

KÖZETFIZIKA

EGYETEMI JEGYZET GEOFIZIKUS
M.SC. HALLGATÓK SZÁMÁRA

BALÁZS LÁSZLÓ

Kőzetfizika

**egyetemi jegyzet Geofizikus M.Sc. hallgatók
számára**

Balázs László

Kőzetfizika: egyetemi jegyzet Geofizikus M.Sc. hallgatók számára

Balázs László

Szerzői jog © 2013 Eötvös Loránd Tudományegyetem

E könyv kutatási és oktatási célokra szabadon használható. Bármilyen formában való sokszorosítása a jogtulajdonos írásos engedélyéhez kötött.

Készült a TÁMOP-4.1.2.A/1-11/1-2011-0073 számú, „E-learning természettudományos tartalomfejlesztés az ELTE TTK-n” című projekt keretében. Konzorciumvezető: Eötvös Loránd Tudományegyetem, konzorciumi tagok: ELTE TTK Hallgatói Alapítvány, ITStudy Hungary Számítástechnikai Oktató- és Kutatóközpont Kft.

Nemzeti Fejlesztési Ügynökség
www.ujszechenyiterv.gov.hu
06 40 638 638



A projekt az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósul meg.



Tartalom

1. Kőzetfizika célja és tárgya	1
1.1. Fontosabb kőzet és kőzetfizikai paraméterek	2
2. Inhomogén kőzet ekvivalens tulajdonságai	4
2.1. Analitikus közelítések	7
2.1.1. Egy részecske modell - Maxwell modell	8
2.1.2. Több részecske modell	10
2.1.3. Szemcsék közötti kölcsönhatást figyelembe vevő modellek	11
2.1.4. Perturbációs módszer (gyenge inhomogenitások esete)	12
2.1.5. Határok a kőzetek ekvivalens fizikai jellemzőire	15
3. Kőzetek, tárolók tulajdonságai	19
3.1. Kőzetek összetétele	19
3.2. Porozitás (ϕ)	19
3.2.1. Porozitás mérése	22
3.3. Szemcseméret és szemcseméret eloszlás	24
3.4. Fajlagos felület	25
3.5. Póruskitöltő anyagok - víztelítettség	26
3.6. Agyagok, márgák, záró rétegek	28
3.7. Anizotrópia	29
3.8. Rétegzettség	29
3.9. Repedezettség	30
4. Kőzetfizikai jellemzők	32
5. Permeabilitás – folyadékáramlás kőzetben	33
5.1. Permeabilitás mérése	34
5.2. A permeabilitás változásai	35
5.3. Permeabilitás modellezése	36
5.4. Relatív permeabilitás	40
5.5. Elárasztás kialakulása a permeabilis zónákban	41
6. Vezetőképeség – fajlagos ellenállás	44
6.1. Elektrolitikus vezetés	44
6.2. Elektromos kettősréteg az agyagásványok felületén.	46
6.3. Természetes potenciál (SP)	47
6.4. Kőzetek vezetőképesége	49
6.5. Ellenállás-hálózat modell	51
6.6. Másodlagos porozitású összetett pórusrendszerek	53
6.7. Agyagos tároló kőzetek modellezése	54
7. A kőzetek dielektromos tulajdonságai	58
7.1. Kőzetek dielektromos tulajdonságai	61
8. A kőzetek mágneses tulajdonságai	62
8.1. A mágneses szuszceptibilitás mikro szintű modellje	62
9. Nukleáris mérésekkel kapcsolatos kőzetfizikai jellemzők	68
9.1. Kőzetek természetes aktivitása	68
9.2. Részecske transzport	70
9.3. Gamma transzport és kőzetfizika	73
9.4. Neutron módszerekhez kapcsolódó kőzetfizikai jellemzők	75
9.5. NMR relaxációs idők	82
9.5.1. Proton precesszió póruskitöltő folyadékokban	86
9.5.2. Relaxáció porózus kőzetekben	87
10. Kőzetek akusztikus és mechanikai tulajdonságai	90
10.1. Homogén izotróp közegek	93
10.2. Fontosabb kísérleti adatok a kőzetfizikai modellezéshez	94
10.3. Rugalmas hullámok terjedésének empirikus modelljei	96
10.4. Akusztikus kőzetfizikai modellek	97
10.4.1. Gassmann-modell	97
10.4.2. Amplitúdó csillapodás	100
11. Kőzetek hővezető képessége	102

