cdot \ell_j^{(2)}(y_t) = \delta_{is} \cdot \delta_{jt},$$

ahol $\delta_{is}, \ \delta_{jt}$ a Kronecker szimbólumokat jelöli (vagyis $i = s$ illetve $j = t$ esetén lesz egy az értéke, minden más esetben nulla). Ellenőrizzük a polinomra az interpolációs feltételeket.

$$\begin{aligned}
P(x_s, y_t) &= \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} f(x_i, y_j) \cdot \ell_{ij}(x_s, y_t) = \\
&= \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} f(x_i, y_j) \cdot \delta_{is} \cdot \delta_{jt} = f(x_s, y_t)
\end{aligned}$$

$$s = 0, \dots, n, \quad t = 0, \dots, k$$

Ezzel bebizonyítottuk, hogy a kétváltozós interpolációs polinom eleget tesz az interpolációs feltételeknek.

6.2.2. Csebisev polinomok alkalmazása

26. A lineáris interpoláció miatt két alappontra van szükség. Ahhoz, hogy a hiba minimális legyen úgy kell választani őket, hogy a $T_2(x) = 2x^2 - 1$ másodfokú Csebisev polinom gyökei legyenek. Így

$$x_0 = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

a keresett alappontok.

Számítsuk ki a hibabecslésben szereplő mennyiségeket.

$$\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1) = \frac{1}{2} \cdot T_2(x) \quad \Rightarrow \quad \|\omega\|_\infty = \frac{1}{2} \cdot \|T_2\|_\infty = \frac{1}{2}$$

$$f''(x) = -\sin(x) \quad \Rightarrow \quad \|f''\|_\infty = 1 = M_2$$

A hibabecslés $[-1; 1]$-en

$$|f(x) - P_1(x)| \leq M_2 \cdot \|\omega\|_\infty \leq \frac{1}{2}.$$

27. A másodfokú interpoláció miatt három alappontra van szükség. Ahhoz, hogy a hiba minimális legyen úgy kell választani őket, hogy a harmadfokú Csebisev polinom gyökeit a $[0; 2]$ intervallumba transzformáljuk.

A rekurzióból $T_3(x) = 2x \cdot (2x^2 - 1) - x = 4x^3 - 3x$ a harmadfokú Csebisev polinom, melynek gyökei

$$x_0 = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

A $\varphi(x) = x + 1$ eltolás a $[-1; 1]$ intervallumot a $[0; 2]$ intervallumba képezi, ezt alkalmazzuk a gyökökre. Így $y_i = \varphi(x_i)$, azaz

$$y_0 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + 1, \quad y_1 = 1, \quad y_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} + 1$$

a keresett alappontok.

Számítsuk ki a hibabecslésben szereplő mennyiségeket.

$$\omega(y) = (y - y_0)(y - y_1)(y - y_2) = \frac{1}{4}\, T_3(\varphi^{-1}(y)) \quad \Rightarrow \quad \|\omega\|_\infty = \frac{1}{4}$$

$$f'''(y) = 6 \quad \Rightarrow \quad \|f'''\|_\infty = 6 = M_3$$

A hibabecslés $[0; 2]$-n

$$|f(y) - P_2(y)| \leq \frac{M_3}{3!} \cdot \|\omega\|_\infty \leq \frac{1}{4}.$$

28. A másodfokú interpoláció miatt három alappontra van szükség. Ahhoz, hogy a hiba minimális legyen úgy kell választani őket, hogy a harmadfokú Csebisev polinom gyökeit a $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ intervallumba transzformáljuk.

A rekurzióból $T_3(x) = 2x \cdot (2x^2 - 1) - x = 4x^3 - 3x$ a harmadfokú Csebisev polinom, melynek gyökei

$$x_0 = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

A $\varphi(x) = \frac{\pi}{2} \cdot x$ függvény a $[-1; 1]$ intervallumot a $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ intervallumba képezi, ezt alkalmazzuk a gyökökre. Így

$$y_0 = -\frac{\sqrt{3}}{4}\pi, \quad y_1 = 0, \quad y_2 = \frac{\sqrt{3}}{4}\pi$$

a keresett alappontok.

Számítsuk ki a hibabecslésben szereplő mennyiségeket.

$$\omega(y) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^3 \cdot \frac{1}{4} T_3(\varphi^{-1}(y)) = \frac{\pi^3}{32} \quad \Rightarrow \quad \|\omega\|_\infty = \frac{\pi^3}{32}$$

$$f'''(y) = \sin(y) \quad \Rightarrow \quad \|f'''\|_\infty = 1 = M_3$$

A hibabecslés $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$-n

$$|f(y) - P_2(y)| \leq \frac{M_3}{3!} \cdot \|\omega\|_\infty \leq \frac{\pi^3}{192} \approx 0,16.$$

29. Tekintsük az $f(y) = \frac{2}{\pi}y + \sin(y), \quad y \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ függvényt.

a) A $-\frac{\pi}{2}$, 0, $\frac{\pi}{2}$ alappontok és $-2, 0, 2$ függvényértékek ismeretében készítsük el az osztott differencia táblázatot.

y_i	$f(y_i)$	$f[y_i, y_{i+1}]$	$f[y_i, y_{i+1}, y_{i+2}]$
$-\frac{\pi}{2}$	$\boxed{-2}$		
0	0	$\frac{0-(-2)}{0-(-\frac{\pi}{2})} = \boxed{\frac{4}{\pi}}$	
$\frac{\pi}{2}$	2	$\frac{2-0}{\frac{\pi}{2}-0} = \frac{4}{\pi}$	$\frac{\frac{4}{\pi}-\frac{4}{\pi}}{\frac{\pi}{2}-(-\frac{\pi}{2})} = \boxed{0}$

A táblázat bekeretezett értékei segítségével felírjuk az interpolációs polinom Newton-alakját.

$$P(y) = N_2(y) = -2 + \frac{4}{\pi}\left(y + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{4}{\pi}\,y$$

Mivel az eredeti függvény páratlan és az alappontok a nullára szimmetrikusan helyezkednek el, ezért nem meglepő, hogy a másodfokú interpolációs polinom valójában elsőfokú.

b) Az interpoláció hibabecslése az $y \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ pontban

$$|f(y) - P(y)| \leq \frac{M_3}{3!}|\omega(y)|,$$

ahol

$$|f'''(y)| = |-\cos(y)| \leq 1 = M_3$$

Számítsuk ki $\|\omega\|_\infty$-t.

$$\omega(y) = \left(y + \frac{\pi}{2}\right)(y - 0)\left(y - \frac{\pi}{2}\right) = y^3 - \frac{\pi^2}{4}y$$

$$\omega'(y) = 3y^2 - \frac{\pi^2}{4}$$

Az ω lehetséges szélsőértékei

$$y_{1,2} = \pm\frac{\pi}{\sqrt{12}}$$

$$\omega\left(-\frac{\pi}{\sqrt{12}}\right) = -\frac{\pi}{\sqrt{12}}\left(\frac{\pi^2}{12} - \frac{\pi^2}{4}\right) = \frac{\pi^3}{12\sqrt{3}}$$

$$\omega\left(\frac{\pi}{\sqrt{12}}\right) = \frac{\pi}{\sqrt{12}}\left(\frac{\pi^2}{12} - \frac{\pi^2}{4}\right) = -\frac{\pi^3}{12\sqrt{3}}$$

Innen $\|\omega\|_\infty = \frac{\pi^3}{12\sqrt{3}} \approx 1,49$.

Az $y \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ intervallumon a hibabecslés

$$|f(y) - P(y)| \leq \frac{M_3}{3!}\|\omega\|_\infty = \frac{1}{6} \cdot \frac{\pi^3}{12\sqrt{3}} \approx 0,2486.$$

c) A másodfokú interpoláció miatt három alappontra van szükség. Ahhoz, hogy a hiba minimális legyen úgy kell választani őket, hogy a harmadfokú Csebisev polinom gyökeit a $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ intervallumba transzformáljuk.

A $[-1; 1]$-en értelmezett Csebisev polinom rekurziójából $T_3(x) = 2x \cdot (2x^2 - 1) - x = 4x^3 - 3x$ a harmadfokú Csebisev polinom, melynek gyökei

$$x_0 = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \;\; x_1 = 0, \;\; x_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

A $\varphi(x) = \frac{\pi}{2} \cdot x$ függvény a $[-1; 1]$ intervallumot a $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ intervallumba képezi, ezzel transzformáljuk a Csebisev gyököket a $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ intervallumba. Így

$$y_0 = -\frac{\sqrt{3}}{4}\pi, \quad y_1 = 0, \quad y_2 = \frac{\sqrt{3}}{4}\pi$$

a keresett alappontok.

Számítsuk ki a hibabecslésben szereplő mennyiségeket.

$$\omega(y) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^3 \cdot \frac{1}{4}\, T_3(\varphi^{-1}(y)) = \frac{\pi^3}{32} \;\;\Rightarrow\;\; \|\omega\|_\infty = \frac{\pi^3}{32}$$

A hibabecslés $y \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$-re

$$|f(y) - P(y)| \leq \frac{M_3}{3!} \cdot \|\omega\|_\infty \leq \frac{\pi^3}{192} \approx 0,16.$$

6.2.3. Inverz interpoláció

30. Az $f(x_{k-1}), f(x_k)$ alappontok és az x_{k-1}, x_k függvényértékek ismeretében készítsük el az f inverzének a közelítéséhez az osztott differencia táblázatot.

x_i	$f^{-1}(x_i)$	$f^{-1}[x_i, x_{i+1}]$
$f(x_k)$	$\boxed{x_k}$	
$f(x_{k-1})$	x_{k-1}	$\frac{x_{k-1}-x_k}{f(x_{k-1})-f(x_k)} = \boxed{\frac{1}{f[x_{k-1}, x_k]}}$

Az interpolációs polinom Newton-alakja

$$Q(y) = x_k + \frac{1}{f[x_{k-1}, x_k]}(y - f(x_k))$$

Mivel $f(x^*) = 0 \;\Leftrightarrow\; f^{-1}(0) = x^*$, ezért a gyök új közelítése legyen

$$x_{k+1} := Q(0) = x_k - \frac{f(x_k)}{f[x_{k-1}, x_k]} = x_k - \frac{f(x_k)(x_k - x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})}.$$

Az x_{k-1} közelítést hagyjuk el, és folytassuk az x_k, x_{k+1} pontokkal. A kapott képletben ráismerhetünk a szelő módszerre.

31. Az x_0, x_1, x_2 alappontok és $f(x_0), f(x_1), f(x_2)$ függvényértékek ismeretében az f^{-1} alappontjai $f(x_0), f(x_1), f(x_2)$ és a függvényértékei x_0, x_1, x_2. Készítsük el az osztott differencia táblázatot.

x_i	$f(x_i)$	$f^{-1}[x_i, x_{i+1}]$	$f^{-1}[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$
$f(x_0)$	$\boxed{x_0}$		
$f(x_1)$	x_1	$\boxed{\dfrac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)}}$	
$f(x_2)$	x_2	$\frac{x_2 - x_1}{f(x_2) - f(x_1)}$	$\boxed{\dfrac{\frac{x_2 - x_1}{f(x_2) - f(x_1)} - \frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)}}{f(x_2) - f(x_0)} =: K}$

Az interpolációs polinom Newton-alakja

$$Q(y) = x_0 + \frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)}(y - f(x_0)) + K(y - f(x_0))(y - f(x_1)).$$

Mivel $f(x^*) = 0 \;\Leftrightarrow\; f^{-1}(0) = x^*$, ezért a gyök új közelítése legyen

$$x_3 := x_0 - \frac{f(x_0)(x_1 - x_1)}{f(x_1) - f(x_0)} + K \cdot f(x_0) f(x_1).$$

Látjuk, hogy a kapott módszerrel a szelő módszer lépését korrigáljuk egy taggal.

32. Tekintsük az $f(x) = \sin(\frac{\pi}{2}x)$ függvényt. A $0, \frac{1}{3}, 1$ alappontok és a $0, \frac{1}{2}, 1$ függvényértékek ismeretében az f^{-1} alappontjai $0, \frac{1}{2}, 1$ és függvényértékei $0, \frac{1}{3}, 1$. Készítsük el az osztott differencia táblázatot.

x_i	$f(x_i)$	$f^{-1}[x_i, x_{i+1}]$	$f^{-1}[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$
0	$\boxed{0}$		
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{\frac{1}{3} - 0}{\frac{1}{2} - 0} = \boxed{\dfrac{2}{3}}$	
1	1	$\frac{1 - \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{4}{3}$	$\frac{\frac{4}{3} - \frac{2}{3}}{1 - 0} = \boxed{\dfrac{2}{3}}$

Az interpolációs polinom Newton-alakja

$$Q(y) = \frac{2}{3} y + \frac{2}{3} y \left(y - \frac{1}{2} \right).$$

Mivel $f(x^*) = \frac{3}{4} \;\Leftrightarrow\; f^{-1}(\frac{3}{4}) = x^*$, ezért a gyök új közelítése

$$x_3 := Q\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} + \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2} \right) = \frac{5}{8}.$$

33. Adottak $x_k, f(x_k) =: y_k$ és $f'(x_k)$. Közelítsük f^{-1}-et az elsőfokú Taylor polinomjával.

$$\begin{aligned} P(y) &= f^{-1}(y_k) + (f^{-1})'(y_k)(y - y_k) = \\ &= x_k + \frac{1}{f'(f^{-1}(y_k))}\,(y - f(x_k)) = \\ &= x_k + \frac{1}{f'(x_k)}\,(y - f(x_k)) \end{aligned}$$

Mivel $f(x^*) = 0 \;\Leftrightarrow\; f^{-1}(0) = x^*$, ezért a gyök új közelítése legyen

$$x_{k+1} := P(0) = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}.$$

A kapott képletben ráismerhetünk a Newton módszerre.

Vissza a tartalomhoz

7. fejezet

Hermite-interpoláció

7.1. Feladatok

1. Írjuk fel azt a negyedfokú polinomot, melyre $P(0) = P'(0) = 0$, $P(1) = P'(1) = 0$ és $P(2) = 2$!

2. Írjuk fel azt az Hermite-féle interpolációs polinomot, melyre $P(-1) = P'(-1) = 1$, $P(0) = 2$, $P'(0) = 0$ és $P(1) = 1$, $P'(1) = -1$!

3. Írjuk fel az f-et közelítő Hermite-féle interpolációs polinomot, ha $f(0) = -1$, $f'(0) = -4$, $f(2) = -1$, $f'(2) = 4$ és $f''(2) = 12$!

4. Határozzuk meg a $P(-1) = -1$, $P(0) = 0$, $P(1) = 1$ feltételnek eleget tevő Fejér-féle lépcső-parabolát! ($P'(-1) = P'(0) = P'(1) = 0$)

5. Határozzuk meg a $P(-1) = 0$, $P(0) = 1$, $P(1) = 2$ feltételnek eleget tevő Fejér-féle lépcső-parabolát! ($P'(-1) = P'(0) = P'(1) = 0$)

6. Tekintsük az $f(x) = \frac{1}{1+x}$ függvényt és a 0, 1 alappontokat.

a) Írjuk fel az f-et interpoláló Fejér-Hermite polinomot (H)!

b) Becsüljük a polinom hibáját az $\frac{1}{3}$ pontban!

c) Becsüljük a polinom hibáját a $[0\,;\,1]$ intervallumon!

7. Legyen $P(0) = 0$, $P''(0) = 0$ és $P(1) = 1$, $P'(1) = 0$.
Írjuk fel azt a legfeljebb 3-adfokú polinomot, melyre a fenti feltételek teljesülnek.

8. Írjuk fel azt a harmadfokú polinomot, melyre $P(0) = P(1) = 1$, $P'(1) = 1$ és $P''(2) = 2$. Vigyázat! Nem Hermite-, hanem hézagos interpoláció!

9. Tekintsük a Fejér–Hermite-interpolációt az $x_0, x_1, \ldots, x_n \in [-1;\, 1]$ Csebisev alappontokon. Adjunk hibabecslést a $[-1;\, 1]$ intervallumon!

10. Igazoljuk, hogy az $x_0, \ldots, x_n$ különböző alappontok esetén a Fejér–Hermite-alappolinomok a következő alakúak

$$A_i(x) = [1 - 2(x - x_i)\ell_i'(x_i)] \cdot \ell_i^2(x),$$

$$B_i(x) = (x - x_i) \cdot \ell_i^2(x), \quad (i = 1, \ldots, n),$$

ahol $\ell_i(x)$ az i. Lagrange-alappolinomot jelöli.

Vissza a tartalomhoz

7.2. Megoldások

1. Az Hermite-interpolációs polinom Newton-alakjához készítsük el az osztott differencia táblázatot. A táblázatban minden alappontot annyiszor írunk egymás alá, amennyi a multiplicitása. A második oszlopba a megadott függvényértékeket írjuk be. Azonos alappontok esetén az elsőrendű osztott differenciát $f[x_i, x_i] = f'(x_i)$-nek értelmezzük, a megadott derivált értékeket írjuk a táblázatba. Az üresen maradt helyeket az interpolációnál tanultak szerint töltjük ki.

x_i	$f(x_i)$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$\dots$	$\dots$
0	$\boxed{0}$				
0	0	$\boxed{0}$			
1	0	$\frac{0-0}{1-0} = 0$	$\frac{0-0}{1-0} = \boxed{0}$		
1	0	0	$\frac{0-0}{1-0} = 0$	$\frac{0-0}{1-0} = \boxed{0}$	
2	2	$\frac{2-0}{2-1} = 2$	$\frac{2-0}{2-1} = 2$	$\frac{2-0}{2-0} = 1$	$\frac{1-0}{2-0} = \boxed{\frac{1}{2}}$

A táblázat bekeretezett értékei segítségével felírjuk az Hermite-interpolációs polinom Newton-alakját.

$$
\begin{aligned}
H_4(x) &= \frac{1}{2}\,(x-0)^2(x-1)^2 = \frac{1}{2}\,x^2(x-1)^2 \\
&= \frac{1}{2}\,x^4 - x^3 + \frac{1}{2}\,x^2
\end{aligned}
$$

2. Az Hermite-interpolációs polinom Newton-alakjához készítsük el az osztott differencia táblázatot. A táblázatban minden alappontot annyiszor írunk egymás alá, amennyi a multiplicitása. A második oszlopba a megadott függvényértékeket írjuk be. Azonos alappontok esetén az elsőrendű osztott differenciát $f[x_i, x_i] = f'(x_i)$-nek értelmezzük, a megadott derivált értékeket írjuk a táblázatba. Az üresen maradt helyeket az interpolációnál tanultak szerint töltjük ki.

x_i	$f(x_i)$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$\dots$	$\dots$	
-1	$\boxed{1}$					
-1	1	$\boxed{1}$				
0	2	$\frac{2-1}{0-(-1)} = 1$	$\frac{1-1}{0-(-1)} = \boxed{0}$			
0	2	0	$\frac{0-1}{0-(-1)} = -1$	$\frac{-1-0}{0-(-1)} = \boxed{-1}$		
1	1	$\frac{1-2}{1-0} = -1$	$\frac{-1-0}{1-0} = -1$	$\frac{-1-(-1)}{1-(-1)} = 0$	$\frac{0-(-1)}{1-(-1)} = \boxed{\frac{1}{2}}$	
1	1	-1	$\frac{-1-(-1)}{1-0} = 0$	$\frac{0-(-1)}{1-0} = 1$	$\frac{1-0}{1-(-1)} = \frac{1}{2}$	$\boxed{0}$

A táblázat bekeretezett értékei segítségével felírjuk az Hermite-interpolációs polinom Newton-alakját.

$$
\begin{aligned}
H_5(x) &= 1 + (x-(-1)) - (x-(-1))^2(x-0) + \frac{1}{2}\,(x-(-1))^2(x-0)^2 = \\
&= 1 + (x+1) - x(x+1)^2 + \frac{1}{2}\,x^2(x+1)^2
\end{aligned}
$$

3. Az Hermite-interpolációs polinom Newton-alakjához készítsük el az osztott differencia táblázatot. A táblázatban minden alappontot annyiszor írunk egymás alá, amennyi a multiplicitása. A második oszlopba a megadott függvényértékeket írjuk be. Azonos alappontok esetén az elsőrendű osztott differenciát $f[x_i, x_i] = f'(x_i)$-nek, a másodrendű osztott differenciát

$f[x_i, x_i, x_i] = \frac{f''(x_i)}{2}$-nek értelmezzük. Ezeket írjuk be a táblázat megfelelő helyére. Az üresen maradt helyeket az interpolációnál tanultak szerint töltjük ki.

x_i	$f(x_i)$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$\dots$	$\dots$
0	$\boxed{-1}$				
0	-1	$\boxed{-4}$			
2	-1	$\frac{1-1}{2-0} = 0$	$\frac{0-(-4)}{2-0} = \boxed{2}$		
2	-1	4	$\frac{4-0}{2-0} = 2$	$\frac{0-0}{2-0} = \boxed{0}$	
2	-1	4	6	$\frac{6-2}{2-0} = 2$	$\frac{2-0}{2-0} = \boxed{1}$

A táblázat bekeretezett értékei segítségével felírjuk az Hermite-interpolációs polinom Newton-alakját.

$$\begin{aligned} H_3(x) &= -1 - 4(x-0) + 2(x-0)^2 + (x-0)^2(x-2)^2 = \\ &= -1 - 4x + 2x^2 + x^4 - 4x^3 + x^2 = x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 4x - 1 \end{aligned}$$

4. Az Hermite-interpolációs polinom Newton-alakjához készítsük el az osztott differencia táblázatot az előző megoldásokban ismertetett módon.

x_i	$f(x_i)$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
-1	$\boxed{-1}$					
-1	-1	$\boxed{0}$				
0	0	$\frac{0-(-1)}{0-(-1)} = 1$	$\frac{1-0}{0-(-1)} = \boxed{1}$			
0	0	0	$\frac{0-1}{0-(-1)} = -1$	$\frac{-1-1}{0-(-1)} = \boxed{-2}$		
1	1	$\frac{1-0}{1-0} = 1$	$\frac{1-0}{1-0} = 1$	$\frac{1-(-1)}{1-(-1)} = 1$	$\frac{1-(-2)}{1-(-1)} = \boxed{\frac{3}{2}}$	
1	1	0	$\frac{0-1}{1-0} = -1$	$\frac{-1-1}{1-0} = -2$	$\frac{-2-1}{1-(-1)} = -\frac{3}{2}$	$\frac{-\frac{3}{2}-\frac{3}{2}}{1-(-1)} = \boxed{-\frac{3}{2}}$

A táblázat bekeretezett értékei segítségével felírjuk az Hermite-interpolációs polinom Newton-alakját.

$$\begin{aligned} H_5(x) &= -1 + (x-(-1))^2 - 2\,(x-(-1))^2(x-0) + \\ &+ \frac{3}{2}\,(x-(-1))^2(x-0)^2 - \frac{3}{2}\,(x-(-1))^2(x-0)^2(x-1) = \\ &= -1 + (x+1)^2 - 2\,x(x+1)^2 + \frac{3}{2}\,x^2(x+1)^2 - \frac{3}{2}\,x^2(x+1)^2(x-1) \end{aligned}$$

5. Az Hermite-interpolációs polinom Newton-alakjához készítsük el az osztott differencia táblázatot az előző megoldásokban ismertetett módon.

x_i	$f(x_i)$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
-1	$\boxed{0}$					
-1	0	$\boxed{0}$				
0	1	$\frac{1-0}{0-(-1)} = 1$	$\frac{1-0}{0-(-1)} = \boxed{1}$			
0	1	0	$\frac{0-1}{0-(-1)} = -1$	$\frac{-1-1}{0-(-1)} = \boxed{-2}$		
1	2	$\frac{2-1}{1-0} = 1$	$\frac{1-0}{1-0} = 1$	$\frac{1-(-1)}{1-(-1)} = 1$	$\frac{1-(-2)}{1-(-1)} = \boxed{\frac{3}{2}}$	
1	2	0	$\frac{0-1}{1-0} = -1$	$\frac{-1-1}{1-0} = -2$	$\frac{-2-1}{1-(-1)} = -\frac{3}{2}$	$\frac{-\frac{3}{2}-\frac{3}{2}}{1-(-1)} = \boxed{-\frac{3}{2}}$

A táblázat bekeretezett értékei segítségével felírjuk az Hermite-interpolációs polinom Newton-alakját. Látjuk, hogy az 4. feladat megoldásánál felírt táblázatban csak a második oszlopban változás, ami a Newton-alakot csak a konstans tagban változtatja.

$$\begin{aligned} H_5(x) &= (x-(-1))^2 - 2(x-(-1))^2(x-0)+\\ &+\frac{3}{2}(x-(-1))^2(x-0)^2 - \frac{3}{2}(x-(-1))^2(x-0)^2(x-1) =\\ &= (x+1)^2 - 2\,x(x+1)^2 + \frac{3}{2}x^2(x+1)^2 - \frac{3}{2}x^2(x+1)^2(x-1) \end{aligned}$$

6. **a)** Az Hermite-interpolációs polinom Newton-alakjához készítsük el az osztott differencia táblázatot az előző megoldásokban ismertetett módon.

x_i	$f(x_i)$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$\dots$
0	$\boxed{1}$			
0	1	$\boxed{-1}$		
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{\frac{1}{2}-1}{1-0} = -\frac{1}{2}$	$\frac{-\frac{1}{2}-(-1)}{1-0} = \boxed{\frac{1}{2}}$	
1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{-\frac{1}{4}-(-\frac{1}{2})}{1-0} = \frac{1}{4}$	$\frac{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}}{1-0} = \boxed{-\frac{1}{4}}$

A táblázat bekeretezett értékei segítségével felírjuk az Hermite-interpolációs polinom Newton-alakját.

$$\begin{aligned} H_4(x) &= 1-(x-0)+\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}(x-0)^2(x-1) =\\ &= -\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{4}x^2 - x + 1 \end{aligned}$$

b) $H_3(\frac{1}{3}) = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{18} - \frac{1}{36}(-\frac{2}{3}) = \frac{20}{27}$ és $f(\frac{1}{3}) = \frac{3}{4}$.
Az $x = \frac{1}{3}$ pontban a hibabecslés

$$\left|f\left(\frac{1}{3}\right) - H_3\left(\frac{1}{3}\right)\right| \le \frac{M_4}{4!}\left|\Omega\left(\frac{1}{3}\right)\right|,$$

ahol

$$\left|\Omega\left(\frac{1}{3}\right)\right| = \left|\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}-1\right)^2\right| = \frac{4}{81}.$$

Mivel $f(x) = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}$, az f deriváltjai

$$\begin{aligned} f'(x) &= -(1+x)^{-2}\\ f''(x) &= 2(1+x)^{-3}\\ f'''(x) &= -6(1+x)^{-4}\\ f^{(4)}(x) &= 24(1+x)^{-5}, \end{aligned}$$

ahonnan $x \in [0;1]$ esetén

$$|f^{(4)}(x)| = \frac{24}{(1+x)^5} \le 4! = M_4.$$

A kapott értékeket a hibabecslésbe helyettesítve

$$\left|f\left(\frac{1}{3}\right) - H_3\left(\frac{1}{3}\right)\right| \le \frac{4!}{4!}\cdot\frac{4}{81} = \frac{4}{81},$$

c) Az intervallumra érvényes hibabecsléshez számítsuk ki $\|\Omega\|_\infty$-t.

$$\Omega(x) = (x-0)^2(x-1)^2 = (x(x-1))^2$$

Az $x(x-1)$-nek az $x = \frac{1}{2}$ pontban van szélsőértéke (a parabola csúcsa).

$$\Omega\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\right)^2 = \frac{1}{16}$$

Innen $\|\omega\|_\infty = \frac{1}{16}$. Az $x \in [0;1]$ intervallumon a hibabecslés

$$|f(x) - H_3(x)| \leq \frac{M_4}{4!}\|\Omega\|_\infty = \frac{1}{16}.$$

7. A feladatot az Hermite-interpoláció segítségével oldjuk meg. A hiányzó adatot ($f'(0) = c$) vegyük be paraméternek. Így legfeljebb ötödfokú polinomot kapunk. Amennyiben a feladat megoldható, a főegyüttható 0-nak választásával megkapjuk c értékét és a keresett polinomot.

Az Hermite-interpolációs polinom Newton-alakjához készítsük el az osztott differencia táblázatot a fejezet elején ismertetett módon.

x_i	$f(x_i)$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$\dots$	$\dots$
0	$\boxed{0}$				
0	0	$\boxed{c}$			
0	0	c	$\boxed{0}$		
1	1	1	$1-c$	$\boxed{1-c}$	
1	1	0	-1	$-2+c$	$\boxed{-3+2c}$

Mivel $-3+2c = 0$, így $c = \frac{3}{2}$ és $1-c = -\frac{1}{2}$. A táblázat bekeretezett értékei segítségével felírjuk az Hermite-interpolációs polinom Newton-alakját.

$$H_3(x) = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}x^3$$

8. A feladatot a határozatlan együtthatók módszerével oldjuk meg. Mivel négy adatunk van, ezért harmadfokú polinomot kell keresnünk. Legyen

$$H(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

alakú. Ekkor

$$H'(x) = 3ax^2 + 2bx + c, \quad H''(x) = 6ax + 2b,$$

felhasználásával írjuk fel az interpolációs feltételeket.

$$\begin{aligned} H(0) &= d = 1 \\ H(1) &= a + b + c + d = 1 \\ H'(1) &= 3a + 2b + c = 1 \\ H''(2) &= 12a + 2b = 2 \end{aligned}$$

A kapott egyenletrendszert megoldva

$$a = 0, \quad b = 1, \quad c = -1, \quad d = 1.$$

Így a feltételeknek eleget tevő polinom

$$H(x) = x^2 - x + 1.$$

9. Írjuk fel a Fejér–Hermite-interpoláció hibabecslését!

$$|f(x) - H_{2n+1}(x)| \le \frac{M_{2n+2}}{(2n+2)!} \cdot \Omega_{2n+2}(x),$$

ahol

$$M_{2n+2} = \max\{|f^{(2n+2)}(x)| : \ x \in [-1; 1]\}$$

és

$$\Omega_{2n+2}(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i)^2 = \left(\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)\right)^2$$

az $n+1$-edfokú egy főegyütthatós Csebisev polinom ($t_n(x) = \frac{1}{2^n} T_{n+1}(x)$) négyzete.
A T_n Csebisev polinomra ismert felső becslés ($\|T_n(x)\|_\infty = 1$) alapján Ω_{2n+2}-re a következő becslés adható.

$$|\Omega_{2n+2}(x)| = \left(\frac{1}{2^n} T_{n+1}(x)\right)^2 \le \frac{1}{2^{2n}}$$

Ennek alapján a Fejér–Hermite-interpoláció hibabecslése

$$|f(x) - H_{2n+1}(x)| \le \frac{M_{2n+2}}{2n+2! \cdot 2^{2n}}.$$

10. Az interpolációs feltételek teljesülését kell igazolnunk. Mivel $\ell_i^2(x)$ mindkét képletben szerepel, ezért $j \ne i$-re az x_j alappont mindkét polinomnak kétszeres gyöke, így $A_i(x_j) = A_i'(x_j) = 0$ és $B_i(x_j) = B_i'(x_j) = 0$. Ezek után már csak a $j = i$ esetre vonatkozó feltételeket kell ellenőriznünk.

$$A_i(x_i) = [1 - 2(x_i - x_i)\ell_i'(x_i)] \cdot \ell_i^2(x_i) = 1,$$

$$\begin{aligned} A_i'(x) &= -2\ell_i'(x_i) \cdot \ell_i^2(x) + [1 - 2(x - x_i)\ell_i'(x_i)] \cdot 2 \cdot \ell_i(x) \cdot \ell_i'(x) \\ A_i'(x_i) &= -2\ell_i'(x_i) \cdot \ell_i^2(x_i) + [1 - 2(x_i - x_i)\ell_i'(x_i)] \cdot 2 \cdot \ell_i(x_i) \cdot \ell_i'(x_i) = \\ &= -2\ell_i'(x_i) + 2 \cdot \ell_i'(x_i) = 0. \end{aligned}$$

$$B_i(x_i) = (x_i - x_i) \cdot \ell_i^2(x_i) = 0,$$

$$\begin{aligned} B_i'(x) &= \ell_i^2(x) + (x - x_i) \cdot 2 \cdot \ell_i(x) \cdot \ell_i'(x) \\ B_i'(x_i) &= \ell_i^2(x_i) + (x_i - x_i) \cdot 2 \cdot \ell_i(x_i) \cdot \ell_i'(x_i) = \\ &= \ell_i^2(x_i) = 1. \end{aligned}$$

8. fejezet

Spline interpoláció

8.1. Feladatok

8.1.1. Spline interpoláció intervallumonként polinomok segítségével

1. Írjuk fel azt az $S(x)$ másodfokú spline-t, amely illeszkedik a $(-1;-1)$, $(0;1)$, $(2;-1)$ pontokra és $S'(0)=0$.

2. Írjuk fel azt az $S(x)$ másodfokú spline-t, amely illeszkedik a $(-1;2)$, $(0;1)$, $(2;-1)$ pontokra és $S'(2)=-2$.

3. Írjuk fel azt az $S(x)$ másodfokú spline-t, amely illeszkedik a $(-1;2)$, $(0;1)$, $(2;-1)$, $(3;-3)$ pontokra és $S(x)$ a $[2;3]$ intervallumon lineáris !

4. Írjuk fel azt az $S(x)$ másodfokú spline-t, amely illeszkedik a $(-1;2)$, $(0;1)$, $(2;-1)$, $(3;0)$ pontokra és $S(x)$ a $[-1;0]$ intervallumon lineáris !

5. Megadható-e a $(-\pi;-1)$, $(0;1)$, $(\pi;-1)$ pontokon interpoláló másodfokú periodikus spline? Ha igen, adjuk meg!

6. Tekintsük az $f(x)=\sin(\frac{\pi}{2}x)$ függvényt és a $\{-1,0,1\}$ alappontrendszert. Határozzuk meg f-et interpoláló

a) köbös természetes spline-t,

b) köbös spline-t Hermite-féle peremfeltétellel, azaz $f'(-1)=f'(1)=0$.

7. Írjuk fel azt a harmadfokú periodikus spline-t, amely illeszkedik a $(0;0)$, $(1;3)$ és $(2,0)$ pontokra! A spline egyszerűen számolható, ha az

$$S(x)=\begin{cases} P_1(x)=a_1x^3+b_1x^2+c_1x+d_1 & \text{,ha } x\in[0;1] \\ P_2(x)=a_2(x-2)^3+b_2(x-2)^2+c_2(x-2)+d_2 & \text{,ha } x\in[1;2] \end{cases}$$

alakban keressük!

8. Létezik-e olyan $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ melyre

$$S(x)=\begin{cases} P_1(x)=x+1 & \text{,ha } x\in[-2;-1] \\ P_2(x)=ax^3+bx^2+cx+d & \text{,ha } x\in[-1;1] \\ P_3(x)=x-1 & \text{,ha } x\in[1;2] \end{cases}$$

függvény természetes köbös spline? Indokoljuk a választ!

9. Határozzuk meg $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ értékét úgy, hogy az

$$S(x) = \begin{cases} P_1(x) = -9x^3 + x + 3 & \text{,ha } x \in [0;1] \\ P_2(x) = a(x-1)^3 + b(x-1)^2 + c(x-1) + d & \text{,ha } x \in [1;2] \end{cases}$$

függvény köbös spline legyen és $\int_0^2 (S''(x))^2\,dx$ minimális legyen.

10. Írjuk fel az f-et interpoláló Hermite-féle peremfeltételű harmadfokú spline-t, melyre

$$f(-1) = f(0) = -1, \;\; f(1) = 1, \;\; f'(-1) = -1, \;\; f'(1) = 3.$$

11. Írjuk fel az f-et interpoláló Hermite-féle peremfeltételű harmadfokú spline-t, melyre

$$f(-1) = -1, \;\; f(0) = 1, \;\; f(1) = 3, \;\; f'(-1) = f'(1) = 4.$$

12. Az $[x_k; x_{k+3}]$ intervallum egyenletes felosztású pontjait jelöljük x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, x_{k+3} -mal. Írjuk fel a $B_k(x)$ másodfokú B-spline képletét Hermite interpoláció felhasználásával, a következő feltételekkel!

$$B_k(x_k) = B_k(x_{k+3}) = 0,$$

$$B_k(x_{k+1}) = B_k(x_{k+2}) = \frac{1}{2}$$

13. Az $[x_k; x_{k+4}]$ intervallum egyenletes felosztású pontjait jelöljük x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, x_{k+3}, x_{k+4} -gyel. Írjuk fel a $B_k(x)$ harmadfokú B-spline képletét Hermite interpoláció felhasználásával, a következő feltételekkel!

$$B_k(x_k) = B_k(x_{k+4}) = 0,$$

$$B_k(x_{k+1}) = B_k(x_{k+3}) = \frac{1}{6},$$

$$B_k(x_{k+2}) = \frac{4}{6}$$

8.1.2. Spline interpoláció globális bázissal

14. Határozza meg az $S(-1) = 0$, $S(0) = 1$, $S'(0) = 0$ és $S(1) = 2$ feltételnek eleget tevő másodfokú spline-t az Hermite interpoláció alkalmazásával!
A kapott spline-t írja fel az $1, x, x^2, (x-0)_+^2$ bázisban is!

15. Határozza meg az $S(-1) = -1$, $S'(-1) = 0$, $S(0) = 0$ és $S(1) = 1$ feltételnek eleget tevő másodfokú spline-t az $1, x, x^2, (x-0)_+^2$ bázis felhasználásával!

16. Tekintsük az $f(x) = \cos(x)$ függvényt és a $\{-\pi, 0, \pi\}$ alappontrendszert.
Határozzuk meg az f-et interpoláló köbös spline-t $f'(-\pi) = f'(\pi) = 0$ Hermite-féle peremfeltétellel az $1, x, x^2, x^3, (x-0)_+^3$ bázis felhasználásával!

Vissza a tartalomhoz

8.1.3. Spline interpoláció B spline-ok segítségével

17. Adott $\{x_i,\ \ i \in \mathbb{Z}\}$ alappontrendszer és $\{B_{1,i},\ \ i \in \mathbb{Z}\}$ elsőfokú B-spline rendszer esetén mely c_i-k esetén lesz

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty} c_i\, B_{1,i}(x) = 1, \ \ \forall\, x \in \mathbb{R}\,?$$

18. Tekintsük az $f(x) = \cos(x)$ függvényt és a $\{-\pi, 0, \pi\}$ alappontrendszert.

a) Határozzuk meg f-et interpoláló lineáris spline-t B-spline-ok felhasználásával.

b) Határozzuk meg f-et interpoláló kvadratikus spline-t $f'(-\pi) = 0$ peremfeltétellel, B-spline-ok felhasználásával.

c) Határozzuk meg f-et interpoláló köbös spline-t B-spline-ok felhasználásával, Hermite-féle peremfeltétellel.

$$f'(-\pi) = f'(\pi) = 0$$

19. Tekintsük az $f(x) = \sin(x)$ függvényt és a $\{-\pi, 0, \pi\}$ alappontrendszert.

a) Határozzuk meg f-et interpoláló kvadratikus spline-t $f'(-\pi) = -1$ peremfeltétellel, B-spline-ok felhasználásával.

b) Határozzuk meg f-et interpoláló köbös spline-t B-spline-ok felhasználásával, periodikus peremfeltétellel.

20. Tekintsük az $f(x) = \sin(x)$ függvényt és a $\{0, \frac{\pi}{2}, \pi\}$ alappontrendszert. Határozzuk meg f-et interpoláló természetes köbös spline-t B-spline-ok felhasználásával.

8.2. Megoldások

8.2.1. Spline interpoláció intervallumonként polinomok segítségével

1. A feladatot szétbontjuk két intervallumra, majd felírjuk intervallumonként az Hermite interpolációs polinomokat.

a) A $[-1;0]$ intervallumon a feltételeink a P_1 polinomra

$$P_1(-1) = -1, \ \ P_1(0) = 1, \ \ P_1'(0) = 0.$$

Készítsük el az osztott differencia táblázatot.

x_i	$f(x_i)$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$
-1	$\boxed{-1}$		
0	1	$\frac{1-(-1)}{1-0} = \boxed{2}$	
0	1	0	$\frac{0-2}{0-(-1)} = \boxed{-2}$

Az Hermite interpolációs polinom Newton alakja

$$P_1(x) = -1 + 2(x+1) - 2(x+1)\,x = -2x^2 + 1.$$

b) A $[0;2]$ intervallumon a feltételeink a P_2 polinomra

$$P_2(0) = 1, \ \ P_1'(0) = 0, \ \ P_2(2) = -1.$$

Készítsük el az osztott differencia táblázatot.

x_i	$f(x_i)$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$
0	$\boxed{1}$		
0	1	$\boxed{0}$	
2	-1	$\frac{-1-1}{2-0} = -1$	$\frac{-1-0}{2-0} = \boxed{-\frac{1}{2}}$

Az Hermite interpolációs polinom Newton alakja

$$P_2(x) = 1 - \frac{1}{2}\,x^2 = -\frac{1}{2}\,x^2 + 1.$$

Tehát a keresett spline

$$S(x) = \begin{cases} P_1(x) = -2x^2 + 1 & \text{,ha } x \in [-1;0] \\ P_2(x) = -\frac{1}{2}\,x^2 + 1 & \text{,ha } x \in [0;2]. \end{cases}$$

2. A feladatot az 1. feladat megoldásánál tanultak szerint is megoldhatjuk. Azért, hogy más módszert is mutassunk, most a határozatlan együtthatók módszerét alkalmazzuk. A keresett spline-ról feltesszük, hogy a következő alakú

$$S(x) = \begin{cases} P_1(x) = a_1x^2 + b_1x + c_1 & \text{,ha } x \in [-1;0] \\ P_2(x) = a_2x^2 + b_2x + c_2 & \text{,ha } x \in [0;2]. \end{cases}$$

Írjuk fel az interpolációs feltételeket!

$$\begin{aligned} P_1(-1) = 2 &\;\rightarrow\; a_1(-1)^2 + b_1(-1) + c_1 = 2 \\ P_1(0) = 1 &\;\rightarrow\; c_1 = 1 \\ P_2(0) = 1 &\;\rightarrow\; c_2 = 1 \\ P_2(2) = -1 &\;\rightarrow\; a_2 + b_2 + c_2 = -1 \end{aligned}$$

A 6 ismeretlenhez még két egyenletet kell felírnunk. Egyiket a peremfeltételből kapjuk.

$$P_2'(2) = -2 \;\rightarrow\; 2\,a_2 \cdot 2 + b_2 = -2$$

A még hiányzó feltételt a másodfokú spline deriváltjának a 0 belső pontban felírt folytonosságából kapjuk.

$$P_1'(0) = P_2'(0) \;\rightarrow\; b_1 = b_2.$$

Redukáljuk az egyenletrendszert.

$$\begin{aligned} a_1 - b_1 &= 1 \\ a_2 + b_1 &= -2 \\ 4a_2 + b_1 &= -2 \end{aligned}$$

A két utolsó egynletet egymásból kivonva $a_2 = 0$, ezt a második egyenletbe helyettesítve $b_1 = -2$, majd az első egyenletbe $a_1 = -1$. A keresett másodfokú spline intervallumonkénti megadásban

$$S(x) = \begin{cases} P_1(x) = -x^2 - 2x + 1 & \text{,ha } x \in [-1;0] \\ P_2(x) = -2x + 1 & \text{,ha } x \in [0;2]. \end{cases}$$

3. **a)** A feladatot a spline-nak a $[2;3]$ intervallumon történő megadásával kezdjük. A lineáris interpolációhoz az osztott differencia táblázat.

x_i	$f(x_i)$	$f[x_i, x_{i+1}]$
2	$\boxed{-1}$	
3	-3	$\frac{-3-(-1)}{3-2} = \boxed{-2}$

Így $x \in [2;3]$ esetén a polinom

$$P_3(x) = -1 - 2(x-2) = -2x + 3.$$

b) Folytatjuk a szomszédos intervallumon a spline előállítását. A $[0;2]$ intervallumon az interpolációs és derivált folytonossági feltételeink a P_2 polinomra

$$P_2(0) = 1,\ \ P_2(2) = -1,\ \ P_2'(2) = P_3'(2) = -2.$$

Készítsük el az osztott differencia táblázatot.

x_i	$f(x_i)$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$
0	$\boxed{1}$		
2	-1	$\frac{-1-1}{2-0} = \boxed{-1}$	
2	-1	-2	$\frac{-2-(-1)}{2-0} = \boxed{-\frac{1}{2}}$

Az Hermite interpolációs polinom Newton alakja

$$P_2(x) = 1 - x - \frac{1}{2}\,x\,(x-2) = -\frac{1}{2}\,x^2 + 1.$$

c) A $[-1;0]$ intervallumon az interpolációs és derivált folytonossági feltételeink a P_1 polinomra

$$P_1(-1) = 2,\ \ P_1(0) = 1,\ \ P_1'(0) = P_2'(0) = 0.$$

Készítsük el az osztott differencia táblázatot.

x_i	$f(x_i)$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$
-1	$\boxed{2}$		
0	1	$\frac{1-2}{0-(-1)} = \boxed{-1}$	
0	1	0	$\frac{0-(-1)}{0-(-1)} = \boxed{1}$

Az Hermite interpolációs polinom Newton alakja

$$P_1(x) = 2 - (x+1) + (x+1)\,x = x^2 + 1.$$

A keresett másodfokú spline intervallumonkénti megadásban

$$S(x) = \begin{cases} P_1(x) = -x^2 + 1 & \text{,ha } x \in [-1;0] \\ P_2(x) = -\frac{1}{2}\,x^2 + 1 & \text{,ha } x \in [0;2] \\ P_3(x) = -2x + 3 & \text{,ha } x \in [2;3]. \end{cases}$$

4. **a)** A feladatot a spline-nak a $[-1;0]$ intervallumon történő megadásával kezdjük. A lineáris interpolációhoz az osztott differencia táblázat.

x_i	$f(x_i)$	$f[x_i,x_{i+1}]$
-1	$\boxed{2}$	
0	1	$\frac{1-2}{0-(-1)} = \boxed{-1}$

Így $x \in [-1;0]$ esetén a polinom

$$P_1(x) = 2 - (x+1) = -x + 1.$$

b) Folytatjuk a szomszédos intervallumon a spline előállítását. A $[0;2]$ intervallumon az interpolációs és derivált folytonossági feltételeink a P_2 polinomra

$$P_2(0) = 1, \;\; P_2(2) = -1, \;\; P_2'(0) = P_1'(0) = -1.$$

Készítsük el az osztott differencia táblázatot.

x_i	$f(x_i)$	$f[x_i,x_{i+1}]$	$f[x_i,x_{i+1},x_{i+2}]$
0	$\boxed{1}$		
0	1	$\boxed{-1}$	
2	-1	$\frac{-1-1}{2-0} = -1$	$\boxed{0}$

Az Hermite interpolációs polinom Newton alakja

$$P_2(x) = 1 - x = -x + 1.$$

c) A $[2;3]$ intervallumon az interpolációs és derivált folytonossági feltételeink a P_3 polinomra

$$P_3(2) = -1, \;\; P_3(3) = 0, \;\; P_3'(2) = P_2'(2) = -1.$$

Készítsük el az osztott differencia táblázatot.

x_i	$f(x_i)$	$f[x_i,x_{i+1}]$	$f[x_i,x_{i+1},x_{i+2}]$
2	$\boxed{-1}$		
2	-1	$\boxed{-1}$	
3	0	0	$\frac{0-(-1)}{3-2} = \boxed{1}$

Az Hermite interpolációs polinom Newton alakja

$$P_3(x) = 1 - x = -x + 1.$$

Tehát a keresett spline $x \in [-1;3]$ esetén intervallumonként ugyanazzal a képlettel adható meg

$$S(x) = -x + 1.$$

5. A feladatot a határozatlan együtthatók módszerével oldjuk meg. A keresett spline-ról feltesszük, hogy a következő alakú

$$S(x) = \begin{cases} P_1(x) = a_1x^2 + b_1x + c_1 & ,\text{ha } x \in [-\pi;0] \\ P_2(x) = a_2x^2 + b_2x + c_2 & ,\text{ha } x \in [0;\pi]. \end{cases}$$

Írjuk fel az interpolációs feltételeket!

$$\begin{aligned}
P_1(-\pi) = -1 \quad &\to\ a_1(-\pi)^2 + b_1(-\pi) + c_1 &= -1\\
P_1(0) = 1 \quad &\to\ c_1 &= 1\\
P_2(0) = 1 \quad &\to\ c_2 &= 1\\
P_2(\pi) = -1 \quad &\to\ a_2(\pi)^2 + b_2\pi + c_2 &= -1
\end{aligned}$$

A 6 ismeretlenhez még két egyenletet kell felírnunk. Egyiket a másodfokú spline deriváltjának a 0 belső pontban felírt folytonosságából kapjuk.

$$P_1'(0) = P_2'(0) \ \to \ b_1 = b_2.$$

A még hiányzó feltételt a peremfeltételből kapjuk.

$$P_1'(-\pi) = P_2'(\pi) \ \to \ -2a_1\pi + b_1 = 2a_2\pi + b_2$$

Redukáljuk az egyenletrendszert.

$$\begin{aligned}
a_1\pi^2 - b_1\pi &= -2\\
a_2\pi^2 + b_1\pi &= -2 \ \to \ -a_1\pi^2 + b_1\pi \ = -2\\
-2a_1 &= 2a_2 \ \to \ a_2 = -a_1
\end{aligned}$$

Az első két egyenletet ellentmondásos, az egyenletrendszer nem oldható meg, tehát a megadott pontokra nem írható fel másodfokú periodikus spline.

6. A keresett spline alakja mindkét esetben

$$S(x) = \begin{cases} P_1(x) = a_1x^3 + b_1x^2 + c_1x + d_1 & \text{,ha } x \in [-1;0]\\ P_2(x) = a_2x^3 + b_2x^2 + c_2x + d_2 & \text{,ha } x \in [0;1] \end{cases}$$

a) Írjuk fel elsőként az interpolációs feltételeket a polinomokra.

$$\begin{aligned}
&(1) \quad P_1(-1) = f(-1) = -1 \quad &&\to\ -a_1 + b_1 - c_1 + \ d_1 = -1\\
&(2) \quad P_1(0) = f(0) = 0 &&\to\ d_1 = 0\\
&(3) \quad P_2(0) = f(0) = 0 &&\to\ d_2 = 0\\
&(4) \quad P_2(1) = f(0) = 1 &&\to\ a_2 + b_2 + c_2 + \ d_2 = 1
\end{aligned}$$

A polinomok első és második deriváltjai ($i = 1, 2$)

$$\begin{aligned}
P_i'(x) &= 3a_ix^2 + 2b_ix + c_i\\
P_i''(x) &= 6a_ix + 2b_i
\end{aligned}$$

A belső alappontban a spline első és második deriváltja is folytonos.

$$\begin{aligned}
&(5) \quad P_1'(0) = P_2'(0) \quad \to\ c_1 = c_2\\
&(6) \quad P_1''(0) = P_2''(0) \quad \to\ 2b_1 = 2b_2
\end{aligned}$$

Hiányzik még a természetes peremfeltétel, azaz

$$S''(-1) = 0, \ \ S''(1) = 0.$$

$$\begin{aligned}
&(7) \quad P_1''(-1) = 0 \quad \to \quad -6a_1 + 2b_1 = 0\\
&(8) \quad P_2''(1) = 0 \quad \to \quad 6a_2 + 2b_2 = 0.
\end{aligned}$$

A fenti 8 egyenletes lineáris egyenletrendszert 4 egyenletesre redukálhatjuk.

$$\begin{array}{lll} (1) & -a_1+b_1-c_1 & =-1 \\ (4) & a_2+b_1+c_1 & =1 \\ (7) & -3a_1+b_1 & =0 \\ (8) & 3a_2+b_1 & =0 \end{array}$$

Alakítsuk át az egyenletrendszert.

$$(8)-(7) \quad \rightarrow \quad a_2+a_1=0$$

$$(4)-(1) \quad \rightarrow \quad a_2+a_1+2c_1=2,$$

ahonnan $c_1=c_2=1$. Tovább egyszerűsítve

$$\begin{array}{lll} (1) & -a_1+b_1 & =0 \\ (7) & -3a_1+b_1 & =0 \end{array}$$

Innen $(7)-(1)$-ből

$$a_1=0 \;\rightarrow\; a_2=0,\;\; b_1=b_2=0.$$

Érdekes eredményt kaptunk, amit utólag számolás nélkül is látunk.

$$S(x)=x \quad x\in[-1;1]$$

b) Most az Hermite-féle peremfeltételű spline-t keressük. Az interpolációs feltételeket ugyanazok, mint az **a)** esetben. A belső alappontban a spline első és második deriváltjára is ugyanazokat a feltételeket kell felírnunk. Csak a két peremfeltétel változik. Az Hermite-féle peremfeltételek

$$S'(-1)=f'(-1)=0,\;\; S'(1)=f'(1)=0.$$

Az $(1)-(6)$ egyenletekhez vegyük hozzá a következő kettőt.

$$\begin{array}{llll} (7) & P_1'(-1)=0 & \rightarrow 3a_1-2b_1+c_1 & =0 \\ (8) & P_2'(1)=0 & \rightarrow 3a_2+2b_2+c_2 & =0. \end{array}$$

A 8 egyenletes lineáris egyenletrendszert 4 egyenletesre redukálhatjuk.

$$\begin{array}{lr} (1) & -a_1+b_1-c_1=-1 \\ (4) & a_2+b_1+c_1=1 \\ (7) & 3a_1-2b_1+c_1=0 \\ (8) & 3a_2+2b_1+c_1=0 \end{array}$$

Alakítsuk át az egyenletrendszert.

$$\begin{array}{llll} (1)+(4) & \rightarrow -a_1+a_2+2b_1 & =0 & \rightarrow 2b_1=a_1-a_2 \\ (7)-(8) & \rightarrow 3(a_2-a_1)+4b_1 & =0 & \rightarrow b_1=0=b_2, \end{array}$$

így $a_1=a_2$. Behelyettesítve (1)-be

$$\begin{array}{lr} (1) & -a_1-c_1=-1 \\ (7) & 3a_1+c_1=0 \end{array}$$

Innen $(1)+(7)$-ből

$$a_1=-\frac{1}{2}=a_2 \;\rightarrow\; c_1=-3a_1=-\frac{3}{2}=c_2.$$

A keresett Hermite-féle peremfeltételű spline $x \in [-1;1]$ esetén

$$S(x) = -\frac{1}{2}\,x^3 - \frac{3}{2}\,x.$$

Az előző szép eredmény után nem is lepődünk meg. A függvény páratlan volta, a nullára szimmetrikus alappontok és a jól megválasztott paraméterezés könnyő számolást és szép alakot eredményezett.

7. A keresett spline alakja

$$S(x) = \begin{cases} P_1(x) = a_1x^3 + b_1x^2 + c_1x + d_1 & ,\text{ha } x \in [0;1] \\ P_2(x) = a_2(x-2)^3 + b_2(x-2)^2 + c_2(x-2) + d_2 & ,\text{ha } x \in [1;2]. \end{cases}$$

Írjuk fel elsőként az interpolációs feltételeket a polinomokra.

$$\begin{array}{lllll} (1) & P_1(0) = 0 & \to & d_1 & = 0 \\ (2) & P_1(1) = 3 & \to & a_1 + b_1 + c_1 + d_1 & = 3 \\ (3) & P_2(1) = 3 & \to & -a_2 + b_2 - c_2 + d_2 & = 1 \\ (4) & P_2(2) = 0 & \to & d_2 & = 0 \end{array}$$

A polinomok első és második deriváltjai

$$\begin{aligned} P_1'(x) &= 3a_1x^2 + 2b_1x + c_1 \\ P_1''(x) &= 6a_1x + 2b_1 \\ P_2'(x) &= 3a_2(x-2)^2 + 2b_2(x-2) + c_2 \\ P_2''(x) &= 6a_2(x-2) + 2b_2 \end{aligned}$$

A belső alappontban a spline első és második deriváltja is folytonos.

$$\begin{array}{llll} (5) & P_1'(1) = P_2'(1) & \to & 3a_1 + 2b_1 + c_1 = 3a_2 - 2b_2 + c_2 \\ (6) & P_1''(1) = P_2''(1) & \to & 6a_1 + 2b_1 = -6a_2 + 2b_2 \end{array}$$

Hiányzik még a peremfeltétel. Mivel 0-ban és 2-ben is ugyanaz a helyettesítési érték, ezért periodikus peremfeltétellel megoldható a feladat. Ez az első és második derivált folytonosságát jelenti a végpontokban, azaz

$$\begin{array}{llll} (7) & P_1'(0) = P_2'(2) & \to & c_1 = c_2 \\ (8) & P_1''(0) = P_2''(2) & \to & 2b_1 = 2b_2. \end{array}$$

A fenti 8 egyenletes lineáris egyenletrendszert 4 egyenletesre redukálhatjuk.

$$\begin{array}{lll} (2) & a_1 + b_1 + c_1 & = 3 \\ (3) & -a_2 + b_1 - c_1 & = 1 \\ (5) & 3a_1 + 4b_1 - 3a_2 & = 0 \\ (6) & a_1 + a_2 & = 0 \end{array}$$

A (6) egyenletből $a_2 = -a_1$. Behelyettesítve (2) − (3)-ból $2c_2 = 2$, így $c_1 = c_2 = 1$. Így

$$\begin{array}{lll} (2) & a_1 + b_1 & = 2 \\ (5) & 6a_1 + 4b_1 & = 0 \end{array}$$

Innen (5) − 4 · (2) -ből

$$2a_1 = -8 \;\to\; a_1 = -4,\;\; b_1 = b_2 = 6,\;\; a_2 = 4.$$

A keresett periodikus spline

$$S(x) = \begin{cases} P_1(x) = -4x^3 + 6x^2 + x & \text{,ha } x \in [0;1] \\ P_2(x) = 4(x-2)^3 + 6(x-2)^2 + (x-2) & \text{,ha } x \in [1;2]. \end{cases}$$

Látjuk, hogy a jól megválasztott alak redukálható lineáris egyenletrendszert eredményezett és ezzel könnyű kézi számolást.

8. A keresett spline alakja

$$S(x) = \begin{cases} P_1(x) = x + 1 & \text{,ha } x \in [-2;-1] \\ P_2(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d & \text{,ha } x \in [-1;1] \\ P_3(x) = x - 1 & \text{,ha } x \in [1;2]. \end{cases}$$

A természetes peremfeltétel teljesül, mert $P_1''(-2) = P_3''(2) = 0$.
Ezek után elegendő a spline tulajdonság feltételeit felírni. Írjuk fel először a spline és deriváltjának a folytonosságát. Ez 4 feltételt ad a 4 ismeretlenre.

$$\begin{array}{lllll} (1) & P_1(-1) = P_2(-1) & \to & -a + b - c + d & = 0 \\ (2) & P_2(1) = P_3(1) & \to & a + b + c + d & = 0 \\ (3) & P_1'(-1) = P_2'(-1) & \to & 3a - 2b + c & = 1 \\ (4) & P_2'(1) = P_3'(1) & \to & 3a + 2b + c & = 1 \end{array}$$

Átalakítva

$$\begin{array}{lll} (1) & a + c = b + d & \\ (2) & a + b + c + d = 2(a + c) = 0 & \to \ a + c = b + d = 0 \\ (3) & 3a + c = 1 + 2b & \\ (4) & 3a + 2b + c = 1 + 4b = 1 & \to \ b = 0, \ d = 0 \end{array}$$

Már csak a, c -re kell felírnunk az egyenleteket.

$$\begin{array}{lll} (1) & a + c & = 0 \\ (3) & 3a + c & = 1 \end{array}$$

$(3) - (1)$ -ből $2a = 1 \ \to \ a = \frac{1}{2}, \ c = -\frac{1}{2}$.
Ezzel minden ismeretlen értékét meghatároztuk.

Ellenőriznünk kell még a spline második deriváltjának folytonosságát.

$$\begin{array}{llll} (5) & P_1''(-1) = P_2''(-1) & \to & -6a + 2b \neq 0 \\ (6) & P_2''(1) = P_3''(1) & \to & 6a + 2b \neq 0 \end{array}$$

Az (5) és (6) feltétel nem teljesül, tehát nincs olyan $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, melyre $S(x)$ spline.

9. A keresett spline alakja

$$S(x) = \begin{cases} P_1(x) = -9x^3 + x + 3 & \text{,ha } x \in [0;1] \\ P_2(x) = a(x-1)^3 + b(x-1)^2 + c(x-1) + d & \text{,ha } x \in [1;2] \end{cases}$$

Írjuk fel S, S', S'' folytonosságának feltételét az intervallum belső alappontjára.

$$\begin{array}{llll} P_1(1) = P_2(1) & \to & d = -5 & \\ P_1'(1) = P_2'(1) & \to & c = -26 & \\ P_1''(1) = P_2''(1) & \to & 2b = -54 & \to b = -27 \end{array}$$

Az a maradt az egyetlen szabad paraméter. Ezt az integrál minimalizálásából határozzuk meg.

$$\begin{aligned}\int_0^2 (S''(x))^2 dx &= \int_0^1 (P_1''(x))^2 dx + \int_1^2 (P_2''(x))^2 dx = \\ &= \int_0^1 (-54x)^2 dx + \int_1^2 (-54+6a(x-1))^2 dx = \\ &= \int_0^1 (2916x^2) dx + \int_1^2 (36a^2(x-1)^2 - 648ax + 2916) dx = \\ &= 972 + (12a^2 - 324a + 2916) = 12a^2 - 324a + 3891 = \\ &= 12(a^2 - 27a) + 3891\end{aligned}$$

A kapott másodfokú kifejezés az $a = -\frac{27}{2}$ helyen minimális. Tehát

$$P_2(x) = -\frac{27}{2}(x-1)^3 - 27(x-1)^2 - 26(x-1) - 5 \quad x \in [1;2].$$

10. A keresett spline alakja

$$S(x) = \begin{cases} P_1(x) = a_1x^3 + b_1x^2 + c_1x + d_1 & \text{,ha } x \in [-1;0] \\ P_2(x) = a_2x^3 + b_2x^2 + c_2x + d_2 & \text{,ha } x \in [0;1] \end{cases}$$

Írjuk fel elsőként az interpolációs feltételeket a polinomokra.

$$\begin{array}{lllr} (1) & P_1(-1) = f(-1) = -1 & \to & -a_1 + b_1 - c_1 + d_1 = -1 \\ (2) & P_1(0) = f(0) = 0 & \to & d_1 = -1 \\ (3) & P_2(0) = f(0) = 0 & \to & d_2 = -1 \\ (4) & P_2(1) = f(0) = 1 & \to & a_2 + b_2 + c_2 + d_2 = 1 \end{array}$$

A polinomok első és második deriváltjai ($i = 1, 2$)

$$\begin{aligned} P_i'(x) &= 3a_ix^2 + 2b_ix + c_i, \\ P_i''(x) &= 6a_ix + 2b_i. \end{aligned}$$

A belső alappontban a spline első és második deriváltja is folytonos.

$$\begin{array}{lllll} (5) & P_1'(0) = P_2'(0) & \to & c_1 & = c_2 \\ (6) & P_1''(0) = P_2''(0) & \to & 2b_1 & = 2b_2 \end{array}$$

Az Hermite-féle peremfeltételek

$$S'(-1) = f'(-1) = -1, \;\; S'(1) = f'(1) = 3.$$

Az (1) – (6) egyenletekhez vegyük hozzá a következő kettőt.

$$\begin{array}{lllll} (7) & P_1'(-1) = 0 & \to & 3a_1 - 2b_1 + c_1 & = -1 \\ (8) & P_2'(1) = 0 & \to & 3a_2 + 2b_2 + c_2 & = 3. \end{array}$$

A 8 egyenletes lineáris egyenletrendszert 4 egyenletesre redukálhatjuk.

$$\begin{array}{lr} (1) & -a_1 + b_1 - c_1 = 0 \\ (4) & a_2 + b_1 + c_1 = 2 \\ (7) & 3a_1 - 2b_1 + c_1 = -1 \\ (8) & 3a_2 + 2b_1 + c_1 = 3 \end{array}$$

Alakítsuk át az egyenletrendszert.

$$\begin{array}{llll} (1)+(4) & \to & -a_1+a_2+2b_1=2 & \to a_2-a_1=2-2b_1 \\ (8)-(7) & \to & 3(a_2-a_1)+4b_1=6-2b_1=4 & \to 2b_1=2\to b_1=1=b_2, \end{array}$$

így $a_1=a_2$. Behelyettesítve (1)-be

$$\begin{array}{ll} (1) & -a_1-c_1=-1 \\ (7) & 3a_1+c_1=1. \end{array}$$

Innen (1) + (7)-ből

$$a_1=0=a_2 \ \to\ c_1=1-3a_1=1=c_2.$$

A keresett Hermite-féle peremfeltételű spline $x\in[-1;1]$ esetén

$$S(x)=x^3+x-1.$$

11. A keresett spline alakja

$$S(x)=\begin{cases} P_1(x)=a_1x^3+b_1x^2+c_1x+d_1 & ,\text{ha } x\in[-1;0] \\ P_2(x)=a_2x^3+b_2x^2+c_2x+d_2 & ,\text{ha } x\in[0;1] \end{cases}$$

Írjuk fel elsőként az interpolációs feltételeket a polinomokra.

$$\begin{array}{llll} (1) & P_1(-1)=f(-1)=-1 & \to & -a_1+b_1-c_1+d_1=-1 \\ (2) & P_1(0)=f(0)=0 & \to & d_1=1 \\ (3) & P_2(0)=f(0)=0 & \to & d_2=1 \\ (4) & P_2(1)=f(0)=1 & \to & a_2+b_2+c_2+d_2=3 \end{array}$$

A polinomok első és második deriváltjai ($i=1,2$)

$$P_i'(x)=3a_ix^2+2b_ix+c_i,$$
$$P_i''(x)=6a_ix+2b_i.$$

A belső alappontban a spline első és második deriváltja is folytonos.

$$\begin{array}{llll} (5) & P_1'(0)=P_2'(0) & \to & c_1=c_2 \\ (6) & P_1''(0)=P_2''(0) & \to & 2b_1=2b_2 \end{array}$$

Az Hermite-féle peremfeltételek

$$S'(-1)=f'(-1)=4,\ \ S'(1)=f'(1)=4.$$

Az $(1),\dots,(6)$ egyenletekhez vegyük hozzá a következő kettőt.

$$\begin{array}{llll} (7) & P_1'(-1)=0 & \to & 3a_1-2b_1+c_1=4 \\ (8) & P_2'(1)=0 & \to & 3a_2+2b_2+c_2=4 \end{array}$$

A 8 egyenletes lineáris egyenletrendszert 4 egyenletesre redukálhatjuk.

$$\begin{array}{ll} (1) & -a_1+b_1-c_1=-2 \\ (4) & a_2+b_1+c_1=2 \\ (7) & 3a_1-2b_1+c_1=4 \\ (8) & 3a_2+2b_1+c_1=4 \end{array}$$

Alakítsuk át az egyenletrendszert.

$$\begin{array}{lcccl} (1)+(4) & \rightarrow & -a_1+a_2+2b_1=0 & \rightarrow & a_2-a_1=-2b_1 \\ (8)-(7) & \rightarrow & 3(a_2-a_1)+4b_1=-2b_1=0 & \rightarrow & b_1=0=b_2, \end{array}$$

így $a_1=a_2$. Behelyettesítve (1) -be

$$\begin{array}{ll} (1) & -a_1-c_1=-2 \\ (7) & 3a_1+c_1=4 \end{array}$$

$$(1)+(7) \quad 2a_1=2 \ \rightarrow \ a_1=1=a_2 \ \rightarrow \ c_1=4-3a_1=1=c_2.$$

A keresett Hermite-féle peremfeltételű spline $x\in[-1;1]$ esetén

$$S(x)=x^3+x.$$

12. **a)** Az $[x_k;x_{k+1}]$ intervallumon a P_k polinomnak a következő feltételeket kell teljesítenie: a két végpontban az interpolációs feltételt és x_k -ban a derivált folytonosságát.
($x<x_k$ esetén a spline értéke 0 és az intervallum hossza h.)

$$P_k(x_k)=0$$
$$P_k'(x_k)=0$$
$$P_k(x_{k+1})=\frac{1}{2}$$

Készítsük el az osztott differencia táblázatot.

x_i	$f(x_i)$	$f[x_i,x_{i+1}]$	$f[x_i,x_{i+1},x_{i+2}]$
x_k	$\boxed{0}$		
x_k	0	$\boxed{0}$	
x_{k+1}	$\frac{1}{2}$	$\frac{\frac{1}{2}-0}{h}=\frac{1}{2h}$	$\frac{\frac{1}{2h}-0}{h}=\boxed{\frac{1}{2h^2}}$

Az Hermite interpolációs polinom Newton alakja

$$P_k(x)=\frac{1}{2h^2}(x-x_k)^2.$$

b) Az $[x_{k+1};x_{k+2}]$ intervallumon a P_{k+1} polinomnak a következő feltételeket kell teljesítenie: a két végpontban az interpolációs feltételt és x_{k+1} -ben a derivált folytonosságát. (Az intervallum hossza h.)

$$P_{k+1}(x_{k+1})=\frac{1}{2}$$
$$P_{k+1}'(x_{k+1})=P_k'(x_{k+1})=\frac{1}{h}$$
$$P_{k+1}(x_{k+2})=\frac{1}{2}$$

Készítsük el az osztott differencia táblázatot.

x_i	$f(x_i)$	$f[x_i,x_{i+1}]$	$f[x_i,x_{i+1},x_{i+2}]$
x_{k+1}	$\boxed{\frac{1}{2}}$		
x_{k+1}	$\frac{1}{2}$	$\boxed{\frac{1}{h}}$	
x_{k+2}	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{0-\frac{1}{h}}{h}=\boxed{-\frac{1}{h^2}}$

Az Hermite interpolációs polinom Newton alakja

$$P_{k+1}(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{h}(x - x_{k+1}) - \frac{1}{h^2}(x - x_{k+1})^2 = \frac{1}{2h^2}\left(h^2 + 2h(x - x_{k+1}) - 2(x - x_{k+1})^2\right).$$

c) Az $[x_{k+2}; x_{k+3}]$ intervallumon a P_{k+2} polinomnak a következő feltételeket kell teljesítenie: a két végpontban az interpolációs feltételt és x_{k+3} -ban a derivált folytonosságát. (Az intervallum hossza h és $x > x_{k+3}$ esetén a spline értéke 0.)

$$\begin{aligned} P_{k+2}(x_{k+1}) &= \frac{1}{2} \\ P_{k+3}(x_{k+1}) &= 0 \\ P'_{k+3}(x_{k+2}) &= 0 \end{aligned}$$

Készítsük el az osztott differencia táblázatot.

x_i	$f(x_i)$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$
x_{k+3}	$\boxed{0}$		
x_{k+3}	0	$\boxed{0}$	
x_{k+2}	$\frac{1}{2}$	$\frac{\frac{1}{2}-0}{-h} = -\frac{1}{2h}$	$\frac{-\frac{1}{2h}-0}{-h} = \boxed{\frac{1}{2h^2}}$

Az Hermite interpolációs polinom Newton alakja

$$P_{k+2}(x) = \frac{1}{2h^2}(x - x_{k+3})^2 = \frac{1}{2h^2}(x_{k+3} - x)^2.$$

d) Ellenőrizzük, hogy az x_{k+2} pontban folytonos-e a derivált.

$$\begin{aligned} P'_{k+1}(x) &= \frac{1}{2h^2}\left(2h - 4(x - x_{k+1})\right) \\ P'_{k+1}(x_{k+2}) &= -\frac{1}{h} \\ P'_{k+2}(x) &= \frac{1}{2h^2} \cdot 2 \cdot (x - x_{k+3}) \\ P'_{k+2}(x_{k+2}) &= -\frac{1}{h} \end{aligned}$$

Tehát $P'_{k+1}(x_{k+2}) = P'_{k+2}(x_{k+2})$ teljesül.

Ezzel megkaptuk a k. B-spline képletét

$$B_k(x) = \frac{1}{2h^2}\begin{cases} (x - x_k)^2 & ,\text{ha } x \in [x_k; x_{k+1}] \\ h^2 + 2h(x - x_{k+1}) - 2(x - x_{k+1})^2 & ,\text{ha } x \in [x_{k+1}; x_{k+2}] \\ (x_{k+3} - x)^2 & ,\text{ha } x \in [x_{k+2}; x_{k+3}] \\ 0 & ,\text{ha } x \notin [x_k; x_{k+3}]. \end{cases}$$

13. **a)** Az $[x_k; x_{k+1}]$ intervallumon a P_k polinomnak a következő feltételeket kell teljesítenie: a két végpontban az interpolációs feltételt és x_k -ban az első és második derivált folytonosságát. ($x < x_k$ esetén a spline értéke 0 és az intervallum hossza h.)

$$\begin{aligned} P_k(x_k) &= 0 \\ P'_k(x_k) &= 0 \\ P''_k(x_k) &= 0 \\ P_k(x_{k+1}) &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Készítsük el az osztott differencia táblázatot.

x_i	$f(x_i)$	$f[x_i,x_{i+1}]$	$f[x_i,x_{i+1},x_{i+2}]$	$\dots$
x_k	$\boxed{0}$			
x_k	0	$\boxed{0}$		
x_k	0	0	$\boxed{0}$	
x_{k+1}	$\frac{1}{6}$	$\frac{\frac{1}{6}-0}{h}=\frac{1}{6h}$	$\frac{\frac{1}{6h}-0}{h}=\frac{1}{6h^2}$	$\frac{\frac{1}{6h^2}-0}{h}=\boxed{\frac{1}{6h^3}}$

Az Hermite interpolációs polinom Newton alakja

$$P_k(x)=\frac{1}{6h^3}\,(x-x_k)^3.$$

b) Nem a soron következő intervallumot nézzük, hanem az utolsót, melyre a feltételek hasonlóak az előzőekhez. Az $[x_{k+3};x_{k+4}]$ intervallumon a P_{k+3} polinomnak a következő feltételeket kell teljesítenie: a két végpontban az interpolációs feltételt és x_{k+4} -ben az első és második derivált folytonosságát. ($x>x_{k+4}$ esetén a spline értéke 0 és az intervallum hossza h.)

$$\begin{aligned}P_{k+4}(x_{k+4})&=0\\ P'_{k+4}(x_{k+4})&=0\\ P''_{k+4}(x_{k+4})&=0\\ P_{k+4}(x_{k+3})&=\frac{1}{6}\end{aligned}$$

Készítsük el az osztott differencia táblázatot.

x_i	$f(x_i)$	$f[x_i,x_{i+1}]$	$f[x_i,x_{i+1},x_{i+2}]$	$\dots$
x_{k+4}	$\boxed{0}$			
x_{k+4}	0	$\boxed{0}$		
x_{k+4}	0	0	$\boxed{0}$	
x_{k+0}	$\frac{1}{6}$	$\frac{\frac{1}{6}-0}{-h}=-\frac{1}{6h}$	$\frac{-\frac{1}{6h}-0}{-h}=\frac{1}{6h^2}$	$\frac{\frac{1}{6h^2}-0}{-h}=\boxed{-\frac{1}{6h^3}}$

Az Hermite interpolációs polinom Newton alakja

$$P_k(x)=-\frac{1}{6h^3}\,(x-x_{k+4})^3=\frac{1}{6h^3}\,(x_{k+4}-x)^3.$$

c) Az $[x_{k+1};x_{k+2}]$ intervallumon a P_{k+1} polinomnak a következő feltételeket kell teljesítenie: a két végpontban az interpolációs feltételt és x_{k+1} -ben az első és második derivált folytonosságát. (Az intervallum hossza h.)

$$\begin{aligned}P_{k+1}(x_{k+1})&=\frac{1}{6}\\ P'_{k+1}(x_{k+1})&=P'_k(x_{k+1})=\frac{1}{2h}\\ P''_{k+1}(x_{k+1})&=P''_k(x_{k+1})=\frac{1}{h^2}\\ P_{k+1}(x_{k+2})&=\frac{4}{6}\end{aligned}$$

Készítsük el az osztott differencia táblázatot.

x_i	$f(x_i)$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$\dots$
x_{k+1}	$\boxed{\frac{1}{6}}$			
x_{k+1}	$\frac{1}{6}$	$\boxed{\frac{1}{2h}}$		
x_{k+1}	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2h}$	$\boxed{\frac{1}{2h^2}}$	
x_{k+2}	$\frac{4}{6}$	$\frac{\frac{4}{6}-\frac{1}{6}}{h} = \frac{1}{2h}$	0	$\frac{0-\frac{1}{2h^2}}{h} = \boxed{-\frac{1}{2h^3}}$

Az Hermite interpolációs polinom Newton alakja

$$\begin{aligned} P_{k+1}(x) &= \frac{1}{6} + \frac{1}{2h}(x - x_{k+1}) + \frac{1}{2h^2}(x - x_{k+1})^2 - \frac{1}{2h^3}(x - x_{k+1})^3 = \\ &= \frac{1}{6h^3}\left(h^3 + 3h^2(x - x_{k+1}) + 3h(x - x_{k+1})^2 - 3(x - x_{k+1})^3\right). \end{aligned}$$

d) Az $[x_{k+2}; x_{k+3}]$ intervallumon a P_{k+2} polinomnak a következő feltételeket kell teljesítenie: a két végpontban az interpolációs feltételt és x_{k+3} -ban az első és második derivált folytonosságát. (Az intervallum hossza h és $x > x_{k+3}$ esetén a spline értéke 0.)

$$\begin{aligned} P_{k+2}(x_{k+3}) &= \frac{1}{6} \\ P'_{k+2}(x_{k+3}) &= P'_{k+4}(x_{k+3}) = -\frac{1}{2h} \\ P''_{k+2}(x_{k+3}) &= P''_{k+4}(x_{k+3}) = \frac{1}{h^2} \\ P_{k+2}(x_{k+2}) &= \frac{4}{6} \end{aligned}$$

Készítsük el az osztott differencia táblázatot.

x_i	$f(x_i)$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$\dots$
x_{k+3}	$\boxed{\frac{1}{6}}$			
x_{k+3}	$\frac{1}{6}$	$\boxed{-\frac{1}{2h}}$		
x_{k+3}	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{2h}$	$\boxed{\frac{1}{2h^2}}$	
x_{k+2}	$\frac{4}{6}$	$\frac{\frac{4}{6}-\frac{1}{6}}{-h} = -\frac{1}{2h}$	0	$\frac{0-\frac{1}{2h^2}}{-h} = \boxed{\frac{1}{2h^3}}$

Az Hermite interpolációs polinom Newton alakja

$$\begin{aligned} P_{k+2}(x) &= \frac{1}{6} - \frac{1}{2h}(x - x_{k+3}) + \frac{1}{2h^2}(x - x_{k+3})^2 + \frac{1}{2h^3}(x - x_{k+3})^3 = \\ &= \frac{1}{6h^3}\left(h^3 - 3h^2(x - x_{k+3}) + 3h(x - x_{k+3})^2 + 3(x - x_{k+3})^3\right) = \\ &= \frac{1}{6h^3}\left(h^3 + 3h^2(x_{k+3} - x) + 3h(x_{k+3} - x)^2 - 3(x_{k+3} - x)^3\right). \end{aligned}$$

e) Ellenőrizzük, hogy az x_{k+2} pontban folytonos-e az első és második derivált.

$$\begin{aligned}
P'_{k+1}(x) &= \frac{1}{6h^3}\left(3h^2 + 6h(x - x_{k+1}) - 9(x - x_{k+1})^2\right)\\
P'_{k+1}(x_{k+2}) &= \frac{1}{6h^3}(3h^2 + 6h^2 - 9h^2) = 0\\
P'_{k+2}(x) &= \frac{1}{6h^3}\left(-3h^2 - 6h(x_{k+3} - x) + 9(x_{k+3} - x)^2\right)\\
P'_{k+2}(x_{k+2}) &= \frac{1}{6h^3}(-3h^2 - 6h^2 + 9h^2) = 0
\end{aligned}$$

Tehát $P'_{k+1}(x_{k+2}) = P'_{k+2}(x_{k+2})$ teljesül, az első derivált folytonos x_{k+2}-ben.

$$\begin{aligned}
P''_{k+1}(x) &= \frac{1}{6h^3}\,(6h - 18(x - x_{k+1}))\\
P''_{k+1}(x_{k+2}) &= \frac{1}{6h^3}(-12h) = -\frac{2}{h^2}\\
P''_{k+2}(x) &= \frac{1}{6h^3}\,(6h - 18(x_{k+3} - x))\\
P''_{k+2}(x_{k+2}) &= \frac{1}{6h^3}(6h - 18h) = -\frac{2}{h^2}
\end{aligned}$$

Tehát $P''_{k+1}(x_{k+2}) = P''_{k+2}(x_{k+2})$ is teljesül, így a második derivált is folytonos x_{k+2}-ben.

Ezzel megkaptuk a k. B-spline képletét

$$B_k(x) = \frac{1}{6h^3}\begin{cases}
(x - x_k)^3 & ,\text{ha } x \in [x_k; x_{k+1}]\\
h^3 + 3h^2(x - x_{k+1}) + 3h(x - x_{k+1})^2 - 3(x - x_{k+1})^3 & ,\text{ha } x \in [x_{k+1}; x_{k+2}]\\
h^3 + 3h^2(x_{k+3} - x) + 3h(x_{k+3} - x)^2 - 3(x_{k+3} - x)^3 & ,\text{ha } x \in [x_{k+2}; x_{k+3}]\\
(x_{k+4} - x)^3 & ,\text{ha } x \in [x_{k+3}; x_{k+4}]\\
0 & ,\text{ha } x \notin [x_k; x_{k+4}].
\end{cases}$$

8.2.2. Spline interpoláció globális bázissal

14. A feladatot szétbontjuk két intervallumra, majd felírjuk intervallumonként az Hermite interpolációs polinomokat.

a) A $[-1; 0]$ intervallumon a feltételeink a P_1 polinomra

$$P_1(-1) = 0,\ \ P_1(0) = 1,\ \ P'_1(0) = 0.$$

Készítsük el az osztott differencia táblázatot.

x_i	$f(x_i)$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$
-1	$\boxed{0}$		
0	1	$\frac{1-0}{1-0} = \boxed{1}$	
0	1	0	$\frac{0-1}{0-(-1)} = \boxed{-1}$

Az Hermite interpolációs polinom Newton alakja

$$P_1(x) = (x+1) - (x+1)\,x = -x^2 + 1.$$

b) A $[0; 1]$ intervallumon a feltételeink a P_2 polinomra

$$P_2(0) = 1,\ \ P'_1(0) = 0,\ \ P_2(1) = 2.$$

Készítsük el az osztott differencia táblázatot.

x_i	$f(x_i)$	$f[x_i,x_{i+1}]$	$f[x_i,x_{i+1},x_{i+2}]$
0	$\boxed{1}$		
0	1	$\boxed{0}$	
1	2	$\frac{2-1}{1-0}=1$	$\frac{1-0}{1-0}=\boxed{1}$

Az Hermite interpolációs polinom Newton alakja

$$P_2(x)=1+x^2=x^2+1.$$

Tehát a keresett spline

$$S(x)=\begin{cases} P_1(x)=-x^2+1 & \text{,ha } x\in[-1;0] \\ P_2(x)=x^2+1 & \text{,ha } x\in[0;1]. \end{cases}$$

c) A spline-t a globális bázisban felírva,

$$S(x)=\alpha_0+\alpha_1x+\alpha_2x^2+\beta(x-0)_+^2$$

alakban keressük.
A $[-1;0]$ intervallumon

$$S(x)=P_1(x)=1-x^2 \quad\Rightarrow\quad \alpha_0=1,\alpha_1=0,\alpha_2=-1.$$

A $[0;1]$ intervallumon

$$S(x)=1-x^2+\beta(x-0)_+^2=P_2(x)=x^2+1.$$

Innen

$$\beta\,(x-0)_+^2=2x^2 \quad\Rightarrow\quad \beta=2.$$

A kért bázisban az előállítás

$$S(x)=1-x^2+2(x-0)_+^2.$$

15. A feladatot a 14. feladat megoldásával analóg módon is megoldhatnánk. Most egy másik módszert mutatunk, amelyhez nem kell ismernünk az intervallumonkénti polinom előállítást. A spline-t a globális bázisban felírva,

$$S(x)=\alpha_0+\alpha_1x+\alpha_2x^2+\beta(x-0)_+^2$$

alakban keressük. Szükségünk lesz még a deriváltjára.

$$S'(x)=\alpha_1+2\alpha_2x+2\beta(x-0)_+$$

Mivel a bázisunk teljesíti a spline-ra tett feltételeket, ezért csak az interpolációs feltételeket és a peremfeltételt kell felírnunk a fenti alakra.

$$\begin{array}{lll}
(1)\ S(-1)=-1 & \to \alpha_0-\alpha_1+\alpha_2 & =-1 \\
(2)\ S'(-1)=0 & \to \alpha_1-2\alpha_2 & =0 \\
(3)\ S(0)=0 & \to \alpha_0 & =0 \\
(4)\ S(1)=1 & \to \alpha_0+\alpha_1+\alpha_2+\beta & =1
\end{array}$$

Redukáljuk az egyenletrendszert

$$\begin{array}{ll} (1) & -\alpha_1 + \alpha_2 = -1 \\ (2) & \alpha_1 - 2\alpha_2 = 0 \\ (4) & \alpha_1 + \alpha_2 + \beta = 1. \end{array}$$

Innen

$$(1) + (2) \qquad -\alpha_2 = -1 \rightarrow \quad \alpha_2 = 1, \ \ \alpha_1 = 2, \ \ \beta = -2.$$

A kért bázisban az előállítás

$$S(x) = 2x + x^2 - 2(x-0)_+^2.$$

16. A spline-t

$$S(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \beta(x-0)_+^3$$

alakban keressük. A peremfeltételek felírásához szükségünk lesz a deriváltra.

$$S'(x) = \alpha_1 + 2\alpha_2 x + 3\alpha_3 x^2 + 3\beta(x-0)_+^2$$

Mivel a bázisunk teljesíti a spline-ra tett feltételeket, ezért csak az interpolációs feltételeket és a két peremfeltételt kell felírnunk a fenti alakra.

$$\begin{array}{llll} (1) & S(-\pi) = -1 & \rightarrow \alpha_0 - \alpha_1\pi + \alpha_2\pi^2 - \alpha_3\pi^3 & = -1 \\ (2) & S(0) = 1 & \rightarrow \alpha_0 & = 1 \\ (3) & S(\pi) = -1 & \rightarrow \alpha_0 + \alpha_1\pi + \alpha_2\pi^2 + \alpha_3\pi^3 + \beta\pi^3 & = -1 \\ (4) & S'(-\pi) = 0 & \rightarrow \alpha_1 - 2\alpha_2\pi + 3\alpha_3\pi^2 & = 0 \\ (5) & S'(\pi) = 0 & \rightarrow \alpha_1 + 2\alpha_2\pi + 3\alpha_3\pi^2 + 3\beta\pi^2 & = 0 \end{array}$$

Redukáljuk az egyenletrendszert

$$\begin{array}{ll} (1) & \alpha_1 - \alpha_2\pi + \alpha_3\pi^2 = \dfrac{2}{\pi} \\ (3) & \alpha_1 + \alpha_2\pi + \alpha_3\pi^2 + \beta\pi^2 = -\dfrac{2}{\pi} \\ (4) & \alpha_1 - 2\alpha_2\pi + 3\alpha_3\pi^2 = 0 \\ (5) & \alpha_1 + 2\alpha_2\pi + 3\alpha_3\pi^2 + 3\beta\pi^2 = 0. \end{array}$$

Innen

$$\begin{array}{lllll} (3)-(1) & 2\alpha_2\pi + \beta\pi^2 = -\dfrac{4}{\pi} & \rightarrow (6) & 2\alpha_2 + \beta\pi = -\dfrac{4}{\pi^2} \\ (5)-(4) & 4\alpha_2\pi + 3\beta\pi^2 = 0 & \rightarrow (7) & 4\alpha_2 + 3\beta\pi = 0. \end{array}$$

Kaptunk egy két ismeretlenes egyenletrendszert, amit könnyű megoldani.

$$\begin{array}{llll} (7) - 2\cdot(6) & \beta\pi = \dfrac{8}{\pi^2} & \rightarrow & \beta = \dfrac{8}{\pi^3} \\ (7) & 4\alpha_2 + \dfrac{24}{\pi^3}\pi = 0 & \rightarrow & \alpha_2 = -\dfrac{6}{\pi^2} \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} (1) & \alpha_1 + \dfrac{6}{\pi} + \alpha_3\pi^2 = \dfrac{2}{\pi} & \rightarrow & \alpha_1 + \alpha_3\pi^2 = -\dfrac{4}{\pi} \\ (4) & \alpha_1 + \dfrac{12}{\pi} + 3\alpha_3\pi^2 = 0 & \rightarrow & \alpha_1 + 3\alpha_3\pi^2 = -\dfrac{12}{\pi}. \end{array}$$

$$(4)-(1) \qquad 2\alpha_3\pi^2 = -\frac{8}{\pi} \quad \to \quad \alpha_3 = -\frac{4}{\pi^3}$$
$$(4) \qquad \alpha_1 - \frac{12}{\pi^3}\pi^2 = -\frac{12}{\pi} \quad \to \quad \alpha_1 = 0.$$

A kért bázisban az előállítás

$$S(x) = 1 + 0 \cdot x - \frac{6}{\pi^2}\,x^2 - \frac{4}{\pi^3}\,x^3 + \frac{8}{\pi^3}\,(x-0)_+^3.$$

8.2.3. Spline interpoláció B spline-ok segítségével

17. Írjuk fel a $B_{1,i}(x)$ elsőfokú B-spline képletét.

$$B_{1,i}(x) = \begin{cases} \frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i} & \text{,ha } x \in [x_i; x_{i+1}] \\ \frac{x-x_{i+2}}{x_{i+1}-x_{i+2}} & \text{,ha } x \in [x_{i+1}; x_{i+2}] \\ 0 & \text{,különben.} \end{cases}$$

Az $[x_i; x_{i+1}]$ intervallumon csak a $B_{1,i-1}$ és $B_{1,i}$ spline-ok vesznek fel nem nulla értéket. Így $x \in [x_i; x_{i+1}]$ esetén

$$B_{1,i-1}(x) + B_{1,i}(x) = \frac{x-x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} + \frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i} = \frac{-(x-x_{i+1}) + (x-x_i)}{x_{i+1}-x_i} = 1,$$

tehát $c_i = 1, \ \forall \ i \in \mathbb{Z}$.