11.1. Inhomogén közet hővezető képessége	103
11.2. Hővezetés Debye-féle modellje	104
Irodalom	106

1. fejezet - Kőzetfizika célja és tárgya

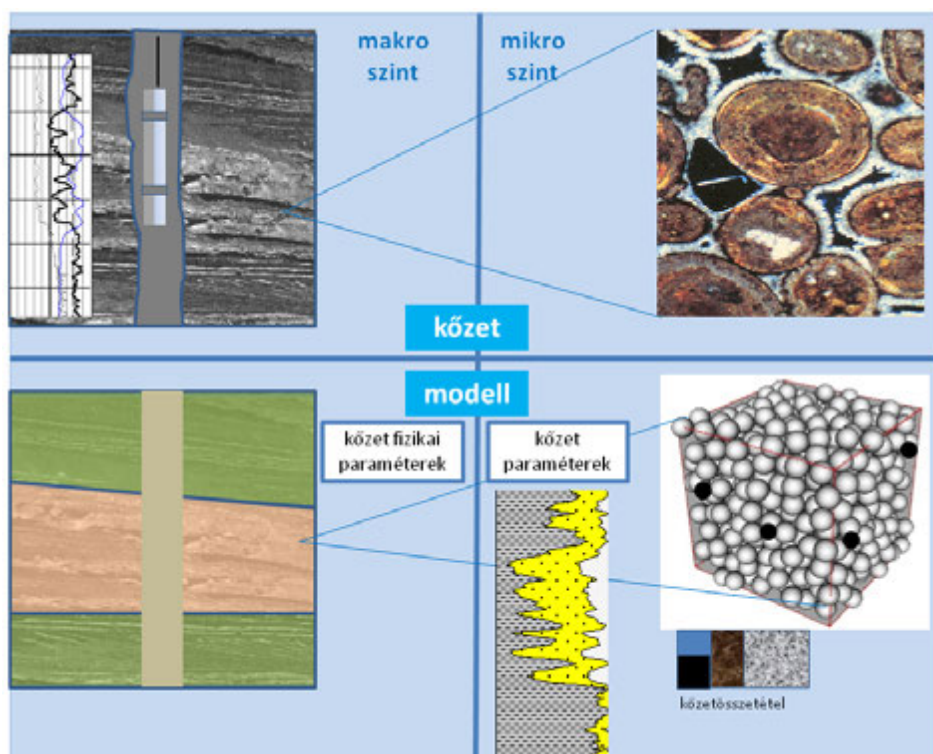
Az ásványi nyersanyagkutatás meghatározó fázisa a geofizikai kutatás, melynek során általában először felszínen, majd ezt követően mélyfúrásokban végrehajtott geofizikai mérések eredményei alapján következtetünk a felszín alatti kőzetek összetételére és elterjedésére. A következtetés indirekt, mivel a geofizikai mérések során mesterséges vagy természetes források által létrehozott fizikai terek térjellemzőit, azok eloszlásait tudjuk csak mérni. A mért térjellemzők eloszlását (időbeli és/vagy térbeli), meghatározza a vizsgált kőzettest fizikai jellemzőinek eloszlása.

Az inhomogén kőzettestek mentén mért térjellemzőkből, általában a kőzetfizikai szempontból homogén tér vagy feltér felett számítható elméleti tér eloszlásával való **ekvivalencia** alapján képezzük un. **látszólagos kőzetfizikai paramétereket** (pl. látszólagos fajlagos ellenállás), melyek általában geofizikai interpretáció bemenő paraméterei. A geofizikai mérésekre jellemző, hogy többnyire a vizsgált régió peremén történnek és leggyakrabban a forrás(ok) is itt helyezkednek el (így a mérések és a kőzetfizikai paraméterek eloszlásának kapcsolata gyakran nem egyértelmű).

A mért eredmények interpretációja (un. inverzió) során, első lépésben a vizsgált térrészre vonatkozóan kívánjuk közelítőleg – egyszerű függvényekkel – rekonstruálni a kőzetfizikai paraméterek **nagyléptékű eloszlását** (a mérés térbeli felbontóképességét meghaladó inhomogenitások esetére). Az inverzió eredménye a kevés paraméterrel jellemezhető kőzetfizikai modell illesztett paraméterei, melyek a mérés környezetének lényegi, makroszkopikus leírását adják meg (pl. VESZ mérésekből meghatározott, rétegzett fajlagos ellenállású végtelen feltér modell vagy a fúrás körüli elárasztás profil modellezése radiálisan homogén fajlagos ellenállású zónákkal, szeizmikus mérésekből becsült rétegzett sebességtér stb.).

A kutatási eredményeket felhasználó, összegző, szintetizáló szakembereknek (pl. a készletszámítást, termelés megtervezését, geológiai interpretációt végző geológus, rezervoárgéológus) a vizsgált kőzetek összetételére és szerkezetére vonatkozó információkra van szükségük, így a geofizikus további feladata a kőzetfizikai paraméterek összekötése a kőzetösszetétellel, kőzetstruktúrával (vagy a kutatott nyersanyag fajlagos mennyiségével, jellemzőivel). A kőzetfizika (petrophysics) legfontosabb területe éppen ennek a kapcsolatnak a feltárása, azaz a **mikro szinten inhomogén, véletlen szerkezetű kőzet átlagos fajlagos jellemzőinek és az ekvivalens kőzetfizikai paraméterek összefüggésének meghatározása**. Általában ez a geofizikai inverzió második szakasza (1.1. ábra).

A jegyzetben is elsősorban a különböző kőzetfizikai paraméterek és a kőzet tulajdonságok mikro szintű összefüggését tárgyaljuk.



1.1. ábra. A kétlépéses geofizikai inverzió. A mérések alapján – első lépésben – elkészül a kőzetfizikai paraméterek eloszlásának modellje (inverzió első lépése), majd a kőzetfizikai paraméterek segítségével a mikro szintű modell alapján becsüljük a kőzetek jellemzőit, összetételét (inverzió második lépése).

1.1. Fontosabb kőzet és kőzetfizikai paraméterek

Az alábbi táblázatban a geofizikai kutatás szempontjából leglényegesebb kőzetfizikai paramétereket foglaljuk össze. Ezek egy része felszíni mérésekkel is mérhető.

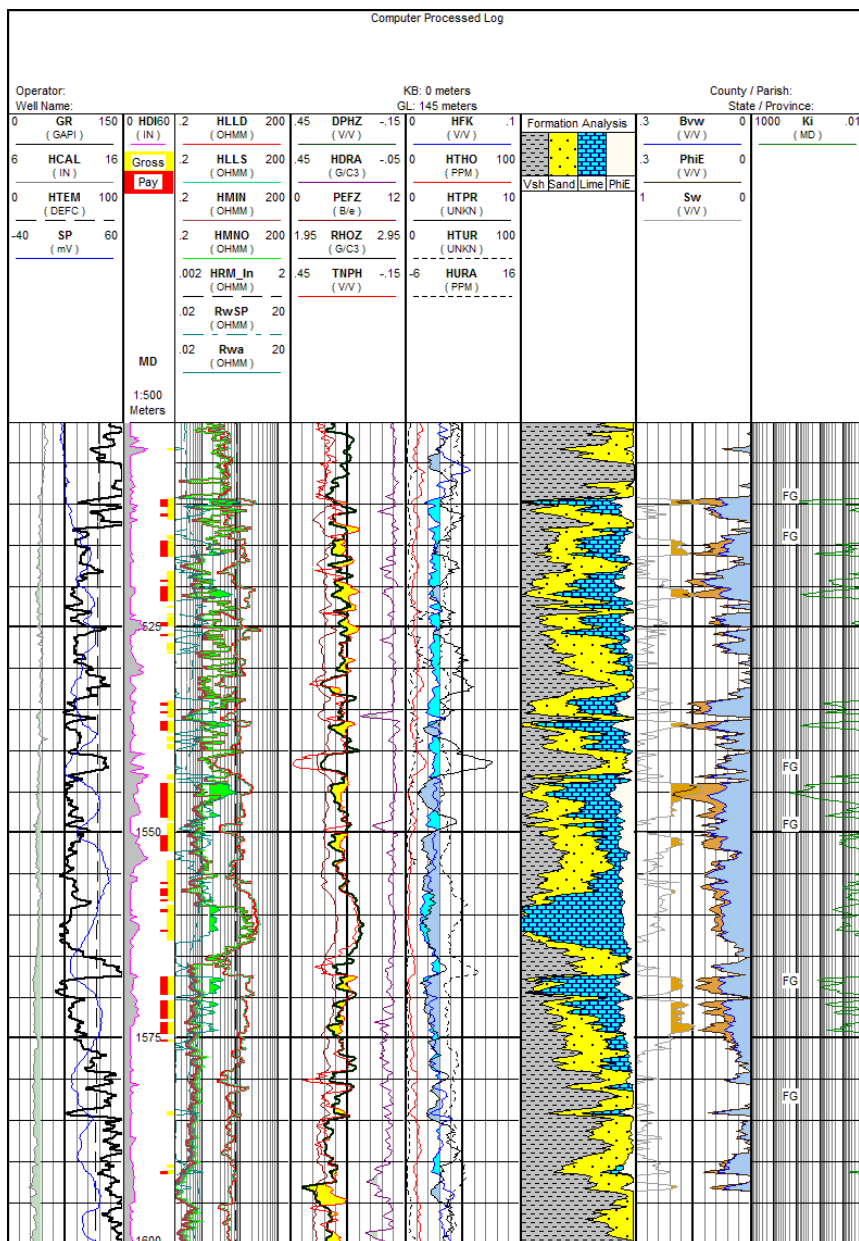
Kőzetfizikai jellemző	Jelölés	Kapcsolódó mérés
fajlagos ellenállás	R	DC és alacsonyfrekvenciás elektromos mérések
fajlagos vezetőképesség	σ	DC és alacsonyfrekvenciás elektromos mérések
dielektromos állandó	ε	nagyfrekvenciás mérések (EPT, GPR)
kationcsere-kapacitás	CEC	ellenállásmérések, SP
mágnesezettség (remanens, indukált)	M	mágneses mérések
mágneses szuszceptibilitás	χ	szuszceptibilitás mérések, mágneses mérések
hővezető képesség	λ	hőmérséklet-eloszlás mérések
hőkapacitás	c	hőmérsékletmérések
hődiffúzió	α	hőmérsékletmérések
neutron kölcsönhatások (abszorpció, szórás) hatáskeresztmetszetei	Σ_a, Σ_s	neutronszelvényezések, neutron-gamma szelvényezések
gamma foton kölcsönhatások hatáskeresztmetszetei	Σ_a, Σ_s	gamma-gamma szelvényezés
aktivitás koncentrációk ($Th, U, {}^{40}K$)	A	spektrális természetesgamma mérés
sűrűség	ρ	gamma-gamma, gravitációs mérések
NMR relaxációs idők	T_1, T_2	NMR mérések
akusztikus hullám sebességek	v_p, v_s	szeizmika, akusztikus karotázs mérések
rugalmas paraméterek	E, λ, ν, μ, K	akusztikus mérések
permeabilitás (relatív permeabilitás)	k, k_r	teszter mérések, Stoneley hullámok amplitúdó mérése

A fenti – többnyire fajlagos - kőzetfizikai paraméterek egy részénél lehet irányfüggés, ekkor a kőzetfizikai paraméter tenzor jellegű. Az anizotrópiájára vonatkozóan több mérési módszer esetében (elektromos, akusztikus) léteznek irányfüggő mérési elrendezések.