18. Először írjuk fel, mely pontokon kell átmennie a spline-nak.
Az x_0, x_1, x_2 alappontok lépésköze $h = \pi$.

x_i	$-\pi$	0	π
y_i	-1	1	-1

a) Az elsőfokú spline alakja B-spline-okkal

$$S_1(x) = \sum_{k=-1}^{1} c_k B_{1,k}(x) = c_{-1}B_{1,-1}(x) + c_0 B_{1,0}(x) + c_1 B_{1,1}(x).$$

Írjuk fel az interpolációs egyenleteket és használjuk fel, hogy

$$B_{1,k}(x_i) = \begin{cases} 1 & \text{, ha } i = k+1 \\ 0 & \text{, különben.} \end{cases}$$

$$\begin{array}{llll} S_1(x_0) = -1 & \to c_{-1}B_{1,-1}(x_0) + c_0B_{1,0}(x_0) + c_1B_{1,1}(x_0) & = c_{-1} \to & c_{-1} = -1 \\ S_1(x_1) = 1 & \to c_{-1}B_{1,-1}(x_1) + c_0B_{1,0}(x_1) + c_1B_{1,1}(x_1) & = c_0 \to & c_0 = 1 \\ S_1(x_2) = -1 & \to c_{-1}B_{1,-1}(x_2) + c_0B_{1,0}(x_2) + c_1B_{1,1}(x_2) & = c_1 \to & c_1 = -1 \end{array}$$

Tehát

$$S_1(x) = -B_{1,-1}(x) + B_{1,0}(x) - B_{1,1}(x).$$

Ellenőrzésképpen felírhatjuk az intervallumonkénti polinom alakot.

b) A másodfokú spline alakja B-spline-okkal

$$S_2(x) = \sum_{k=-2}^{1} c_k B_{2,k}(x) = c_{-2}B_{2,-2}(x) + c_{-1}B_{2,-1}(x) + c_0B_{2,0}(x) + c_1B_{2,1}(x).$$

Írjuk fel az interpolációs egyenleteket.

$$\begin{aligned}
&(1) \quad S_2(x_0) = \frac{1}{2}\,c_{-2} + \frac{1}{2}\,c_{-1} &&= -1\\
&(2) \quad S_2(x_1) = \frac{1}{2}\,c_{-1} + \frac{1}{2}\,c_{0} &&= 1\\
&(3) \quad S_2(x_2) = \frac{1}{2}\,c_{0} + \frac{1}{2}\,c_{1} &&= -1
\end{aligned}$$

A 12. feladat megoldásánál kapott képlet alapján ellenőrizhető, hogy a másodfokú B-spline-ok deriváltjai a következők

$$\begin{aligned}
B'_{2,-2}(-\pi) &= -\frac{1}{h}\\
B'_{2,-1}(-\pi) &= \frac{1}{h}\\
B'_{2,0}(-\pi) &= 0\\
B'_{2,1}(-\pi) &= 0.
\end{aligned}$$

Vegyük hozzá negyedik egyenletnek a peremfeltételt.

$$(4)\;\; S'_2(x_0) = f'(-\pi) = 0 \to \sum_{k=-2}^{1} c_k B'_{2,k}(x_0) = -\frac{1}{h}\,c_{-2} + \frac{1}{h}\,c_{-1} = 0$$

Rendezzük az egyenleteket.

$$\begin{aligned}
&(1)\;\; c_{-2} + c_{-1} &&= -2\\
&(4)\;\; -c_{-2} + c_{-1} &&= 0\\
&(2)\;\; c_{-1} + c_{0} &&= 2\\
&(3)\;\; c_{0} + c_{1} &&= -2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(1)+(4)\;\; & 2c_{-1} = -2 \to && c_{-1} = -1\\
(4)\;\; & && c_{-2} = c_{-1} = -1\\
(2)\;\; & -1 + c_0 = 2 \to && c_0 = 3\\
(3)\;\; & 3 + c_1 = -2 \to && c_1 = -5
\end{aligned}$$

Tehát

$$S_2(x) = -B_{2,-2}(x) - B_{2,-1}(x) + 3B_{2,0}(x) - 5B_{2,1}(x).$$

Ellenőrzésképpen felírhatjuk az intervallumonkénti polinom alakot.

c) A harmadfokú spline alakja B-spline-okkal

$$\begin{aligned}
S_3(x) &= \sum_{k=-3}^{1} c_k B_{3,k}(x) =\\
&= c_{-3}B_{3,-3}(x) + c_{-2}B_{3,-2}(x) + c_{-1}B_{3,-1}(x) + c_0 B_{3,0}(x) + c_1 B_{3,1}(x).
\end{aligned}$$

A számolásunkhoz hasznos lesz a következő táblázat, amit a 13. feladat megoldásánál kapott képlet alapján ellenőrizhetünk.

	x_k	x_{k+1}	x_{k+2}	x_{k+3}	x_{k+4}
$B_{3,k}(x)$	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{1}{6}$	0
$B'_{3,k}(x)$	0	$\frac{1}{2h}$	0	$-\frac{1}{2h}$	0

Írjuk fel az interpolációs egyenleteket.

$$\begin{aligned}
&(1)\ S_3(x_0) &&= -1 = \frac{1}{6}\,c_{-3} + \frac{4}{6}\,c_{-3} + \frac{1}{6}\,c_{-1}\\
&(2)\ S_3(x_1) &&= 1 = \frac{1}{6}\,c_{-2} + \frac{4}{6}\,c_{-1} + \frac{1}{6}\,c_0\\
&(3)\ S_3(x_2) &&= -1 = \frac{1}{6}\,c_{-1} + \frac{4}{6}\,c_0 + \frac{1}{6}\,c_1
\end{aligned}$$

Vegyük hozzá a két peremfeltételt.

$$\begin{aligned}
&(4)\quad S_3'(x_0) = f'(-\pi) = 0 \to \sum_{k=-3}^{1} c_k B_{3,k}'(x_0) = -\frac{1}{2\pi}\,c_{-3} + \frac{1}{2\pi}\,c_{-1} = 0\\
&(5)\quad S_3'(x_2) = f'(\pi) = 0 \to \sum_{k=-3}^{1} c_k B_{3,k}'(x_2) = -\frac{1}{2\pi}\,c_{-1} + \frac{1}{2\pi}\,c_1 = 0
\end{aligned}$$

Rendezzük az egyenleteket.

$$\begin{aligned}
&(1)\ c_{-3} + 4c_{-2} + c_{-1} &&= -6\\
&(2)\ c_{-2} + 4c_{-1} + c_0 &&= 6\\
&(3)\ c_{-1} + 4c_0 + c_1 &&= -6\\
&(4)\ -c_{-3} + c_{-1} &&= 0\\
&(3)\ -c_{-1} + c_1 &&= 0
\end{aligned}$$

Könnyen ellenőrizhetjük, hogy a

$$c_{-3} = c_{-1} = c_1 = 3, \quad c_{-2} = c_0 = -3$$

megoldása a lineáris egyenletrendszernek. Tehát

$$S_3(x) = 3B_{3,-3}(x) - 3B_{3,-2}(x) + 3B_{3,1}(x) - 3B_{3,0}(x) + 3B_{3,1}(x).$$

Ellenőrzésképpen felírhatjuk az intervallumonkénti polinom alakot.

19. Először írjuk fel, mely pontokon kell átmennie a spline-nak.
Az x_0, x_1, x_2 alappontok lépésköze $h = \pi$.

x_i	$-\pi$	0	π
y_i	0	0	0

a) A másodfokú spline alakja B-spline-okkal

$$S_2(x) = \sum_{k=-2}^{1} c_k B_{2,k}(x) = c_{-2}B_{2,-2}(x) + c_{-1}B_{2,-1}(x) + c_0 B_{2,0}(x) + c_1 B_{2,1}(x).$$

Írjuk fel az interpolációs egyenleteket.

$$\begin{aligned}
&(1)\ S_2(x_0) &&= 0 = \frac{1}{2}\,c_{-2} + \frac{1}{2}\,c_{-1}\\
&(2)\ S_2(x_1) &&= 0 = \frac{1}{2}\,c_{-1} + \frac{1}{2}\,c_0\\
&(3)\ S_2(x_2) &&= 0 = \frac{1}{2}\,c_0 + \frac{1}{2}\,c_1
\end{aligned}$$

A 12. feladat megoldásánál kapott képlet alapján ellenőrizhető, hogy a másodfokú B-spline-ok deriváltjai a következők

$$\begin{aligned} B'_{2,-2}(-\pi) &= -\frac{1}{h} \\ B'_{2,-1}(-\pi) &= \frac{1}{h} \\ B'_{2,0}(-\pi) &= 0 \\ B'_{2,1}(-\pi) &= 0. \end{aligned}$$

Vegyük hozzá negyedik egyenletnek a peremfeltételt.

$$(4)\ \ S'_2(x_0) = f'(-\pi) = -1 \to \sum_{k=-2}^{1} c_k B'_{2,k}(x_0) = -\frac{1}{h}\, c_{-2} + \frac{1}{h}\, c_{-1} = -1$$

Rendezzük az egyenleteket.

$$\begin{aligned} &(1)\ \ c_{-2} + c_{-1} &&= 0 \\ &(4)\ \ -c_{-2} + c_{-1} &&= -\pi \\ &(2)\ \ c_{-1} + c_0 &&= 0 \\ &(3)\ \ c_0 + c_1 &&= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &(1)+(4) \qquad & 2c_{-1} = -\pi \quad &\to \quad c_{-1} = -\frac{\pi}{2} \\ &(1) & c_{-2} + c_{-1} = 0 \quad &\to \quad c_{-2} = \frac{\pi}{2} \\ &(2) & -\frac{\pi}{2} + c_0 = 0 \quad &\to \quad c_0 = \frac{\pi}{2} \\ &(3) & \frac{\pi}{2} + c_1 = 0 \quad &\to \quad c_1 = -\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Tehát

$$S_2(x) = \frac{\pi}{2}\, B_{2,-2}(x) - \frac{\pi}{2}\, B_{2,-1}(x) + \frac{\pi}{2}\, B_{2,0}(x) - \frac{\pi}{2}\, B_{2,1}(x).$$

Ellenőrzésképpen felírhatjuk az intervallumonkénti polinom alakot.

b) A harmadfokú spline alakja B-spline-okkal

$$\begin{aligned} S_3(x) = \sum_{k=-3}^{1} c_k B_{3,k}(x) = \\ = c_{-3}B_{3,-3}(x) + c_{-2}B_{3,-2}(x) + c_{-1}B_{3,-1}(x) + c_0B_{3,0}(x) + c_1B_{3,1}(x). \end{aligned}$$

A számolásunkhoz hasznos lesz a következő táblázat, amit a 13. feladat megoldásánál kapott képlet alapján ellenőrizhetünk.

	x_k	x_{k+1}	x_{k+2}	x_{k+3}	x_{k+4}
$B_{3,k}(x)$	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{1}{6}$	0
$B'_{3,k}(x)$	0	$\frac{1}{2h}$	0	$-\frac{1}{2h}$	0
$B''_{3,k}(x)$	0	$\frac{1}{h^2}$	$-\frac{2}{h^2}$	$\frac{1}{h^2}$	0

Írjuk fel az interpolációs egyenleteket.

$$\begin{aligned} &(1)\ \ S_3(x_0) &&= 0 = \frac{1}{6}\, c_{-3} + \frac{4}{6}\, c_{-3} + \frac{1}{6}\, c_{-1} \\ &(2)\ \ S_3(x_1) &&= 0 = \frac{1}{6}\, c_{-2} + \frac{4}{6}\, c_{-1} + \frac{1}{6}\, c_0 \\ &(3)\ \ S_3(x_2) &&= 0 = \frac{1}{6}\, c_{-1} + \frac{4}{6}\, c_0 + \frac{1}{6}\, c_1 \end{aligned}$$

Vegyük hozzá a két periodikus peremfeltételt.

$$(4) \quad S_3'(-\pi) = S_3'(\pi) \to \; -\frac{1}{2h}\,c_{-3} + \frac{1}{2h}\,c_{-1} = -\frac{1}{2h}\,c_{-1} + \frac{1}{2h}\,c_1$$
$$(5) \quad S_3''(-\pi) = S_3''(\pi) \to \; \frac{1}{h^2}\,c_{-3} - \frac{2}{h^2}\,c_{-2} + \frac{1}{h^2}\,c_{-1} = \frac{1}{h^2}\,c_{-1} - \frac{2}{h^2}\,c_0 + \frac{1}{h^2}\,c_1$$

Rendezzük az egyenleteket.

$$\begin{aligned}
&(1) \qquad & c_{-3} + 4c_{-2} + c_{-1} &= 0\\
&(2) \qquad & c_{-2} + 4c_{-1} + c_0 &= 0\\
&(3) \qquad & c_{-1} + 4c_0 + c_1 &= 0\\
&(4) \qquad & -c_{-3} + 2c_{-1} - c_1 &= 0\\
&(5) \qquad & c_{-3} - 2c_{-2} + 2c_0 - c_1 &= 0
\end{aligned}$$

Mivel az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1\\ -1 & 0 & 2 & 0 & -1\\ 1 & 2 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

mátrixra $\det((A)) = -96 \neq 0$, így a fenti homogén lineáris egyenletrendszernek a $\mathbf{0}$ vektor az egyetlen megoldása.

$$c_{-3} = c_{-2} = c_{-1} = c_0 = c_1 = 0$$

megoldása az egyenletrendszernek. Tehát a keresett periodikus köbös spline

$$S_3(x) \equiv 0.$$

A megoldás után újra átgondolva a feltételeket nyilvánvaló az eredmény. Ha az interpolációs feltételek közül nem lenne mind nulla, akkor lehetne nem azonosan nulla megoldása a feladatnak. Ezek után felmerülhet a kérdés, hogy másodfokú spline-ként miért nem kaptunk azonosan nulla megoldást. A válasz a nem nulla peremfeltételben rejlik.

20. Először írjuk fel, mely pontokon kell átmennie a spline-nak.
Az x_0, x_1, x_2 alappontok lépésköze $h = \frac{\pi}{2}$.

x_i	0	$\frac{\pi}{2}$	π
y_i	0	1	0

A harmadfokú spline alakja B-spline-okkal

$$S_3(x) = \sum_{k=-3}^{1} c_k B_{3,k}(x) =$$
$$= c_{-3}B_{3,-3}(x) + c_{-2}B_{3,-2}(x) + c_{-1}B_{3,-1}(x) + c_0 B_{3,0}(x) + c_1 B_{3,1}(x).$$

A számolásunkhoz hasznos lesz a következő táblázat, amit a 13. feladat megoldásánál kapott képlet alapján ellenőrizhetünk.

	x_k	x_{k+1}	x_{k+2}	x_{k+3}	x_{k+4}
$B_{3,k}(x)$	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{1}{6}$	0
$B'_{3,k}(x)$	0	$\frac{1}{2h}$	0	$-\frac{1}{2h}$	0
$B''_{3,k}(x)$	0	$\frac{1}{h^2}$	$-\frac{2}{h^2}$	$\frac{1}{h^2}$	0

Írjuk fel az interpolációs egyenleteket.

$$\begin{aligned}
&(1)\ \ S_3(0) &&= 0 = \frac{1}{6}\,c_{-3} + \frac{4}{6}\,c_{-3} + \frac{1}{6}\,c_{-1}\\
&(2)\ \ S_3(\frac{\pi}{2}) &&= 1 = \frac{1}{6}\,c_{-2} + \frac{4}{6}\,c_{-1} + \frac{1}{6}\,c_{0}\\
&(3)\ \ S_3(\pi) &&= 0 = \frac{1}{6}\,c_{-1} + \frac{4}{6}\,c_{0} + \frac{1}{6}\,c_{1}
\end{aligned}$$

Vegyük hozzá a két természetes peremfeltételt.

$$\begin{aligned}
&(4) \qquad S_3''(-\pi) = 0 \rightarrow\ \frac{1}{h^2}\,c_{-3} - \frac{2}{h^2}\,c_{-2} + \frac{1}{h^2}\,c_{-1} = 0\\
&(5) \qquad\ \ S_3''(\pi) = 0 \rightarrow\ \frac{1}{h^2}\,c_{-1} - \frac{2}{h^2}\,c_{0} + \frac{1}{h^2}\,c_{1} = 0
\end{aligned}$$

Rendezzük az egyenleteket.

$$\begin{aligned}
&(1) \qquad & c_{-3} + 4c_{-2} + c_{-1} &= 0\\
&(2) \qquad & c_{-2} + 4c_{-1} + c_{0} &= 6\\
&(3) \qquad & c_{-1} + 4c_{0} + c_{1} &= 0\\
&(4) \qquad & c_{-3} - 2c_{-2} + c_{-1} &= 0\\
&(5) \qquad & c_{-1} - 2c_{0} + c_{1} &= 0
\end{aligned}$$

Oldjuk meg a fenti egyenletrendszert.

$$\begin{aligned}
&(1)-(4) \qquad & 6c_{-2} = 0 &\rightarrow & c_{-2} &= 0\\
&(3)-(5) \qquad & 6c_{0} = 0 &\rightarrow & c_{0} &= 0\\
&(2) \qquad & 4c_{-1} = 6 &\rightarrow & c_{-1} &= \frac{3}{2}\\
&(1) \qquad & c_{-3} + \frac{3}{2} = 0 &\rightarrow & c_{-3} &= -\frac{3}{2}\\
&(3) \qquad & \frac{3}{2} + c_{1} = 0 &\rightarrow & c_{1} &= -\frac{3}{2}
\end{aligned}$$

Tehát

$$c_{-3} = -\frac{3}{2}, \quad c_{-2} = c_0 = 0, \quad c_{-1} = c_1 = \frac{3}{2}$$

megoldása az egyenletrendszernek. A keresett természetes peremfeltételű spline

$$S_3(x) = -\frac{3}{2}\,B_{3,-3}(x) + \frac{3}{2}\,B_{3,1}(x) - \frac{3}{2}\,B_{3,1}(x).$$

Vissza a tartalomhoz

9. fejezet

Nemlineáris egyenletek megoldása

9.1. Feladatok

9.1.1. Polinomok gyökeinek becslése

1. Adjunk alsó és felső becslést a $P(x) = 3x^4 - x^3 - 5x^2 + 4x - 6$ polinom gyökeinek abszolút értékére!

2. Adjunk alsó és felső becslést a $P(x) = -x^5 + 2x^3 + x^2 + 8$ polinom gyökeinek abszolút értékére!

3. Adjunk alsó és felső becslést a $P(x) = 4x^4 - 3x^3 - 6x^2 + x - 1$ polinom gyökeinek abszolút értékére!

4. Adjunk alsó és felső becslést a $P(x) = x^3 - 6x^2 - 2x + 4$ polinom gyökeinek abszolút értékére!

9.1.2. Intervallumfelezés módszere

5. Határozzuk meg az $x^2 - 2 = 0$ egyenlet $[1\,;2]$ -beli megoldását intervallumfelezéssel, $\frac{1}{10}$ -es pontossággal!

6. Határozzuk meg az $x^2 - 3 = 0$ egyenlet $[-2\,;-1]$ -beli megoldását intervallumfelezéssel, $\frac{1}{10}$ -es pontossággal!

7. Határozzuk meg az $x^3 - 3x + 1 = 0$ egyenlet $[0\,;1]$ -beli megoldását intervallumfelezéssel, $\frac{1}{10}$ -es pontossággal! Hány lépés szükséges az $\frac{1}{1000}$ -es pontossághoz?

8. Határozzuk meg az $x^3 - x - 2 = 0$ egyenlet közelítő megoldását intervallumfelezéssel, $\frac{1}{10}$ -es pontossággal! Keressünk jó induló intervallumot!

9. Közelítsük a $\sqrt[3]{4}$-et! Számoljuk ki $\frac{1}{10}$ -es pontossággal!

9.1.3. Fixpont iteráció

10. Az $x^3 - 5x + 2 = 0$ egyenlet $[0\,;1]$ -beli megoldására az

$$x_{k+1} = \frac{x_k^3 + 2}{5}$$

iterációt használjuk. Bizonyítsuk a módszer konvergenciáját és írjuk fel a hibabecslését!

11. Az $x^3 - 4x - 2 = 0$ egyenlet megoldására az

$$x_{k+1} = \frac{x_k^3 - 2}{4}$$

iterációt használjuk. Bizonyítsuk a módszer konvergenciáját és írjuk fel a hibabecslését. Adjunk meg egy - lehetőleg minél tágabb - intervallumot, melyen konvergál a sorozat! Mennyi a konvergenciarendje?

12. Az $x^3 - 3x + 1 = 0$ egyenlet megoldására az

$$x_{k+1} = \frac{x_k^3 + 1}{3}$$

iterációt használjuk. Bizonyítsuk a módszer konvergenciáját valamely intervallumon és írjuk fel a hibabecslését!

13. Mutassuk meg, hogy a $\varphi(x) = \frac{x}{3} + \frac{1}{x}$ függvény kontrakció az $[1\,;2]$ intervallumon. Igazoljuk, hogy az

$$x_{k+1} = \frac{x_k}{3} + \frac{1}{x_k}$$

sorozat $\sqrt{\frac{3}{2}}$ -hez konvergál minden $x_0 \in [1\,;2]$ kezdőértékre! Adjunk az iterációra hibabecslést!

14. Az $x^2 - 2\sqrt{x} - 2 = 0$ egyenlet pozitív megoldására a következő iterációt használjuk

$$x_{k+1} = \sqrt{2}\sqrt{\sqrt{x_k} + 1}.$$

Mely intervallumon konvergál és mennyi a konvergenciarendje?

15. Az $\sqrt{x} - x + 1 = 0$ egyenlet $[1\,;4]$-beli megoldására az

$$x_{k+1} = \sqrt{x_k} + 1$$

iterációt használjuk. Bizonyítsuk a módszer konvergenciáját és írjuk fel a hibabecslését.

16. Adjunk meg az $x = \sqrt{x+1}$ egyenlet $[0\,;3]$-beli megoldásához konvergáló sorozatot. Bizonyítsuk a konvergenciát! Mennyi a konvergenciarendje?

17. Adjunk meg az $x = (x-1)^3$ egyenlet megoldásához konvergáló sorozatot. Mely intervallumból vegyük a kezdőértékeket?

18. Az $x^2 - x - 2 = 0$ egyenlet megoldására vizsgáljuk az

$$x_{k+1} = 1 + \frac{2}{x_k}, \quad y_{k+1} = \frac{y_k^2 + 2}{2y_k - 1}$$

iterációkat. Melyik sorozat konvergens? Milyen kezdőérték esetén? Bizonyítsuk a konvergenciát!

19. Az $x^3 - x - 1 = 0$ egyenlet megoldására az $[1\,;2]$ intervallumon vizsgáljuk az

$$x_{k+1} = x_k^3 - 1, \quad y_{k+1} = \frac{2y_k^3 + 1}{3y_k^2 - 1}$$

iterációkat. Melyik sorozat konvergens? Bizonyítsuk a konvergenciát!

20. Adjunk a $3x = \sin(x) + 1$ egyenlet megoldására egy konvergens sorozatot! Bizonyítsuk a sorozat konvergenciáját és annak rendjét! Mely intervallumból indítva konvergál?

21. Igazoljuk, hogy az

$$x_{k+1} = x_k \cdot \frac{x_k^2 + 3A}{3x_k^2 + A}$$

iteráció $\left(A > 0, x_0 > 0, x_0^2 > A\right)$ esetén konvergál! Mi a határértéke? Adjuk meg a hibabecslését és bizonyítsuk a konvergenciarendjét!

9.1.4. Newton-módszer

22. Az $f(x) = e^{2x} + 4x$ függvény gyökének közelítésére írjuk fel a Newton-módszert! Igazoljuk a módszer másodrendű konvergenciáját a gyök valamely környezetében!

23. Az $f(x) = \cos(x) - 4x + 2$ függvény gyökének közelítésére írjuk fel a Newton-módszert! Igazoljuk a módszer másodrendű konvergenciáját a gyök valamely környezetében!

24. Az $f(x) = \sin(x) - 2x + 1 = 0$ egyenlet megoldására írjuk fel a Newton-módszert! Milyen intervallumból indítva konvergál az iteráció? Mennyi a konvergenciarendje?

25. Az $f(x) = e^x - \frac{1}{4}\,x - 2 = 0$ egyenlet megoldására írjuk fel a Newton-módszert! Milyen intervallumból indítva konvergál az iteráció? Mennyi a konvergenciarendje?

26. Írjuk fel a Newton-módszert az $f(x) = \frac{1}{3}\,x^2 - x - 1 = 0$ megoldására! Milyen kezdőértékekre konvergál? Bizonyítsuk a konvergenciát!

27. Az $f(x) = x^2 - 2\sqrt{x} - 2 = 0$ egyenlet pozitív gyökének közelítésére írjuk fel a Newton-módszert és bizonyítsuk a konvergenciáját! Mely intervallumon konvergál?

28. Írjuk fel a Newton-módszert az $f(x) = -\frac{x}{1+x} = 0$ egyenlet megoldására! Milyen intervallumból indítva konvergál a kapott iteráció? Mit mondhatunk a konvergenciarendjéről?

9.2. Megoldások

9.2.1. Polinomok gyökeinek becslése

1. A $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ alakú valós együtthatós polinom gyökeinek abszolútértékére (ha $a_n \neq 0$ és $a_0 \neq 0$) a következő alsó- és felső becslés adható.

$$\frac{1}{1 + \frac{\max\{|a_n|,\ldots,|a_1|\}}{|a_0|}} = r \leq |x_k| \leq R = 1 + \frac{\max\{|a_{n-1}|,\ldots,|a_0|\}}{|a_n|}$$

Alkalmazzuk a $P(x) = 3x^4 - x^3 - 5x^2 + 4x - 6$ polinom együtthatóira.

$$R = 1 + \frac{\max\{|-1|,\,|-5|,\,4,\,|-6|\}}{3} = 1 + \frac{6}{3} = 3,$$

$$r = \frac{1}{1 + \frac{\max\{3,|-1|,|-5|,4\}}{|-6|}} = \frac{1}{1 + \frac{5}{6}} = \frac{6}{11}$$

Tehát a polinom x_k gyökére $\frac{6}{11} \leq |x_k| \leq 3$.

2. A $P(x) = -x^5 + 2x^3 + x^2 + 8$ polinom együtthatóiból

$$R = 1 + \frac{\max\{0, 2, 1, 0, 8\}}{|-1|} = 1 + \frac{8}{1} = 9,$$
$$r = \frac{1}{1 + \frac{\max\{|-1|, 2, 1\}}{8}} = \frac{1}{1 + \frac{2}{8}} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}.$$

Tehát a polinom x_k gyökére $\frac{4}{5} \leq |x_k| \leq 9$.

3. A $P(x) = 4x^4 - 3x^3 - 6x^2 + x - 1$ polinom együtthatóiból

$$R = 1 + \frac{\max\{|-3|, |-6|, 1\}}{4} = 1 + \frac{6}{4} = 2,5$$
$$r = \frac{1}{1 + \frac{\max\{4, |-3|, |-6|, 1\}}{|-1|}} = \frac{1}{1 + \frac{6}{1}} = \frac{1}{7}.$$

Tehát a polinom x_k gyökére $\frac{1}{7} \leq |x_k| \leq 2,5$.

4. A $P(x) = x^3 - 6x^2 - 2x + 4$ polinom együtthatóiból

$$R = 1 + \frac{\max\{|-6|, |-2|, 4\}}{1} = 1 + \frac{6}{1} = 7$$
$$r = \frac{1}{1 + \frac{\max\{1, |-6|, |-2|\}}{4}} = \frac{1}{1 + \frac{6}{4}} = \frac{4}{5}.$$

Tehát a polinom x_k gyökére $\frac{4}{5} \leq |x_k| \leq 7$.

9.2.2. Intervallumfelezés módszere

5. Legyen $[x_0; y_0] = [1; 2]$ a kiindulási intervallum. Mivel

$$x_0^2 - 2 = 1 - 2 = -1 < 0$$
$$y_0^2 - 2 = 4 - 2 = 2 > 0,$$

ezért a Bolzano tétel miatt tartalmazza a gyököt.

1. lépés: A felezőpont

$$\frac{x_0 + y_0}{2} = \frac{1 + 2}{2} = \frac{3}{2} = 1,5.$$

Mivel $(1,5)^2 - 2 = 2,25 - 2 > 0$, ezért az $[x_1; y_1]$ intervallumot válasszuk úgy, hogy tartalmazza a gyököt, azaz $x_1 = 1$, $y_1 = 1,5$ legyen.

2. lépés: A felezőpont

$$\frac{x_1 + y_1}{2} = \frac{1 + 1,5}{2} = \frac{2,5}{2} = 1,25.$$

Mivel $(1,25)^2 - 2 = 1,5625 - 2 < 0$, ezért az $[x_2; y_2]$ intervallumra $x_2 = 1,25$, $y_2 = 1,5$, így tartalmazza a gyököt.

3. lépés: A felezőpont

$$\frac{x_2 + y_2}{2} = \frac{1,25 + 1,5}{2} = \frac{2,75}{2} = 1,375.$$

Mivel $(1,375)^2 - 2 = 1,890625 - 2 < 0$, ezért $x_3 = 1,375$, $y_3 = 1,5$ és az $[x_3; y_3]$ intervallum tartalmazza a gyököt.

Az utolsó intervallum hossza $0,125$. Ennek a felezőpontja $1,4375$ már $\frac{1}{10}$-es pontosságú közelítése a gyöknek.

6. Legyen $[x_0; y_0] = [-2; -1]$ a kiindulási intervallum. Mivel

$$x_0^2 - 3 = 4 - 3 = 1 > 0$$
$$y_0^2 - 3 = 1 - 3 = -2 < 0,$$

ezért a Bolzano tétel miatt tartalmazza a gyököt.

1. lépés: A felezőpont

$$\frac{x_0 + y_0}{2} = \frac{(-2) + (-1)}{2} = \frac{-3}{2} = -1,5.$$

Mivel $(-1,5)^2 - 3 = 2,25 - 3 < 0$, ezért az $[x_1; y_1]$ intervallumot válasszuk úgy, hogy tartalmazza a gyököt, azaz $x_1 = -2$, $y_1 = -1,5$ legyen.

2. lépés: A felezőpont

$$\frac{x_1 + y_1}{2} = \frac{(-2) + (-1,75)}{2} = \frac{-3,5}{2} = -1,75.$$

Mivel $(-1,75)^2 - 2 = 3,0625 - 3 > 0$, ezért az $[x_2; y_2]$ intervallum olyan legyen, hogy tartalmazza a gyököt, azaz $x_2 = -1,75$, $y_2 = -1,5$ legyen.

3. lépés: A felezőpont

$$\frac{x_2 + y_2}{2} = \frac{(-1,75) + (-1,5)}{2} = \frac{-3,25}{2} = -1,625.$$

Mivel $(1,625)^2 - 3 = 2,640625 - 3 < 0$, ezért $x_3 = -1,75$, $y_3 = -1,625$ és az $[x_3; y_3]$ intervallum tartalmazza a gyököt.

Az utolsó intervallum hossza $0,125$. Ennek a felezőpontja $-1,6875$ már $\frac{1}{10}$-es pontosságú közelítése a gyöknek.

7. Legyen $[x_0; y_0] = [0\,; 1]$ a kiindulási intervallum. Mivel

$$x_0^3 - 3x_0 + 1 = 1 > 0$$
$$y_0^3 - 3y_0 + 1 = 1 - 3 + 1 = -1 < 0,$$

ezért a Bolzano tétel miatt tartalmazza a gyököt.

1. lépés: A felezőpont

$$\frac{x_2 + y_2}{2} = \frac{0 + 1}{2} = 0,5.$$

Mivel $(0,5)^3 - 3 \cdot 0,5 + 1 = -0,3750 < 0$, ezért az $[x_1; y_1]$ intervallumot válasszuk úgy, hogy tartalmazza a gyököt, azaz $x_1 = 0$, $y_1 = 0,5$ legyen.

2. lépés: A felezőpont

$$\frac{x_1 + y_1}{2} = \frac{0 + 0,5}{2} = 0,25.$$

Mivel $(0,25)^3 - 3 \cdot 0,25 + 1 = 0.265625 > 0$, ezért az $[x_2; y_2]$ intervallum olyan legyen, hogy tartalmazza a gyököt, azaz $x_2 = 0,25$, $y_2 = 0,5$.

3. lépés: A felezőpont

$$\frac{x_2 + y_2}{2} = \frac{0,25 + 0,5}{2} = 0,375.$$

Mivel $(0,375)^3 - 3 \cdot 0,375 + 1 = -0,072265625 < 0$, ezért $x_3 = 0,25$, $y_3 = 0,375$ és az $[x_3; y_3]$ intervallum tartalmazza a gyököt.

Az utolsó intervallum hossza $0,125$. Ennek a felezőpontja $0,3125$ már $\frac{1}{10}$-es pontosságú közelítése a gyöknek.

8. Keressünk kiindulási intervallumot, ahol a végpontokban a polinom értéke különböző előjelű. Az $[x_0; y_0] = [1; 2]$ jó választás, mivel

$$x_0^3 - x_0 - 2 = 1 - 1 - 2 = -2 < 0$$
$$y_0^3 - y_0 - 2 = 8 - 2 - 2 = 4 > 0,$$

ezért a Bolzano tétel miatt tartalmazza a gyököt.

1. lépés: A felezőpont

$$\frac{x_2 + y_2}{2} = \frac{1 + 2}{2} = 1,5.$$

Mivel $(1,5)^3 - 1,5 - 2 = -0,125 < 0$, ezért az $[x_1; y_1]$ intervallumot válasszuk úgy, hogy tartalmazza a gyököt, azaz $x_1 = 1,5$, $y_1 = 2$ legyen.

2. lépés: A felezőpont

$$\frac{x_1 + y_1}{2} = \frac{1,5 + 2}{2} = 1,75.$$

Mivel $(0,75)^3 - 0,75 - 2 = 1,609375 > 0$, ezért az $[x_2; y_2]$ intervallum olyan legyen, hogy tartalmazza a gyököt, azaz $x_2 = 1,5$, $y_2 = 1,75$.

3. lépés: A felezőpont

$$\frac{x_2 + y_2}{2} = \frac{1,5 + 1,75}{2} = 1,625.$$

Mivel $(1,625)^3 - 1,625 - 2 = 0,666015625 > 0$, ezért $x_3 = 1,5$, $y_3 = 1,625$ és az $[x_3; y_3]$ intervallum tartalmazza a gyököt.

Az utolsó intervallum hossza $0,125$. Ennek a felezőpontja $1,5625$ már $\frac{1}{10}$-es pontosságú közelítése a gyöknek.

9. A $\sqrt[3]{4}$ közelítéséhez keressünk egy egyenletet, melynek gyöke és egy kiindulási intervallumot. Az $x^3 - 4 = 0$ alkalmas egyenlet, a kiindulási intervallumunk legyen $[x_0; y_0] = [1; 2]$.
Ez jó választás, mivel

$$1^3 - 4 = 1 - 4 = -3 < 0$$
$$2^3 - 4 = 8 - 4 = 4 > 0,$$

ezért a Bolzano tétel miatt tartalmazza a gyököt.

1. lépés: A felezőpont

$$\frac{x_2 + y_2}{2} = \frac{1 + 2}{2} = 1,5.$$

Mivel $(1,5)^3 - 4 = -0,625 < 0$, ezért az $[x_1; y_1]$ intervallumot válasszuk úgy, hogy tartalmazza a gyököt, azaz $x_1 = 1,5$, $y_1 = 2$ legyen.

2. lépés: A felezőpont

$$\frac{x_1 + y_1}{2} = \frac{1,5 + 2}{2} = 1,75.$$

Mivel $(0,75)^3 - 4 = 1,359375 > 0$, ezért az $[x_2; y_2]$ intervallum legyen olyan, hogy tartalmazza a gyököt, azaz $x_2 = 1,5$, $y_2 = 1,75$.

3. lépés: A felezőpont

$$\frac{x_2 + y_2}{2} = \frac{1,5 + 1,75}{2} = 1,625.$$

Mivel $(1,625)^3 - 4 = 0.291015625 > 0$, ezért $x_3 = 1,5$, $y_3 = 1,625$ és az $[x_3; y_3]$ intervallum tartalmazza a gyököt.

Az utolsó intervallum hossza $0,125$. Ennek a felezőpontja $1,5625$ már $\frac{1}{10}$-es pontosságú közelítése a gyöknek.

9.2.3. Fixpont iteráció

10. Az iterációs sorozatot úgy kaptuk, hogy az egyenletet átrendeztük a vele ekvivalens alakra,

$$x = \frac{x^3+2}{5} \quad \Leftrightarrow \quad x^3 - 5x + 2 = 0$$

majd felírtuk a fixponttétel közelítő sorozatát. A feladat megoldására a fixponttételt alkalmazzuk.

a) Vizsgáljuk meg, hogy a $\varphi(x) = \frac{x^3+2}{5}$ függvény a $[0;1]$ intervallumot $[0\,;1]$-be képezi-e. Mivel φ szigorúan monoton növő függvény (könnyen bizonyítható elemi módon vagy a derivált segítségével), ezért

$$\varphi\left([0;1]\right) = [\varphi(0)\,;\,\varphi(1)] = \left[\frac{2}{5}\,;\,\frac{3}{5}\right] \subset [0;1].$$

b) Igazolnunk kell még, hogy φ kontrakció a $[0;1]$ intervallumon. A Lagrange-féle középértéktételt felhasználva

$$|\varphi'(\xi)| = \frac{3\cdot\xi^2}{5} \le \frac{3}{5} = q, \quad \xi \in [0;1]$$

miatt φ kontrakció $[0;1]$-en.

c) A fixponttétel mindkét feltétele teljesül, így a tétel állításai alkalmazhatók a feladatra. A hibabecslés $x_0 \in [0\,;1]$ esetén

$$|x_k - x^*| \le 0,6^k \cdot |x_0 - x^*| \le 0,6^k.$$

11. Az iterációs sorozatot úgy kaptuk, hogy az egyenletet átrendeztük a vele ekvivalens alakra,

$$x = \frac{x^3-2}{4} \quad \Leftrightarrow \quad x^3 - 4x - 2 = 0$$

majd felírtuk a fixponttétel közelítő sorozatát. A feladat megoldására a fixponttételt alkalmazzuk.

a) Keressünk egy intervallumot, mely tartalmazza a gyököt. A $[-1;0]$ intervallum jó választás, mert

$$(-1)^3 - 4\cdot(-1) - 2 = -1 + 4 - 2 = 1 > 0$$
$$0^3 - 4\cdot 0 - 2 = -2 < 0,$$

így a Bolzano tétel miatt tartalmazza a gyököt.
A $\varphi(x) = \frac{x^3-2}{4}$ függvény a $[-1\,;0]$ intervallumot a $[-1\,;0]$-ba képezi, ugyanis φ szigorúan monoton növő függvény (könnyen bizonyítható elemi módon vagy a derivált segítségével) és

$$\phi\left([-1;0]\right) = [\varphi(-1)\,;\,\varphi(0)] = \left[-\frac{3}{4}\,;-\frac{1}{2}\right] \subset [-1;0].$$

b) Igazolnunk kell még, hogy φ kontrakció a $[-1\,;0]$ intervallumon. A Lagrange-féle középértéktételt felhasználva

$$|\varphi'(\xi)| = \frac{3\cdot\xi^2}{4} \le \frac{3}{4} = q, \quad \xi \in [-1\,;0]$$

miatt φ kontrakció $[-1\,;0]$-n.

c) A fixponttétel mindkét feltétele teljesül, így a tétel állításai alkalmazhatók a feladatra. A hibabecslés $x_0 \in [-1\,;0]$ esetén

$$|x_k - x^*| \le 0,75^k \cdot |x_0 - x^*| \le 0,75^k.$$

12. Az iterációs sorozatot úgy kaptuk, hogy az egyenletet átrendeztük a vele ekvivalens alakra,

$$x = \frac{x^3+1}{3} \quad \Leftrightarrow \quad x^3 - 3x + 1 = 0$$

majd felírtuk a fixponttétel közelítő sorozatát. A feladat megoldására a fixponttételt alkalmazzuk.

a) Keressünk egy intervallumot, mely tartalmazza a gyököt. A $[0;1]$ intervallum jó választás, mert

$$\begin{aligned}(0)^3 - 3\cdot 0 + 1 &= 1 > 0\\ 1^3 - 3\cdot 1 + 1 &= -1 < 0,\end{aligned}$$

így a Bolzano tétel miatt tartalmazza a gyököt.
A $\varphi(x) = \frac{x^3+1}{3}$ függvény a $[0;1]$ intervallumot $[0;1]$-be képezi? Mivel φ szigorúan monoton növő függvény (könnyen bizonyítható elemi módon vagy a derivált segítségével), ezért

$$\phi\left([0;1]\right) = [\varphi(0)\,;\,\varphi(1)] = \left[\frac{1}{3}\,;\,\frac{2}{3}\right] \subset [0;1].$$

b) Igazolnunk kell még, hogy φ kontrakció a $[0;1]$ intervallumon. A Lagrange-féle középértéktételt felhasználva

$$\varphi'(\xi) = \xi^2 \le 1 = q, \quad \xi \in [0;1]$$

bizonyítható, ami nem elegendő a kontrakció bizonyításához. Ahhoz, hogy kontrakció legyen az intervallumot csökkentenünk kell. Legyen $[0\,;\,0,9]$ az új intervallum, ekkor

$$|\varphi'(\xi)| = \xi^2 \le 0,81 = q, \quad \xi \in [0;\,0,9].$$

Tehát φ kontrakció $[0;\,0,9]$-en.

c) Vizsgáljuk az új intervallumra is a beleképezést.

$$\phi\left([0;\,0,9]\right) = [\varphi(0);\varphi(0,9)] = \left[\frac{1}{3}\,;\,0,576\dot{3}\right] \subset [0\,;\,0,9].$$

A $[0\,;\,0,9]$ intervallummal a fixponttétel mindkét feltétele teljesül, így a tétel állításai alkalmazhatók a feladatra.

d) A hibabecslés a fixponttételből $x_0 \in [0\,;\,0,9]$ esetén

$$|x_k - x^*| \le 0,81^k \cdot |x_0 - x^*| \le 0,81^k.$$

13. A feladat megoldására a fixponttételt alkalmazzuk.

a) Vizsgáljuk meg, hogy a $\varphi(x) = \frac{x}{3} + \frac{1}{x}$ függvény a $[1;2]$ intervallumot $[1;2]$-be képezi-e. A

$$\varphi'(x) = \frac{1}{3} - \frac{1}{x^2}$$

$[1;\sqrt{3})$-n negatív, a $(\sqrt{3};2]$-n pozitív, így φ-nek $\sqrt{3}$-ban lokális minimuma van.
A φ függvény $[1;\sqrt{3})$-n monoton fogyó, a $(\sqrt{3};2]$-n monoton növő,

$$\varphi(1) = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3},$$

$$\varphi(2) = \frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{7}{6},$$

$$\varphi(\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{3} \approx 1,155,$$

ezért

$$\phi\left([1;2]\right) = [\varphi(\sqrt{3}); \varphi(1)] = \left[1,155; \frac{4}{3}\right] \subset [1;2].$$

b) Igazolnunk kell még, hogy φ kontrakció a $[1;2]$ intervallumon. A Lagrange-féle középérték-tételt felhasználva

$$|\varphi'(\xi)| = \left|\frac{1}{3} - \frac{1}{\xi^2}\right| \leq q, \quad \xi \in [1;2]$$

ahol

$$q = \max\left\{|\varphi'(1)|, |\varphi'(2)|\right\} = \max\left\{\frac{2}{3}, \frac{1}{12}\right\} = \frac{2}{3} < 1.$$

Tehát φ kontrakció $[1;2]$-en.

c) A fixponttétel mindkét feltétele teljesül, így a tétel állításai alkalmazhatók a feladatra. A feladatban szereplő $x_{k+1} = \frac{x_k}{3} + \frac{1}{x_k}$ sorozat konvergál a φ $[1;2]$-beli fixpontjához, így az x^*-gal jelölt fixpont kielégíti az $x = \frac{x}{3} + \frac{1}{x}$ egyenletet.

$$x = \frac{x}{3} + \frac{1}{x} \;\Leftrightarrow\; 3x^2 = x^2 + 3 \;\Leftrightarrow\; x^2 = \frac{3}{2} \;\Leftrightarrow\; x = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

d) A hibabecslés $x_0 \in [1;2]$ esetén

$$|x_k - x^*| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^k \cdot |x_0 - x^*| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^k.$$

14. Az iterációs sorozatot úgy kaptuk, hogy az egyenletet átrendeztük a vele ekvivalens alakra,

$$x = \sqrt{2}\sqrt{\sqrt{x} + 1} \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 2\sqrt{x} - 2 = 0$$

majd felírtuk a fixponttétel közelítő sorozatát. A feladat megoldására a fixponttételt alkalmazzuk.

a) Legyen $f(x) = x^2 - 2\sqrt{x} - 2$, keressünk egy intervallumot, mely tartalmazza a gyököt. Az $[1;4]$ intervallum jó választás, mert

$$f(1) = 1^2 - 2\sqrt{1} - 2 = -3 < 0$$
$$f(4) = 4^2 - 2\sqrt{4} - 2 = 10 > 0,$$

így a Bolzano tétel miatt tartalmazza a gyököt. Vizsgáljuk meg, hogy a $\varphi(x) = \sqrt{2}\sqrt{\sqrt{x} + 1}$ függvény az $[1;4]$ intervallumot $[1;4]$-be képezi-e. Mivel

$$\varphi'(x) = \frac{\sqrt{2}}{4}\frac{1}{\sqrt{x + \sqrt{x}}} > 0,$$

ezért φ szigorúan monoton növő függvény

$$\phi\left([1;4]\right) = [\varphi(1); \varphi(4)] = [2; \sqrt{6}] \subset [1;4].$$

b) Igazolnunk kell még, hogy φ kontrakció az $[1;4]$ intervallumon. A Lagrange-féle középértéktételt felhasználva

$$|\varphi'(\xi)| = \frac{\sqrt{2}}{4}\frac{1}{\sqrt{\xi+\sqrt{\xi}}} \le \frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{4} = q, \quad \xi \in [0;1]$$

miatt φ kontrakció $[1;4]$-en.

c) A fixponttétel mindkét feltétele teljesül, így a tétel állításai alkalmazhatók a feladatra. A hibabecslés $x_0 \in [1;4]$ esetén

$$|x_k - x^*| \le \left(\frac{1}{4}\right)^k \cdot |x_0 - x^*| \le \frac{3}{2^{2k}}.$$

A sorozat konvergenciarendje 1, mivel a Lagrange-féle középértéktétel miatt $\exists\ \xi_k \in [x_k; x^*]$ vagy $[x^*; x_k]$ intervallumban, hogy

$$|x_{k+1} - x^*| = |\varphi(x_k) - \varphi(x^*)| = |\varphi'(\xi_k)| \cdot |x_k - x^*|.$$

Ezt felhasználva

$$\lim_{k\to\infty}\frac{|x_{k+1}-x^*|}{|x_k - x^*|^1} = \lim_{k\to\infty}|\varphi'(\xi_k)| = \lim_{k\to\infty}|\varphi'(x^*)| =$$
$$= \lim_{k\to\infty}\frac{\sqrt{2}}{4}\frac{1}{\sqrt{x^*+\sqrt{x^*}}} = c \ne 0.$$

15. Az iterációs sorozatot úgy kaptuk, hogy az egyenletet átrendeztük a vele ekvivalens alakra,

$$x = \sqrt{x}+1 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{x} - x + 1 = 0$$

majd felírtuk a fixponttétel közelítő sorozatát. A feladat megoldására a fixponttételt alkalmazzuk.

a) Vizsgáljuk meg, hogy a $\varphi(x) = \sqrt{x}+1$ függvény az $[1;4]$ intervallumot $[1;4]$-be képezi-e. Mivel φ szigorúan monoton növő függvény (könnyen bizonyítható elemi módon vagy a derivált segítségével), ezért

$$\phi([1;4]) = [\varphi(1)\,;\,\varphi(4)] = [2;3] \subset [1;4].$$

b) Igazolnunk kell még, hogy φ kontrakció az $[1;4]$ intervallumon. A Lagrange-féle középértéktételt felhasználva

$$|\varphi'(\xi)| = \frac{1}{2\sqrt{\xi}} \le \frac{1}{2} = q, \quad \xi \in [1;4]$$

miatt φ kontrakció $[1;4]$-en.

c) A fixponttétel mindkét feltétele teljesül, így a tétel állításai alkalmazhatók a feladatra. A hibabecslés $x_0 \in [1;4]$ esetén

$$|x_k - x^*| \le \left(\frac{1}{2}\right)^k |x_0 - x^*| \le \frac{3}{2^k}.$$

16. Az iterációs sorozatot az $x = \sqrt{x+1}$ alakból a fixponttétel segítségével kapjuk. A feladatra a fixponttételt alkalmazzuk $\varphi(x) = \sqrt{x+1}$ választással, így a sorozat $x_{k+1} = \sqrt{x_k + 1}$ lesz.

a) Vizsgáljuk meg, hogy a φ függvény a $[0;3]$ intervallumot $[0;3]$-be képezi-e.
Mivel φ szigorúan monoton növő függvény (könnyen bizonyítható elemi módon), ezért

$$\phi\left([0;3]\right) = [\varphi(0)\,;\,\varphi(3)] = [1;2] \subset [0;3].$$

b) Igazolnunk kell még, hogy φ kontrakció az $[0;3]$ intervallumon. A Lagrange-féle középértéktételt felhasználva

$$|\varphi'(\xi)| = \frac{1}{2\sqrt{\xi+1}} \le \frac{1}{2} = q, \quad \xi \in [0;3]$$

miatt φ kontrakció $[0;3]$-en.

c) A fixponttétel mindkét feltétele teljesül, így a tétel állításai alkalmazhatók a feladatra.
A hibabecslés $x_0 \in [0;3]$ esetén

$$|x_k - x^*| \le \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot |x_0 - x^*| \le \frac{3}{2^k}.$$

A sorozat konvergenciarendje 1, mivel a Lagrange-féle középértéktétel miatt $\exists\ \xi_k \in [x_k; x^*]$ vagy $[x^*; x_k]$ intervallumban, hogy

$$|x_{k+1} - x^*| = |\varphi\left(x_k\right) - \varphi\left(x^*\right)| = |\varphi'(\xi_k)| \cdot |x_k - x^*|.$$

Ezt felhasználva

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty} \frac{|x_{k+1} - x^*|}{|x_k - x^*|^1} &= \lim_{k\to\infty} |\varphi'(\xi_k)| = \lim_{k\to\infty} |\varphi'(x^*)| = \\ &= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2\sqrt{x^*+1}} = c \ne 0.\end{aligned}$$

17. Iterációs sorozatot úgy kapunk, hogy az egyenletet átrendezzük a vele ekvivalens $x = \varphi(x)$ alakra, majd felírjuk és vizsgáljuk az $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ sorozatot. Egy kézenfekvő választás a

$$x = (x-1)^3 = \varphi(x),$$

míg egy másik az egyenlet átrendezéséből kapott

$$x = (x-1)^3 \quad \Leftrightarrow \quad x = \sqrt[3]{x} + 1 = \psi(x).$$

Az elsőként adott $\varphi(x)$-ről belátható, hogy divergens sorozatot generál, míg a második konvergens sorozatot.

a) Az eredeti egyenlet ekvivalens az $f(x) = (x-1)^3 - x = 0$ egyenlettel. Bolzano tétellel keressünk egy intervallumot, mely tartalmazza a gyököt. Az $[1;3]$ és $[2;3]$ intervallum is jó választás, mert

$$\begin{aligned}f(1) &= (1-1)^3 - 1 = -1 < 0\\ f(2) &= (2-1)^3 - 2 = -1 < 0\\ f(3) &= (3-1)^3 - 3 = 5 > 0.\end{aligned}$$

b) Az elsőként választott $\varphi(x) = (x-1)^3$-re elég megnéznünk a a deriváltját a $[2;3]$ intervallumon, mely tartalmazza a gyököt.

$$|\varphi'(x)| = 3(x-1)^2 \ge 3, \quad x \in [2;3]$$

Így a $\varphi(x) = (x-1)^3$ nem lehet kontrakció $[2;3]$-n.

c) A $\varphi(x) = \sqrt[3]{x} + 1$ függvény az $[1;3]$ intervallumon szigorúan monoton növő függvény (könnyen bizonyítható elemi módon) és

$$\phi\left([1;3]\right) = [\varphi(1)\,;\,\varphi(3)] = [2\,;\,\sqrt[3]{3}+1] \subset [1;3].$$

Igazolnunk kell még, hogy φ kontrakció az $[1;3]$ intervallumon. A Lagrange-féle középértéktételt felhasználva

$$|\varphi'(\xi)| = \frac{1}{3\sqrt[3]{\xi^2}} \leq \frac{1}{3} = q, \quad \xi \in [1;3]$$

miatt φ kontrakció $[1;3]$-n. A fixponttétel mindkét feltétele teljesül, így a tétel állításai alkalmazhatók a feladatra.

18. Iterációs sorozatot úgy kapunk, hogy az egyenletet átrendezzük a vele ekvivalens $x = \varphi(x)$ alakra, majd vizsgáljuk az $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ sorozatot. Az (x_k) sorozatot a $\varphi(x) = 1 + \frac{2}{x}$, míg az (y_k) sorozatot a $\psi(x) = \frac{x^2+2}{2x-1}$ függvénnyel kaptuk.

a) Az $f(x) = x^2 - x - 2 = 0$ egyenlet ekvivalens az $x = \varphi(x)$ és az $x = \psi(x)$ fixpont egyenlettel. Az $[1;3]$ intervallum jó, mert

$$f(1) = 1^2 - 1 - 2 = -2 < 0$$
$$f(3) = 3^2 - 3 - 2 = 4 > 0$$

miatt az intervallum tartalmaz gyököt.

b) A $\varphi(x) = 1 + \frac{2}{x}$-re elég megnéznünk a deriváltját az $[1;3]$ intervallumon.

$$\frac{4}{9} \leq |\varphi'(x)| = \frac{4}{x^2} \leq 4, \quad x \in [1;3]$$

Így a $\varphi(x) = 1+\frac{2}{x}$ nem lehet kontrakció $[1;3]$-n. Megpróbálhatnánk szűkíteni az intervallumot, de a 2-t tartalmaznia kell, mert gyök. Viszont $|\varphi'(2)| = 1$, vagyis az intervallumot szűkítve sem lehetne 1-nél kisebb.

c) Vizsgáljuk a $\psi(x) = \frac{x^2+2}{2x-1}$ függvény deriváltját.

$$\psi'(x) = 2 \cdot \frac{x^2 - x - 2}{(2x-1)^2}$$

Vegyük észre, hogy a számlálóban az $f(x)$ függvény szerepel, így a $\psi'(x^*) = 0$. Másrészt $x \in [1;2]$ esetén $f(x) \leq 0$ és $\psi'(x) \leq 0$, ami ψ monoton csökkenését, míg $x \in [2;3]$ esetén $f(x) \geq 0$ és $\psi'(x) \geq 0$, ami ψ monoton növekedését garantálja, azaz 2-ben ψ-nek lokális minimuma van. Mivel $\psi(1) = 3$, $\psi(2) = 2$ és $\psi(3) = \frac{11}{5}$

$$\psi\left([1;3]\right) = [\psi(2)\,;\,\psi(1)] = [2;3] \subset [1;3].$$

Igazolnunk kell még, hogy ψ kontrakció az $[1;3]$ intervallumon.

$$\psi''(x) = 2 \cdot \frac{(2x-1)^2 - 4(x^2-x-2)}{(2x-1)^3} = \frac{14}{(2x-1)^3} > 0,$$

így ψ' szigorúan monoton növő és

$$-4 = \psi'(1) \leq \psi'(x) \leq \psi'(3) = \frac{8}{25}.$$

Látszik, hogy finomítanunk kell az intervallumot.

d) Nézzük az $[1,5\,;\,3]$ intervallumot, ami szintén tartalmazza a gyököt, így a fentiek alapján

$$\psi\left([1,5\,;\,3]\right) = [\psi(2)\,;\,\psi(1,5)] = [2\,;\,\frac{17}{8}] \subset [1,5\,;\,3].$$

$$-\frac{5}{8} = \psi'(1,5) \le \psi'(x) \le \psi'(3) = \frac{8}{25},$$

A Lagrange-féle középértéktételt felhasználva

$$|\psi'(\xi)| \le \frac{5}{8} = q < 1 \quad \xi \in [1,5;\,3]$$

miatt φ kontrakció $[1,5\,;\,3]$-n. A fixponttétel mindkét feltétele teljesül, így a fixponttétel állításai alkalmazhatók a feladatra. A sorozat konvergenciarendje 2, mivel a Taylor-formula és $\psi'(x^*) = 0$ miatt $\exists\ \xi_k \in [y_k;\,x^*]$ vagy $[x^*;\,y_k]$ intervallumban, hogy

$$|y_{k+1} - x^*| = |\psi\left(y_k\right) - \psi\left(x^*\right)| = \frac{1}{2}|\psi''(\xi_k)| \cdot |y_k - x^*|^2.$$

Ezt felhasználva

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|y_{k+1} - x^*|}{|y_k - x^*|^2} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2}|\psi''(\xi_k)| = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2}|\psi''(x^*)| = c \neq 0.$$

e) Vegyük észre, hogy az $y_{k+1} = \frac{y_k^2+2}{2y_k-1}$ sorozat az $f(x) = 0$ egyenletre felírt Newton-módszer, így a Newton-módszer konvergenciatételei segítségével is bizonyítható az (y_k) sorozat konvergenciája.

19. Iterációs sorozatot úgy kapunk, hogy az egyenletet átrendezzük a vele ekvivalens $x = \varphi(x)$ alakra, majd vizsgáljuk az $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ sorozatot. Az (x_k) sorozatot a $\varphi(x) = x^3 - 1$, míg az (y_k) sorozatot a $\psi(x) = \frac{2x^3+1}{3x^2-1}$ függvénnyel kaptuk.

a) Az $f(x) = x^3 - x - 1 = 0$ egyenlet ekvivalens az $x = \varphi(x)$ és az $x = \psi(x)$ fixpont egyenlettel. Az $[1;2]$ intervallum jó, mert

$$\begin{aligned} f(1) &= 1^3 - 1 - 1 = -1 < 0 \\ f(2) &= 2^3 - 2 - 1 = 5 > 0 \end{aligned}$$

miatt az intervallum tartalmaz gyököt.

b) A $\varphi(x) = x^3 - 1$ -re elég megnéznünk a deriváltját az $[1;2]$ intervallumon.

$$3 \le |\varphi'(x)| = 3x^2 \le 12, \quad x \in [1;2]$$

Így a $\varphi(x) = 3x^2$ nem lehet kontrakció $[1;2]$-n. Másrészt

$$\begin{aligned} |x_{k+1} - x^*| &= |\varphi\left(x_k\right) - \varphi\left(x^*\right)| = |(x_k)^3 - (x^*)^3| = \\ &= |x_k - x^*| \cdot |(x_k)^2 + x_k x^* + (x^*)^2| = \\ &= |x_k - x^*| \cdot \left((x_k)^2 + x_k x^* + (x^*)^2\right) \ge \\ &\ge 3 \cdot |x_k - x^*| \ge 3^{k+1} \cdot |x_0 - x^*|, \end{aligned}$$

vagyis a hibasorozat végtelenhez tart, így a vizsgált sorozat divergens.

c) Vizsgáljuk a $\psi(x) = \frac{2x^3+1}{3x^2-1}$ függvény deriváltját.

$$\psi'(x) = \frac{6x(x^3 - x - 1)}{(3x^2 - 1)^2}$$

Vegyük észre, hogy a számlálóban az $f(x)$ függvény szerepel, így a $\psi'(x^*) = 0$. Másrészt $x \in [1\,;\, x^*]$ esetén $f(x) \leq 0$ és $\psi'(x) \leq 0$, ami ψ monoton csökkenését, míg $x \in [x^*;\, 2]$ esetén $f(x) \geq 0$ és $\psi'(x) \geq 0$, ami ψ monoton növekedését garantálja, azaz x^*-ban ψ-nek lokális minimuma van. Mivel $\psi(1) = \frac{3}{2}$, $\psi(x^*) = x^*$ és $\psi(2) = \frac{17}{11}$

$$\psi\left([1;2]\right) = [\psi(x^*)\,;\, \psi(2)] = [x^*;\, \frac{17}{11}] \subset [1;2].$$

Igazolnunk kell még, hogy ψ kontrakció az $[1;2]$ intervallumon. Mivel $x \in [1;2]$ esetén

$$\psi''(x) = 6 \cdot \frac{2x^3 + 9x^2 + 2x + 1}{(3x^2-1)^3} > 0,$$

így ψ' szigorúan monoton növő és

$$-\frac{3}{2} = \psi'(1) \leq \psi'(x) \leq \psi'(2) = \frac{60}{121}.$$

Látszik, hogy finomítanunk kell az intervallumot.

d) Nézzük az $[1,1\,;\, 2]$ intervallumot, ami szintén tartalmazza a gyököt és

$$\psi\left([1,1\,;\, 2]\right) = [\psi(x^*); \psi(1,1)] = [x^*;\, 1,5922] \subset [1,1;\, 2].$$

$$-0,7338 \approx \psi'(1,1) \leq \psi'(x) \leq \psi'(2) = \frac{60}{121},$$

A Lagrange-féle középértéktételt felhasználva

$$|\psi'(\xi)| \leq 0,7338 = q < 1 \quad \xi \in [1,1;\, 2]$$

miatt φ kontrakció $[1,1\,;\, 2]$-n. A fixponttétel mindkét feltétele teljesül, így a fixponttétel állításai alkalmazhatók a feladatra. A sorozat konvergenciarendje 2, mivel a Taylor-formula és $\psi'(x^*) = 0$ miatt $\exists\ \xi_k \in [y_k;\, x^*]$ vagy $[x^*;\, y_k]$ intervallumban, hogy

$$|y_{k+1} - x^*| = |\psi\left(y_k\right) - \psi\left(x^*\right)| = \frac{1}{2} \cdot |\psi''(\xi_k)| \cdot |y_k - x^*|^2.$$

Ezt felhasználva

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|y_{k+1} - x^*|}{|y_k - x^*|^2} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2}|\psi''(\xi_k)| = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2}|\psi''(x^*)| = c \neq 0.$$

e) Vegyük észre, hogy az $y_{k+1} = \frac{2y_k^3+1}{3y_k^2-1}$ sorozat az $f(x) = 0$ egyenletre felírt Newton-módszer, így a Newton-módszer konvergenciatételei segítségével is bizonyítható az (y_k) sorozat konvergenciája.

20. Iterációs sorozatot úgy kapunk, hogy az egyenletet átrendezzük $x = \varphi(x)$ alakra, majd felírjuk és vizsgáljuk az $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ sorozatot. Egy kézenfekvő választás a $\varphi(x) = \frac{1}{3}\left(\sin(x) + 1\right)$, így a sorozat

$$x_{k+1} = \frac{1}{3}\left(\sin(x_k) + 1\right).$$

a) Az eredeti egyenlet ekvivalens az $f(x) = 3x - \sin(x) - 1 = 0$ egyenlettel. Bolzano tétellel keressünk egy intervallumot, mely tartalmazza a gyököt. A $[-\frac{\pi}{2}\,;\, \frac{\pi}{2}]$ intervallum jó választás, mert

$$f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{3\pi}{2} + 1 - 1 =< 0$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{3\pi}{2} - 1 - 1 > 0$$

b) A $\varphi(x) = \frac{1}{3}(\sin(x)+1)$ függvény a $[-\frac{\pi}{2};\, \frac{\pi}{2}]$ intervallumon monoton növő függvény (könnyen bizonyítható a deriváltja segítségével) és

$$\phi\left(\left[-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right]\right) = \left[\varphi(-\frac{\pi}{2})\,;\,\varphi(\frac{\pi}{2})\right] = \left[0\,;\,\frac{2}{3}\right] \subset \left[-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right].$$

Igazolnunk kell még, hogy φ kontrakció az $[-\frac{\pi}{2};\, \frac{\pi}{2}]$ intervallumon. A Lagrange-féle középértéktételt felhasználva

$$|\varphi'(\xi)| = \frac{1}{3}\cdot|\cos(x)| \le \frac{1}{3} = q, \quad \xi \in \left[-\frac{\pi}{2};\, \frac{\pi}{2}\right]$$

miatt φ kontrakció $[-\frac{\pi}{2};\, \frac{\pi}{2}]$-n. A fixponttétel mindkét feltétele teljesül, így a tétel állításai alkalmazhatók a feladatra.

21. Belátjuk, hogy a $x_{k+1} = x_k \cdot \frac{x_k^2+3A}{3x_k^2+A}$ sorozat alulról korlátos és monoton fogyó, ebből következik a konvergenciája.

a) Teljes indukcióval bebizonyítjuk, hogy $\sqrt{A} \le x_k$, $\forall k \in \mathbb{N}$ -re.

$\sqrt{A} \le x_0$ a feladat feltételéből következik.

Tegyük fel, hogy $\sqrt{A} \le x_k$ teljesül, igazoljuk $k+1$-re az állítást. Mivel

$$\begin{aligned} 0 &\le (x_k - \sqrt{A})^3 \\ 3\sqrt{A}(x_k)^2 + A\sqrt{A} &\le (x_k)^3 + 3Ax_k \\ \sqrt{A} &\le \frac{(x_k)^3 + 3Ax_k}{3(x_k)^2 + A} = x_{k+1}, \end{aligned}$$

ezért a sorozat alulról korlátos.

b) Belátjuk, hogy a korlátosságból következik a monotonitás.

$$\begin{aligned} x_{k+1} = \frac{(x_k)^3 + 3Ax_k}{3(x_k)^2 + A} &\le x_k \\ (x_k)^3 + 3Ax_k &\le 3(x_k)^3 + Ax_k \\ 2Ax_k &\le 2(x_k)^3 \\ \sqrt{A} &\le x_k \end{aligned}$$

Tehát a sorozat monoton fogyó, így konvergens, jelöljük a határértékét x^*-gal.

$$x^* = \lim_{k\to\infty}(x_{k+1}) = \lim_{k\to\infty}\frac{(x_k)^3 + 3Ax_k}{3(x_k)^2 + A} = \frac{(x^*)^3 + 3Ax^*}{3(x^*)^2 + A}$$

A kapott egyenletet megoldva $x^* = \sqrt{A}$-t kapunk.

c) A hibabecsléshez felhasználjuk a következő átalakítást

$$\begin{aligned} x_{k+1} - \sqrt{A} = \varphi(x_k) - \varphi(\sqrt{A}) &= \frac{(x_k)^3 + 3Ax_k}{3x_k^2 + A} - \sqrt{A} = \\ &= \frac{(x_k)^3 + 3Ax_k - 3\sqrt{A}x_k^2 + A\sqrt{A}}{3x_k^2 + A} = \\ &= \frac{(x_k - \sqrt{A})^3}{3x_k^2 + A}. \end{aligned}$$

Ezt felhasználva a harmadrendű konvergencia bizonyítható.

$$\lim_{k\to\infty}\frac{|x_{k+1} - \sqrt{A}|}{|x_k - \sqrt{A}|^3} = \lim_{k\to\infty} = \frac{1}{3x_k^2 + A} = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{3(x^*)^2 + A} = \frac{1}{4A} \ne 0$$

A hibabecsléshez a fenti átalakítást és a sorozat alsó korlátját felhasználva kapjuk, hogy

$$|x_{k+1} - \sqrt{A}| = \frac{(x_k - \sqrt{A})^3}{3x_k^2 + A} \leq \frac{1}{4A} \cdot (x_k - \sqrt{A})^3.$$

9.2.4. Newton-módszer

22. A feladatot a Newton-módszer globális és lokális konvergenciatételének alkalmazásával is megoldjuk. A Newton-módszer által generált sorozat

$$x_{k+1} = x_k - \frac{e^{2x_k} + 4x_k}{2e^{2x_k} + 4}.$$

a) A Bolzano tétellel keressünk intervallumot, mely tartalmazza az $f(x) = e^{2x} + 4x = 0$ egyenlet gyökét. A $[-1; 0]$ intervallum jó választás, mert

$$f(-1) = e^{-2} - 4 < 0$$
$$f(0) = 1 > 0.$$

b) Nézzük a Newton-módszer globális konvergenciatételének további feltételeit.
A $[-1; 0]$ intervallumon

$$f'(x) = 2e^{2x} + 4 > 0$$
$$f''(x) = 4e^{2x} > 0,$$

továbbá f monoton növekedése miatt

$$f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0 \Leftrightarrow f(x_0) > 0 \Leftrightarrow x_0 > x^*.$$

Tehát $x_0 > x^*$ esetén a Newton-módszer által generált (x_k) sorozat monoton fogyóan konvergál a gyökhöz. Ez a konvergenciatétel csak a monoton konvergenciát bizonyítja.

c) Nézzük a Newton-módszer lokális konvergenciatételét, annak további feltételeit.
A $[-1; 0]$ intervallumon

$$f'(x) = 2e^{2x} + 4 > 0$$
$$|f'(x)| = 2e^{2x} + 4 \geq 4 = m_1$$
$$|f''(x)| = 4e^{2x} \leq 36 = M_2.$$

Ekkor $M = \frac{M_2}{2m_1} = \frac{9}{2}$, így minden x_0 kezdőérték esetén, melyre

$$|x_0 - x^*| < r = \min\left\{\frac{1}{M}, |x^* + 1|, |x^* - 0|\right\} = \frac{2}{9},$$

a Newton-módszer által generált (x_k) sorozat másodrendben konvergál a gyökhöz és hibabecslése

$$|x_{k+1} - x^*| \leq \frac{9}{2} \cdot |x_k - x^*|^2.$$

23. A feladatot a Newton-módszer globális és lokális konvergenciatételének alkalmazásával is megoldjuk. A Newton-módszer által generált sorozat

$$x_{k+1} = x_k - \frac{\cos(x_k) - 4x_k + 2}{-\sin(x_k) - 4}.$$

a) A Bolzano tétellel keressünk intervallumot, mely tartalmazza az $f(x) = \cos(x) - 4x + 2 = 0$ egyenlet gyökét. A $[0; \frac{\pi}{2}]$ intervallum jó választás, mert

$$\begin{aligned} f(0) &= 1 + 2 = 3 > 0 \\ f\left(\frac{\pi}{2}\right) &= -2\pi + 2 < 0. \end{aligned}$$

b) Nézzük a Newton-módszer globális konvergenciatételének további feltételeit. A $[0; \frac{\pi}{2}]$ intervallumon

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\sin(x) - 4 < 0 \\ f''(x) &= -\cos(x) < 0, \end{aligned}$$

továbbá f monoton fogyása miatt

$$f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0 \Leftrightarrow f(x_0) < 0 \Leftrightarrow x_0 > x^*.$$

Tehát $x_0 > x^*$ esetén a Newton-módszer által generált (x_k) sorozat monoton fogyóan konvergál a gyökhöz. Ez a konvergenciatétel a monoton konvergenciát bizonyítja.

c) Nézzük a Newton-módszer lokális konvergenciatételét, annak további feltételeit. A $[0; \frac{\pi}{2}]$ intervallumon

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\sin(x) - 4 < 0 \\ |f'(x)| &= \sin(x) + 4 \geq 4 = m_1 \\ |f''(x)| &= \cos(x) \leq 1 = M_2. \end{aligned}$$

Ekkor $M = \frac{M_2}{2m_1} = \frac{1}{8}$, így minden x_0 kezdőérték esetén, melyre

$$|x_0 - x^*| < r = \min\left\{\frac{1}{M}, |x^* - \frac{\pi}{2}|, |x^* - 0|\right\} = |x^* - 0|,$$

a Newton-módszer által generált (x_k) sorozat másodrendben konvergál a gyökhöz és hibabecslése

$$|x_{k+1} - x^*| \leq \frac{1}{8} \cdot |x_k - x^*|^2.$$

24. A feladatot a Newton-módszer globális és lokális konvergenciatételének alkalmazásával is megoldjuk. A Newton-módszer által generált sorozat

$$x_{k+1} = x_k - \frac{\sin(x_k) - 2x_k + 1}{\cos(x_k) - 2}.$$

a) A Bolzano tétellel keressünk intervallumot, mely tartalmazza az $f(x) = \sin(x) - 2x + 1 = 0$ egyenlet gyökét. A $[0; \frac{\pi}{2}]$ intervallum jó választás, mert

$$\begin{aligned} f(0) &= 1 > 0 \\ f\left(\frac{\pi}{2}\right) &= 1 - \pi + 1 = 2 - \pi < 0. \end{aligned}$$

b) Nézzük a Newton-módszer globális konvergenciatételének további feltételeit.
A $[0; \frac{\pi}{2}]$ intervallumon

$$f'(x) = \cos(x) - 2 < 0$$
$$f''(x) = -\sin(x) < 0,$$

továbbá f monoton fogyása miatt

$$f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0 \Leftrightarrow f(x_0) < 0 \Leftrightarrow x_0 > x^*.$$

Tehát $x_0 > x^*$ esetén a Newton-módszer által generált (x_k) sorozat monoton fogyóan konvergál a gyökhöz. Ez a konvergenciatétel csak a monoton konvergenciát bizonyítja.

c) Nézzük a Newton-módszer lokális konvergenciatételét, annak további feltételeit.
A $[0; \frac{\pi}{2}]$ intervallumon

$$f'(x) = \cos(x) - 2 < 0$$
$$|f'(x)| = -\cos(x) + 2 \geq 1 = m_1$$
$$|f''(x)| = \sin(x) \leq 1 = M_2.$$

Ekkor $M = \frac{M_2}{2m_1} = \frac{1}{2}$, így minden x_0 kezdőérték esetén, melyre

$$|x_0 - x^*| < r = \min\left\{\frac{1}{M}, |x^* - \frac{\pi}{2}|, |x^* - 0|\right\} = |x^* - \frac{\pi}{2}|,$$

a Newton-módszer által generált (x_k) sorozat másodrendben konvergál a gyökhöz és hibabecslése

$$|x_{k+1} - x^*| \leq \frac{1}{2} \cdot |x_k - x^*|^2.$$

25. A feladatot a Newton-módszer globális és lokális konvergenciatételének alkalmazásával is megoldjuk. A Newton-módszer által generált sorozat

$$x_{k+1} = x_k - \frac{e^{x_k} - \frac{1}{4}x_k - 2}{e^{x_k} - \frac{1}{4}}.$$

a) A Bolzano tétellel keressünk intervallumot, mely tartalmazza az $f(x) = e^x - \frac{1}{4}x - 2 = 0$ egyenlet gyökét. A $[0; 1]$ intervallum jó választás, mert

$$f(0) = 1 - 2 = -1 < 0$$
$$f(1) = e - \frac{1}{4} - 2 = e - \frac{9}{4} > 0.$$

b) Nézzük a Newton-módszer globális konvergenciatételének további feltételeit.
A $[0; 1]$ intervallumon

$$f'(x) = e^x - \frac{1}{4} > 0$$
$$f''(x) = e^x > 0,$$

továbbá f monoton növekedése miatt

$$f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0 \Leftrightarrow f(x_0) > 0 \Leftrightarrow x_0 > x^*.$$

Tehát $x_0 > x^*$ esetén a Newton-módszer által generált (x_k) sorozat monoton fogyóan konvergál a gyökhöz. Ez a konvergenciatétel csak a monoton konvergenciát bizonyítja.

c) Nézzük a Newton-módszer lokális konvergenciatételét, annak további feltételeit.
A $[0;1]$ intervallumon

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^x - \frac{1}{4} > 0 \\ |f'(x)| &= e^x - \frac{1}{4} \geq \frac{3}{4} = m_1 \\ |f''(x)| &= e^x \leq 3 = M_2. \end{aligned}$$

Ekkor $M = \frac{M_2}{2m_1} = 2$, így minden x_0 kezdőérték esetén, melyre

$$|x_0 - x^*| < r = \min\left\{\frac{1}{M}, |x^* - 1|, |x^* - 0|\right\} = |x^* - 1|,$$

a Newton-módszer által generált (x_k) sorozat másodrendben konvergál a gyökhöz és hibabecslése

$$|x_{k+1} - x^*| \leq 2 \cdot |x_k - x^*|^2.$$

26. A Newton-módszer által generált sorozat

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k - \frac{\frac{1}{3}x_k^2 - x_k - 1}{\frac{2}{3}x_k - 1} = x_k - \frac{x_k^2 - 3x_k - 3}{2x_k - 3} = \\ &= \frac{2(x_k)^2 - 3x_k - x_k^2 + 3x_k + 3}{2x_k - 3} = \frac{x_k^2 + 3}{2x_k - 3}. \end{aligned}$$

A $\varphi(x) = \frac{x^2+3}{2x-3}$ függvénnyel kapjuk a fenti $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ sorozatot.

a) A Bolzano tétel segítségével olyan intervallumot keresünk, mely tartalmaz gyököt.
A $[-1;0]$ intervallum jó, mert

$$\begin{aligned} f(-1) &= \frac{1}{3}(-1)^2 + 1 - 1 = \frac{1}{3} > 0 \\ f(0) &= -1 < 0 \end{aligned}$$

miatt az intervallum tartalmaz gyököt.

b) Vizsgáljuk a $\varphi(x) = \frac{x^2+3}{2x-3}$ függvény deriváltját.

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= \frac{2x(2x-3) - 2(x^2+3)}{(2x-3)^2} = \frac{2x^2 - 6x - 6}{2x-3)^2} = \\ &= 6\frac{f(x)}{(2x-3)^2} \end{aligned}$$

Mivel a számlálóban az $f(x)$ függvény szerepel, így a $\varphi'(x^*) = 0$. Másrészt $x \in [-1;\, x^*]$ esetén $f(x) > 0$, ezért f szigorúan monoton növő, $x \in [x^*;\, 0]$ esetén $f(x) < 0$, ezért f szigorúan monoton fogyó, ezért φ-nek lokális maximuma van x^*-ban. Mivel $\varphi(-1) = -\frac{4}{5}$, $\varphi(x^*) = x^*$ és $\varphi(0) = -1$,

$$\varphi([-1;0]) = [\varphi(0); \varphi(x^*)] = [-1; x^*] \subset [-1;0].$$

Igazolnunk kell még, hogy φ kontrakció az $[-1;0]$ intervallumon.

$$\varphi''(x) = 2\frac{(4x-6)(2x-3) - 4(2x^2 - 6x - 6)}{(2x-3)^3} = \frac{42}{(2x-3)^3} < 0,$$

így φ' szigorúan monoton fogyó és

$$-\frac{2}{3} = \varphi'(0) \le \varphi'(x) \le \varphi'(-1) = \frac{2}{25}.$$

A Lagrange-féle középértéktételt felhasználva

$$|\varphi'(\xi)| \le \frac{2}{3} = q < 1 \quad \xi \in [-1; 0]$$

miatt φ kontrakció $[-1; 0]$-n. A fixponttétel mindkét feltétele teljesül, így a fixponttétel állításai alkalmazhatók a feladatra.

c) A sorozat konvergenciarendje 2, mivel a Taylor-formula és $\varphi'(x^*) = 0$ miatt $\exists\ \xi_k \in [x_k;\, x^*]$ vagy $[x^*;\, x_k]$ intervallumban, hogy

$$|x_{k+1} - x^*| = |\varphi(x_k) - \varphi(x^*)| = \frac{1}{2} \cdot |\varphi''(\xi_k)| \cdot |x_k - x^*|^2.$$

Ezt felhasználva

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty} \frac{|x_{k+1} - x^*|}{|x_k - x^*|^2} &= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2}|\varphi''(\xi_k)| = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2}|\varphi''(x^*)| = \\ &= \frac{21}{|2x^* - 3|^3} = c \ne 0.\end{aligned}$$

Analóg módon a $[2; 4]$ intervallumra is elvégezhetjük a vizsgálatot.