Mint említettük, a kőzetfizikai paraméterekből kell rekonstruálni a kőzetparaméterek eloszlását pl.:

- kőzetmátrix típusát, összetételét
- porozitást (szemcseközi illetve repedésekből, kioldásból származó részét)
- víz, olaj, gáz telítettséget
- agyag és márga fajlagos mennyiségét
- szenek esetében, nedvességtartalmat, hamutartalmat,
- kőzetek érc koncentrációját stb.

A 1.2. ábrán szénhidrogén kutató fúrásból származó mérések (baloldali négy sáv) láthatók a mélység függvényében, mellettük pedig – példaként – a kőzetfizikai interpretáció eredményei, a mélység szerinti becsült kőzetösszetétel, valamint a pórusfolyadék összetétele.



1.2. ábra. Mérések és kőzetfizikai értelmezés eredményei egy szénhidrogén kutató fúrásban (Geomega Kft)

2. fejezet - Inhomogén közet ekvivalens tulajdonságai

Ebben a fejezetben közetfizikai modellezés szempontjából alapvető feladattal, a mikro szintű közetmodellhez kapcsolódó **effektív** vagy **ekvivalens** közetfizikai paraméterek számításának elméletével foglalkozunk. Az effektív közetfizikai paraméter annak a homogén közegnek a közetfizikai jellemzőjét jelenti, melyen ugyanaz a mérési eredmény adódik, mint a vizsgált inhomogén közeten (pontosabban a 2.7. és 2.8. egyenletekkel definiáljuk).

A közetfizikai értelmezés eredményként leggyakrabban a közettest átlagos összetételére vonatkozó adatokat kell meghatároznunk (pl. porozitás, szénhidrogén-telítettség stb.), ezért a modellezésnél azt kell vizsgálni, hogy a véletlen eloszlású közetalkotók közetfizikai paramétereiből miként számítható a közet ekvivalens közetfizikai jellemzője (k_{ekv}). Az ezt leíró közetfizikai egyenleteket (un. keverési törvény, homogenizációs egyenletek) a mérésnél felhasznált fizikai tér tulajdonságai, egyenletei alapján tudjuk megadni:

$$k_{ekv} = f(V_1, \dots, V_N, k_1, \dots, k_N) \quad (2.1.)$$

ahol:

V_i : az i -edik közetösszetevő részaránya,

k_i : az i -edik közetösszetevő közetfizikai jellemzője.

A közetfizikai egyenletek kiegészülnek kényszerfeltételekkel, pl. az N számú közetösszetevő fajlagos térfogatának összegére fennáll:

$$\sum_{i=1}^N V_i = 1 \quad (2.2.)$$

A közettest mentén kialakuló tér ($\mathbf{T}_{mért}$), átlagos fizikai mező a közet struktúrájának, a közetet alkotó különböző fizikai tulajdonságú fázisok eloszlásának megfelelő, bonyolult belső határfeltételi rendszer eredményeként alakul ki, tükrözve a szemcsék, repedések eloszlásának véletlen jellegét. Ahhoz hogy az inverzió számára kezelhető legyen, a közetfizikai egyenletek (matematikai modellek) gyakran különböző közelítéseken alapulnak a közetszerkezetet illetően.

Ha a közetalkotó fázisok a kialakuló tér tekintetében nem lennének hatással egymásra, akkor az ekvivalens közetfizikai érték térfogati átlagként kapható meg (pl. sűrűség, makroszkópikus hatáskeresztmetszetek stb.)

Minden más esetben a közetfizikai egyenlet tartalmazza a fázisok kölcsönhatására vonatkozó tagot is (f_{kh}), mely általában a közetalkotók eloszlásaitól is függ:

$$k_{ekv} = \sum_i f_i(V_i, k_i) + f_{kh}(V_1, \dots, V_N, k_1, \dots, k_N) \quad (2.3.)$$

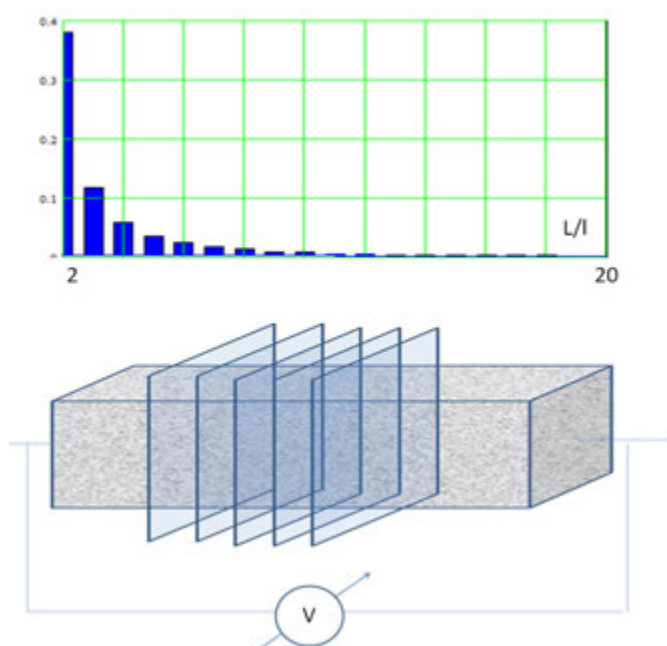
A származtatott közetfizikai egyenleteken alapul az inverzió, mely valamilyen valószínűségi modellel meghatározott, 2.3. egyenleten alapuló funkcionál (2.4.) minimalizálásával történik. A minimum határozza meg a közetösszetétel vektort ($\mathbf{V}$), mely pl. a súlyozott legkisebb négyzetek esetére:

$$Q(\mathbf{V}, \mathbf{k}) = \min \sum_{j=1}^N w_j (k_j - k_{ekv,j}(\mathbf{k}, \mathbf{V}))^2 \rightarrow \mathbf{V} \quad (2.4.)$$