27. A feladatot a Newton-módszer globális és lokális konvergenciatételének alkalmazásával is megoldjuk. A Newton-módszer által generált sorozat

$$x_{k+1} = x_k - \frac{(x_k)^2 - 2\sqrt{x_k} - 2}{2x_k - \frac{1}{\sqrt{x_k}}}.$$

a) A Bolzano tétellel keressünk intervallumot, mely tartalmazza az $f(x) = x^2 - 2\sqrt{(}x) - 2 = 0$ egyenlet gyökét. Az $[1; 3]$ intervallum jó választás, mert

$$\begin{aligned}f(1) &= 1 - 2 - 2 = -3 < 0 \\ f(3) &= 9 - 2\sqrt{3} - 2 > 0.\end{aligned}$$

b) Nézzük a Newton-módszer globális konvergenciatételének további feltételeit.
Az $[1; 3]$ intervallumon

$$\begin{aligned}f'(x) &= 2x - \frac{1}{\sqrt{x}} > 0 \\ f''(x) &= 2 + \frac{1}{2\sqrt{x^3}} > 0,\end{aligned}$$

továbbá f szigorúan monoton növekedése miatt

$$f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0 \Leftrightarrow f(x_0) > 0 \Leftrightarrow x_0 > x^*.$$

Tehát $x_0 > x^*$ esetén a Newton-módszer által generált (x_k) sorozat monoton fogyóan konvergál a gyökhöz. Ez a konvergenciatétel csak a monoton konvergenciát bizonyítja.

c) Nézzük a Newton-módszer lokális konvergenciatételét, annak további feltételeit. Az $[1;3]$ intervallumon $f''>0$ miatt f' szigorúan monoton nő

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x - \frac{1}{\sqrt{x}} > 0 \\ |f'(x)| &= 2x - \frac{1}{\sqrt{x}} \geq |f'(1)| = 1 = m_1 \\ |f''(x)| &= 2 + \frac{1}{2\sqrt{x^3}} \leq |f''(1)| = \frac{5}{2} = M_2. \end{aligned}$$

Ekkor $M = \frac{M_2}{2m_1} = \frac{5}{4}$, így minden x_0 kezdőérték esetén, melyre

$$|x_0 - x^*| < r = \min\left\{\frac{1}{M}, |x^*-1|, |x^*-3|\right\} = |x^*-3|,$$

a Newton-módszer által generált (x_k) sorozat másodrendben konvergál a gyökhöz és hibabecslése

$$|x_{k+1} - x^*| \leq \frac{5}{4} \cdot |x_k - x^*|^2.$$

28. Először nézzük az $f(x) = \frac{-x}{1+x}$ függvény deriváltját

$$f'(x) = \frac{-(1+x)-(-x)}{(1+x)^2} = \frac{-1-x+x}{(1+x)^2} = \frac{-1}{(1+x)^2}.$$

A Newton-módszer által generált sorozat

$$x_{k+1} = x_k - \frac{\frac{-x_k}{1+x_k}}{\frac{-1}{(1+x_k)^2}} = -(x_k)^2.$$

A feladatot a Newton-módszer globális konvergenciatételének alkalmazásával oldjuk meg.

a) A Bolzano tétellel keressünk intervallumot, mely tartalmazza a gyököt, azaz 0-t. Minden $[a;b]$ intervallum jó választás, ahol $-1 < a < 0$ és $0 < b < 1$, ugyanis

$$\begin{aligned} f(a) &= \frac{-a}{1+a} > 0 \\ f(b) &= \frac{-b}{1+b} < 0. \end{aligned}$$

b) Nézzük a Newton-módszer globális konvergenciatételének további feltételeit. Az $[1;3]$ intervallumon

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-1}{(1+x)^2} < 0 \\ f''(x) &= \frac{2}{(1+x)^3} > 0, \end{aligned}$$

továbbá f szigorúan monoton fogyása miatt

$$f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0 \Leftrightarrow f(x_0) > 0 \Leftrightarrow x_0 < 0.$$

Tehát $x_0 < 0$ esetén a Newton-módszer által generált (x_k) sorozat monoton növekedően konvergál a gyökhöz. Ha $0 < x_0 < b$ kezdőértékből indulunk, akkor $x_1 = -(x_2)^2 < 0$ és innen már monoton növekedően konvergál a módszer. Tehát az $[a; b]$ intervallum bármely pontjából indítva a rekurziót, konvergens sorozatot kapunk.

c) Az előző konvergenciatétel csak a monoton konvergenciát bizonyítja, azonban a másodrendű kovergencia a sorozat képletéből könnyen adódik. A hibabecslés

$$x_{k+1} - 0 = -(x_k - 0)^2$$

$$|x_{k+1} - 0| = |x_k - 0|^2,$$

és a másodrendű konvergencia bizonyítása

$$\lim_{k \to \infty} \frac{|x_{k+1} - x^*|}{|x_k - x^*|^2} = 1 \neq 0.$$

Vissza a tartalomhoz

10. fejezet

Approximációs feladatok

10.1. Feladatok

10.1.1. Általánosított inverz

1. Határozzuk meg az alábbi mátrixokra az $\mathbf{A}^+$ és $\mathbf{B}^+$ általánosított inverzet!
Mit jelent az $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ illetve az $\mathbf{B} \cdot \mathbf{y} = d \in \mathbb{R}$ lineáris egyenletrendszer megoldása?

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times 1}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{1\times n}$$

2. Készítsük el a következő mátrixok általánosított inverzét!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Határozzuk meg a következő mátrixok általánosított inverzét!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

4. Határozzuk meg a következő mátrix általánosított inverzét!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

5. Határozzuk meg a következő mátrix általánosított inverzét!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

10.1.2. Diszkrét legkisebb négyzetek módszere

6. Határozzuk meg a $(0; 1)$, $(1; 3)$, $(2; 4)$, $(3; 6)$ pontokat négyzetesen legjobban közelítő egyenest!

7. Írjuk fel a megadott $(x_i; y_i)$ pontokat négyzetesen legjobban közelítő egyenest!

x_i	-2	-1	0	1	2
y_i	-4	-2	1	2	4

8. Írjuk fel a megadott $(x_i; y_i)$ pontokat négyzetesen legjobban közelítő egyenest!

x_i	-3	-2	0	1	4
y_i	-3	-2	1	2	5

9. Írjuk fel a megadott $(x_i; y_i)$ pontokat négyzetesen legjobban közelítő egyenest és parabolát!

x_i	-2	-1	1	2
y_i	3	1	0	2

10. Igazoljuk, hogy a megadott $(x_i\,; y_i)$ pontokra felírt négyzetesen legjobban közelítő egyenes átmegy a $(0\,; 0)$-n!

x_i	-4	-1	0	2	3
y_i	-4	-2	-1	3	4

11. Igazoljuk, hogy az $(x_i\,; y_i)$, $(i = 1, \ldots, N)$ pontokat négyzetesen legjobban közelítő egyenes átmegy a $\left(\frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N}\,;\,\frac{\sum_{i=1}^N y_i}{N}\right)$ ponton!

10.1.3. Hilbert-térbeli közelítés

12. Adjuk meg a $P(2; 1; 0)$ pont távolságát a $\mathbf{v} = (1; 1; 1)^T$ irányvektorú origón átmenő egyenestől és a pont egyenesre vonatkozó merőleges vetületét a Hilbert térbeli elmélet alkalmazásával!

13. Adjuk meg a $P(1; 1; 0)$ pont távolságát a $\mathbf{v} = (0; 1; 1)^T$ irányvektorú origón átmenő egyenestől és a pont egyenesre vonatkozó merőleges vetületét a Hilbert térbeli elmélet alkalmazásával!

14. Adjuk meg a $P(1; -1; -1)$ pontnak a $\mathbf{v} = (1; 1; 1)^T$ irányvektorú origón átmenő egyenesre vonatkozó tükörképét a Hilbert térbeli elmélet alkalmazásával!

15. Adjuk meg a $P(1; 0; 0)$ pont távolságát az $z = 2x+y$ síktól és a pont síkra vonatkozó merőleges vetületét a Hilbert térbeli elmélet alkalmazásával!

16. Adjuk meg a $P(1; -2; 1)$ pontnak az $x-y+z = 0$ síkra vonatkozó tükörképét a Hilbert térbeli elmélet alkalmazásával!

17. Adjuk meg a $P(1; -1; -1)$ pont távolságát az $x + y + z = 1$ síktól és a pont síkra vonatkozó merőleges vetületét a Hilbert térbeli elmélet alkalmazásával! Vigyázat, a sík nem altér!

18. Milyen $a, b \in \mathbb{R}$ -re lesz az

$$\int_0^1 (x^2 + ax + b)^2 \sqrt{x}\, dx$$

integrál értéke minimális? A Hilbert térbeli elmélet alkalmazásával oldjuk meg a feladatot. A minimum értékét nem kell kiszámolni.

19. Milyen $a, b \in \mathbb{R}$ -re lesz az
$$\int_0^1 (x^2 + ax + b)^2 \, x^2 \, dx$$
integrál értéke minimális? A Hilbert térbeli elmélet alkalmazásával oldjuk meg a feladatot. A minimum értékét nem kell kiszámolni.

10.1.4. Ortogonális polinomok

20. Milyen $a, b, c \in \mathbb{R}$ -re lesz az
$$\int_{-1}^1 (x^3 + ax^2 + bx + c)^2 \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \, dx$$
integrál értéke minimális? A minimum értékét nem kell kiszámolni.

21. Milyen $a \in \mathbb{R}$ -re lesz az
$$\int_{-1}^1 \frac{(2x^3 - ax)^2}{\sqrt{1 - x^2}} \, dx$$
integrál értéke minimális? A minimum értékét nem kell kiszámolni.

22. Milyen $a, b \in \mathbb{R}$ -re lesz az
$$\int_{-1}^1 (x^2 + ax + b)^2 \, dx$$
integrál értéke minimális? A minimum értékét nem kell kiszámolni.

23. Milyen $a, b \in \mathbb{R}$ -re lesz az
$$\int_0^1 (x^2 + ax + b)^2 \, dx$$
integrál értéke minimális? A minimum értékét nem kell kiszámolni.

24. Milyen $a, b \in \mathbb{R}$ -re lesz az
$$\int_0^1 (x^2 + ax + b)^2 \sqrt{x} \, dx$$
integrál értéke minimális? Az ortogonális polinomok segítségével oldjuk meg a feladatot. A minimum értékét nem kell kiszámolni.

25. Milyen $a, b \in \mathbb{R}$ -re lesz az
$$\int_{-1}^1 (x^2 + ax + b)^2 x^2 \, dx$$
integrál értéke minimális? Az ortogonális polinomok segítségével oldjuk meg a feladatot. A minimum értékét nem kell kiszámolni.

10.1.5. Egyenletesen legjobb közelítés

26. Legyen $f \in C[a; b]$ függvény. Adjuk meg az f függvényt az $[a; b]$ intervallumon egyenletesen legjobban közelítő konstanst és a közelítés hibáját!

27. Határozzuk meg az $f(x) = (x + 1)^2, \;\; x \in [0; 1]$ függvényt egyenletesen legjobban közelítő nulladfokú és elsőfokú polinomot, valamint a közelítések hibáját!

28. Adjuk meg az $f(x) = \frac{1}{1+x^2}, \;\; x \in [-1; 1]$ függvényt egyenletesen legjobban közelítő elsőfokú polinomot és a közelítés hibáját!

29. Adjuk meg az $f(x) = e^x,\ \ x \in [0;1]$ függvényt egyenletesen legjobban közelítő elsőfokú polinomot és a közelítés hibáját!

30. Adjuk meg az $f(x) = x^2+2x,\ \ x \in [-1;1]$ függvényt egyenletesen legjobban közelítő legfeljebb elsőfokú polinomot! Mekkora a közelítés hibája?

31. Adjuk meg az $f(x) = x^3 + x + 1,\ \ x \in [-1;1]$ függvényt egyenletesen legjobban közelítő elsőfokú illetve másodfokú polinomot! Mekkora a közelítések hibája?

32. Adjuk meg az $f(x) = x^4 + x^2 + 1,\ \ x \in [-1;1]$ függvényt egyenletesen legjobban közelítő legfeljebb másodfokú polinomot! Mekkora a közelítés hibája?

33. Adjuk meg az $f(x) = x^3,\ \ x \in [0;1]$ függvényt egyenletesen legjobban közelítő legfeljebb másodfokú polinomot! Mekkora a közelítés hibája?

34. Az $f(x) = |x|,\ \ x \in [-1;1]$ függvényt egyenletesen legjobban közelítő egyenes meghatározásához írjuk fel a Remez-algoritmus egy lépését a $\{-1, 0, 1\}$ pontokból kiindulva.

35. Az $f(x) = (2x-1)^2,\ \ x \in [-1;1]$ függvényt egyenletesen legjobban közelítő egyenes meghatározásához írjuk fel a Remez-algoritmus egy lépését a $\{-1, 0, 1\}$ pontokból kiindulva.

36. Az $f(x) = x^2,\ \ x \in [0;1]$ függvényt egyenletesen legjobban közelítő egyenes meghatározásához írjuk fel a Remez-algoritmus egy lépését a $\{0, \frac{1}{3}, 1\}$ pontokból kiindulva.

37. Az $f(x) = \frac{1}{1+x},\ \ x \in [0;2]$ függvényt egyenletesen legjobban közelítő egyenes meghatározásához írjuk fel a Remez-algoritmus két lépését a $\{0, 1, 2\}$ pontokból kiindulva.

10.2. Megoldások

10.2.1. Általánosított inverz

1. **a)** Az $\mathbf{A}$ mátrix túlhatározott és teljes rangú, $rang(\mathbf{A}) = 1$. Ekkor az általánosított inverz a következő képlettel számolható.

$$\mathbf{A}^+ = (\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{A}^T = (m)^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{m} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Az $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ lineáris egyenletrendszer általánosított megoldása

$$\mathbf{x}^+ = \mathbf{A}^+ \cdot \mathbf{b} = \frac{1}{m} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{b} = \frac{\sum_{i=1}^m b_i}{m},$$

vagyis a b_i értékek átlaga.

b) Az $\mathbf{B}$ mátrix alulhatározott és teljes rangú, $rang(\mathbf{B}) = 1$. Ekkor az általánosított inverz a következő képlettel számolható.

$$\mathbf{B}^+ = \mathbf{B}^T \cdot (\mathbf{B}\mathbf{B}^T)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \cdot (n)^{-1} = \frac{1}{n} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

Az $\mathbf{B} \cdot \mathbf{y} = d \in \mathbb{R}$ lineáris egyenletrendszer általánosított megoldása

$$\mathbf{y}^+ = \mathbf{B}^+ \cdot d = \frac{1}{n} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \cdot d = \frac{d}{n} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Az $\mathbf{y}^+$ általánosított megoldás a

$$\|\mathbf{B}\mathbf{y} - d\|_2 = \sum_{i=1}^{n}(y_i - d)^2$$

kifejezést minimalizálja.

2. **a)** Az $\mathbf{A}$ mátrix túlhatározott és teljes rangú, $rang(\mathbf{A}) = 2$. Ekkor az általánosított inverz a következő képlettel számolható.

$$\mathbf{A}^+ = (\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

b) Az $\mathbf{B}$ mátrix alulhatározott és teljes rangú, $rang(\mathbf{B}) = 1$. Ekkor az általánosított inverz a következő képlettel számolható.

$$\mathbf{B}^+ = \mathbf{B}^T \cdot (\mathbf{B}\mathbf{B}^T)^{-1} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot (3)^{-1} = \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

3. **a)** Az $\mathbf{A}$ mátrix túlhatározott és teljes rangú, $rang(\mathbf{A}) = 2$. Ekkor az általánosított inverz a következő képlettel számolható.

$$\mathbf{A}^+ = (\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

b) Az $\mathbf{B}$ mátrix alulhatározott és teljes rangú, $rang(\mathbf{B}) = 2$. Ekkor az általánosított inverz a következő képlettel számolható.

$$\mathbf{B}^+ = \mathbf{B}^T \cdot (\mathbf{B}\mathbf{B}^T)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Látjuk, hogy épp az $\mathbf{A}^+$ transzponáltját kaptuk. Ez nem véletlen, hiszen $\mathbf{B} = \mathbf{A}^T$, így

$$\mathbf{B}^+ = \mathbf{B}^T \cdot (\mathbf{B}\mathbf{B}^T)^{-1} = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{A}^\mathbf{T}\mathbf{A})^{-1} = ((\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{A}^T)^T = (\mathbf{A}^+)^T.$$

4. Az $\mathbf{A}$ mátrix alulhatározott és teljes rangú, $rang(\mathbf{A}) = 2$. Ekkor az általánosított inverz a következő képlettel számolható.

$$\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^T \cdot (\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

5. Az $\mathbf{A}$ mátrix alulhatározott és teljes rangú, $rang(\mathbf{A}) = 3$. Ekkor az általánosított inverz a következő képlettel számolható.

$$\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^T \cdot (\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{4} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

10.2.2. Diszkrét legkisebb négyzetek módszere

6. Írjuk fel a lineáris egyenletrendszert, mellyel meghatározhatjuk az $(x_i; y_i)$, $i = 1, \ldots, N$ pontokat négyzetesen legjobban közelítő egyenes együtthatóit.

$$\begin{bmatrix} N & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \end{bmatrix}$$

Mivel a kitűzött feladatban $N = 4$, $\sum x_i = 6$, $\sum x_i^2 = 14$, $\sum y_i = 14$ és $\sum x_i y_i = 29$, ezért a lineáris egyenletrendszer a következő.

$$\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 14 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 29 \end{bmatrix}$$

Az 1. egyenlet $\frac{3}{2}$ -szeresét vonjuk ki a 2. egyenletből, így a 2. egyenlet

$$5p_1 = 8 \quad \to \quad p_1 = \frac{8}{5}.$$

Az 1. egyenletből

$$4p_0 = 14 - 6 \cdot \frac{8}{5} = \frac{70 - 48}{5} = \frac{22}{5}.$$

A keresett egyenes

$$P_1(x) = \frac{8}{5}\, x + \frac{22}{5}.$$

7. Írjuk fel a lineáris egyenletrendszert, mellyel meghatározhatjuk az $(x_i; y_i)$, $i = 1, \ldots, N$ pontokat négyzetesen legjobban közelítő egyenes együtthatóit.

$$\begin{bmatrix} N & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \end{bmatrix}$$

Mivel a kitűzött feladatban $N = 5$, $\sum x_i = 0$, $\sum x_i^2 = 10$, $\sum y_i = 1$ és $\sum x_i y_i = 20$, ezért a lineáris egyenletrendszer a következő.

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 20 \end{bmatrix}$$

A diagonális elemekkel végig osztunk, így

$$p_0 = \frac{1}{5}, \quad p_1 = 2.$$

A keresett egyenes
$$P_1(x) = 2x + \frac{1}{5}.$$

8. Írjuk fel a lineáris egyenletrendszert, mellyel meghatározhatjuk az $(x_i; y_i)$, $i = 1, \ldots, N$ pontokat négyzetesen legjobban közelítő egyenes együtthatóit.
$$\begin{bmatrix} N & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \end{bmatrix}$$
Mivel a kitűzött feladatban $N = 5$, $\sum x_i = 0$, $\sum x_i^2 = 30$, $\sum y_i = 3$ és $\sum x_i y_i = 35$, ezért a lineáris egyenletrendszer a következő.
$$\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 30 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 35 \end{bmatrix}$$
A diagonális elemekkel végig osztunk, így
$$p_0 = \frac{3}{5}, \quad p_1 = \frac{7}{6}.$$
A keresett egyenes
$$P_1(x) = \frac{7}{6}x + \frac{3}{5}.$$

9. **a)** Írjuk fel a lineáris egyenletrendszert, mellyel meghatározhatjuk az $(x_i; y_i)$, $i = 1, \ldots, N$ pontokat négyzetesen legjobban közelítő egyenes együtthatóit.
$$\begin{bmatrix} N & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \end{bmatrix}$$
Mivel a kitűzött feladatban $N = 4$, $\sum x_i = 0$, $\sum x_i^2 = 10$, $\sum y_i = 6$ és $\sum x_i y_i = -3$, ezért a lineáris egyenletrendszer a következő.
$$\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -3 \end{bmatrix}$$
A diagonális elemekkel végig osztunk, így
$$p_0 = \frac{3}{2}, \quad p_1 = -\frac{3}{10}.$$
A keresett egyenes
$$P_1(x) = -\frac{3}{10}x + \frac{3}{2}.$$

b) Írjuk fel a lineáris egyenletrendszert, mellyel meghatározhatjuk az $(x_i; y_i)$, $i = 1, \ldots, N$ pontokat négyzetesen legjobban közelítő parabola együtthatóit.
$$\begin{bmatrix} N & \sum x_i & \sum x_i^2 \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i^3 \\ \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \sum x_i^4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \\ \sum x_i^2 y_i \end{bmatrix}$$
Mivel a kitűzött feladatban $N = 4$, $\sum x_i = 0$, $\sum x_i^2 = 10$, $\sum x_i^3 = 0$, $\sum x_i^4 = 34$, $\sum y_i = 6$, $\sum x_i y_i = -3$ és $\sum x_i^2 y_i = 21$, ezért a lineáris egyenletrendszer a következő.
$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & 0 \\ 10 & 0 & 34 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -3 \\ 21 \end{bmatrix}$$

Az 2. egyenletből

$$p_1 = -\frac{3}{10}\,.$$

A megmaradó egyenletek

$$\begin{array}{rr}
(1) & 2p_0 + 5p_2 = 3 \\
(3) & 10p_0 + 34p_2 = 21 \\
(3) - 5\cdot(1) & 9p_2 = 6 \;\to\; p_2 = \dfrac{2}{3} \\
(1) & 2p_0 = 3 - \dfrac{10}{3} = -\dfrac{1}{3} \;\to\; p_0 = -\dfrac{1}{6}
\end{array}$$

A keresett parabola

$$P_2(x) = \frac{2}{3}\,x^2 - \frac{3}{10}\,x - \frac{1}{6}.$$

10. Írjuk fel a lineáris egyenletrendszert, mellyel meghatározhatjuk az $(x_i; y_i)$, $i = 1, \dots, N$ pontokat négyzetesen legjobban közelítő egyenes együtthatóit.

$$\begin{bmatrix} N & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \end{bmatrix}$$

Mivel a kitűzött feladatban $N = 5$, $\sum x_i = 0$, $\sum x_i^2 = 30$, $\sum y_i = 0$ és $\sum x_i y_i = 36$, ezért a lineáris egyenletrendszer a következő.

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 30 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 36 \end{bmatrix}$$

A diagonális elemekkel végig osztunk, így

$$p_0 = 0, \quad p_1 = \frac{6}{5}.$$

A keresett egyenes

$$P_1(x) = \frac{6}{5}\,x,$$

melyről látszik, hogy átmegy a $(0; 0)$ -n.

11. Írjuk fel a lineáris egyenletrendszert, mellyel meghatározhatjuk az $(x_i; y_i)$, $i = 1, \dots, N$ pontokat négyzetesen legjobban közelítő egyenes együtthatóit.

$$\begin{bmatrix} N & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \end{bmatrix}$$

Az 1. egyenlet

$$N \cdot p_0 + \left(\sum x_i\right) \cdot p_1 = \sum y_i$$

N -nel leosztva

$$p_0 + \frac{\sum x_i}{N} \cdot p_1 = \frac{\sum y_i}{N}.$$

Mivel a $P_1(x) = p_0 + p_1 x$ elsőfokú négyzetesen legjobban közelítő polinomra

$$P_1\left(\frac{\sum x_i}{N}\right) = p_0 + p_1 \cdot \frac{\sum x_i}{N} = \frac{\sum y_i}{N},$$

ezért az állítást beláttuk.

10.2.3. Hilbert-térbeli közelítés

12. Adjuk meg az egyes jelölések értelmezését a Hilbert térbeli elméletben.

$H = \mathbb{R}^3$ a Hilbert tér a feladatban,

$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ a Hilbert térbeli elem, amit közelíteni szeretnénk és

$H' = \langle \mathbf{v} \rangle = \{c \cdot \mathbf{v} |\ c \in \mathbb{R}\}$ a $\mathbf{v}$ vektor által generált altér.

Az altérbeli legjobban közelítő elemet $c \cdot \mathbf{v}$ alakban keressük. A c együtthatót a $\mathbf{G} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{b}$ Gram-mátrixú lineáris egyenletrendszerből kapjuk, melynek mérete az altér dimenziója, jelen példánkban 1.

$$\mathbf{G} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{b} \quad \Leftrightarrow \quad \langle \mathbf{v}; \mathbf{v} \rangle \cdot c = \langle\, \mathbf{f}; \mathbf{v} \rangle$$

$$\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \rangle \cdot c = \langle \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \rangle$$

$$3 \cdot c = 3 \quad \to \quad c = 1$$

Tehát az altérbeli legjobban közelítő elem, vagyis az egyenesre vonatkozó merőleges vetület

$$\mathbf{f}' = 1 \cdot \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

A pont és egyenes távolságát az $\mathbf{f}'' = \mathbf{f} - \mathbf{f}'$ normájából kapjuk.

$$d = \|\mathbf{f}''\|_2 = \|\mathbf{f} - \mathbf{f}'\|_2 = \left\| \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\|_2 = \left\| \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\|_2 = \sqrt{2}$$

13. Adjuk meg az egyes jelölések értelmezését a Hilbert térbeli elméletben.

$H = \mathbb{R}^3$ a Hilbert tér a feladatban,

$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ a Hilbert térbeli elem, amit közelíteni szeretnénk és

$H' = \langle \mathbf{v} \rangle = \{c \cdot \mathbf{v} |\ c \in \mathbb{R}\}$ a $\mathbf{v}$ vektor által generált altér.

Az altérbeli legjobban közelítő elemet $c \cdot \mathbf{v}$ alakban keressük. A c együtthatót a $\mathbf{G} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{b}$ lineáris egyenletrendszerből kapjuk, melynek mérete az altér dimenziója, jelen példánkban 1.

$$\mathbf{G} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{b} \quad \Leftrightarrow \quad \langle \mathbf{v}; \mathbf{v} \rangle \cdot c = \langle\, \mathbf{f}; \mathbf{v} \rangle$$

$$\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \rangle \cdot c = \langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \rangle$$

$$2 \cdot c = 1 \quad \to \quad c = \frac{1}{2}$$

Tehát az altérbeli legjobban közelítő elem, vagyis az egyenesre vonatkozó merőleges vetület

$$\mathbf{f}' = 1 \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

A pont és egyenes távolságát az $\mathbf{f}'' = \mathbf{f} - \mathbf{f}'$ normájából kapjuk.

$$d = \|\mathbf{f}''\|_2 = \|\mathbf{f} - \mathbf{f}'\|_2 = \left\| \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \right\|_2 = \left\| \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \right\|_2 = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

14. Adjuk meg az egyes jelölések értelmezését a Hilbert térbeli elméletben.

$H = \mathbb{R}^3$ Hilbert tér a feladatban,

$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$ a Hilbert térbeli elem, amit közelíteni szeretnénk és

$H' = \langle \mathbf{v} \rangle = \{c \cdot \mathbf{v} |\ c \in \mathbb{R}\}$ a $\mathbf{v}$ vektor által generált altér.

A tükörképet az altérbeli legjobban közelítő elem segítségével tudjuk meghatározni, melyet $c \cdot \mathbf{v}$ alakban keressük. A c együtthatót a $\mathbf{G} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{b}$ lineáris egyenletrendszerből kapjuk, melynek mérete az altér dimenziója, jelen példánkban 1.

$$\mathbf{G} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{b} \quad \Leftrightarrow \quad \langle \mathbf{v}; \mathbf{v} \rangle \cdot c = \langle \mathbf{f}; \mathbf{v} \rangle$$

$$\left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle \cdot c = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

$$3 \cdot c = -1 \quad \to \quad c = -\frac{1}{3}$$

Tehát az altérbeli legjobban közelítő elem, a $\mathbf{v}$ -vel párhuzamos összetevő

$$\mathbf{f}' = 1 \cdot \mathbf{v} = -\frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

A $\mathbf{v}$ -re merőleges összetevő

$$\mathbf{f}'' = \mathbf{f} - \mathbf{f}' = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} + \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Az altérre vonatkozó tükörkép $\mathbf{f^T} = \mathbf{f} - 2 \cdot \mathbf{f}''$ vagy az $\mathbf{f^T} = \mathbf{f}' - \mathbf{f}''$ alakból számolható.

$$\mathbf{f^T} = \mathbf{f} - 2 \cdot \mathbf{f}'' = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} - \frac{2}{3} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

15. Adjuk meg az egyes jelölések értelmezését a Hilbert térbeli elméletben.

$H = \mathbb{R}^3$ a Hilbert tér a feladatban,

$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ a Hilbert térbeli elem, amit közelíteni szeretnénk.

Kétféle megoldást adunk, melyek a közelítő altérben különböznek.

a) $H' = \{\, [x, y, z]^T \in \mathbb{R}^3 |\ 2x + y - z = 0\}$ az origón átmenő sík, két dimenziós altér. Keressünk bázist a síkon, azaz két lineárisan független vektort, melyek a síkon vannak.

Legyen $\mathbf{g_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ és $\mathbf{g_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ a két báziselem.

Az altérbeli legjobban közelítő elemet $c_1 \cdot \mathbf{g_1} + c_2 \cdot \mathbf{g_2}$ alakban keressük. A c_1, c_2 együtthatót a $\mathbf{G} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{b}$ lineáris egyenletrendszerből kapjuk, melynek mérete 2×2.

$$\mathbf{G} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{b} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} \langle \mathbf{g_1}; \mathbf{g_1} \rangle & \langle \mathbf{g_2}; \mathbf{g_1} \rangle \\ \langle \mathbf{g_1}; \mathbf{g_2} \rangle & \langle \mathbf{g_2}; \mathbf{g_2} \rangle \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{f}; \mathbf{g_1} \rangle \\ \langle \mathbf{f}; \mathbf{g_2} \rangle \end{bmatrix}$$

A hiányzó skaláris szorzatok

$$\langle \mathbf{g_1}; \mathbf{g_1} \rangle = \langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \rangle = 5, \quad \langle \mathbf{g_2}; \mathbf{g_2} \rangle = \langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \rangle = 2$$

$$\langle \mathbf{g_1}; \mathbf{g_2} \rangle = \langle \mathbf{g_2}; \mathbf{g_1} \rangle = \langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \rangle = 2$$

$$\langle \mathbf{f}; \mathbf{g_1} \rangle = \langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \rangle = 1, \quad \langle \mathbf{f}; \mathbf{g_2} \rangle = \langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \rangle = 0$$

A megoldandó lineáris egyenletrendszer

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

A 2. egyenletből $c_2 = -c_1$, ezt az 1. egyenletbe helyettesítve

$$5c_1 - 2c_1 = 3c_1 = 1 \;\to\; c_1 = \frac{1}{3} \;\to\; c_2 = -\frac{1}{3}.$$

Tehát az altérbeli legjobban közelítő elem, vagyis a síkbeli merőleges vetület

$$\mathbf{f}' = c_1 \cdot \mathbf{g_1} + c_2 \cdot \mathbf{g_2} = \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} - \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Számítsuk ki az $\mathbf{f}'' = \mathbf{f} - \mathbf{f}'$, altérre merőleges összetevőt.

$$\mathbf{f}'' = \mathbf{f} - \mathbf{f}' = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

A pont és sík távolsága

$$d = \|\mathbf{f}''\|_2 = \|\mathbf{f} - \mathbf{f}'\|_2 = \left\| \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\|_2 = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{6} = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

b) A másik megoldásban $H'' = \{c \cdot \mathbf{v} | \; c \in \mathbb{R}\}$ egy dimenziós altér, a síkra merőleges origón átmenő egyenes. $\mathbf{v} = [2, 1, -1]^T$ a sík normálvektora, mely a sík egyenletéből olvasható le.

$$2x + y - z = 0 = \langle \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \rangle$$

Az altérbeli legjobban közelítő elemet $c \cdot \mathbf{v}$ alakban keressük. A c együtthatót a $\mathbf{G} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{b}$ lineáris egyenletrendszerből kapjuk, melynek mérete 1×1.

$$\mathbf{G} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{b} \quad \Leftrightarrow \quad \langle \mathbf{v}; \mathbf{v} \rangle \cdot c = \langle\, \mathbf{f}; \mathbf{v} \rangle$$
$$\langle \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \rangle \cdot c = \langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \rangle$$
$$6 \cdot c = 2 \quad \rightarrow \quad c = \frac{1}{3}$$

Tehát a H'' altérbeli legjobban közelítő elem, vagyis a normál vektor irányú egyenesre vonatkozó merőleges vetület

$$\mathbf{f}'' = 1 \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

A síkra vonatkozó merőleges vetületet az $\mathbf{f}' = \mathbf{f} - \mathbf{f}''$ képletből számítjuk.

$$\mathbf{f}' = \mathbf{f} - \mathbf{f}'' = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Látjuk, hogy az eredmény ugyanaz, de most 1×1-es egyenletet kellett csak megoldanunk, vagyis kevesebbet számoltunk.

16. Adjuk meg az egyes jelölések értelmezését a Hilbert térbeli elméletben.

$H = \mathbb{R}^3$ a Hilbert tér a feladatban,

$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ a Hilbert térbeli elem, aminek a tükörképét keressük.

Ehhez a síkra merőleges vetületet kell először meghatároznunk. Kétféle megoldást adunk, melyek a közelítő altérben különböznek.

a) $H' = \{\, [x, y, z]^T \in \mathbb{R}^3 |\ x - y + z = 0\}$ az origón átmenő sík, két dimenziós altér. Keressünk bázist a síkon, azaz két lineárisan független vektort, melyek a síkon vannak.

Legyen $\mathbf{g_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ és $\mathbf{g_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ a két vektor.

Az altérbeli legjobban közelítő elemet $c_1 \cdot \mathbf{g_1} + c_2 \cdot \mathbf{g_2}$ alakban keressük. A c_1, c_2 együtthatót a $\mathbf{G} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{b}$ lineáris egyenletrendszerből kapjuk, melynek mérete 2×2.

$$\mathbf{G} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{b} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} \langle \mathbf{g_1}; \mathbf{g_1} \rangle & \langle \mathbf{g_2}; \mathbf{g_1} \rangle \\ \langle \mathbf{g_1}; \mathbf{g_2} \rangle & \langle \mathbf{g_2}; \mathbf{g_2} \rangle \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle\, \mathbf{f}; \mathbf{g_1} \rangle \\ \langle\, \mathbf{f}; \mathbf{g_2} \rangle \end{bmatrix}$$

A hiányzó skaláris szorzatok

$$\langle \mathbf{g_1}; \mathbf{g_1} \rangle = \langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \rangle = 2, \quad \langle \mathbf{g_2}; \mathbf{g_2} \rangle = \langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \rangle = 2$$

$$\langle \mathbf{g_1}; \mathbf{g_2} \rangle = \langle \mathbf{g_2}; \mathbf{g_1} \rangle = \langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \rangle = 1$$

$$\langle \mathbf{f}; \mathbf{g_1} \rangle = \langle \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \rangle = -1, \quad \langle \mathbf{f}; \mathbf{g_2} \rangle = \langle \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \rangle = 0.$$

A megoldandó lineáris egyenletrendszer

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

A 2. egyenletből $c_1 = -2c_2$, ezt az 1. egyenletbe helyettesítve

$$-4c_2 + c_2 = -3c_2 = -1 \;\rightarrow\; c_2 = \frac{1}{3} \;\rightarrow\; c_1 = -\frac{2}{3}.$$

Tehát az altérbeli legjobban közelítő elem, vagyis a síkbeli merőleges vetület

$$\mathbf{f}' = c_1 \cdot \mathbf{g_1} + c_2 \cdot \mathbf{g_2} = -\frac{2}{3} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} = -\frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Számítsuk ki az $\mathbf{f}'' = \mathbf{f} - \mathbf{f}'$, altérre merőleges összetevőt.

$$\mathbf{f}'' = \mathbf{f} - \mathbf{f}' = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \\ 4 \end{bmatrix} = \frac{4}{3} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Az altérre vonatkozó tükörkép

$$\mathbf{f^T} = \mathbf{f} - 2 \cdot \mathbf{f}'' = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{8}{3} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

b) A másik megoldásban $H'' = \{c \cdot \mathbf{v} | \; c \in \mathbb{R}\}$ egy dimenziós altér, a síkra merőleges origón átmenő egyenes. $\mathbf{v} = [1, -1, 1]^T$ a sík normálvektora, mely a sík egyenletéből olvasható le.

$$x - y + z = 0 = \langle \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \rangle$$

Az altérbeli legjobban közelítő elemet $c \cdot \mathbf{v}$ alakban keressük. A c együtthatót a $\mathbf{G} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{b}$ lineáris egyenletrendszerből kapjuk, melynek mérete 1×1.

$$\mathbf{G} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{b} \quad \Leftrightarrow \quad \langle \mathbf{v}; \mathbf{v} \rangle \cdot c = \langle \mathbf{f}; \mathbf{v} \rangle$$

$$\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \rangle \cdot c = \langle \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \rangle$$

$$3 \cdot c = 4 \;\rightarrow\; c = \frac{4}{3}$$

Tehát a H'' altérbeli legjobban közelítő elem, vagyis a normál vektor irányú egyenesre vonatkozó merőleges vetület

$$\mathbf{f}'' = 1 \cdot \mathbf{v} = \frac{4}{3} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

A síkra vonatkozó tükörképet az $\mathbf{f^T} = \mathbf{f} - 2 \cdot \mathbf{f''}$ képletből számítjuk.

$$\mathbf{f^T} = \mathbf{f} - 2 \cdot \mathbf{f''} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{8}{3} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix}$$

Látjuk, hogy az eredmény ugyanaz, mint a másik megoldási módnál, de így kevesebbet kellett számolnunk.

17. A feladatban szereplő sík nem altér, mert nem megy át az origón. A Hilbert térbeli elméletre csak úgy tudjuk ráhúzni, ha változó transzformációt alkalmazunk (eltoljuk a koordináta rendszert 1 -gyel.) Legyen $z' = z - 1$, így a sík egyenlete $x + y + z' = 0$. Az új koordináta rendszerben P(1;-1;-2). Adjuk meg az egyes jelölések értelmezését a Hilbert térbeli elméletben.

$H = \mathbb{R}^3$ a Hilbert tér a feladatban,

$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$ a Hilbert térbeli elem, melynek a vetületét keressük. Most is kétféle megoldás közül választhatnánk. A kevesebb számolást igénylőt választjuk.

$H'' = \{c{\cdot}\mathbf{n} |\ c \in \mathbb{R}\}$ egy dimenziós altér, a síkra merőleges origón átmenő egyenes. $\mathbf{n} = [1, 1, 1]^T$ a sík normálvektora, mely a sík egyenletéből leolvasható.

$$x + y + z' = 0 = \langle \begin{bmatrix} x \\ y \\ z' \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \rangle$$

Az altérbeli legjobban közelítő elemet $c \cdot \mathbf{n}$ alakban keressük. A c együtthatót a $\mathbf{G} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{b}$ lineáris egyenletrendszerből kapjuk, melynek mérete 1×1.

$$\mathbf{G} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{b} \quad \Leftrightarrow \quad \langle \mathbf{n}; \mathbf{n} \rangle \cdot c = \langle \mathbf{f}; \mathbf{n} \rangle$$

$$\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \rangle \cdot c = \langle \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \rangle$$

$$3 \cdot c = -2 \ \rightarrow \ c = -\frac{2}{3}$$

Tehát a H'' altérbeli legjobban közelítő elem, vagyis a normál vektor irányú egyenesre vonatkozó merőleges vetület

$$\mathbf{f''} = 1 \cdot \mathbf{n} = -\frac{2}{3} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

A pont és sík távolsága nem változik az eltolással, így

$$d = \|\mathbf{f''}\|_2 = \left\| -\frac{2}{3} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\|_2 = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{3} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

A síkra vonatkozó merőleges vetületet az $\mathbf{f'} = \mathbf{f} - \mathbf{f''}$ képletből számítjuk.

$$\mathbf{f'} = \mathbf{f} - \mathbf{f''} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} + \frac{2}{3} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ -4 \end{bmatrix}$$

A kapott koordináták az (x, y, z') -ben értendők. Az eredeti (x, y, z) koordinátarendszerben a síkra merőleges vetület

$$P' = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

18. Fogalmazzuk át a feladatot és adjuk meg a jelöléseket a Hilbert térbeli elmélet alkalmazásához!

$$\int_0^1 (x^2 + ax + b)^2 \sqrt{x}\, dx = \int_0^1 (x^2 - (-ax - b))^2 \sqrt{x}\, dx = \|f - p_1\|^2_{L_2^w[0;1]},$$

ahol $H = L_2^w[0;1]$ a Hilbert tér, $w(x) = \sqrt{x}$ a súlyfüggvény,

$\langle f; g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\sqrt{x}\, dx$ a skaláris szorzat,
$\|f\|^2_{L_2^w[0;1]} = \int_0^1 f^2(x)\sqrt{x}\, dx$ a norma négyzete,

$f(x) = x^2$ a közelítendő elem és P_1 a legfeljebb elsőfokú polinomok tere az altér, melyből legjobban közelítő $p_1 \in P_1$ elemet keresünk. Keressünk bázist a P_1 polinom altérben: $g_1(x) = 1$ és $g_2(x) = x$.

Az altérbeli legjobban közelítő elemet $c_1 \cdot g_1 + c_2 \cdot g_2$ alakban keressük. A c_1, c_2 együtthatót a $\mathbf{G} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{b}$ lineáris egyenletrendszerből kapjuk, melynek mérete 2×2.

$$\mathbf{G} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{b} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} \langle g_1; g_1\rangle & \langle g_2; g_1\rangle \\ \langle g_1; g_2\rangle & \langle g_2; g_2\rangle \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle f; g_1\rangle \\ \langle f; g_2\rangle \end{bmatrix}$$

A hiányzó skaláris szorzatok

$$\langle g_1; g_1\rangle = \langle 1; 1\rangle = \int_0^1 1 \cdot 1 \cdot \sqrt{x}\, dx = \frac{2}{3}$$
$$\langle g_2; g_2\rangle = \langle x; x\rangle = \int_0^1 x \cdot x \cdot \sqrt{x}\, dx = \frac{2}{7}$$
$$\langle g_1; g_2\rangle = \langle g_2; g_1\rangle = \langle 1; x\rangle = \int_0^1 1 \cdot x \cdot \sqrt{x}\, dx = \frac{2}{5}$$
$$\langle f; g_1\rangle = \langle x^2; 1\rangle = \int_0^1 x^2 \cdot 1 \cdot \sqrt{x}\, dx = \frac{2}{7}$$
$$\langle x^2; x\rangle = \int_0^1 x^2 \cdot x \cdot \sqrt{x}\, dx = \frac{2}{9}.$$

A megoldandó lineáris egyenletrendszer

$$\begin{bmatrix} 2/3 & 2/5 \\ 2/5 & 2/7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/7 \\ 2/9 \end{bmatrix}.$$

Az 1. egyenletet szorozzuk $\frac{105}{2}$ -del, a 2. egyenletet $\frac{175}{2}$ -del, így

$$\begin{bmatrix} 35 & 21 \\ 35 & 25 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ \frac{175}{9} \end{bmatrix}.$$

A 2. egyenletből vonjuk ki az 1. -t, ekkor

$$4c_2 = \frac{40}{9} \quad \to \quad c_2 = \frac{10}{9}.$$

Az 1. egyenlet

$$35\,c_1 + 21\cdot\frac{10}{9} = 15 \quad\to\quad 35\,c_1 = -\frac{25}{3} \quad\to\quad c_1 = -\frac{5}{21}.$$

Tehát a legjobban közelítő polinom

$$p_1(x) = \frac{10}{9}\,x - \frac{5}{21},$$

és így $a = -\frac{10}{9}$ és $b = \frac{5}{21}$.

19. Fogalmazzuk át a feladatot és adjuk meg a jelöléseket a Hilbert térbeli elmélet alkalmazásához!

$$\int_0^1 (x^2+ax+b)^2\cdot x^2\,dx = \int_0^1 (x^2-(-ax-b))^2\cdot x^2\,dx = \|f-p_1\|^2_{L_2^w[0;1]},$$

ahol $H = L_2^w[0;1]$ a Hilbert tér, $w(x)=x^2$ a súlyfüggvény,
$\langle f;g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)x^2\,dx$ a skaláris szorzat,
$\|f\|^2_{L_2^w[0;1]} = \int_0^1 f^2(x)x^2\,dx$ a norma négyzete,

$f(x)=x^2$ a közelítendő elem és P_1 a legfeljebb elsőfokú polinomok tere az altér, melyből legjobban közelítő $p_1\in P_1$ elemet keresünk. Keressünk bázist a P_1 polinom altérben. Legyen $g_1(x)=1$ és $g_2(x)=x$.

Az altérbeli legjobban közelítő elemet $c_1\cdot g_1 + c_2\cdot g_2$ alakban keressük. A c_1, c_2 együtthatót a $\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}=\mathbf{b}$ lineáris egyenletrendszerből kapjuk, melynek mérete 2×2.

$$\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}=\mathbf{b} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{bmatrix}\langle g_1;g_1\rangle & \langle g_2;g_1\rangle\\ \langle g_1;g_2\rangle & \langle g_2;g_2\rangle\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}c_1\\ c_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\langle f;g_1\rangle\\ \langle f;g_2\rangle\end{bmatrix}$$

A hiányzó skaláris szorzatok

$$\begin{aligned}
\langle g_1;g_1\rangle &= \langle 1;1\rangle = \int_0^1 1\cdot 1\cdot x^2\,dx = \frac{1}{3}\\
\langle g_2;g_2\rangle &= \langle x;x\rangle = \int_0^1 x\cdot x\cdot x^2\,dx = \frac{1}{5}\\
\langle g_1;g_2\rangle &= \langle g_2;g_1\rangle = \langle 1;x\rangle = \int_0^1 1\cdot x\cdot x^2\,dx = \frac{1}{4}\\
\langle f;g_1\rangle &= \langle x^2;1\rangle = \int_0^1 x^2\cdot 1\cdot x^2\,dx = \frac{1}{5}\\
\langle x^2;x\rangle &= \int_0^1 x^2\cdot x\cdot x^2\,dx = \frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

A megoldandó lineáris egyenletrendszer

$$\begin{bmatrix}1/3 & 1/4\\ 1/4 & 1/5\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}c_1\\ c_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1/5\\ 1/6\end{bmatrix}.$$

Az 1. egyenletet szorozzuk 60 -nal, a 2. egyenletet 80 -nal, így

$$\begin{bmatrix}20 & 15\\ 20 & 16\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}c_1\\ c_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}12\\ \frac{40}{3}\end{bmatrix}.$$

A 2. egyenletből vonjuk ki az 1. -t, ekkor

$$c_2 = \frac{40}{3} - 12 = \frac{4}{3}.$$

Az 1. egyenlet

$$20\,c_1 + 15 \cdot \frac{4}{3} = 12 \quad \to \quad 20\,c_1 = -8 \quad \to \quad c_1 = -\frac{2}{5}.$$

Tehát a legjobban közelítő polinom

$$p_1(x) = \frac{4}{3}\,x - \frac{2}{5},$$

és így $a = -\frac{4}{3}$ és $b = \frac{2}{5}$.

10.2.4. Ortogonális polinomok

20. Az $\int_{-1}^{1}(x^3+ax^2+bx+c)^2\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ integrál a minimumát a harmadfokú egy főegyütthatós ortogonális polinom esetén veszi fel, melyet a $[-1;1]$ intervallum és a $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ súlyfüggvény határoz meg. Ez a $\widetilde{T}_3(x)$ egy főegyütthatós Csebisev polinom. Először állítsuk elő a Csebisev polinomt a következő rekurzióval, majd normáljuk a főegyütthatót.

$$\begin{aligned}
T_2(x) &= 2x \cdot T_1(x) - T_0(x) = 2x \cdot x - 1 = 2x^2 - 1,\\
T_3(x) &= 2x \cdot T_2(x) - T_1(x) = 2x \cdot (2x^2-1) - x = 4x^3 - 3x,\\
\widetilde{T}_3(x) &= \frac{1}{4}\,(4x^3 - 3x) = x^3 - \frac{3}{4}x
\end{aligned}$$

Így

$$x^3 + ax^2 + bx + c = \widetilde{T}_3(x) = x^3 - \frac{3}{4}\,x$$

innen $a = c = 0$ és $b = -\frac{3}{4}$.

21. **a)** Első megoldásunkban az ortogonális polinomok tulajdonságait használjuk fel. Az $\int_{-1}^{1}(2x^3-ax)^2\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ integrál a minimumát a harmadfokú kettő főegyütthatós ortogonális polinom esetén veszi fel, melyet a $[-1;1]$ intervallum és a $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ súlyfüggvény határoz meg. Ez a $2 \cdot \widetilde{T}_3(x)$ kettő főegyütthatós Csebisev polinom, mely a következő rekurzió segítségével állítható elő. A feladat a Csebisev polinom páratlan volta miatt oldható meg ilyen egyszerűen. Ha másodfokú és konstans tagok is lennének az integrálban, akkor is ez lenne a megoldás. Az előző feldatban már előállítottuk a harmadfokú egy főegyütthatós Csebisev polinomot.

$$\widetilde{T}_3(x) = x^3 - \frac{3}{4}x$$

A feladat megoldása

$$2x^3 - ax = 2 \cdot \widetilde{T}_3(x) = 2x^3 - \frac{3}{2}x \quad \to \quad a = \frac{3}{2}$$

b) Egy másik lehetséges megoldás a Hilbert térbeli elmélettel.

$$\int_{-1}^{1}(2x^3-ax)^2\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \|f - p_1\|^2_{L_2^w[-1;1]}$$

ahol $H = L_2^w[-1;1]$ a Hilbert tér, $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ a súlyfüggvény,

$\langle f; g\rangle = \int_{-1}^{1}\frac{f(x)g(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ a skaláris szorzat,

$\|f\|^2_{L_2^w[-1;1]} = \int_{-1}^{1}\frac{f^2(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ a norma,

$f(x) = 2x^3$ a közelítendő elem és
$H' = \langle\, x \,\rangle$ a $g(x) = x$ által generált altér, melyből a legjobban közelítő elemet keresünk.

Az altérbeli legjobban közelítő elemet $a \cdot g(x)$ alakban keressük. Az a együtthatót a $\mathbf{G} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{b}$ lineáris egyenletrendszerből kapjuk, melynek mérete az altér dimenziója, jelen példánkban 1.

$$\mathbf{G} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{b} \quad \Leftrightarrow \quad \langle g; g\rangle \cdot a = \langle f; g\rangle$$
$$\langle g; g\rangle = \int_{-1}^{1} \frac{x \cdot x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \frac{1}{2}\,\pi$$
$$\langle f; g\rangle = \int_{-1}^{1} \frac{2x^3 \cdot x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \frac{3}{4}\,\pi$$
$$\frac{1}{2}\,\pi \cdot a = \frac{3}{4}\,\pi \quad \rightarrow \quad a = \frac{3}{2}$$

Így a feladat megoldása $a = \frac{3}{2}$.

22. Az $\int_{-1}^{1}(x^2 + ax + b)^2\, dx$ integrál a minimumát a másodfokú egy főegyütthatós ortogonális polinom esetén veszi fel, melyet a $[-1; 1]$ intervallum és a $w(x) = 1$ súlyfüggvény határoz meg. Ez a $p_2(x)$ egy főegyütthatós Legendre polinom, melyet Gram–Schmidt-ortogonalizációval állítunk elő az $1, x, x^2$ rendszerből.

$$p_0(x) = 1$$
$$p_1(x) = x - cp_0(x) = x$$
$$c = \frac{\langle x; p_0\rangle}{\langle p_0; p_0\rangle} = \frac{\int_{-1}^{1} x \cdot 1\, dx}{\int_{-1}^{1} 1 \cdot 1\, dx} = \frac{0}{2} = 0$$
$$p_2(x) = x^2 - c_1 p_1(x) - c_0 p_0(x) = x^2 - \frac{1}{3}$$
$$c_1 = \frac{\langle x^2; p_1\rangle}{\langle p_1; p_1\rangle} = \frac{\int_{-1}^{1} x^2 \cdot x\, dx}{\int_{-1}^{1} x \cdot x\, dx} = \frac{0}{\frac{2}{3}} = 0$$
$$c_0 = \frac{\langle x^2; p_0\rangle}{\langle p_0; p_0\rangle} = \frac{\int_{-1}^{1} x^2 \cdot 1\, dx}{\int_{-1}^{1} 1 \cdot 1\, dx} = \frac{\frac{2}{3}}{2} = \frac{1}{3}$$

Így

$$x^2 + ax + b = p_2(x) = x^2 - \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad a = 0,\;\; b = -\frac{1}{3}.$$

23. Az $\int_{0}^{1}(x^2 + ax + b)^2\, dx$ integrál a minimumát a másodfokú egy főegyütthatós ortogonális polinom esetén veszi fel, melyet a $[0; 1]$ intervallum és a $w(x) = 1$ súlyfüggvény határoz meg. Jelölje $p_2(x)$ egy főegyütthatós ortogonális polinomot, melyet Gram–Schmidt-ortogonalizációval állítunk elő az $1, x, x^2$ rendszerből.

$$p_0(x) = 1$$
$$p_1(x) = x - cp_0(x) = x - \frac{1}{2}$$
$$c = \frac{\langle x; p_0\rangle}{\langle p_0; p_0\rangle} = \frac{\int_{0}^{1} x \cdot 1\, dx}{\int_{0}^{1} 1 \cdot 1\, dx} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$$

$$p_2(x) = x^2 - c_1 p_1(x) - c_0 p_0(x) = x^2 - \left(x - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{3} = x^2 - x + \frac{1}{6}$$
$$c_1 = \frac{\langle x^2; p_1\rangle}{\langle p_1; p_1\rangle} = \frac{\int_0^1 x^2 \cdot (x - \frac{1}{2})\, dx}{\int_0^1 (x - \frac{1}{2})^2\, dx} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{12}} = 1$$
$$c_0 = \frac{\langle x^2; p_0\rangle}{\langle p_0; p_0\rangle} = \frac{\int_0^1 x^2 \cdot 1\, dx}{\int_0^1 1 \cdot 1\, dx} = \frac{\frac{1}{3}}{1} = \frac{1}{3}$$

Így

$$x^2 + ax + b = p_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6} \quad \Rightarrow \quad a = 1,\ \ b = -\frac{1}{6}.$$

Megjegyezzük, hogy az eredményt az előző feladatból is megkaphattuk volna a

$$\varphi(x) = 2x - 1,\ \ x \in [0; 1]$$

lineáris transzformációval. Az előző feladatbeli eredményt áttranszformálva

$$(2x - 1)^2 - \frac{1}{3} = 4x^2 - 4x + \frac{2}{3} = 4 \cdot (x^2 - x + \frac{1}{6}).$$

Innen az egy főegyütthatós polinom $p_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6}$.

24. Mivel a $[0; 1]$ intervallum és a $w(x) = \sqrt{x}$ súlyfüggvény nem definiál klasszikus ortogonális polinomot, ezért a másodfokú ortogonális polinomot elő kell állítanunk Gram-Schmidt ortogonalizációval az $1, x, x^2$ rendszerből.

$$p_0(x) = 1$$
$$p_1(x) = x - cp_0(x) = x - \frac{3}{5}$$
$$c = \frac{\langle x; p_0\rangle}{\langle p_0; p_0\rangle} = \frac{\int_0^1 x \cdot 1 \cdot \sqrt{x}\, dx}{\int_0^1 1 \cdot 1 \cdot \sqrt{x}\, dx} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{5}$$
$$p_2(x) = x^2 - c_1 p_1(x) - c_0 p_0(x) = x^2 - \frac{10}{9}(x - \frac{3}{5}) - \frac{3}{7} =$$
$$= x^2 - \frac{10}{9}x + \frac{5}{21}$$
$$c_1 = \frac{\langle x^2; p_1\rangle}{\langle p_1; p_1\rangle} = \frac{\int_0^1 x^2 (x - \frac{3}{5}) \cdot \sqrt{x}\, dx}{\int_0^1 (x - \frac{3}{5})^2 \cdot \sqrt{x}\, dx} = \frac{\frac{16}{315}}{\frac{8}{145}} = \frac{10}{9}$$
$$c_0 = \frac{\langle x^2; p_0\rangle}{\langle p_0; p_0\rangle} = \frac{\int_0^1 x^2 \cdot 1 \cdot \sqrt{x}\, dx}{\int_0^1 1 \cdot 1 \cdot \sqrt{x}\, dx} = \frac{\frac{2}{7}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{7}$$

A másodfokú ortogonális polinom

$$p_2(x) = x^2 - \frac{10}{9}\, x + \frac{5}{21} = x^2 + ax + b \quad \Rightarrow \quad a = -\frac{10}{9},\ \ b = \frac{5}{21}.$$

25. Mivel a $[-1; 1]$ intervallum és a $w(x) = x^2$ súlyfüggvény nem definiál klasszikus ortogonális polinomot, ezért a másodfokú ortogonális polinomot elő kell állítanunk Gram-Schmidt ortogonalizációval az $1, x, x^2$ rendszerből.

$$\begin{aligned}
p_0(x) &= 1\\
p_1(x) &= x - cp_0(x) = x\\
c &= \frac{\langle x; p_0\rangle}{\langle p_0; p_0\rangle} = \frac{\int_{-1}^{1} x\cdot 1\cdot x^2\,dx}{\int_{-1}^{1} 1\cdot 1\cdot x^2\,dx} = \frac{0}{\frac{2}{3}} = 0\\
p_2(x) &= x^2 - c_1p_1(x) - c_0p_0(x) = x^2 - \frac{3}{5}\\
c_1 &= \frac{\langle x^2; p_1\rangle}{\langle p_1; p_1\rangle} = \frac{\int_{-1}^{1} x^2\cdot x\cdot x^2\,dx}{\int_{-1}^{1} x\cdot x\cdot x^2\,dx} = \frac{0}{\frac{2}{5}} = 0\\
c_0 &= \frac{\langle x^2; p_0\rangle}{\langle p_0; p_0\rangle} = \frac{\int_{-1}^{1} x^2\cdot 1\cdot x^2\,dx}{\int_{-1}^{1} 1\cdot 1\cdot x^2\,dx} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{5}
\end{aligned}$$

A másodfokú ortogonális polinom

$$p_2(x) = x^2 - \frac{3}{5} = x^2 + ax + b \quad\Rightarrow\quad a = 0,\;\; b = \frac{3}{5}.$$

10.2.5. Egyenletesen legjobb közelítés

26. Mivel $f \in C[a;b]$, ezért van minimuma és maximuma az $[a;b]$ intervallumban. Vezessük be a következő jelöléseket!

$$m = \min\{f(x) \mid x \in [a;b]\} = f(x_m), \quad x_m \in [a;b]$$

$$M = \max\{f(x) \mid x \in [a;b]\} = f(x_M), \quad x_M \in [a;b]$$

Az alternáló pontok tétele segítségével belátjuk, hogy

$$p_0(x) = \frac{m+M}{2}$$

az egyenletesen legjobban közelítő nulladfokú polinom. A polinom fokszámához képest kettővel több alternáló pontot kell keresnünk. Az x_m és x_M pontok megfelelőek.

$$\begin{aligned}
f(x_m) - p_0(x_m) &= m - \frac{m+M}{2} = -\frac{M-m}{2}\\
f(x_M) - p_0(x_M) &= M - \frac{m+M}{2} = \frac{M-m}{2}
\end{aligned}$$

Másrészt

$$\|f - p_0\|_\infty = \max\left\{\left|f(x) - \frac{m+M}{2}\right| : x \in [a;b]\right\} = \frac{M-m}{2},$$

tehát az x_m és x_M alternáló pontokban előjelesen veszi fel a legnagyobb eltérést a hibafüggvény. A közelítés hibája

$$E_0(f) = \frac{M-m}{2}.$$

27. **a)** Az $f(x) = (x+1)^2$ függvény a $[0;1]$ intervallumon monoton növő, ezért az előző feladat eredményét használhatjuk az egyenletesen legjobban közelítő nulladfokú polinom meghatározására. Mivel

$$m = f(0) = 1, \quad M = f(1) = 4,$$

ezért

$$p_0(x) = \frac{m+M}{2} = \frac{1+4}{2} = \frac{5}{2}.$$

A közelítés hibája

$$E_0(f) = \frac{M-m}{2} = \frac{4-1}{2} = \frac{3}{2}.$$

b) Az alternáló pontok tétele segítségével keressük az egyenletesen legjobban közelítő elsőfokú polinomot. A polinom fokszámához képest legalább kettővel több alternáló pontot kell keresnünk, azaz legalább hármat. Amikor a függvény monoton, rendszerint elég pontosan kettővel több, a két szélső az intervallum két széle. Ha ezzel a megközelítéssel nem kapunk eredményt, akkor vagy több alternáló pontot kell keresnünk vagy az intervallumok széle nem alternáló pont. Ezt végigkövethetjük az előző feladatnál, amennyiben a minimum és maximum helyek nem az intervallum szélei illetve többször is felveheti a függvény a minimális illetve maximális értéket. Ebből is látszik, hogy a feladat megoldása oszcilláló függvény esetén bonyolult lehet. Az alternáló pontokat $x_0 = 0$, x_1 és $x_2 = 1$ alakban, a polinomot $p_1(x) = ax + b$ alakban keressük, E az érték, amivel alternál a hibafüggvény.

Írjuk fel az alternálás egyenleteit.

$$\begin{aligned}
&(1)\;\; f(x_0) - p_1(x_0) = (0+1)^2 - (a \cdot 0 + b) = E \\
&(2)\;\; f(x_1) - p_1(x_1) = (x_1+1)^2 - (a \cdot x_1 + b) = -E \\
&(3)\;\; f(x_2) - p_1(x_2) = (1+1)^2 - (a \cdot 1 + b) = E
\end{aligned}$$

Ezzek három egyenletet kaptunk a négy ismeretlenhez. Mivel a függvényünk deriválható, ezért a hibafüggvénynek a belső x_1 pontban szélsőértéke van. Erre írjuk fel a 4. egyenletet.

$$(4)\;\; f'(x_1) - p_1'(x_1) = 2(x_1+1) - a = 0$$

A kapott nemlineáris egyenletrendszer, amit meg kell oldanunk

$$\begin{array}{lr}
(1) & 1 - b = E \\
(2) & (x_1+1)^2 - a \cdot x_1 - b = -E \\
(3) & 4 - a - b = E \\
(4) & 2x_1 = a - 2.
\end{array}$$

$$(3) - (1) \quad 3 - a = 0 \;\; \to \;\; a = 3$$

$$(4) \quad 2x_1 = a - 2 = 1 \;\; \to \;\; x_1 = \frac{1}{2}$$

Már csak két ismeretlent kell meghatároznunk.

$$(1) + (2) \quad 1 - b + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{3}{2} - b = 0 \;\; \to \;\; 2b = \frac{7}{4} \;\; \to \;\; b = \frac{7}{8}$$

$$(1) \quad E = 1 - b = \frac{1}{8}$$

Ezzel még nem oldottuk meg a feladatot. Sejtésünk:

$$p_1(x) = 3x + \frac{7}{8}, \quad E_1(f) = \frac{1}{8}.$$

Ellenőrizzük az alternáló pontok tételének állítását. A

$$h(x) = (x+1)^2 - 3x - \frac{7}{8}$$

hibafüggvény végtelen normáját kell meghatároznunk.

$$h'(x) = 2(x+1) - 3 = 2x - 1 = 0 \ \rightarrow \ x_1 = \frac{1}{2},$$

így a hibafüggvénynek a $[0;1]$ intervallumon csak a $0, \frac{1}{2}, 1$ a szélsőértékhelyei. Helyettesítsünk a hibafüggvénybe.

$$\begin{aligned} h(0) &= 1 - \frac{7}{8} = \frac{1}{8} = E \\ h\left(\frac{1}{2}\right) &= \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{3}{2} - \frac{7}{8} = \frac{9}{4} - \frac{3}{2} - \frac{7}{8} = -\frac{1}{8} = -E \\ h(1) &= 4 - 3 - \frac{7}{8} = \frac{1}{8} = E \end{aligned}$$

Ebből

$$\|h\|_\infty = \frac{1}{8} = |E|.$$

Megfigyelhetjük, hogy a behelyettesítés egyenletei megegyeznek az alternáló pont keresés egyenleteivel. Amikor megkaptuk a hibafüggvény lehetséges $0, \frac{1}{2}, 1$ szélsőérték helyeit, már tudjuk, hogy jó a sejtésünk, hiszen őket kaptuk meg az (1) − (4) egyenletek megoldásaként. Tehát

$$p_1(x) = 3x + \frac{7}{8}, \quad E_1(f) = \frac{1}{8}.$$

28. Az alternáló pontok tétele segítségével keressük az egyenletesen legjobban közelítő elsőfokú polinomot. A polinom fokszámához képest legalább kettővel több alternáló pontot kell keresnünk, azaz legalább hármat. Rendszerint elég pontosan kettővel több, a két szélső az intervallum két széle. Ha ezzel a megközelítéssel nem kapunk eredményt, akkor vagy több alternáló pontot kell keresnünk vagy az intervallumok széle nem alternáló pont. Ezt végigkövethetjük az 26. feladatnál.

A feladatot az előzőhöz hasonlóan is megoldhatjuk, de mivel az $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ függvény $[-1;1]$-en páros, ezért a középső alternáló pont várhatóan a nulla lesz. Ez egyszerűsíti az egyenleteinket, de majd csak az ellenőrzésnél derül ki, hogy jól gondoltuk-e. Az alternáló pontokat $x_0 = -1$, $x_1 = 0$ és $x_2 = 1$ alakban, a polinomot $p_1(x) = ax + b$ alakban keressük, E az érték, amivel alternál a hibafüggvény.

Írjuk fel az alternálás egyenleteit.

$$\begin{aligned} &(1) \quad f(-1) - p_1(-1) = \frac{1}{1+(-1)^2} - (a \cdot (-1) + b) = E \\ &(2) \quad f(0) - p_1(0) = \frac{1}{1+0^2} - (a \cdot 0 + b) = -E \\ &(3) \quad f(1) - p_1(1) = \frac{1}{1+1^2} - (a \cdot 1 + b) = E \end{aligned}$$

Ezzel három egyenletet kaptunk a három ismeretlenhez. Mivel az alternáló pontokra sejtéseink voltak, így lineáris egyenletrendszert kaptunk, amit meg kell oldanunk

$$\begin{aligned} &(1) \quad \frac{1}{2} + a - b = E \\ &(2) \quad 1 - b = -E \\ &(3) \quad \frac{1}{2} - a - b = E. \end{aligned}$$

$$(1)-(3) \quad 2a=0 \quad \to \quad a=0$$

Már csak két ismeretlent kell meghatároznunk két egyenletből.

$$(1) \quad \frac{1}{2}-b=E$$
$$(2) \quad 1-b=-E$$

$$(1)+(2) \quad \frac{3}{2}-2b=0 \quad \to \quad b=\frac{3}{4}$$
$$(1) \quad E=\frac{1}{2}-b=\frac{1}{2}-\frac{3}{4}=-\frac{1}{4}$$

Sejtésünk:

$$p_1(x)=\frac{3}{4}, \quad E_1(f)=\frac{1}{4}.$$

Ellenőrizzük az alternáló pontok tételének állítását. A

$$h(x)=\frac{1}{1+x^2}-\frac{3}{4}$$

hibafüggvény végtelen normáját kell meghatároznunk.

$$h'(x)=\frac{-2x}{(1+x^2)^2}=0 \quad \to \quad x_1=0,$$

így a hibafüggvénynek a $[-1;1]$ intervallumon csak a $-1,0,1$ a szélsőértékhelyei. Helyettesítsünk a hibafüggvénybe.

$$h(-1)=\frac{1}{2}-\frac{3}{4}=-\frac{1}{4}=E$$
$$h(0)=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}=-E$$
$$h(1)=\frac{1}{2}-\frac{3}{4}=-\frac{1}{4}=E$$

Ebből

$$\|h\|_\infty=\frac{1}{4}=|E|.$$

Tehát az egyenletesen legjobban közelítő legfeljebb elsőfokú polinom nulladfokú. Mivel f páros függvény, így p_1 is az lesz.

$$p_1(x)=\frac{3}{4}, \quad E_1(f)=\frac{1}{4}$$

29. Az alternáló pontok tétele segítségével keressük az egyenletesen legjobban közelítő elsőfokú polinomot. A polinom fokszámához képest legalább kettővel több alternáló pontot kell keresnünk, azaz legalább hármat. Rendszerint elég pontosan kettővel több, a két szélső az intervallum két széle. Ha ezzel a megközelítéssel nem kapunk eredményt, akkor vagy több alternáló pontot kell keresnünk vagy az intervallumok széle nem alternáló pont. Ezt végigkövethetjük az 26. feladatnál. Az alternáló pontokat $x_0=0$, x_1 és $x_2=1$ alakban, a polinomot $p_1(x)=ax+b$ alakban keressük, E az érték, amivel alternál a hibafüggvény.

Írjuk fel az alternálás egyenleteit.

$$(1) \quad f(x_0)-p_1(x_0)=e^0-(a\cdot 0+b)=E$$
$$(2) \quad f(x_1)-p_1(x_1)=e^{x_1}-(a\cdot x_1+b)=-E$$
$$(3) \quad f(x_2)-p_1(x_2)=e^1-(a\cdot 1+b)=E$$

ezzel három egyenletet kaptunk a négy ismeretlenhez. Mivel a függvényünk deriválható, ezért a hibafüggvénynek a belső x_1 pontban szélsőértéke van. Erre írjuk fel a 4. egyenletet.

$$(4)\ \ f'(x_1) - p_1'(x_1) = e^{x_1} - a = 0$$

A kapott nemlineáris egyenletrendszer, amit meg kell oldanunk

$$\begin{array}{lr} (1) & 1 - b = E \\ (2) & e^{x_1} - a \cdot x_1 - b = -E \\ (3) & e - a - b = E \\ (4) & e^{x_1} - a = 0. \end{array}$$

$$\begin{aligned} (3) - (1) \quad e - 1 - a = 0 \ &\rightarrow \ a = e - 1 \approx 1,7183 \\ (4) \quad e^{x_1} - a = 0 \ &\rightarrow \ x_1 = \ln(a) = \ln(e-1) \approx 0,5413 \end{aligned}$$

Már csak két ismeretlent kell meghatároznunk.

$$\begin{aligned} (1) + (2) \quad 1 - b + e - 1 - (e-1)\ln(e-1) - b &= 0 \\ 2b &= e - (e-1)\ln(e-1) \\ b &= \frac{1}{2}(e - (e-1)\ln(e-1)) \approx 0,8941 \end{aligned}$$

$$(1) \quad E = 1 - b = 1 - \frac{1}{2}(e - (e-1)\ln(e-1)) \approx 0,1059$$

Sejtésünk:

$$p_1(x) = (e-1)x + 0,8941, \quad E_1(f) = 0,1059.$$

Ellenőrizzük az alternáló pontok tételének állítását. A

$$h(x) = e^x - (e-1)x - 0,8941$$

hibafüggvény végtelen normáját kell meghatároznunk.

$$h'(x) = e^x - (e-1) = 0 \ \rightarrow \ x_1 = \ln(e-1) \approx 0,5413,$$

így a hibafüggvénynek a $[0;1]$ intervallumon csak a $0,\ \ln(e-1), 1$ a szélsőértékhelyei. Helyettesítsünk a hibafüggvénybe.

$$\begin{aligned} h(0) &= e^0 - b = 1 - b = E \\ h(\ln(e-1)) &= e^{\ln(e-1)} - (e-1)\ln(e-1) - b = \\ &= e - 1 - (e-1)\ln(e-1) - b = -E \\ h(1) &= e - (e-1) - b = 1 - b = E \end{aligned}$$

Ebből

$$\|h\|_\infty = 0,1059 = |E|.$$

Megfigyelhetjük, hogy a behelyettesítés egyenletei megegyeznek az alternáló pont keresés egyenleteivel. Amikor megkaptuk a hibafüggvény lehetséges $0,\ \ln(e-1), 1$ szélsőérték helyeit, már tudjuk, hogy jó a sejtésünk, hiszen őket kaptuk meg az $(1)-(4)$ egyenletek megoldásaként. Tehát

$$p_1(x) = (e-1)x + 0,8941, \quad E_1(f) = 0,1059.$$

30. Ez a feladat általánosan is megoldható, ha egy megadott egy főegyütthatós polinomhoz eggyel alacsonyabb fokszámú polinom altérből keresünk egyenletesen legjobban közelítő polinomot a $[-1;1]$ intervallumon. A megoldáshoz a Csebisev polinom tulajdonságát használjuk fel.
A $[-1;1]$ intervallumon a $p_1(x)$ egyenletesen legjobban közelítő elsőfokú polinomra

$$\|x^2+2x-p_1(x)\|_\infty = \min\{\|x^2+2x-p_1(x)\| : p_1 \in P_1\} = \|\widetilde{T}_2\|_\infty.$$

A Csebisev polinom és az egy főegyütthatós Csebisev polinom

$$\begin{aligned} T_2(x) &= 2x\cdot x-1 \\ \widetilde{T}_2(x) &= x^2-\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Az approximációs feladat megoldása

$$x^2+2x-p_1(x) = x^2-\frac{1}{2} \quad\rightarrow\quad p_1(x) = x^2+2x-\left(x^2-\frac{1}{2}\right) = 2x+\frac{1}{2}.$$

A közelítés hibája

$$E_1(f) = \|\widetilde{T}_2\|_\infty = \frac{1}{2}.$$

31. A feladat megoldásához a Csebisev polinom tulajdonságát használjuk fel. A $[-1;1]$ intervallumon a $p_2(x)$ egyenletesen legjobban közelítő másodfokú polinomra

$$\|x^3+x+1-p_2(x)\|_\infty = \min\{\|x^3+x+1-p_2(x)\| : p_2 \in P_2\} = \|\widetilde{T}_3\|_\infty.$$

A Csebisev polinom és az egy főegyütthatós Csebisev polinom

$$\begin{aligned} T_2(x) &= 2x\cdot x-1 \\ T_3(x) &= 2x\cdot(2x^2-1)-x = 4x^3-3x \\ \widetilde{T}_3(x) &= x^3-\frac{3}{4}\,x. \end{aligned}$$

Az approximációs feladat megoldása

$$x^3+x+1-p_2(x) = x^3-\frac{3}{4}\,x \quad\rightarrow\quad p_2(x) = x^3+x+1-\left(x^3-\frac{3}{4}x\right) = \frac{1}{4}x+1.$$

A közelítés hibája

$$E_2(f) = \|\widetilde{T}_3\|_\infty = \frac{1}{4}.$$

Mivel az egyenletesen legjobban közelítő legfeljebb másodfokú polinom elsőfokú, ezért az elsőfokú közelítő polinom is ez.

$$p_1(x) = \frac{1}{4}\,x+1, \quad E_1(f) = \|\widetilde{T}_3\|_\infty = \frac{1}{4}.$$

Azért ilyen speciális a megoldás, mert a T_3 Csebisev polinom páratlan függvény és a közelítendő függvénynek nincs x^2 -es tagja.

32. A feladat megoldásához a Csebisev polinom tulajdonságát használjuk fel. A feladat speciális, mert a közelítendő függvénynek és a T_4 Csebisev polinomnak sincs x^3 -ös tagja. A $[-1;1]$ intervallumon a $p_3(x)$ egyenletesen legjobban közelítő legfeljebb harmadfokú polinom másodfokú lesz.

$$\|x^4+x^2+1-p_3(x)\|_\infty = \min\{\|x^4+x^2+1-p_3(x)\| : p_3 \in P_3\} = \|\widetilde{T}_3\|_\infty.$$

A Csebisev polinom és az egy főegyütthatós Csebisev polinom

$$\begin{aligned}
T_2(x) &= 2x \cdot x - 1 \\
T_3(x) &= 2x \cdot (2x^2 - 1) - x = 4x^3 - 3x \\
T_4(x) &= 2x \cdot (4x^3 - 3x) - (2x^2 - 1) = 8x^4 - 8x^2 + 1 \\
\widetilde{T}_4(x) &= x^4 - x^2 + \frac{1}{8}.
\end{aligned}$$

Az approximációs feladat megoldása

$$\begin{aligned}
x^4 + x^2 + 1 - p_3(x) &= x^4 - x^2 + \frac{1}{8} \\
p_3(x) &= x^4 + x^2 + 1 - \left(x^4 - x^2 + \frac{1}{8}\right) = 2x^2 + \frac{7}{8}.
\end{aligned}$$

A közelítés hibája

$$E_3(f) = \|\widetilde{T}_4\|_\infty = \frac{1}{8}.$$

Mivel az egyenletesen legjobban közelítő legfeljebb harmadfokú polinom másodfokú, ezért a másodfokú közelítő polinom is ez.

$$p_2(x) = 2x^2 + \frac{7}{8}, \quad E_2(f) = \|\widetilde{T}_4\|_\infty = \frac{1}{8}.$$

33. Ha az alternáló pontok tétele alapján írjuk fel a nemlineáris egyenletrendszert, azt nincs esélyünk megoldani, ezért más megoldást választunk. A feladatot visszavezetjük a $[-1;1]$ -re felírt approximációra és a Csebisev polinomok tulajdonságaira. Tekintsük azt a lineáris transzformációt, mely a $[-1;1]$ intervallumot a $[0;1]$ -be viszi.

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}\,x + \frac{1}{2}$$

Illetve az inverze

$$\varphi^{-1}(y) = 2y - 1.$$

Keressük azt a $q_2(y) \in P_2$ másodfokú polinomot, melyre az

$$\|y^3 - q_2(y)\|_{C[0;1]} = \max\{\, |y^3 - q_2(y)| : \, y \in [0;1]\}$$

kifejezés minimális.

Létezik $y_1, y_2, y_3 \in [0;1]$ és $x_i = \varphi^{-1}(y_i) \in [-1;1]$ $(i = 1, 2, 3)$, melyre

$$\begin{aligned}
y^3 - q_2(y) = \prod_{i=1}^{3}(y - y_i) &= \prod_{i=1}^{3}(\varphi(x) - \varphi(x_i)) = \\
&= \prod_{i=1}^{3}\left[\left(\frac{1}{2}\,x + \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}\,x_i + \frac{1}{2}\right)\right] = \\
&= \frac{1}{8}\prod_{i=1}^{3}(x - x_i) = \frac{1}{8}(x^3 - p_2(x)).
\end{aligned}$$

Az $\|x^3 - p_2(x)\|_{C[-1;1]}$ minimális pontosan akkor, ha $\|y^3 - q_2(y)\|_{C[0;1]}$ minimális. A minimum értéke $\frac{1}{8}$ -szorosa. A $[-1;1]$ -en vett minimum feladat megoldása a $\widetilde{T}_3(x)$ egy főegyütthatós harmadfokú Csebisev polinom.

$$x^3 - p_2(x) = \widetilde{T}_3(x) = x^3 - \frac{3}{4}\,x$$

Innen

$$\begin{aligned}
y^3 - q_2(y) &= \frac{1}{8}\,\widetilde{T}_3(x)\\
q_2(y) &= y^3 - \frac{1}{8}\,\widetilde{T}_3(x) = y^3 - \frac{1}{8}\,\widetilde{T}_3(\varphi^{-1}(y)) =\\
&= y^3 - \frac{1}{8}\,((2y-1)^3 - \frac{3}{4}\,(2y-1)) =\\
&= y^3 - \frac{1}{8}\,(8y^3 - 12y^2 + 6y - 1 - \frac{3}{2}\,y + \frac{3}{4}) =\\
&= y^3 - \frac{1}{8}\,(8y^3 - 12y^2 + \frac{9}{2}\,y - \frac{1}{4}) =\\
&= \frac{3}{2}\,y^2 - \frac{9}{16}\,y + \frac{1}{32}
\end{aligned}$$

Tehát az egyenletesen legjobban közelítő másodfokú polinom

$$q_2(y) = \frac{3}{2}\,y^2 - \frac{9}{16}\,y + \frac{1}{32}.$$

A közelítés hibája

$$E_2(f) = \frac{1}{8}\,\|\widetilde{T}_3(x)\| = \frac{1}{32}.$$

34. A feladat szerint a $\{-1, 0, 1\}$ alternáló pont közelítésekből indulunk és a Remez algoritmus egy lépését végezzük el. A közelítő polinomot $p_1(x) = ax + b$ alakban keressük és E az érték, amivel alternál a hibafüggvény. Írjuk fel az alternálás egyenleteit!

$$\begin{array}{ll}
(1) & f(-1) - p_1(-1) = |-1| - (a\cdot(-1) + b) = E\\
(2) & f(0) - p_1(0) = |0| - (a\cdot 0 + b) = -E\\
(3) & f(1) - p_1(1) = |1| - (a\cdot 1 + b) = E
\end{array}$$

A kapott egyenletrendszer lineáris. Bár nagyon hasonlít az alternáló pontok tételének alkalmazásakor felírt egyenletrendszerhez, de ott az alappontok ismeretlenek (vagy legalábbis egy részük), így ott általában nemlineáris egyenletrendszert kapunk.

$$\begin{array}{ll}
(1) & 1 + a - b = E\\
(2) & -b = -E \;\;\rightarrow\;\; b = E\\
(3) & 1 - a - b = E.
\end{array}$$

Az egyenletrendszert megoldva

$$\begin{array}{ll}
(1)-(3) & 2a = 0 \;\;\rightarrow\;\; a = 0\\
(1) & 1 - b = b \;\;\rightarrow\;\; 2b = 1 \;\;\rightarrow\;\; b = \dfrac{1}{2}.
\end{array}$$

Az algoritmus első lépésében kapott közelítő polinom

$$p_1(x) = \frac{1}{2}.$$

Nézzük meg, hogy leáll-e az algoritmus vagy folytatnunk kell újabb alternáló pont közelítések választásával. A

$$h(x) = |x| - \frac{1}{2}$$

hibafüggvény végtelen normáját kell meghatároznunk. A hibafüggvénynek a $[-1;1]$ intervallumon csak a $-1, 0, 1$ a szélsőértékhelyei.
Helyettesítsünk a hibafüggvénybe.

$$\begin{aligned} h(-1) &= |-1| - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = E \\ h(0) &= |0| - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} = -E \\ h(1) &= |1| - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = E \end{aligned}$$

Mivel

$$\|h\|_\infty = \frac{1}{2} = |E|,$$

ezért az algoritmus leáll, megkaptuk az egyenletesen legjobban közelítő polinomot.

$$p_1(x) = \frac{1}{2}, \quad E_1(f) = |E| = \frac{1}{2}$$

Mivel az algoritmust a valódi alternáló pontokból indítottuk, így egy lépésben megkaptuk a megoldást. A leállást az alternáló pontok tétele biztosítja.

35. A feladat szerint a $\{-1, 0, 1\}$ alternáló pont közelítésekből indulunk és a Remez algoritmus egy lépését végezzük el. A közelítő polinomot $p_1(x) = ax + b$ alakban keressük és E az érték, amivel alternál a hibafüggvény. Írjuk fel az alternálás egyenleteit!

$$\begin{aligned} &(1) \quad & f(-1) - p_1(-1) &= (2\cdot(-1) - 1)^2 - (a\cdot(-1) + b) = E \\ &(2) \quad & f(0) - p_1(0) &= (2\cdot 0 - 1)^2 - (a\cdot 0 + b) = -E \\ &(3) \quad & f(1) - p_1(1) &= (2\cdot 1 - 1)^2 - (a\cdot 1 + b) = E \end{aligned}$$

A kapott egyenletrendszer lineáris. Bár nagyon hasonlít az alternáló pontok tételének alkalmazásakor felírt egyenletrendszerhez, de ott az alappontok ismeretlenek (vagy legalábbis egy részük), így ott általában nemlineáris egyenletrendszert kapunk.

$$\begin{aligned} &(1) \quad & 9 + a - b &= E \\ &(2) \quad & 1 - b &= -E \\ &(3) \quad & 1 - a - b &= E. \end{aligned}$$

Az egyenletrendszert megoldva

$$\begin{aligned} (1) - (3) \quad & 8 + 2a = 0 \;\to\; a = -4 \\ (1) \quad & 5 - b = E \\ (2) \quad & 1 - b = -E \\ (1) + (2) \quad & 6 - 2b = 0 \;\to\; b = 3 \\ (2) \quad & 1 - 3 = -E \;\to\; E = 2 \end{aligned}$$

Az algoritmus első lépésében kapott közelítő polinom

$$p_1(x) = -4x + 3.$$

Nézzük meg, hogy leáll-e az algoritmus vagy folytatnunk kell újabb alternáló pont közelítések választásával. A

$$h(x) = (2x - 1)^2 + 4x - 3 = 4x^2 - 2$$

hibafüggvény végtelen normáját kell meghatároznunk.

$$h'(x) = 8x = 0 \quad \to \quad x_1 = 0,$$

így a hibafüggvénynek a $[-1;1]$ intervallumon csak a $-1, 0, 1$ a szélsőértékhelyei. Helyettesítsünk a hibafüggvénybe.

$$\begin{aligned} h(-1) &= 4 \cdot (-1)^2 - 2 = 2 = E \\ h(0) &= 4 \cdot 0^2 - 2 = -2 = -E \\ h(1) &= 4 \cdot 1^2 - 2 = 2 = E \end{aligned}$$

Mivel

$$\|h\|_\infty = 2 = |E|,$$

ezért az algoritmus leáll, megkaptuk az egyenletesen legjobban közelítő polinomot.

$$p_2(x) = 4x^2 - 2, \quad E_1(f) = |E| = 2$$

Mivel az algoritmust a valódi alternáló pontokból indítottuk, így egy lépésben megkaptuk a megoldást. A leállást az alternáló pontok tétele biztosítja.