A becslések és elhanyagolások szempontjából lényeges, hogy a méréseket jellemző és térbeli felbontásukat meghatározó karakterisztikus hossz (L) (elektróda távolság, hullámhossz, részecske szabad úthossz stb.) és a közet

mikro szintű inhomogenitásait jellemző karakterisztikus hossz (l) (szemcseméret, pórusméret stb.) között jelentős legyen az eltérés: $l \ll L$.

Ugyancsak lényeges, hogy az L karakterisztikus hossz által meghatározott közettér fogat reprezentatív legyen az inhomogenitás eloszlása szempontjából. (pl. nagyobb repedések esetén ez gyakran nem teljesül, ezért nehezen modellezhető a repedezett közet). A **reprezentatív térfogatra** (V_r) vonatkoztatva történik az effektív paraméterek számítása. Ennek fontos eleme a véletlen komponensek eloszlás függvényeinek izotrópiája, stacionaritása. Az 2.1. ábrán látható, hogy adott ekvivalens közetfizikai paraméter miként stabilizálódik statisztikailag az L hossz növelésével.



2.1. ábra. Szimuláció eredménye: feszültségmérés relatív szórása véletlen közegben a távolság függvényében. A véletlen inhomogenitások nagyságrendjét, mint egységet használtuk (Balázs 2009).

A mérés és a közet modellezésekor meg kell szabadulnunk a közetszerkezet lényegtelen véletlen elemeitől. A származtatott összefüggésekben szerepelhetnek a közegre vonatkozó eloszlás függvények paraméterei, elsősorban az összetevők reprezentatív térfogatra vett átlagai. (néha magasabb momentumok, auto- és keresztkorrelációs függvények jellemzői is. stb.).

Az összefüggések származtatása történhet a közet **matematikai modelljén** végzett elméleti számításokkal (pl. Maxwell-modell – Maxwell 1954), labor mérések által feltárt **empirikus összefüggések** alapján (pl. Archie-modell - Archie 1942) és un. **félempirikus összefüggések** segítségével, amikor az elmélet segítségével felállított függvénykapcsolat paramétereit mérések alapján határozzuk meg (pl. Coates permeabilitás modell – Coates 1974).

A közetmodellezésnél megkülönböztethetünk un. **gyengén inhomogén** és **erősen inhomogén** eseteket, aszerint hogy mekkora a relatív kontraszt a közet egyes fázisai között a vizsgált közetfizikai paraméter vonatkozásában. A gyenge inhomogenitások esetén a kontraszt csak kis perturbációnak tekinthető és ekkor kevésbé lényeges a közetszerkezet, míg nagy kontrasztok modellezése esetén ez döntő fontosságú és nehezíti a probléma megoldását. A nagy kontraszt más oldalról viszont nagy érzékenységet jelent az eltérő közetösszetevők kimutathatósága szempontjából. A nagy kontraszt végtelen nagy kontraszttal történő közelítése megint vezethet a probléma egyszerűsítéséhez (hálózat modellek pl. kapilláris csököteg-modell).

A mérés a mért térjellemző ($\mathbf{T}_{\text{mért}}$) nagyobb térfogatra történő átlagolásának is tekinthető, így kifejezhető a reprezentatív térfogatra vett átlagként ($\bar{\mathbf{T}}$):

$$\bar{\mathbf{T}} = \frac{1}{V_r} \int_{V_r} \mathbf{T}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \mathbf{T}_{\text{mért}} \quad (2.5.)$$

(Például az egyenáramú feszültségmérésnél az elektróda távolságra átlagoljuk a térerősség értékét, a homogén feltételre vonatkozó elméleti eloszlással, mint súlyfüggvénnyel)

A térfogati átlag meghatározó lesz az effektív közetfizikai paraméter pontos definíciójában. Az általunk vizsgált terek szinte mindegyike leírható differenciális (lokális) lineáris forma segítségével, ahol az egyenlet egyik oldalán áramsűrűség vagy fluxus jellegű mennyiség a másik oldalon valamilyen skalártér gradiense áll. Ha erre alapozzuk az effektív érték definícióját, megszabadulhatunk a mérési elrendezések esetlegességétől (tulajdonképpen a látszólagos értékek bevezetése is ezt a célt szolgálja).