36. A feladat szerint a $\{0, \frac{1}{3}, 1\}$ alternáló pont közelítésekből indulunk és a Remez algoritmus egy lépését végezzük el. A közelítő polinomot $p_1(x) = ax + b$ alakban keressük és E az érték, amivel alternál a hibafüggvény. Írjuk fel az alternálás egyenleteit!

$$\begin{aligned} &(1) \qquad f(0) - p_1(0) = 0^2 - (a \cdot 0 + b) = E \\ &(2) \qquad f\left(\frac{1}{3}\right) - p_1\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^2 - \left(a \cdot \frac{1}{3} + b\right) = -E \\ &(3) \qquad f(1) - p_1(1) = 1^2 - (a \cdot 1 + b) = E \end{aligned}$$

A kapott egyenletrendszer lineáris. Bár nagyon hasonlít az alternáló pontok tételének alkalmazásakor felírt egyenletrendszerhez, de ott az alappontok ismeretlenek (vagy legalábbis egy részük), így ott általában nemlineáris egyenletrendszert kapunk.

$$\begin{aligned} &(1) \qquad -b = E \\ &(2) \qquad \frac{1}{9} - a \cdot \frac{1}{3} - b = -E \\ &(3) \qquad 1 - a - b = E. \end{aligned}$$

Az egyenletrendszert megoldva

$$\begin{aligned} (1) - (3) &\qquad -1 + a = 0 \quad \to \quad a = 1 \\ (1) &\qquad -b = E \\ (2) &\qquad -\frac{2}{9} - b = -E \\ (1) + (2) &\qquad -\frac{2}{9} - 2b = 0 \quad \to \quad b = -\frac{1}{9} \quad \to \quad E = \frac{1}{9} \end{aligned}$$

Az algoritmus első lépésében kapott közelítő polinom

$$p_1(x) = x - \frac{1}{9}.$$

Nézzük meg, hogy leáll-e az algoritmus vagy folytatnunk kell újabb alternáló pont közelítések választásával. A

$$h(x) = x^2 - x + \frac{1}{9}$$

hibafüggvény végtelen normáját kell meghatároznunk.

$$h'(x) = 2x - 1 = 0 \quad \to \quad x_1 = \frac{1}{2},$$

így a hibafüggvénynek a $[0;1]$ intervallumon csak a $0, \frac{1}{2}, 1$ a szélsőértékhelyei. Helyettesítsünk a hibafüggvénybe.

$$\begin{aligned} h(0) &= 0^2 - 0 + \frac{1}{9} = \frac{1}{9} = E \\ h\left(\frac{1}{2}\right) &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{9} = -\frac{5}{36} \\ h(1) &= 1^2 - 1 + \frac{1}{9} = \frac{1}{9} = E \end{aligned}$$

Mivel

$$\|h\|_\infty = \left| h\left(\frac{1}{2}\right) \right| = \frac{5}{36} > |E|,$$

ezért az algoritmus folytatódik, új alternáló pont közelítéseket kell keresnünk. Az új pontok

$$\left\{ 0, \frac{1}{2}, 1 \right\}.$$

Úgy választottuk őket, hogy a szélsőértékhely bekerüljön és a hibafüggvény előjelváltása megmaradjon. Ezek már jó alternáló pontok lesznek. Megjegyezzük, hogy a de La Vallée Poussin approximációs tétele alapján $\frac{1}{9} < E_1(f) < \frac{5}{36}$.

37. **1. lépés:** A feladat szerint a $\{0, 1, 2\}$ alternáló pont közelítésekből indulunk és a Remez algoritmus egy lépését végezzük el. A közelítő polinomot $p_1(x) = ax + b$ alakban keressük és E az érték, amivel alternál a hibafüggvény. Írjuk fel az alternálás egyenleteit!

$$\begin{aligned} &(1) \quad f(0) - p_1(0) = \frac{1}{1+0} - (a \cdot 0 + b) = E \\ &(2) \quad f(1) - p_1(1) = \frac{1}{1+1} - (a \cdot 1 + b) = -E \\ &(3) \quad f(2) - p_1(2) = \frac{1}{1+2} - (a \cdot 2 + b) = E \end{aligned}$$

A kapott egyenletrendszer lineáris. Bár nagyon hasonlít az alternáló pontok tételének alkalmazásakor felírt egyenletrendszerhez, de ott az alappontok ismeretlenek (vagy legalábbis egy részük), így ott általában nemlineáris egyenletrendszert kapunk.

$$\begin{aligned} &(1) \quad 1 - b = E \\ &(2) \quad \frac{1}{2} - a - b = -E \\ &(3) \quad \frac{1}{3} - 2a - b = E. \end{aligned}$$

Az egyenletrendszert megoldva

$$\begin{aligned} &(1)-(3) \quad \frac{2}{3} + 2a = 0 \quad \to \quad a = -\frac{1}{3} \\ &(1) \quad 1 - b = E \\ &(2) \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - b = -E \quad \to \quad \frac{5}{6} - b = -E \\ &(1)+(2) \quad \frac{11}{6} - 2b = 0 \quad \to \quad b = \frac{11}{12} \quad \to \quad E = \frac{1}{12} \end{aligned}$$

Az algoritmus első lépésében kapott közelítő polinom

$$p_1(x) = -\frac{1}{3}\,x + \frac{11}{12}.$$

Nézzük meg, hogy leáll-e az algoritmus vagy folytatnunk kell újabb alternáló pont közelítések választásával. A

$$h(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{3}\,x - \frac{11}{12}$$

hibafüggvény végtelen normáját kell meghatároznunk.

$$h'(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{3} = 0 \;\to\; (1+x)^2 = 3 \;\to\; x_1 = \sqrt{3}-1 \approx 0,7321,$$

így a hibafüggvénynek a $[0;2]$ intervallumon csak a 0, $\sqrt{3}-1, 2$ a szélsőértékhelyei. Helyettesítsünk a hibafüggvénybe.

$$\begin{aligned}
h(0) &= \frac{1}{1+0} - \frac{11}{12} = \frac{1}{12} = E \approx 0,0833\\
h(\sqrt{3}-1) &= \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3}\cdot(\sqrt{3}-1) - \frac{11}{12} =\\
&= \frac{4\sqrt{3}+4\sqrt{3}-4-11}{12} = \frac{8\sqrt{3}-15}{12} \approx -00953\\
h(2) &= \frac{1}{1+2} + \frac{2}{3} - \frac{11}{12} = \frac{1}{12} = E
\end{aligned}$$

Mivel

$$\|h\|_\infty = |h(\sqrt{3})-1| = \frac{8\sqrt{3}-15}{12} > |E|,$$

ezért az algoritmus folytatódik, új alternáló pont közelítéseket kell keresnünk. Az új pontok

$$\{\,0,\ \sqrt{3}-1,\ 2\}.$$

Úgy választottuk őket, hogy a szélsőértékhely bekerüljön és a hibafüggvény előjelváltása megmaradjon.

2. lépés: A $\{\,0,\ \sqrt{3}-1, 2\}$ alternáló pont közelítésekből indulunk és a Remez algoritmus egy lépését végezzük el. A közelítő polinomot $p_1(x) = ax+b$ alakban keressük és E az érték, amivel alternál a hibafüggvény. Írjuk fel az alternálás egyenleteit!

$$\begin{aligned}
&(1) & f(0) - p_1(0) &= \frac{1}{1+0} - (a\cdot 0 + b) = E\\
&(2) & f(\sqrt{3}-1) - p_1(\sqrt{3}-1) &= \frac{1}{\sqrt{3}} - (a\cdot(\sqrt{3}-1)+b) = -E\\
&(3) & f(2) - p_1(2) &= \frac{1}{1+2} - (a\cdot 2 + b) = E
\end{aligned}$$

A kapott egyenletrendszer lineáris. Bár nagyon hasonlít az alternáló pontok tételének alkalmazásakor felírt egyenletrendszerhez, de ott az alappontok ismeretlenek (vagy legalábbis egy részük), így ott általában nemlineáris egyenletrendszert kapunk.

$$\begin{aligned}
&(1) & 1 - b &= E\\
&(2) & \frac{1}{\sqrt{3}} - a(\sqrt{3}-1) - b &= -E\\
&(3) & \frac{1}{3} - 2a - b &= E.
\end{aligned}$$

Az egyenletrendszert megoldva

$$\begin{array}{rl}
(1)-(3) & \dfrac{2}{3}+2a=0 \;\rightarrow\; a=-\dfrac{1}{3} \\
(1) & 1-b=E \\
(2) & \dfrac{\sqrt{3}}{3}+\dfrac{\sqrt{3}-1}{3}-b=-E \;\rightarrow\; \dfrac{2\sqrt{3}-1}{3}-b=-E \\
(1)+(2) & \dfrac{2\sqrt{3}+2}{3}-2b=0 \;\rightarrow\; b=\dfrac{\sqrt{3}+1}{3} \;\rightarrow\; E=\dfrac{2-\sqrt{3}}{3}
\end{array}$$

Az algoritmus második lépésében kapott közelítő polinom

$$p_1(x)=-\frac{1}{3}\,x+\frac{\sqrt{3}+1}{3}.$$

Nézzük meg, hogy leáll-e az algoritmus vagy folytatnunk kell újabb alternáló pont közelítések választásával. A

$$h(x)=\frac{1}{1+x}+\frac{1}{3}\,x-\frac{\sqrt{3}+1}{3}$$

hibafüggvény végtelen normáját kell meghatároznunk.

$$h'(x)=-\frac{1}{(1+x)^2}+\frac{1}{3}=0 \;\rightarrow\; (1+x)^2=3 \;\rightarrow\; x_1=\sqrt{3}-1\approx 0,7321$$

így a hibafüggvénynek a $[0;2]$ intervallumon csak a $0,\ \sqrt{3}-1, 2$ a szélsőértékhelyei. Helyettesítsünk a hibafüggvénybe.

$$\begin{aligned}
h(0)&=\frac{1}{1+0}-\frac{\sqrt{3}+1}{3}=\frac{2-\sqrt{3}}{3}=E\approx 0,0893\\
h(\sqrt{3}-1)&=\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{3}\cdot(\sqrt{3}-1)-\frac{\sqrt{3}+1}{3}=\\
&=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{3}-3-\sqrt{3}-1}{3}=\frac{\sqrt{3}-2}{3}=-E\\
h(2)&=\frac{1}{1+2}+\frac{2}{3}-\frac{\sqrt{3}+1}{3}=\frac{2-\sqrt{3}}{3}=E
\end{aligned}$$

Mivel

$$\|h\|_\infty=\frac{2-\sqrt{3}}{3}=|E|,$$

ezért az algoritmus leáll, megkaptuk az egyenletesen legjobban közelítő polinomot és annak hibáját.

$$p_1(x)=-\frac{1}{3}\,x+\frac{\sqrt{3}+1}{3},\quad E_1(f)=|E|=\frac{2-\sqrt{3}}{3}$$

A leállást az alternáló pontok tétele biztosítja.

11. fejezet

Numerikus integrálás

11.1. Feladatok

11.1.1. Interpolációs típusú kvadratúra formulák

1. Interpolációs típusú-e az alábbi kvadratúra formula? Miért?

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx \frac{1}{4}\left[f(-1) + 2\cdot f(0) + f(1)\right]$$

2. Interpolációs típusú-e az alábbi kvadratúra formula? Miért?

$$\int_{0}^{1} f(x)\,dx \approx \frac{1}{2}\left[f\left(\frac{1}{3}\right) + f\left(\frac{2}{3}\right)\right]$$

3. Interpolációs típusú-e az alábbi kvadratúra formula? Miért?

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx \frac{1}{2}\left[f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right]$$

4. Interpolációs típusú-e az alábbi kvadratúra formula? Miért?

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

5. Adjuk meg A és B értékét úgy, hogy az

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx \approx A\cdot f(a) + B\cdot f'(b)$$

közelítés a lehető legmagasabb fokszámig pontos legyen!

6. Tekintsük a $[-a;\, a]$ intervallumon a 3 alappontú nyílt Newton–Cotes-formulát. Írjuk fel ennek képletét, majd bizonyítsuk milyen polinomokra pontos!

7. Tekintsük a $[-1;\, 1]$ intervallumon a 6. feladatban meghatározott nyílt Newton–Cotes-formulát. Az alappontok $\left(-\frac{1}{2},\ 0,\ \frac{1}{2}\right)$, az együtthatók (súlyok) $\left(\frac{2}{3},\ -\frac{1}{3},\ \frac{2}{3}\right)$.
Készítsünk olyan kvadratúra formulát, melyben $-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ helyett $-\alpha, \alpha$ legyen alappont és a 0 alapponthoz tartozó súly 0 legyen!

11.1.2. Érintő-, trapéz-, Simpson-formulák és összetett formuláik

8. Számítsuk ki az

$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$$

integrál racionális közelítését érintő-, trapéz- és Simpson-formulával!

9. Számítsuk ki az

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\, dx = \ln 2$$

racionális közelítését érintő-, trapéz- és Simpson-formulával! Adjuk meg a hibabecsléseket!

10. Határozzuk meg az

$$\int_2^5 \sqrt{x-1}\, dx$$

integrál közelítő értékét trapéz-formulával! Mekkora a közelítés hibája?

11. Határozzuk meg az

$$\int_1^2 \frac{1}{x^2}\, dx$$

integrál közelítő értékét Simpson-formulával! Mekkora a közelítés hibája?

12. Írjuk fel az érintő- és trapéz formulát az

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\, dx = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$$

integrál közelítésére és becsüljük a közelítések hibáit!

13. Határozzuk meg az

$$\int_{-1}^1 2^x dx$$

integrál pontos értékét, majd közelítő értékét Simpson-formulával.
Mekkora az integrálközelítés hibája? Adjunk becslést $\ln 2$ értékére.

14. Hány formulát kell alkalmaznunk, ha összetett trapéz- illetve Simpson-formulával az

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\, dx = \ln 2$$

értékét 10^{-4} pontossággal szeretnénk közelíteni?

15. Számítsuk ki az

$$\int_{-1}^1 2^{-x} dx$$

racionális közelítését a Simpson-formulával!
Hány formulát kell alkalmazni, ha összetett Simpson-formulával 10^{-3} pontosságot szeretnénk elérni?

16. Adjuk meg a $c_0, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ paramétereket úgy, hogy az

$$\int_{-2}^2 f(x)\, dx \approx c_0 f(-1) + c_1 f(0) + c_2 f(1)$$

kvadratúra formula $\forall\ f \in P_2$ -re pontos legyen!

11.1.3. Csebisev-típusú kvadratúra formulák

17. Írjunk fel egy $n = 2$ alappontú Csebisev-típusú kvadratúra formulát az

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$$

integrál közelítésére!

18. Írjunk fel egy $n = 2$ alappontú Csebisev-típusú kvadratúra formulát az

$$\int_{0}^{1} f(x)\sqrt{x}\,dx$$

integrál közelítésére!

19. Határozzuk meg az

$$\int_{-1}^{1} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

integrál pontos értékét Csebisev–Gauss-típusú kvadratúra formulával!

20. Határozzuk meg az

$$\int_{-1}^{1} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

integrál pontos értékét Csebisev–Gauss-típusú kvadratúra formulával!

21. Adjuk meg az

$$\int_{-1}^{1} \frac{x^4}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

integrál pontos értékét Csebisev–Gauss-típusú kvadratúra formulával!
Indokoljuk a számolást!

11.1.4. Gauss-típusú kvadratúra formulák

22. Írjuk fel a 7. feladatban kapott kvadratúra formulát a $[-a;\, a]$ intervallumra és készítsük el a hibaformuláját! Transzformáljuk át az $[a;\, b]$ intervallumra az eredményt! Hasonlítsuk össze a Simpson- és a transzformált Gauss–Legendre-formula hibáját! Melyikből gazdaságosabb összetett formulát alkalmazni, ha adott pontosságot szeretnénk elérni?

23. Határozzuk meg az

$$\int_{-1}^{1} \frac{x^4}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

integrál pontos értékét Gauss-típusú kvadratúra formulával! Indokoljuk a számolást!

24. Írjunk fel egy $n = 2$ alappontú Gauss-típusú kvadratúra formulát (Legendre-Gauss kvadratúra formula) az

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$$

integrál közelítésére!

Vissza a tartalomhoz

25. Írjunk fel egy $n = 2$ alappontú Gauss-típusú kvadratúra formulát ($w(x) = x^2$ legyen a súlyfüggvény) az

$$\int_{-1}^{1} f(x)x^2\,dx$$

integrál közelítésére!

26. Írjunk fel egy $n = 2$ alappontú Gauss-típusú kvadratúra formulát! ($w(x) = x$ legyen a súlyfüggvény) az

$$\int_{0}^{1} f(x)x\,dx$$

integrál közelítésére!

27. Írjunk fel egy $n = 2$ alappontú Gauss-típusú kvadratúra formulát! ($w(x) = \sqrt{x}$ legyen a súlyfüggvény) az

$$\int_{0}^{1} f(x)\sqrt{x}\,dx$$

integrál közelítésére!

11.2. Megoldások

11.2.1. Interpolációs típusú kvadratúra formulák

1. Választhatunk, hogy a definíció vagy a pontossági tétel segítségével oldjuk meg a feladatot.

a) Definícióval ellenőriznünk kell, hogy

$$A_k = \int_{-1}^{1} \ell_k(x)\,dx \quad (k = 0, 1, 2).$$

Például $k = 0$-ra

$$A_0 = \int_{-1}^{1} \ell_0(x)\,dx = \int_{-1}^{1} \frac{(x-0)(x-1)}{(-1-0)(-1-1)}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\int_{-1}^{1} \left(x^2 - x\right)\,dx =$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{2}\cdot\left[-\frac{1}{6} - \frac{5}{6}\right] = -\frac{1}{2} \neq \frac{1}{4}.$$

A többi alappolinomra nem is kell kiszámolnunk az integrálokat, ebből már látszik, hogy nem lehet interpolációs típusú a kvadratúra formula.

b) A pontossági tétellel ellenőriznünk kell, hogy a kvadratúra formula pontos-e 3 alappont esetén a másodfokú polinomokra. Elég a P_2 polinom altér $1, x, x^2$ bázisára megnéznünk a pontosságot, innen az integrál linearitása miatt minden legfeljebb másodfokú polinomra pontos lesz. Az előző megoldási módhoz képest most egyszerűbb integrálokat kell kiszámolnunk.

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} 1\,dx = 2 &\neq \frac{1}{4}\cdot[1+1+1] &= \frac{3}{4}\\
\int_{-1}^{1} x\,dx = 0 &= \frac{1}{4}\cdot[-1+0+1] &= 0\\
\int_{-1}^{1} x^2\,dx = \frac{2}{3} &\neq \frac{1}{4}\cdot[1+0+1] &= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Látjuk, hogy $1, x^2$ -re nem pontos a kvadratúra formula, így nem interpolációs típusú.

2. Választhatunk, hogy a definíció vagy a pontossági tétel segítségével oldjuk meg a feladatot.

a) Definícióval ellenőriznünk kell, hogy

$$A_k = \int_0^1 \ell_k(x)\,dx \ \ (k = 0, 1).$$

$k = 0$-ra

$$A_0 = \int_0^1 \ell_0(x)\,dx = \int_0^1 \frac{(x-\frac{2}{3})}{(\frac{1}{3}-\frac{2}{3})}\,dx = (-3)\cdot\int_0^1 \left(x-\frac{2}{3}\right)dx$$
$$= (-3)\cdot\left[\frac{x^2}{2}-\frac{2}{3}x\right]_0^1 = (-3)\cdot\left[-\frac{1}{6}-0\right] = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

$k = 1$-re

$$A_0 = \int_0^1 \ell_1(x)\,dx = \int_0^1 \frac{(x-\frac{1}{3})}{(\frac{2}{3}-\frac{2}{3})}\,dx = 3\cdot\int_0^1 \left(x-\frac{1}{3}\right)dx$$
$$= 3\cdot\left[\frac{x^2}{2}-\frac{1}{3}x\right]_0^1 = 3\cdot\left[\frac{1}{6}-0\right] = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Ebből látszik, hogy interpolációs típusú a kvadratúra formula.

b) A pontossági tétellel ellenőriznünk kell, hogy a kvadratúra formula pontos-e 2 alappont esetén az elsőfokú polinomokra. Elég a P_1 polinom altér $1, x$ bázisára megnéznünk. Az előző megoldási módhoz képest most egyszerűbb integrálokat kell kiszámolnunk.

$$\int_0^1 1\,dx = 1 = \frac{1}{2}\cdot[1+1] = 1$$
$$\int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right] = \frac{1}{2}$$

Látjuk, hogy $1, x$ -re pontos a kvadratúra formula, így interpolációs típusú.

3. A pontossági tétellel oldjuk meg a feladatot. Ellenőriznünk kell, hogy a kvadratúra formula pontos-e 2 alappont esetén az elsőfokú polinomokra. Elég a P_1 polinom altér $1, x$ bázisára megnéznünk.

$$\int_{-1}^1 1\,dx = 2 \neq \frac{1}{2}\cdot[1+1] = 1$$
$$\int_{-1}^1 x\,dx = 0 = \frac{1}{2}\cdot\left[-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right] = 0$$

Elég lett volna az 1 -re nézni a pontosságot. Látjuk, hogy nem pontos a kvadratúra formula, így nem interpolációs típusú.

4. A pontossági tétellel oldjuk meg a feladatot. Ellenőriznünk kell, hogy a kvadratúra formula pontos-e 2 alappont esetén az elsőfokú polinomokra. Elég a P_1 polinom altér $1, x$ bázisára megnéznünk.

$$\int_{-1}^1 1\,dx = 2 = 1+1 = 2$$
$$\int_{-1}^1 x\,dx = 0 = -\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}} = 0$$

Tehát a kvadratúra formula interpolációs típusú.

Ez a formula azonban ennél többet tud. Általában egy két alappontú kvadratúra formulában

$$A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1)$$

négy paraméterünk van. Erre magasabb fokszámú pontosság is elvárható, maximálisan harmadfokú polinomokra lehet pontos. Vizsgáljuk meg a példánkban szereplő formulát, teljesíti-e?

$$\int_{-1}^{1} x^2\,dx = \frac{2}{3} = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{2}{3}$$
$$\int_{-1}^{1} x^3\,dx = 0 = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 = -\frac{1}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} = 0$$

Tehát a kvadratúra formula a maximális fokszámig, harmadfokú polinomokra pontos. Ez egy Gauss-típusú kvadratúra formula, amivel a későbbiekben még foglalkozunk.

5. A pontossági tétellel meg kell vizsgálnunk, hogy a kvadratúra formula milyen fokszámú polinomokra pontos, ez milyen A és B értékeket határoz meg. Elég a polinom altér $1, x$ stb. bázisára megnéznünk.

$$\int_a^b 1\,dx = b - a = A$$
$$\int_a^b x\,dx = \frac{1}{2}\,(b^2 - a^2) = A \cdot a + B$$

Innen

$$A = b - a$$
$$B = \frac{1}{2}\,(b^2 - a^2) - a\,(b - a) = \frac{1}{2}\,(b - a)^2.$$

Tehát a kapott formula az elsőfokú polinomokra pontos.

6. A $[-a; a]$ intervallumon a 3 pontos nyílt Newton–Cotes-formula alappontjai az egyenletes felosztásból adódóan

$$x_0 = -\frac{a}{2}, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{a}{2}.$$

A kvadratúra formula együtthatóit az

$$A_k = \int_{-a}^{a} \ell_k(x)\,dx, \quad k = 0, 1, 2$$

képletből számíthatjuk, ahol ℓ_k a k. Lagrange-alappolinomot jelöli. Elegendő egyetlen integrált kiszámolnunk, mert a Newton-Cotes formulák együtthatóira ismert az alábbi két összefüggés.

$$A_0 = A_2, \quad A_0 + A_1 + A_2 = a - (-a) = 2a.$$

Az integrál szimmetriája miatt A_1-et számoljuk. Érdemes a paramétereket tartalmazó integrált Maple programmal ellenőrizni.

$$\begin{aligned}
A_1 &= \int_{-a}^{a} \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}\,dx = \int_a^b \frac{(x + \frac{a}{2})(x - \frac{a}{2})}{(0 + \frac{a}{2})(0 - \frac{a}{2})}\,dx = \\
&= -\frac{4}{a^2} \cdot \int_{-a}^{a} \left(x + \frac{a}{2}\right)\left(x - \frac{a}{2}\right)\,dx = -\frac{4}{a^2} \cdot \int_{-a}^{a} \left(x^2 - \frac{a^2}{4}\right)\,dx = \\
&= -\frac{4}{a^2} \cdot \left[\frac{x^3}{3} - \frac{a^2}{4} \cdot x\right]_{-a}^{a} = -\frac{4}{a^2} \cdot \left(2 \cdot \frac{a^3}{3} - \frac{a^3}{2}\right) = -\frac{4}{a^2} \cdot \frac{1}{6}\,a^3 = \\
&= -\frac{2}{3}\,a
\end{aligned}$$

Innen

$$A_0 + A_2 = 2a - A_1 = 2a - \left(-\frac{2}{3}\,a\right) = \frac{8}{3}a \quad \Rightarrow \quad A_0 = A_2 = \frac{4}{3}\,a.$$

Tehát

$$N_3(f,a) := \frac{4}{3}\,a \cdot f\left(-\frac{a}{2}\right) - \frac{2}{3}\,a \cdot f(0) + \frac{4}{3}\,a \cdot f\left(\frac{a}{2}\right) \approx \int_{-a}^{a} f(x)\,dx.$$

A kontrukcióból következik, hogy minden legfeljebb másodfokú polinomra pontos az N_3 formula. Ellenőrizzük, hogy az $f(x) = x^3$ függvényre is pontos-e.

$$\begin{aligned} N_3(x^3,a) &= \frac{4}{3}\,a \cdot \left(-\frac{a}{2}\right)^3 - \frac{2}{3}\,a \cdot (0)^3 + \frac{4}{3}\,a \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^3 = \\ &= \frac{4}{3}\,a \cdot \left(\left(-\frac{a}{2}\right)^3 + \left(\frac{a}{2}\right)^3\right) = 0 = \int_{-a}^{a} x^3\,dx \end{aligned}$$

Ezek után elmondhatjuk, hogy minden legfeljebb harmadfokú polinomra pontos az N_3 formula.

7. A $[-1;\,1]$ intervallum esetén a 6. feladatban felírt N_3 formula

$$N_3(f,1) := \frac{4}{3} \cdot f\left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{2}{3} \cdot f(0) + \frac{4}{3} \cdot f\left(\frac{1}{2}\right) \approx \int_{-1}^{1} f(x)\,dx.$$

Feladatunk olyan kvadratúra formula készítése, ahol a $-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ alappontok helyett a $-\alpha, \alpha$ alappontokat használjuk és a 0-hoz tartozó együttható (súly) nulla. Írjuk fel ennek az együtthatónak a számítási módját a 0-hoz tartozó Lagrange-alappolinomot felhasználva!

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_{-1}^{1} \frac{(x+\alpha)(x-\alpha)}{(0+\alpha)(0-\alpha)}\,dx = -\frac{1}{\alpha^2} \cdot \int_{-1}^{1} (x+\alpha)(x-\alpha)\,dx = \\ &= -\frac{1}{\alpha^2} \cdot \int_{-1}^{1} (x^2-\alpha^2)\,dx = -\frac{1}{\alpha^2} \cdot \left[\frac{2}{3} - 2\alpha^2\right] = 2 - \frac{2}{3\alpha^2} = 0 \\ &\Rightarrow \quad \alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

Tehát a két alappontunk az új formulában $-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}$. Innen az alappontok szimmetriája miatt a két együttható is megegyezik, összegük pedig az intervallum hossza, azaz 2.
A kapott kvadratúra formula alakja

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \approx \int_{-1}^{1} f(x)\,dx.$$

Már az alappontokból ráismerhettünk volna, hogy a két alappontú Legendre–Gauss-kvadratúra formulát kaptuk meg, mellyel már a 4. feladatban találkoztunk.

11.2.2. Érintő-, trapéz-, Simpson-formulák és összetett formuláik

8. Az integrál pontos értéke $\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$.

Az érintő-formula értéke

$$E(f) = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

A trapéz-formula értéke

$$T(f) = \frac{1}{2} \cdot [\,0^2 + 1^2] = \frac{1}{2}.$$

A Simpson-formula értéke

$$S(f) = \frac{1}{6} \cdot \left[0^2 + 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2 \right] = \frac{1}{6} \cdot 2 = \frac{1}{3}.$$

Látjuk, hogy a Simpson-formula az x^2 polinom integráljára pontos értéket ad. Mivel a Simpson formulának 3 alappontja van, ezért minden legfeljebb másodfokú polinomra pontos integrálközelítést ad. Ellenőrizhetjük, hogy a Simpson-formula ennél többet tud, a harmadfokú polinomokra is pontos.

9. **a)** Az érintő-formula értéke

$$E(f) = 1 \cdot \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}.$$

Az érintő-formula hibabecsléséhez szükségünk van az $M_2 = \|f''\|_\infty$ értékre.

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$
$$f''(x) = \frac{2}{x^3} \quad \to \quad |f''(x)| \le 2 = M_2, \ \ \forall \ x \in [1;2]$$

A érintő-formula hibabecslése

$$\left| \ln 2 - \frac{3}{2} \right| \le \frac{(2-1)^3}{24} M_2 = \frac{1}{12}.$$

b) A trapéz-formula értéke

$$T(f) = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{1}{1} + \frac{1}{2} \right] = \frac{3}{4}.$$

Az trapéz-formula hibabecslése

$$\left| \ln 2 - \frac{3}{4} \right| \le \frac{(2-1)^3}{12} M_2 = \frac{1}{6}.$$

c) A Simpson-formula értéke

$$S(f) = \frac{1}{6} \cdot \left[\frac{1}{1} + 4 \cdot \frac{1}{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2} \right] = \frac{1}{6} \cdot \left[1 + \frac{8}{3} + \frac{1}{2} \right] = \frac{6+16+3}{36} = \frac{25}{36}.$$

A Simpson-formula hibabecsléséhez szükségünk van az $M_4 = \|f^{(4)}\|_\infty$ értékre.

$$f^{(3)}(x) = -\frac{6}{x^3}$$
$$f^{(4)}(x) = \frac{24}{x^4} \quad \to \quad |f^{(4)}(x)| \le 24 = 4! = M_4, \ \ \forall \ x \in [1;2]$$

A Simpson-formula hibabecslése

$$\left| \ln 2 - \frac{25}{36} \right| \le \frac{(2-1)^5}{4! \cdot 5!} M_4 = \frac{4!}{4! \cdot 5!} = \frac{1}{120}.$$

10. A trapéz-formula értéke

$$T(f) = \frac{5-2}{2} \cdot \left[\, \sqrt{2-1} + \sqrt{5-1}\,\right] = \frac{3}{2} \cdot [\, 1+2\,] = \frac{9}{2}.$$

A trapéz-formula hibabecsléséhez szükségünk van az $M_2 = \|f''\|_\infty$ értékre.

$$f'(x) = -\frac{1}{2}(x-1)^{-\frac{1}{2}}$$
$$f''(x) = \frac{1}{4}(x-1)^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{4\sqrt{(x-1)^3}} \quad \to \quad |f''(x)| \le \frac{1}{4} = M_2, \ \ \forall\ x \in [2;5]$$

A trapéz-formula hibabecslése

$$\left| \int_2^5 \sqrt{x-1}\, dx - \frac{9}{2} \right| \le \frac{(5-2)^3}{12} M_2 = \frac{27}{48} = \frac{9}{16}.$$

11. A Simpson-formula értéke

$$S(f) = \frac{1}{6} \cdot \left[\frac{1}{1^2} + 4 \cdot \frac{1}{(\frac{3}{2})^2} + \frac{1}{2^2} \right] = \frac{1}{6} \cdot \left[1 + \frac{16}{9} + \frac{1}{4} \right] = \frac{36+64+9}{216} = \frac{109}{216}.$$

A Simpson-formula hibabecsléséhez szükségünk van az $M_4 = \|f^{(4)}\|_\infty$ értékre.

$$f'(x) = -2x^{-3}$$
$$f''(x) = 6x^{-4}$$
$$f^{(3)}(x) = -24x^{-5}$$
$$f^{(4)}(x) = 120x^{-6} = \frac{120}{x^6} \quad \to \quad |f^{(4)}(x)| \le 120 = 5! = M_4, \ \ \forall\ x \in [1;2]$$

A Simpson-formula hibabecslése

$$\left| \int_1^2 \frac{1}{x^2}\, dx - \frac{109}{216} \right| \le \frac{(2-1)^5}{4! \cdot 5!} M_4 = \frac{5!}{4! \cdot 5!} = \frac{1}{24}.$$

12. **a)** Az érintő-formula értéke

$$E(f) = 1 \cdot \frac{1}{1 + (\frac{1}{2})^2} = \frac{4}{5}.$$

Az érintő-formula hibabecsléséhez szükségünk van az $M_2 = \|f''\|_\infty$ értékre.

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$
$$f'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$$
$$f''(x) = \frac{-2(1+x^2)^2 + 8x^2(1+x^2)}{(1+x^2)^4} = \frac{-2(1+x^2) + 8x^2}{(1+x^2)^3} = \frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3}$$
$$\to \quad |f''(x)| \le 4 = M_2, \ \ \forall\ x \in [0;1]$$

Az érintő-formula hibabecslése

$$\left| \frac{\pi}{4} - \frac{4}{5} \right| \le \frac{(1-0)^3}{24} M_2 = \frac{4}{24} = \frac{1}{6}.$$

b) A trapéz-formula értéke

$$T(f) = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{1}{1} + \frac{1}{1+1^2} \right] = \frac{3}{4}.$$

Az trapéz-formula hibabecslése

$$\left| \frac{\pi}{4} - \frac{3}{4} \right| \le \frac{(1-0)^3}{12} M_2 = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}.$$

13. Az integrál pontos értéke

$$\int_{-1}^{1} 2^x dx = \left[\frac{2^x}{\ln 2} \right]_{-1}^{1} = \frac{1}{\ln 2}(2^1 - 2^{-1}) = \frac{3}{2 \ln 2}.$$

A Simpson-formula értéke

$$S(f) = \frac{1-(-1)}{6} \cdot [\, 2^{-1} + 4 \cdot 2^0 + 2^1] = \frac{1}{3} \cdot \left[\frac{1}{2} + 4 + 2 \right] = \frac{1+8+4}{6} = \frac{13}{6}.$$

Ebből kaphatunk $\ln 2$ -re egy racionális közelítést.

$$\frac{3}{2 \ln 2} \approx \frac{13}{6} \quad \Rightarrow \quad \ln 2 \approx \frac{9}{13}$$

A Simpson-formula hibabecsléséhez szükségünk van az $M_4 = \|f^{(4)}\|_\infty$ értékre.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \ln 2 \cdot 2^x \\
f''(x) &= (\ln 2)^2 \cdot 2^x \\
f^{(3)}(x) &= (\ln 2)^3 \cdot 2^x \\
f^{(4)}(x) &= (\ln 2)^4 \cdot 2^x \quad \to \quad |f^{(4)}(x)| \le (\ln 2)^4 = M_4, \;\; \forall \;\, x \in [-1; 1]
\end{aligned}$$

A Simpson-formula hibabecslése

$$\left| \int_{-1}^{1} 2^x dx - \frac{13}{6} \right| \le \frac{(1-(-1))^5}{4! \cdot 5!} M_4 = \frac{2^5 (\ln 2)^4}{4! \cdot 5!} = \frac{(\ln 2)^4}{90} \approx 0,0026.$$

14. **a)** A trapéz összetett formula hibabecsléséhez szükségünk van az $M_2 = \|f''\|_\infty$ értékre.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= -\frac{1}{x^2} \\
f''(x) &= \frac{2}{x^3} \quad \to \quad |f''(x)| \le 2 = M_2, \;\; \forall \;\, x \in [1; 2]
\end{aligned}$$

Az trapéz összetett formula hibabecslése

$$|\ln 2 - T_m(f)| \le \frac{(2-1)^3}{12 m^2} M_2 = \frac{1}{6 m^2} < 10^{-4}.$$

$$\frac{10^4}{6} < m^2 \quad \to \quad 41 \le m$$

Tehát legalább 41 részre kell osztanunk az intervallumot és ennyi trapéz formulát kell alkalmaznunk a 10^{-4} pontosság eléréséhez.

b) A Simpson összetett formula hibabecsléséhez szükségünk van az $M_4 = \|f^{(4)}\|_\infty$ értékre.

$$\begin{aligned} f^{(3)}(x) &= -\frac{6}{x^3} \\ f^{(4)}(x) &= \frac{24}{x^4} \quad \to \quad |f^{(4)}(x)| \le 24 = 4! = M_4, \;\; \forall\ x \in [1;2] \end{aligned}$$

A Simpson összetett formula hibabecslése, ha m egyenlő részre osztjuk az intervallumot és $\frac{m}{2}$ db Simpson formulát alkalmazunk

$$|\ln 2 - S_m(f)| \le \frac{(2-1)^5}{180^4} M_4 = \frac{4!}{180m^4} = \frac{2}{15m^4} < 10^{-4}.$$

$$\frac{2 \cdot 10^4}{15} < m^4 \quad \to \quad 6 \le m$$

Tehát legalább 3 Simpson formulát kell alkalmaznunk (ehhez 6 részre kell osztanunk az intervallumot) a 10^{-4} pontosság eléréséhez.

15. Az integrál pontos értéke

$$\int_{-1}^{1} 2^{-x} dx = \left[-\frac{2^{-x}}{\ln 2}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{\ln 2}(-2^{-1} + 2^1) = \frac{3}{2\ln 2}.$$

A Simpson-formula értéke

$$S(f) = \frac{1-(-1)}{6} \cdot [\,2^1 + 4 \cdot 2^0 + 2^{-1}] = \frac{1}{3} \cdot \left[2 + 4 + \frac{1}{2}\right] = \frac{4+8+1}{6} = \frac{13}{6}.$$

A Simpson-formula hibabecsléséhez szükségünk van az $M_4 = \|f^{(4)}\|_\infty$ értékre.

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\ln 2 \cdot 2^{-x} \\ f''(x) &= (\ln 2)^2 \cdot 2^{-x} \\ f^{(3)}(x) &= -(\ln 2)^3 \cdot 2^{-x} \\ f^{(4)}(x) &= (\ln 2)^4 \cdot 2^{-x} \quad \to \quad |f^{(4)}(x)| \le (\ln 2)^4 = M_4, \;\; \forall\ x \in [-1;1] \end{aligned}$$

A Simpson-formula hibabecslése

$$\left| \int_{-1}^{1} 2^{-x} dx - \frac{13}{6} \right| \le \frac{(1-(-1))^5}{4! \cdot 5!} M_4 = \frac{2^5 (\ln 2)^4}{4! \cdot 5!} = \frac{(\ln 2)^4}{90} \approx 0,0026.$$

A Simpson összetett formula hibabecslése, ha m egyenlő részre osztjuk az intervallumot és $\frac{m}{2}$ db Simpson formulát alkalmazunk

$$\left| \int_{-1}^{1} 2^{-x} dx - S_m(f) \right| \le \frac{(1-(-1))^5}{180m^4} M_4 = \frac{2^5 (\ln 2)^4}{180m^4} = \frac{8 \cdot (\ln 2)^4}{45m^4} < 10^{-3}.$$

$$\frac{8 \cdot (\ln 2)^4 \cdot 10^3}{45} < m^4 \quad \to \quad 3 \le m$$

Tehát legalább 2 Simpson formulát kell alkalmaznunk a 10^{-3} pontosság eléréséhez.

16. Választhatunk, hogy a definíció vagy a pontossági tétel segítségével oldjuk meg a feladatot. Mindkét megoldást megmutatjuk.

a) Definícióval kiszámítjuk a

$$c_k = \int_{-2}^{2} \ell_k(x)\, dx \;\; (k = 0, 1, 2)$$

értékeket. Például $k=0$-ra

$$c_0 = \int_{-2}^{2} \ell_0(x)\,dx = \int_{-2}^{2} \frac{x(x-1)}{(-1)(-1-1))}dx = \frac{1}{2}\cdot\int_{-2}^{2} x^2 - x\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_{-2}^{2} = \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{2}{3}+\frac{14}{3}\right] = \frac{8}{3}.$$

A többi együtthatót a hosszadalmas integrálás helyett másképp számoljuk. Mivel a $-1, 0, 1$ a $[-2; 2]$ intervallum egyenletes felosztású pontjai, ezért ez egy Newton-Cotes kvadratúra formula. A szimmetrikus alappontok miatt $c_0 = c_2$ és az együtthatók összege az intevallum hosszával egyenlő $c_0 + c_1 + c_2 = 4$. Innen

$$c_0 = c_2 = \frac{8}{3}, \quad c_1 = 4 - 2\cdot\frac{8}{3} = -\frac{4}{3}.$$

b) A pontossági tétellel is megoldhatjuk a feladatot. Ekkor ellenőriznünk kell, hogy a kvadratúra formula pontos-e 3 alappont esetén a másodfokú polinomokra. Elég a P_2 polinom altér $1, x, x^2$ bázisára megnéznünk. Most az előző megoldási módhoz képest egyszerűbb integrálokat kell kiszámolnunk.

$$\int_{-2}^{2} 1\,dx = 4 = c_0 + c_1 + c_2$$
$$\int_{-2}^{2} x\,dx = 0 = c_0\cdot(-1) + c_1\cdot 0 + c_2\cdot 1 = -c_0 + c_2 \quad\to\quad c_2 = c_0$$
$$\int_{-2}^{2} x^2\,dx = \frac{16}{3} = c_0\cdot(-1)^2 + c_1\cdot 0^2 + c_2\cdot 1^2 = c_0 + c_2$$

Oldjuk meg a kapott lineáris egyenletrendszert.

$$\begin{aligned} c_0 + c_1 + c_2 = 4 \quad &\to \quad 2c_0 + c_1 = 4 \\ c_0 + c_2 = \frac{16}{3} \quad &\to \quad 2c_0 = \frac{16}{3} \quad\to\quad c_0 = c_2 = \frac{8}{3} \end{aligned}$$

$$c_1 = 4 - 2c_0 = 4 - \frac{16}{3} = -\frac{4}{3}$$

A kapott közelítő formulánk

$$\int_{-2}^{2} f(x)\,dx \approx \frac{8}{3}f(-1) - \frac{4}{3}f(0) + \frac{8}{3}f(1) = N_3(f,2),$$

ami nem más, mint a $[-2;\,2]$ intervallumra felírt 3 alappontú nyílt Newton–Cotes formula, melyet a 6. feladatban határoztunk meg.

11.2.3. Csebisev-típusú kvadratúra formulák

17. A 2 alappontú Csebisev-típusú kvadratúra formula alakja

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx A\cdot[f(x_0) + f(x_1)].$$

Három paramétert kell meghatároznunk úgy, hogy a formula az $1, x, x^2$ polinomokra pontos legyen.

$$\int_{-1}^{1} 1\,dx = 2 = A\cdot[1+1] \qquad \to A = 1$$
$$\int_{-1}^{1} x\,dx = 0 = A\cdot[x_0+x_1] \qquad \to x_0 = -x_1$$
$$\int_{-1}^{1} x^2\,dx = \frac{2}{3} = A\cdot[x_0^2+x_1^2] \qquad \to 2x_1^2 = \frac{2}{3} \ \to x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}},\ x_0 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Így a kvadratúra formula alakja

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

A 4. feladatban már találkoztunk ezzel a kvadratúra formulával. Tulajdonképpen a két alappontú Legendre–Gauss-típusú kvadratúra formulát kaptuk meg.