Általános formában:

$$\mathbf{q}(\mathbf{x}) = -k(\mathbf{x}) \nabla U(\mathbf{x}) \quad (2.6.)$$

ahol a $k(\mathbf{x})$ most általánosságban jelöli a térben változó közetfizikai paramétert, amely lehet tenzor vagy skálár. Az alábbiakban felsoroljuk a legfontosabb differenciális összefüggéseket a szokásos jelölésekkel:

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} = \sigma \nabla U \quad \text{elektromos vezetőképességre} \quad (2.6.1.)$$

vonatkozó egyenlet,

$$\mathbf{M} = \chi \mathbf{H} = \chi \nabla W \quad \text{mágneses szuszeptibilitásra} \quad (2.6.2.)$$

vonatkozó egyenlet,

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} = \mu \nabla W \quad \text{mágneses permeabilitásra vonatkozó} \quad (2.6.3.)$$

egyenlet,

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} = \varepsilon \nabla U \quad \text{dielektromos állandóra vonatkozó} \quad (2.6.4.)$$

egyenlet,

$$\mathbf{q}_h = -\lambda \nabla T \quad \text{hővezető képességre vonatkozó} \quad (2.6.5.)$$

egyenlet,

$$\mathbf{q}_f = -k \eta^{-1} \nabla P \quad \text{permeabilitásra vonatkozó egyenlet,} \quad (2.6.6.)$$

$$\mathbf{J}_p = -D \nabla \phi \quad \text{részecske fluxus és áram} \quad (2.6.7.)$$

összefüggése (Fick-törvény).

Végül soron olyan homogén, egyetlen ekvivalens közetfizikai paraméterrel leírható modellt keresünk, melyben adott forrás hatására ugyanolyan makroszkópikus tér alakul ki.

A fent említett lineáris forma segítségével az ekvivalens közetfizikai paraméter definíciója:

$$k_{\text{ekv}} \mathbf{T}_{\text{mért}} = k_{\text{ekv}} \bar{\mathbf{T}}(\mathbf{x}) = \bar{\mathbf{T}}(\mathbf{x}) k(\mathbf{x}) = \frac{1}{V_r} \int_{V_r} k(\mathbf{x}) \mathbf{T}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \bar{\mathbf{q}}(\mathbf{x}) \quad (2.7.)$$

A fenti integrálban V_r a korábban definiált reprezentatív tértartományt jelöli. A 2.7. kifejezésben, az integrandusban a fluktuáló térerő és a fluktuáló közetfizikai mennyiség látható. A forrás ($\mathbf{q}$) térfogati átlaga szintén mért érték (pl. elektromos szondák által bebocsátott áram).

A probléma variációs feladatokban szereplő energiaintegrál segítségével is megközelíthető (2.8.). A kifejezés $\mathbf{T}$ szerinti szélsőértéke adja meg a kialakuló teret. Az ezzel kifejezett ekvivalens közetfizikai paraméter definíciója:

$$\frac{1}{2} k_{\text{ekv}} \mathbf{T}_{\text{mért}}^2 = \min_{\mathbf{T}} \frac{1}{V} \frac{1}{2} \int_{V_r} k(\mathbf{x}) \mathbf{T}(\mathbf{x}) \mathbf{T}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (2.8.)$$

A fenti definíciók nemcsak skalármennyiségekre, hanem a tenzorjellegű közetfizikai paraméterekre is kiterjeszthetők. A térfogati integrál ilyenkor a tenzorral képzett kvadratikusságot tartalmaz.

A kétféle ekvivalens értékről belátható, hogy azonos, amennyiben $\mathbf{T}(\mathbf{x})$ felírható egy skalármező ($U(\mathbf{x})$) gradiensként. A lokális áramsűrűség:

$$\mathbf{q}(\mathbf{x}) = k(\mathbf{x}) \mathbf{T}(\mathbf{x}) = -k(\mathbf{x}) \nabla U(\mathbf{x}) \quad (2.9.)$$

Ekkor a referencia térfogaton belül a térerősség és az áramsűrűség is fluktuál egy átlag érték körül:

$$\begin{aligned} \mathbf{q}(\mathbf{x}) &= \bar{\mathbf{q}} + \delta \mathbf{q}(\mathbf{x}) \\ \nabla U(\mathbf{x}) &= \bar{\nabla U} + \nabla \delta U(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (2.10.)$$

A fluktuációk a definícióból következően zérusátlagúak, így az energia térfogati átlaga:

$$\bar{W} = \frac{1}{2} \bar{\mathbf{q}} \cdot \bar{\mathbf{T}} + \frac{1}{2} \overline{\delta \mathbf{q} \nabla \delta U} \quad (2.11.)$$

A második tagról belátható, hogy zérus. Ugyanis képezve az átlagolást jelentő térfogati integrált a referencia térfogatra:

$$\overline{\delta \mathbf{q} \nabla \delta U} = \frac{1}{V_r} \int_{V_r} \delta \mathbf{q} \nabla \delta U d\mathbf{x} = -\frac{1}{V_r} \int_{V_r} \nabla \delta \mathbf{q} \cdot \delta U d\mathbf{x} + \frac{1}{V_r} \int_{V_r} \delta \mathbf{q} \cdot \delta U d\mathbf{x} \quad (2.12.)$$

A parciális integrálás eredményeképp kapott két integrál mindegyike zérus. Az első – a térfogati integrál – az áramsűrűség divergenciája miatt, mely a forrásrégió kívül mindenhol nulla, így a fluktuáció divergenciájának is zérusnak kell lennie, mivel

$$\nabla \delta \mathbf{q} = \nabla (\mathbf{q} - \bar{\mathbf{q}}) = 0 \quad (2.13.)$$

A második, felületi integrál pedig azért, mert a referencia térfogat felületén eltűnik a potenciál fluktuációja, azaz megegyezik az átlagos értékkel. A $\bar{\mathbf{q}}$ helyére 2.11.-be 2.7. egyenletet helyettesítve az állítást igazoltuk.

2.1. Analitikus közelítések

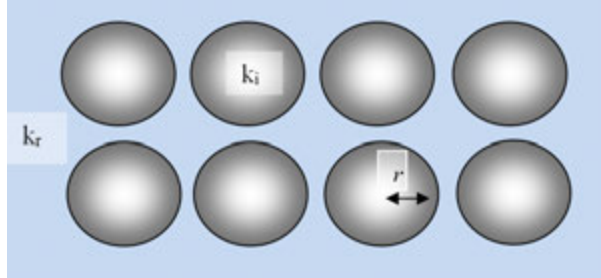
Az inhomogén közegek – különösen az erősen inhomogén közegek esetében – az inhomogenitásokat, szemcséket és repedéseket gyakran közelítik különböző egyszerű geometriai alakzatokkal: gömbbel, ellipszoiddal stb. (Maxwell, Eshelby modellek stb.). A probléma így egy több részecske problémává válik, amelyben azért alapvető szerepet játszik a modellt alkotó részecske terének meghatározása (az egy részecske probléma).

Ebből kiindulva a közelítő megoldás többféleképpen is előállítható. Összegezhetjük a részecskék terét elhanyagolva a kölcsönhatást, vagy pl. a több részecskéből álló rendszerek esetében más területeken is sikerrel alkalmazott átlagtér-közelítéssel élhetünk a kölcsönhatások közelítő figyelembevételére. A módszerek részletezésével nem foglalkozunk, csak néhány elemét kiemelve kívánjuk bemutatni a modellépítés lehetőségeit.

2.1.1. Egy részecske modell - Maxwell modell

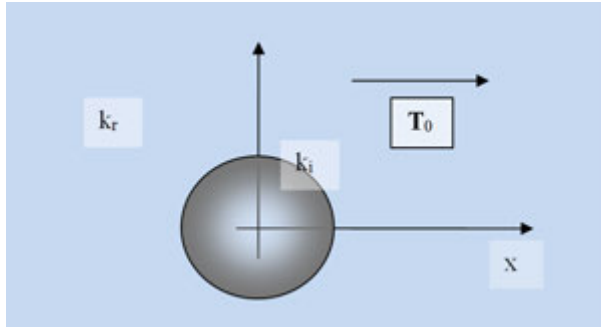
Maxwell fajlagos ellenállás közelítő számítására használta fel az azonos gömbökből felépülő modellt (Maxwell 1954), Eshelby az inhomogén közeg effektív rugalmas tulajdonságainak meghatározásánál alkalmazta (Eshelby 1957).

A gömbök a szemcséket reprezentálják. Legyen a homogén gömböket jellemző közetfizikai paraméter k_i , sugaruk r_i . A gömbök közötti tér szintén homogén és k_r közetfizikai paraméterrel jellemezhető.



2.2. ábra. A Maxwell-modell geometriája (a gömbök véletlenszerűen is elhelyezhetők)

Vizsgáljunk először egyetlen, origóban elhelyezett gömböt. Tegyük fel, hogy a gömb T_0 konstans térerővel jellemzett mezőben van. A térerősség az egyszerűség kedvéért mutasson x irányba (2.3. ábra).



2.3. ábra. A modell alapját jelentő gömb inhomogenitás

Ha források nincsenek jelen, akkor a potenciál kielégíti a Laplace egyenletet:

$$\Delta U = 0 \quad (2.14.)$$

Oldjuk meg gömbi koordináta-rendszerben, melynek origója a gömb középpontja.

A Laplace-egyenlet így:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \Theta} \frac{\partial}{\partial \Theta} \left(\sin \Theta \frac{\partial U}{\partial \Theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \Theta} \frac{\partial^2 U}{\partial \omega^2} = 0 \quad (2.15.)$$

A változók szétválasztásával az általános megoldás r -től függő része az r hatványsoraként, míg a Θ -tól függő rész $\cos \Theta$ (továbbiakban μ) Legendre-polinomjainak ($P_n(\mu)$) lineáris kombinációjával írható fel. További szögváltozótól a megoldás szimmetria okok miatt nem függ.) Az általános megoldás szorzat alakban felírva:

$$U(r, \mu) = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n r^n + B_n r^{-n-1}) P_n(\mu) \quad (2.16.)$$

A potenciál a gömb környezetében a homogén tér és a gömb okozta perturbáció összegeként adható meg. Megköveteljük, hogy a potenciál $r = 0$ nál is véges maradjon, míg végtelenben, ahol a gömb hatása már nem érvényesül:

$$U = -T_0 \mathbf{x} = -T_0 r \cos \Theta = -T_0 r \mu \quad (2.17.)$$

perturbálatlan értékhez tartson. Ezért a gömbön belül a potenciál kifejezésében csak a pozitív kitevőjű hatványtagok együtthatói különbözhetnek zérustól:

$$U_i = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\mu) \quad (2.18.)$$

A gömbön kívül viszont éppen a pozitív kitevőjű tagok együtthatói nullák, hogy biztosítsák a perturbációs hatás végtelenbeli eltűnését.

$$U_k = \sum_{n=0}^{\infty} B_n r^{-n-1} P_n(\mu) - T_0 r P_1(\mu) \quad (2.19.)$$