18. A 2 alappontú Csebisev-típusú kvadratúra formula alakja

$$\int_{0}^{1} f(x)\sqrt{x}\,dx \approx A\cdot[f(x_0)+f(x_1)].$$

Három paramétert kell meghatároznunk úgy, hogy a formula az $1, x, x^2$ polinomokra pontos legyen.

$$\int_{0}^{1} 1\cdot\sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3} = A\cdot[1+1] \qquad \to A = \frac{1}{3}$$
$$\int_{0}^{1} x\sqrt{x}\,dx = \frac{2}{5} = A\cdot[x_0+x_1] \qquad \to S_1 = x_0+x_1 = \frac{6}{5}$$
$$\int_{0}^{1} x^2\sqrt{x}\,dx = \frac{2}{7} = A\cdot[x_0^2+x_1^2] \qquad \to S_2 = x_0^2+x_1^2 = \frac{6}{7}$$

Innen a Newton-Waring formulákat felhasználva felírható az egy főegyütthatós másodfokú polinom, melynek gyökei az alappontok.

$$S_1 + p_1 = 0 \qquad \to p_1 = -S_1 = -\frac{6}{5}$$
$$S_2 + p_1 S_1 + 2p_2 = 0 \qquad \to \frac{6}{7} - \frac{36}{25} + 2p_2 = 0$$
$$\to p_2 = \frac{51}{175}$$

$$P(x) = x^2 - \frac{6}{5}x + \frac{51}{175}$$

$$x_{0,1} = \frac{\frac{6}{5} \pm \sqrt{\left(\frac{6}{5}\right)^2 - 4\cdot\frac{51}{175}}}{2} = \frac{\frac{6}{5} \pm \sqrt{\frac{48}{175}}}{2} = \frac{3}{5} \pm \frac{2}{35}\sqrt{21}$$

A kvadratúra formula alakja

$$\int_{0}^{1} f(x)\sqrt{x}\,dx \approx \frac{1}{3}\cdot\left[f\left(\frac{3}{5} - \frac{2}{35}\sqrt{21}\right) + f\left(\frac{3}{5} + \frac{2}{35}\sqrt{21}\right)\right].$$

19. A Csebisev–Gauss-típusú kvadratúra formula egyben Csebisev-típusú kvadratúra formula is, melynek alakja

$$\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \approx \frac{\pi}{n+1}\cdot\sum_{k=0}^{n} f(x_k),$$

ahol $x_0,\dots,x_n$ a T_{n+1} Csebisev polinom gyökei. $n+1$ alappont esetén a $2n+1$ -edfokú polinomokra pontosak, ezért elegendő a feladat megoldásához $n=0$ -t választani. Ekkor

$$x_0 = 0$$

a $T_1(x)=x$ Csebisev polinom gyöke. A formula elsőfokú polinomokra pontos, másrészt páratlan függvényt integrálunk, így az integrál 0 lesz.

$$\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \approx \pi\cdot f(0) \quad\Rightarrow\quad \int_{-1}^{1} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \pi\cdot 0 = 0$$

20. A Csebisev–Gauss-típusú kvadratúra formula egyben Csebisev-típusú kvadratúra formula is, melynek alakja

$$\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \approx \frac{\pi}{n+1}\cdot\sum_{k=0}^{n} f(x_k),$$

ahol $x_0,\dots,x_n$ a T_{n+1} Csebisev polinom gyökei. $n+1$ alappont esetén a $2n+1$ -edfokú polinomokra pontos, ezért elegendő a feladat megoldásához $n=1$ -et választani. Ekkor

$$x_0 = -\frac{\sqrt{2}}{2},\quad x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

a $T_2(x)=2x^2-1$ Csebisev polinom gyökei. A formula harmadfokú polinomokra pontos, így

$$\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \approx \frac{\pi}{2}\cdot\left[f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]$$

$$\Rightarrow\ \int_{-1}^{1} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{\pi}{2}\cdot\left[\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right] = \frac{\pi}{2}.$$

21. A Csebisev–Gauss-típusú kvadratúra formula egyben Csebisev-típusú kvadratúra formula is, melynek alakja

$$\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \approx \frac{\pi}{n+1}\cdot\sum_{k=0}^{n} f(x_k),$$

ahol $x_0,\dots,x_n$ a T_{n+1} Csebisev polinom gyökei. $n+1$ alappont esetén a $2n+1$ -edfokú polinomokra pontos, ezért elegendő a feladat megoldásához $n=2$ -t választani. Ekkor

$$x_0 = -\frac{\sqrt{3}}{2},\quad x_1 = 0,\quad x_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

a $T_3(x)=4x^3-3x$ Csebisev polinom gyökei. A formula ötödfokú polinomokra pontos, így

$$\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \approx \frac{\pi}{3}\cdot\left[f\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+f(0)+f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]$$

$$\Rightarrow\ \int_{-1}^{1} \frac{x^4}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{\pi}{3}\cdot\left[\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^4+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^4\right] = \frac{\pi}{3}\cdot\frac{9}{8} = \frac{3}{8}\pi.$$

11.2.4. Gauss-típusú kvadratúra formulák

22. Először a 7. feladatban kapott

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\approx\int_{-1}^{1}f(y)\,dy$$

formulát fogjuk a $[-a;\,a]$ intervallumra transzformálni. Végezzük el az

$$x=\varphi(y)=a\cdot y$$

változó transzformációt a $[-a;\,a]$ intervallumon vett integrálra, majd alkalmazzuk a kvadratúra formulát a transzformált alappontokkal

$$x_0=\varphi(y_0)=a\cdot y_0=-\frac{a}{\sqrt{3}},\quad x_1=\varphi(y_1)=a\cdot y_1=\frac{a}{\sqrt{3}}.$$

$$\int_{-a}^{a}f(x)\,dx=a\cdot\int_{-1}^{1}f(\varphi(y))\,dy\approx a\cdot f\left(-\frac{a}{\sqrt{3}}\right)+a\cdot f\left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)=:LG_2(f,a)$$

A hibaformulát a Gauss-típusú formuláknál tanultak szerint készítjük el.
Jelöljük H_3-mal a $-\frac{a}{\sqrt{3}},\frac{a}{\sqrt{3}}$ alappontokra felírt harmadfokú Fejér–Hermite-interpolációs polinomot (mindkét alappontban a helyettesítési értéket és a derivált értékét is hozzávesszük). Mivel a formula minden legfeljebb harmadfokú polinomra pontos (Gauss-típusú), ezért H_3-ra az integrál és a kvadratúra formula értéke megegyezik.

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{a}H_3(x)\,dx &= a\cdot H_3(-\frac{a}{\sqrt{3}})+a\cdot H_3(\frac{a}{\sqrt{3}})=\\ &= a\cdot f\left(-\frac{a}{\sqrt{3}}\right)+a\cdot f\left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)=LG_2(f,a)\end{aligned}$$

Az Hermite-interpoláció hibaformulájából

$$f(x)-H_3(x)=\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}\cdot\Omega_3(x),$$

ahol

$$\Omega_3(x)=\left(x+\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2\left(x-\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2=\left(x^2-\frac{a^2}{3}\right)^2.$$

A hibaformulát integráljuk

$$\int_{-a}^{a}(f(x)-H_3(x))\,dx=\int_{-a}^{a}\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}\cdot\underbrace{\Omega_3(x)}_{\geq 0}\,dx.$$

Felhasználva az integrálszámítás középértéktételét és hogy Ω_3 nem negatív (állandó előjelű) létezik $\eta\in[-a;a]$, hogy

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{a}f(x)\,dx-LG2(f) &= \frac{f^{(4)}(\eta)}{4!}\cdot\int_{-a}^{a}\Omega_3(x)\,dx=\frac{f^{(4)}(\eta)}{4!}\cdot\int_{-a}^{a}\left(x^2-\frac{a^2}{3}\right)^2dx=\\ &= \frac{f^{(4)}(\eta)}{24}\cdot\frac{8}{45}\,a^5=f^{(4)}(\eta)\cdot\frac{1}{135}\,a^5\end{aligned}$$

Amennyiben a feladatot átírjuk az $[a;\,b]$ intervallumra (természetesen az alappontokat is transzformáljuk), akkor a hibaformula a következő alakú. (Most a éppen az integrálási tartomány fele.)

$$\int_{-a}^{b}f(x)\,dx-LG_2(f)=-f^{(4)}(\eta)\cdot\frac{1}{135}\left(\frac{b-a}{2}\right)^5$$

Hasonlítsuk össze a LG_2 formulát a Simpson-formulával. Most két alappontunk van intervallumonként és pontos minden legfeljebb harmadfokú polinomra mindkét formula, de a most levezetett hibabecslés kicsit jobb, mert $\frac{1}{135} \approx 0.0074$, míg $\frac{1}{90} \approx 0,0111$.
Ugyanis a Simpson-formula hibabecslése

$$\int_a^b f(x)\,dx - S(f) = -\frac{f^{(4)}(\eta)}{90}\left(\frac{b-a}{2}\right)^5.$$

Annak ellenére, hogy az LG_2 formula hibabecslése jobb, mint a Simpson-formuláé, nem érdemes összetett formulában használni, ugyanis a részintervallumok végpontjai mellett a gyökök transzformációját is el kell végezni, így több művelettel jár az alkalmazása.

23. Az integrálban a súlyfüggvény $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ és $x \in [-1;1]$ esetén értelmezett, ami az elsőfajú Csebisev polinomokhoz kapcsolódik. Ezért Csebisev–Gauss kvadratúra formulát írunk fel a közelítésére. A kvadratúra formula alakja

$$\int_{-1}^1 \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \approx \frac{\pi}{n+1}\cdot\sum_{k=0}^n f(x_k),$$

ahol $x_0,\dots,x_n$ a T_{n+1} Csebisev polinom gyökei. $n+1$ alappont esetén a $2n+1$-edfokú polinomokra pontos, ezért elegendő a feladat megoldásához $n=2$ -t választani. Ekkor

$$x_0 = -\frac{\sqrt{3}}{2},\quad x_1 = 0,\quad x_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

a $T_3(x) = 4x^3 - 3x$ Csebisev polinom gyökei. A formula ötödfokú polinomokra pontos, így

$$\int_{-1}^1 \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \approx \frac{\pi}{3}\cdot\left[f\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + f(0) + f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]$$

$$\to \int_{-1}^1 \frac{x^4}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{\pi}{3}\cdot\left[\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^4 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^4\right] = \frac{\pi}{3}\cdot\frac{9}{8} = \frac{3}{8}\pi.$$

24. Az $\int_{-1}^1 f(x)\,dx$ integrál közelítésére egy $n=2$ alappontú Legendre-Gauss kvadratúra formulát konstruálunk. Az alappontok a másodfokú Legendre ortogonális polinom gyökei. A 10.2.4. fejezet 22. feladatának megoldásában előállítottuk a másodfokú Legendre polinomot, $P_2(x) = x^2 - \frac{1}{3}$. A gyökei:

$$x_0 = -\frac{1}{\sqrt{3}},\quad x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

A formula együtthatóit legegyszerűbben úgy határozhatjuk meg, ha felírjuk az $1, x$ polinomokra való pontosság egyenleteit.

$$\int_{-1}^1 1\,dx = 2 = A_0\cdot 1 + A_1\cdot 1 \qquad \to A_0 + A_1 = 2$$

$$\int_{-1}^1 x\,dx = 0 = A_0\cdot x_0 + A_1\cdot x_1 \quad \to -\frac{A_0}{\sqrt{3}} + \frac{A_1}{\sqrt{3}} = 0 \to \quad A_0 = A_1$$

Tehát $A_0 = A_1 = 1$. A kvadratúra formula alakja

$$\int_{-1}^1 f(x)\,dx \approx f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

A feladatot gyorsabban is megoldhatjuk, ha megnézzük ezen fejezet 4. feladatának megoldását. Ott éppen ezekkel az alappontokkal írtunk fel egy interpolációs kvadratúra formulát. Az együtthatói $A_0 = A_1 = 1$. Azt is láttuk, hogy legfeljebb harmadfokú polinomokra pontos a formula, ez mutatja, hogy Gauss-típusú. A kapott formulára korábbiaknak megfelelően az $LG_2(f,1)$ jelölést is használhatjuk.

25. Mivel a $[-1;1]$ intervallum és a $w(x) = x^2$ súlyfüggvény nem definiál klasszikus ortogonális polinomot, ezért a másodfokú ortogonális polinomot elő kell állítanunk Gram-Schmidt ortogonalizációval az $1, x, x^2$ rendszerből.

$$\begin{aligned}
P_0(x) &= 1 \\
P_1(x) &= x - cP_0(x) = x \\
c &= \frac{\langle x; P_0\rangle}{\langle P_0; P_0\rangle} = \frac{\int_{-1}^1 x \cdot 1 \cdot x^2\,dx}{\int_{-1}^1 1 \cdot 1 \cdot x^2\,dx} = \frac{0}{\frac{2}{3}} = 0 \\
P_2(x) &= x^2 - c_1 P_1(x) - c_0 P_0(x) = x^2 - \frac{3}{5} \\
c_1 &= \frac{\langle x^2; P_1\rangle}{\langle P_1; P_1\rangle} = \frac{\int_{-1}^1 x^2 \cdot x \cdot x^2\,dx}{\int_{-1}^1 x \cdot x \cdot x^2\,dx} = \frac{0}{\frac{2}{5}} = 0 \\
c_0 &= \frac{\langle x^2; P_0\rangle}{\langle P_0; P_0\rangle} = \frac{\int_{-1}^1 x^2 \cdot 1 \cdot x^2\,dx}{\int_{-1}^1 1 \cdot 1 \cdot x^2\,dx} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{5}
\end{aligned}$$

A másodfokú ortogonális polinom

$$P_2(x) = x^2 - \frac{3}{5}.$$

A másodfokú ortogonális polinom gyökei:

$$x_0 = -\sqrt{\frac{3}{5}}, \quad x_1 = \sqrt{\frac{3}{5}}.$$

$$\begin{aligned}
&\int_{-1}^1 1 \cdot x^2\,dx = \frac{2}{3} = A_0 \cdot 1 + A_1 \cdot 1 && \to (1)\ \ A_0 + A_1 = \frac{2}{3} \\
&\int_{-1}^1 x \cdot x^2\,dx = 0 = A_0 \cdot x_0 + A_1 \cdot x_1 && \to (2)\ \ A_0\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + A_1\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right) = 0
\end{aligned}$$

Innen

$$A_0 = A_1 \ \ \to \ \ A_0 = A_1 = \frac{1}{3}.$$

26. Mivel a $[0;1]$ intervallum és a $w(x) = x$ súlyfüggvény nem definiál klasszikus ortogonális polinomot, ezért a másodfokú ortogonális polinomot elő kell állítanunk Gram-Schmidt ortogonalizációval az $1, x, x^2$ rendszerből.

$$\begin{aligned}
P_0(x) &= 1 \\
P_1(x) &= x - cP_0(x) = x - \frac{2}{3} \\
c &= \frac{\langle x; P_0\rangle}{\langle P_0; P_0\rangle} = \frac{\int_0^1 x \cdot 1 \cdot x\,dx}{\int_0^1 1 \cdot 1 \cdot x\,dx} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_2(x) &= x^2 - c_1P_1(x) - c_0P_0(x) = x^2 - \frac{6}{5}(x-\frac{2}{3}) - \frac{1}{2} = \\
&= x^2 - \frac{6}{5}x + \frac{3}{10} \\
c_1 &= \frac{\langle x^2; P_1\rangle}{\langle P_1; P_1\rangle} = \frac{\int_0^1 x^2(x-\frac{2}{3})\cdot x\,dx}{\int_0^1 (x-\frac{2}{3})^2\cdot x\,dx} = \frac{\frac{1}{30}}{\frac{1}{36}} = \frac{6}{5} \\
c_0 &= \frac{\langle x^2; P_0\rangle}{\langle P_0; P_0\rangle} = \frac{\int_0^1 x^2\cdot 1\cdot x\,dx}{\int_0^1 1\cdot 1\cdot x\,dx} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

A másodfokú ortogonális polinom gyökei:

$$x_{1,0} = \frac{\frac{6}{5} \pm \sqrt{\left(\frac{6}{5}\right)^2 - \frac{12}{10}}}{2} = \frac{6\pm\sqrt{36-30}}{10} = \frac{6\pm\sqrt{6}}{10}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 1\cdot x\,dx &= \frac{1}{2} = A_0\cdot 1 + A_1\cdot 1 && \to (1)\ \ A_0 + A_1 = \frac{1}{2} \\
\int_0^1 x\cdot x\,dx &= \frac{1}{3} = A_0\cdot x_0 + A_1\cdot x_1 && \to (2)\ \ A_0\left(\frac{6-\sqrt{6}}{10}\right) + A_1\left(\frac{6+\sqrt{6}}{10}\right) = \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Oldjuk meg a kapott lineáris egyenletrendszert.

$$(2) - \frac{6}{10}\cdot(1) \quad \frac{\sqrt{6}}{10}(-A_0 + A_1) = \frac{7}{30} \quad\to\quad -A_0 + A_1 = \frac{7}{3\sqrt{6}}$$

Hozzáadva az (1) egyenletet

$$\begin{aligned}
2A_1 &= \frac{1}{2} + \frac{7}{3\sqrt{6}} && \to\ A_1 = \frac{1}{4} + \frac{7}{6\sqrt{6}} \\
A_0 &= \frac{1}{2} - A_1 && \to\ A_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{7}{6\sqrt{6}} = \frac{1}{4} - \frac{7}{6\sqrt{6}}.
\end{aligned}$$

27. Mivel a $[0;1]$ intervallum és a $w(x) = \sqrt{x}$ súlyfüggvény nem definiál klasszikus ortogonális polinomot, ezért a másodfokú ortogonális polinomot elő kell állítanunk Gram-Schmidt ortogonalizációval az $1, x, x^2$ rendszerből.

$$\begin{aligned}
P_0(x) &= 1 \\
P_1(x) &= x - cP_0(x) = x - \frac{3}{5} \\
c &= \frac{\langle x; P_0\rangle}{\langle P_0; P_0\rangle} = \frac{\int_0^1 x\cdot 1\cdot\sqrt{x}\,dx}{\int_0^1 1\cdot 1\cdot\sqrt{x}\,dx} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{5} \\
P_2(x) &= x^2 - c_1P_1(x) - c_0P_0(x) = x^2 - \frac{10}{9}(x-\frac{3}{5}) - \frac{3}{7} = \\
&= x^2 - \frac{10}{9}x + \frac{5}{21} \\
c_1 &= \frac{\langle x^2; P_1\rangle}{\langle P_1; P_1\rangle} = \frac{\int_0^1 x^2(x-\frac{3}{5})\cdot\sqrt{x}\,dx}{\int_0^1 (x-\frac{3}{5})^2\cdot\sqrt{x}\,dx} = \frac{\frac{16}{315}}{\frac{8}{145}} = \frac{10}{9} \\
c_0 &= \frac{\langle x^2; P_0\rangle}{\langle P_0; P_0\rangle} = \frac{\int_0^1 x^2\cdot 1\cdot\sqrt{x}\,dx}{\int_0^1 1\cdot 1\cdot\sqrt{x}\,dx} = \frac{\frac{2}{7}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{7}
\end{aligned}$$

A másodfokú ortogonális polinom

$$P_2(x) = x^2 - \frac{10}{9}x + \frac{5}{21}.$$

A másodfokú ortogonális polinom gyökei:

$$x_{1,0} = \frac{\frac{10}{9} \pm \sqrt{\left(\frac{10}{9}\right)^2 - \frac{20}{21}}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{\frac{40}{7}}}{9} = \frac{35 \pm 2\sqrt{70}}{63}.$$

Az A_0, A_1 együtthatók meghatározásához írjuk fel az $1, x$ polinomokra vonatkozó pontosságot!

$$\int_0^1 1 \cdot \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3} = A_0 \cdot 1 + A_1 \cdot 1$$
$$\int_0^1 x \cdot \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{5} = A_0 \cdot x_0 + A_1 \cdot x_1$$

Oldjuk meg a kapott lineáris egyenletrendszert.

$$\begin{aligned}
&(1) && A_0 + A_1 = \frac{2}{3} \\
&(2) && A_0\left(\frac{35 - 2\sqrt{70}}{63}\right) + A_1\left(\frac{35 + 2\sqrt{70}}{63}\right) = \frac{2}{5}
\end{aligned}$$

$$(2) - \frac{5}{9} \cdot (1) \quad \frac{2\sqrt{70}}{63}(-A_0 + A_1) = \frac{4}{135} \quad \to \quad -A_0 + A_1 = \frac{\sqrt{70}}{75}$$

Hozzáadva az (1) egyenletet

$$\begin{aligned}
2A_1 &= \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{70}}{75} && \to \quad A_1 = \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{70}}{150} \\
A_0 &= \frac{2}{3} - A_1 && \to \quad A_0 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{70}}{150} = \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{70}}{150}.
\end{aligned}$$

Vissza a tartalomhoz

12. fejezet

Közönséges differenciálegyenletek megoldása

12.1. Feladatok

12.1.1. Explicit Euler-módszer

1. Írjuk fel az explicit Euler-módszert $h = \frac{1}{2}$ esetén az

$$\begin{cases} y'(x) = 1 - y(x), \quad x \in [0\,;1] \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

kezdetiérték problémára! Írjuk fel az $y(1)$ közelítését !

2. Írjuk fel az explicit Euler-módszert $h = \frac{1}{2}$ esetén az

$$\begin{cases} y'(x) = 2xy(x), \quad x \in [0\,;1] \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

kezdetiérték problémára! Írjuk fel az $y(1)$ közelítését !

3. Írjuk fel az explicit Euler-módszert $h = \frac{1}{5}$ esetén az

$$\begin{cases} y'(x) = 1 - 2y(x), \quad x \in [0\,;1] \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

kezdetiérték problémára! Írjuk fel az $y(1)$ közelítését !

4. Írjuk fel az explicit Euler-módszert $h = \frac{1}{4}$ esetén az

$$\begin{cases} y'(x) = \dfrac{-2y(x)}{x}, \quad x \in [1\,;2] \\ y(1) = 2 \end{cases}$$

kezdetiérték problémára! Írjuk fel az $y(2)$ közelítését !

5. Írjuk fel az explicit Euler-módszert $h = \frac{1}{4}$ esetén az

$$\begin{cases} y'(x) = (x+1)^2 y(x), \quad x \in [0\,;1] \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

kezdetiérték problémára! Írjuk fel az $y(1)$ közelítését !

Vissza a tartalomhoz

12.1.2. Módosított Euler-módszer

6. Írjuk fel a módosított Euler-módszert $h = \frac{1}{2}$ esetén az

$$\begin{cases} y'(x) = 1 - y(x), & x \in [0\,;1] \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

kezdetiérték problémára! Írjuk fel az $y(1)$ közelítését!

7. Írjuk fel az explicit Euler-módszert és a módosított Euler-módszert $h = \frac{1}{2}$ esetén az

$$\begin{cases} y'(x) = xy(x), & x \in [0\,;1] \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

kezdetiérték problémára! Hasonlítsuk össze az $y(1)$ kétféle közelítését!

8. Írjuk fel a módosított Euler-módszert $h = \frac{1}{3}$ esetén az

$$\begin{cases} y'(x) = (x^2 + 1)y(x), & x \in [0\,;1] \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

kezdetiérték problémára! Írjuk fel az $y(1)$ közelítését!

12.1.3. Implicit módszerek

9. Írjuk fel az explicit Euler-módszert $h = \frac{1}{2}$ esetén

$$\begin{cases} y'(x) = x - 2y(x), & x \in [0\,;1] \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

kezdetiérték problémára! Minden lépésben végezzünk egy javító lépést az implicit Euler-módszerrel. Mi lesz $y(1)$ közelítése?

10. Írjuk fel az explicit Euler-módszert $h = \frac{1}{2}$ esetén

$$\begin{cases} y'(x) = x^3 y(x), & x \in [0\,;1] \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

kezdetiérték problémára! A kapott eredményre lépésenként alkalmazzuk az implicit Euler-módszer egy lépését! Mi lesz $y(1)$ közelítése?

12.2. Megoldások

12.2.1. Explicit Euler-módszer

1. Készítsük el a $[0; 1]$ intervallum felosztását. $h = \frac{1}{2}$, így a felosztás:

$$x_0 = 0, \quad x_1 = \frac{1}{2}, \quad x_2 = 1.$$

Az explicit Euler-módszer képlete:

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + h \cdot f(x_n, y_n), \quad (n = 0, \ldots, N-1) \\ y_0 &= y(0), \end{aligned}$$

ahol $N = 2$, mert két részre osztottuk az intervallumot és $f(x, y) = 1 - y$.
A konkrét példára alkalmazva a rekurzió

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + h \cdot (1 - y_n) = (1 - h)\, y_n + h, \quad (n = 0, 1) \\ y_0 &= 1. \end{aligned}$$

Mivel

$$\begin{aligned} y_1 &= (1 - h)\, y_0 + h = (1 - h) + h = 1 \\ y_2 &= (1 - h)\, y_1 + h = (1 - h) + h = 1, \end{aligned}$$

így $y_2 = 1$ az $y(1)$ közelítése.
A kezdetiérték-probléma pontos megoldása

$$y(x) \equiv 1 \quad \Rightarrow \quad y(1) = 1.$$

2. Készítsük el a $[0; 1]$ intervallum felosztását. $h = \frac{1}{2}$, így a felosztás:

$$x_0 = 0, \;\; x_1 = \frac{1}{2}, \;\; x_2 = 1.$$

Az explicit Euler-módszer képlete:

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + h \cdot f(x_n, y_n), \quad (n = 0, \ldots, N-1) \\ y_0 &= y(0), \end{aligned}$$

ahol $N = 2$, mert két részre osztottuk az intervallumot és $f(x, y) = 2xy$.
A konkrét példára alkalmazva a rekurzió

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + h \cdot 2\, x_n y_n = (1 + 2\, h\, x_n) \cdot y_n, \quad (n = 0, 1) \\ y_0 &= 1. \end{aligned}$$

Mivel

$$\begin{aligned} y_1 &= (1 + 2hx_0) \cdot y_0 = 1 \\ y_2 &= (1 + 2hx_1) \cdot y_1 = \left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot 1 = \frac{3}{2}, \end{aligned}$$

így $y_2 = \frac{3}{2}$ az $y(1)$ közelítése.
A kezdetiérték-probléma pontos megoldása

$$y(x) = e^{x^2} \quad \Rightarrow \quad y(1) = e.$$

3. Készítsük el a $[0; 1]$ intervallum felosztását. $h = \frac{1}{5}$, így a felosztás:

$$x_0 = 0, \;\; x_1 = \frac{1}{5}, \;\; x_2 = \frac{2}{5}, \;\; x_3 = \frac{3}{5}, \;\; x_4 = \frac{4}{5}, \;\; x_5 = 1.$$

Az explicit Euler-módszer képlete:

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + h \cdot f(x_n, y_n), \quad (n = 0, \ldots, N-1) \\ y_0 &= y(0), \end{aligned}$$

ahol $N = 5$, mert öt részre osztottuk az intervallumot és $f(x, y) = 1 - 2y$.
A konkrét példára alkalmazva a rekurzió

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + h \cdot (1 - 2y_n) = (1 - 2h)\, y_n + h, \quad (n = 0, \dots, 4) \\ y_0 &= 0. \end{aligned}$$

Mivel

$$\begin{aligned} y_1 &= (1 - 2h)\, y_0 + h = h = \frac{1}{5} \\ y_2 &= (1 - 2h)\, y_1 + h = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{8}{25} \\ y_3 &= (1 - 2h)\, y_2 + h = \frac{3}{5} \cdot \frac{8}{25} + \frac{1}{5} = \frac{49}{125} \\ y_4 &= (1 - 2h)\, y_3 + h = \frac{3}{5} \cdot \frac{49}{125} + \frac{1}{5} = \frac{147}{625} + \frac{1}{5} = \frac{272}{625} \\ y_5 &= (1 - 2h)\, y_4 + h = \frac{3}{5} \cdot \frac{272}{625} + \frac{1}{5} = \frac{816}{3125} + \frac{1}{5} = \frac{1441}{3125} \end{aligned}$$

így $y_5 = \frac{1441}{3125} \approx 0,4611$ az $y(1)$ közelítése.
A kezdetiérték-probléma pontos megoldása

$$y(x) = \frac{1}{2} \cdot (1 - e^{-2x}) \quad \Rightarrow \quad y(1) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{e^2}\right) \approx 0,4323.$$

4. Készítsük el az $[1; 2]$ intervallum felosztását. $h = \frac{1}{4}$, így a felosztás:

$$x_0 = 1,\ \ x_1 = \frac{5}{4},\ \ x_2 = \frac{6}{4},\ \ x_3 = \frac{7}{4},\ \ x_4 = 2.$$

Az explicit Euler-módszer képlete:

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + h \cdot f(x_n, y_n), \quad (n = 0, \dots, N - 1) \\ y_0 &= y(0), \end{aligned}$$

ahol $N = 4$, mert két részre osztottuk az intervallumot és $f(x, y) = \frac{-2y}{x}$.
A konkrét példára alkalmazva a rekurzió

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + h \cdot \frac{-2y_n}{x_n} = \left(1 - \frac{2h}{x_n}\right) y_n = \frac{x_n - 2h}{x_n}\, y_n, \quad (n = 0, \dots, 3) \\ y_0 &= 2. \end{aligned}$$

Mivel

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{x_0 - 2h}{x_0}\, y_0 = \frac{1 - \frac{2}{4}}{1} \cdot 2 = 1 \\ y_2 &= \frac{x_1 - 2h}{x_1}\, y_1 = \frac{\frac{5}{4} - \frac{2}{4}}{\frac{5}{4}} \cdot 1 = \frac{3}{5} \\ y_3 &= \frac{x_2 - 2h}{x_2}\, y_2 = \frac{\frac{6}{4} - \frac{2}{4}}{\frac{6}{4}} \cdot \frac{3}{5} = \frac{2}{5} \\ y_4 &= \frac{x_3 - 2h}{x_3}\, y_3 = \frac{\frac{7}{4} - \frac{2}{4}}{\frac{7}{4}} \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{7} \end{aligned}$$

így $y_4 = \frac{2}{7} \approx 0,2857$ az $y(2)$ közelítése.
A kezdetiérték-probléma pontos megoldása

$$y(x) = \frac{2}{x^2} \quad \Rightarrow \quad y(2) = \frac{1}{2}.$$

5. Készítsük el a $[0;1]$ intervallum felosztását. $h = \frac{1}{4}$, így a felosztás:

$$x_0 = 0,\ \ x_1 = \frac{1}{4},\ \ x_2 = \frac{2}{4},\ \ x_3 = \frac{3}{4},\ \ x_4 = 1.$$

Az explicit Euler-módszer képlete:

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + h \cdot f(x_n, y_n), \quad (n = 0, \ldots, N-1) \\ y_0 &= y(0), \end{aligned}$$

ahol $N = 4$, mert két részre osztottuk az intervallumot és $f(x,y) = (x+1)^2 y$.
A konkrét példára alkalmazva a rekurzió

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + h \cdot (x_n+1)^2 \cdot y_n = \left(1 + h \cdot (x_n+1)^2\right) y_n, \quad (n = 0, \ldots, 3) \\ y_0 &= 1. \end{aligned}$$

Számítsuk az egyes lépéseket!

$$\begin{aligned} y_1 &= \left(1 + h \cdot (x_0+1)^2\right) y_0 = (1 + h \cdot 1) \cdot 1 = \frac{5}{4} \\ y_2 &= \left(1 + h \cdot (x_1+1)^2\right) y_1 = \left(1 + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^2\right) \cdot \frac{5}{4} = \frac{89}{64} \cdot \frac{5}{4} = \frac{445}{256} \\ y_3 &= \left(1 + h \cdot (x_2+1)^2\right) y_2 = \left(1 + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{6}{4}\right)^2\right) \cdot \frac{445}{256} = \frac{11125}{4096} \\ y_4 &= \left(1 + h \cdot (x_3+1)^2\right) y_3 = \left(1 + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{7}{4}\right)^2\right) \cdot \frac{11125}{4096} = \frac{1257125}{262144} \approx 4,7955 \end{aligned}$$

így $y_4 \approx 4,7955$ az $y(1)$ közelítése.
A kezdetiérték-probléma pontos megoldása

$$y(x) = e^{\frac{1}{3}x^3 + x^2 + x} \quad \Rightarrow \quad y(1) = e^{7/3} \approx 10,3123.$$

12.2.2. Módosított Euler-módszer

6. Készítsük el a $[0;1]$ intervallum felosztását. $h = \frac{1}{2}$, így a felosztás:

$$x_0 = 0,\ \ x_1 = \frac{1}{2},\ \ x_2 = 1.$$

A módosított Euler-módszer képlete:

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + h \cdot f\left(x_n + \frac{h}{2},\, y_n + \frac{h}{2} f(x_n, y_n)\right), \quad (n = 0, \ldots, N-1) \\ y_0 &= y(0), \end{aligned}$$

ahol $N=2$, mert két részre osztottuk az intervallumot és $f(x,y)=1-y$.
A konkrét példára alkalmazva a rekurzió

$$\begin{aligned}
y_{n+1} &= y_n + h\cdot f\left(x_n+\frac{h}{2}, y_n+\frac{h}{2}f(x_n,y_n)\right) = \\
&= y_n + h\cdot f\left(x_n+\frac{h}{2}, y_n+\frac{h}{2}(1-y_n)\right) = \\
&= y_n + h\cdot \left(1-\left(y_n+\frac{h}{2}(1-y_n)\right)\right) = \\
&= y_n + h - hy_n - \frac{h^2}{2} + \frac{h^2}{2}y_n = \\
&= \left(1-h+\frac{h^2}{2}\right)y_n + h - \frac{h^2}{2}, \quad (n=0,1) \\
y_0 &= 1.
\end{aligned}$$

Használjuk a fenti átalakítást.

$$\begin{aligned}
y_1 &= \left(1-h+\frac{h^2}{2}\right) + h - \frac{h^2}{2} = 1 \\
y_2 &= \left(1-h+\frac{h^2}{2}\right) + h - \frac{h^2}{2} = 1,
\end{aligned}$$

így $y_2 = 1$ az $y(1)$ közelítése.

7. Készítsük el a $[0;1]$ intervallum felosztását. $h=\frac{1}{2}$, így a felosztás:

$$x_0 = 0,\ \ x_1 = \frac{1}{2},\ \ x_2 = 1.$$

$N=2$, mert két részre osztottuk az intervallumot és $f(x,y)=xy$.

a) Az explicit Euler-módszer képlete:

$$\begin{aligned}
y_{n+1} &= y_n + h\cdot f(x_n,y_n), \quad (n=0,\dots,N-1) \\
y_0 &= y(0),
\end{aligned}$$

A konkrét példára alkalmazva a rekurzió

$$\begin{aligned}
y_{n+1} &= y_n + h\cdot x_n y_n = (1+hx_n)\,y_n, \quad (n=0,1) \\
y_0 &= 1.
\end{aligned}$$

Mivel

$$\begin{aligned}
y_1 &= (1+hx_0)\,y_0 = 1 \\
y_2 &= (1+hx_1)\,y_1 = \left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)\cdot 1 = \frac{5}{4},
\end{aligned}$$

így $y_2=\frac{5}{4}$ az $y(1)$ közelítése.

b) A módosított Euler-módszer képlete:

$$\begin{aligned}
y_{n+1} &= y_n + h\cdot f\left(x_n+\frac{h}{2},\, y_n+\frac{h}{2}\,f(x_n,y_n)\right), \quad (n=0,\dots,N-1) \\
y_0 &= y(0),
\end{aligned}$$

A konkrét példára alkalmazva a rekurzió

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + h \cdot f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} f(x_n, y_n)\right) = \\ &= y_n + h \cdot f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} x_n y_n\right) = \\ &= y_n + h \cdot \left(x_n + \frac{h}{2}\right) \cdot \left(y_n + \frac{h}{2} x_n y_n\right), \quad (n = 0, 1) \\ y_0 &= 1. \end{aligned}$$

Használjuk a fenti átalakítást.

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + h \cdot \left(x_0 + \frac{h}{2}\right) \cdot \left(y_0 + \frac{h}{2}\, x_0\, y_0\right) = \\ &= 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(1 + \frac{1}{4} \cdot 0\right) = \frac{9}{8} \\ y_2 &= y_1 + h \cdot \left(x_1 + \frac{h}{2}\right) \cdot \left(y_1 + \frac{h}{2}\, x_1\, y_1\right) = \\ &= \frac{9}{8} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) \cdot \left(\frac{9}{8} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{8}\right) = \\ &= \frac{9}{8} + \frac{3}{8} \cdot \frac{81}{64} = \frac{576 + 243}{512} = \frac{819}{512} \approx 1,5996, \end{aligned}$$

így $y_2 = 1,5996$ az $y(1)$ közelítése.

c) A kezdetiérték-probléma pontos megoldása az

$$y(x) = e^{\frac{x^2}{2}} \quad \Rightarrow \quad y(1) = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e} \approx 1,6487.$$

Ezzel összehasonlíthatjuk a két módszerrel kapott eredményt.

8. Készítsük el a $[0; 1]$ intervallum felosztását. $h = \frac{1}{2}$, így a felosztás:

$$x_0 = 0, \;\; x_1 = \frac{1}{2}, \;\; x_2 = 1.$$

$N = 2$, mert két részre osztottuk az intervallumot és $f(x, y) = (x^2 + 1)y$.
A módosított Euler-módszer képlete:

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + h \cdot f\left(x_n + \frac{h}{2},\, y_n + \frac{h}{2}\, f(x_n, y_n)\right), \quad (n = 0, \ldots, N-1) \\ y_0 &= y(0), \end{aligned}$$

A konkrét példára

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + h \cdot f\left(x_n + \frac{h}{2},\, y_n + \frac{h}{2}\, f(x_n, y_n)\right), \quad (n = 0, 1) \\ y_0 &= 1. \end{aligned}$$

Számoljuk egyenként a függvény hívásokat.

$$f(x_0, y_0) = (x_0^2 + 1) \cdot y_0 = 1$$

$$f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2}\, f(x_0, y_0)\right) = f\left(\frac{h}{2}, 1 + \frac{h}{2}\right) = f\left(\frac{1}{4}, \frac{5}{4}\right) = \left(\frac{1}{16} + 1\right) \cdot \frac{5}{4} = \frac{85}{64}$$

$$y_1 = y_0 + h \cdot f\left(x_0 + \frac{h}{2},\, y_0 + \frac{h}{2}\, f(x_0, y_0)\right) = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{85}{64} = \frac{213}{128} \approx 1{,}6640$$

A következő lépést érdemes számológéppel (vagy Maple-lel) ellenőrizni.

$$\begin{aligned} f(x_1, y_1) = (x_1^2 + 1) \cdot y_1 &= \frac{17}{16} \cdot \frac{213}{128} = \frac{3621}{2048} \\ f\left(x_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{h}{2}\, f(x_1, y_1)\right) &= f\left(\frac{3}{4}, \frac{213}{128} + \frac{1}{4} \cdot \frac{3621}{2048}\right) = \\ &= f\left(\frac{3}{4}, \frac{17253}{8192}\right) = \frac{111825}{32768} \end{aligned}$$

$$y_2 = y_1 + h \cdot f\left(x_1 + \frac{h}{2},\, y_1 + \frac{h}{2}\, f(x_1, y_1)\right) = \frac{213}{128} + \frac{1}{2} \cdot \frac{111825}{32768} = \frac{220881}{65536} \approx 3{,}4126$$

így $y_2 \approx 3{,}4126$ az $y(1)$ közelítése.
A kezdetiérték-probléma pontos megoldása az

$$y(x) = e^{\frac{1}{3}x^3 + x} \quad \Rightarrow \quad y(1) = e^{4/3} \approx 3{,}7937.$$

12.2.3. Implicit módszerek

9. Készítsük el a $[0;1]$ intervallum felosztását. Mivel $h = \frac{1}{2}$, így a felosztás:

$$x_0 = 0,\;\; x_1 = \frac{1}{2},\;\; x_2 = 1.$$

A példában az $f(x, y) = x - 2y$ függvénnyel dolgozunk.

1. lépés: Az explicit Euler-módszer képlete:

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + h \cdot f(x_n, y_n) = y_n + h(x_n - 2y_n), \quad (n = 0, 1) \\ y_0 &= y(0) = 0, \end{aligned}$$

Így

$$y_1 = y_0 + h(x_0 - 2y_0) = 0.$$

Most végezzünk egy javító lépést az implicit Euler-módszerrel.
Az implicit Euler-módszer:

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_{n+1}, y_{n+1}).$$

Az implicit Euler-módszer iterációja:

$$y_{n+1}^{(k+1)} = y_n + h \cdot f(x_{n+1}, y_{n+1}^{(k)}),$$

ahol $y_{n+1}^{(0)}$ egy explicit módszerrel kapott közelítés. Az $y_1^{(0)} = 0$ a kiinduló értékünk és

$$y_1^{(1)} = y_0 + h\left(\frac{1}{2} - 2y_1^{(0)}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} - 2 \cdot 0\right) = \frac{1}{4}.$$

2. lépés: Az explicit Euler-módszer újabb lépése, de most már a javított közelítésből $y_1^{(1)} = \frac{1}{4}$ -ből megyünk tovább.

$$y_2 = y_1^{(1)} + h(x_1 - 2y_1^{(1)}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} - 2 \cdot \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}.$$

Az $y_2^{(0)} = y_2 = \frac{1}{4}$ a kiinduló érték az implicit módszerrel történő javításhoz.

$$y_2^{(1)} = y_1^{(1)} + h(x_2 - 2y_2^{(0)}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \left(1 - 2 \cdot \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

Az $y(1)$ közelítése $y_2^{(1)} = \frac{1}{2}$.

10. Készítsük el a $[0;1]$ intervallum felosztását. $h = \frac{1}{2}$, így a felosztás:

$$x_0 = 0, \;\; x_1 = \frac{1}{2}, \;\; x_2 = 1.$$

A példában $f(x, y) = x^3 y$.

1. lépés: Az explicit Euler-módszer képlete:

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + h \cdot f(x_n, y_n) = y_n + h \cdot x_n^3\, y_n, \quad (n = 0, 1) \\ y_0 &= y(0) = 1, \end{aligned}$$

Így

$$y_1 = y_0 + h \cdot x_0^3\, y_0 = h = 1 + \frac{1}{2} \cdot 0 \cdot 1 = 1.$$

Most végezzünk egy javító lépést az implicit Euler-módszerrel.
Az implicit Euler-módszer iterációja:

$$y_{n+1}^{(k+1)} = y_n + h \cdot f(x_{n+1}, y_{n+1}^{(k)}),$$

ahol $y_{n+1}^{(0)}$ egy explicit módszerrel kapott közelítés. Az $y_1^{(0)} = 1$ a kiinduló értékünk és

$$y_1^{(1)} = y_0 + h \cdot x_1^3\, y_1^{(0)} = 1 + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot 1 = \frac{17}{16}.$$

2. lépés: Az explicit Euler-módszer újabb lépése, de most már a javított közelítésből $y_1^{(1)} = \frac{17}{16}$ -ból megyünk tovább.

$$y_2 = y_1^{(1)} + h \cdot x_1^3\, y_1^{(1)} = \frac{17}{16} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \frac{17}{16} = \left(\frac{17}{16}\right)^2 = \frac{289}{256}.$$

Az $y_2^{(0)} = y_2 = \frac{289}{256}$ a kiinduló érték az implicit módszerrel történő javításhoz.

$$y_2^{(1)} = y_1^{(1)} + h \cdot x_2^3\, y_2^{(0)} = \frac{17}{16} + \frac{1}{2} \cdot 1^3 \cdot \frac{289}{256} = \frac{833}{512}.$$

Az $y(1)$ közelítése $y_2^{(1)} = \frac{833}{512} \approx 1,6269$.
Megjegyezzük, hogy a kezdetiérték-probléma pontos megoldása

$$y(x) = e^{\frac{x^4}{4}} \quad \Rightarrow \quad y(1) = e^{1/4} \approx 1,284$$

a pontos érték, amit közelítettünk.