Természetesen a fenti kifejezésben megjelent a konstans térerő hatása is, melyet r negatív kitevőjű hatványával nem lehet leírni. Hogy az eredeti formában kapjuk meg az eredményt, vezessük be az alábbi jelölést (vezetőképesség ellenállás csere):

$$\kappa = \frac{1}{k} \quad (2.20.)$$

Az A_n és B_n együttható sorozat a határfeltételekből határozható meg. A gömb felületén a potenciálnak és az áramsűrűség jellegű mennyiség normális komponensének folytonosnak kell lennie.

$$(U_i)_{r=r_i} = (U_k)_{r=r_i} \quad (2.21.a.)$$

$$\left(\frac{1}{\kappa_i} \frac{\partial U_i}{\partial r} \right)_{r=r_i} = \left(\frac{1}{\kappa_k} \frac{\partial U_k}{\partial r} \right)_{r=r_i} \quad (2.21.b.)$$

Mivel az egyenlőségeknek minden Θ -ra teljesülnie kell, így a megfelelő P_n polinomok együtthatóinak azonosnak kell lennie. Az egyenletekből következően A_n és B_n között kétféle aránynak kell fennállnia egyidejűleg, amely $n = 1$ kivételével csak a triviális $A_n = B_n = 0$ esetben teljesülhet. Az $n=1$ esetben viszont a külső tér miatt nem tűnnek el az együtthatók. Értékük:

$$A_1 = -\frac{3T_0 \kappa_i}{2\kappa_i + \kappa_k} \quad B_1 = \frac{-r_i^3 T_0 (\kappa_i - \kappa_k)}{2\kappa_i + \kappa_k} \quad (2.22.)$$

Az együtthatókat visszahelyettesítve a gömbön belüli potenciál:

$$U_i = -\frac{3T_0 \kappa_i \cos \Theta}{2\kappa_i + \kappa_k} r \quad (2.23.)$$

A gömbön kívüli térrészben:

$$U_k = -\frac{T_0 r_i^3 (\kappa_i - \kappa_k) \cos \Theta}{(2\kappa_i + \kappa_k)} \frac{1}{r^2} - T_0 r \cos \Theta \quad (2.24.)$$

(A perturbáció polarizáció eredménye, így a gömb hatása dipól jelleggel csökken a távolsággal.)

2.1.2. Több részecske modell

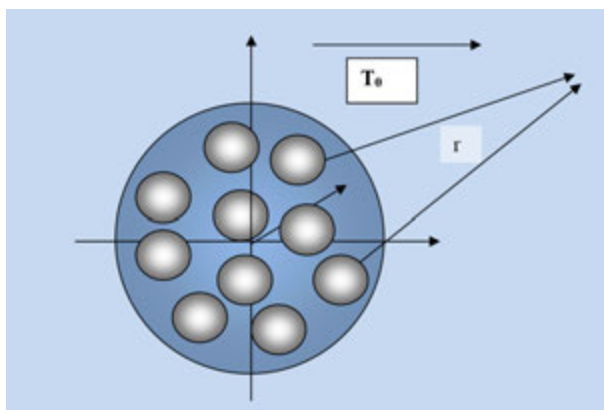
Az egy részecskére vonatkozó külső potenciálból (2.24.) lehet tovább építkezni. Az előbbi gömbből vegyünk N darabot és ezt r_N sugarú nagyobb gömbbe helyezzük el (2.4. ábra). Most a nagy gömb centruma legyen az origóban és vizsgáljuk ennek külső terét egy távoli külső pontban.

Ezt egyszerűen megadhatjuk úgy, mint a kiscömbök által létrehozott potenciál összege, ha eltekintünk a kiscömbök közötti kölcsönhatástól.

$$U_k = -\frac{Nr_i^3 T_0 (\kappa_i - \kappa_k) \cos \Theta}{(2\kappa_i + \kappa_k)} \frac{1}{r^2} - T_0 r \cos \Theta \quad (2.25.)$$

Ha elég messze van a referencia pont, a távolságok közötti különbség elhanyagolható. Most írjuk fel ugyanezt a potenciált az ekvivalens fizikai tulajdonsággal jellemezhető egyetlen nagygömb segítségével, visszavezetve a problémát az előző fejezetben tárgyaltra.

$$U_k = -\frac{r_N^3 T_0 (\kappa_{ekv} - \kappa_k) \cos \Theta}{(2\kappa_{ekv} + \kappa_k)} \frac{1}{r^2} - T_0 r \cos \Theta \quad (2.26.)$$



2.4. ábra. Az ekvivalens fajlagos ellenállás meghatározása a Maxwell-modellben

A távoli pontban a két potenciál azonosságából a keresett ekvivalens közetfizikai jellemző kifejezhető:

$$\kappa_{ekv} = \frac{\kappa_k (r_N^3 (2\kappa_i + \kappa_k) + Nr_i^3 (\kappa_i - \kappa_k))}{r_N^3 (2\kappa_i + \kappa_k) - 2Nr_i^3 (\kappa_i - \kappa_k)} \quad (2.27.)$$

Meg kell szabadulnunk a gömbök számától, mint lényegtelen paramétertől. A kiscömbök össz térfogata adja a mátrix térfogatot, mely kifejezhető a hézagtérfogattal, a porozitással

(1- ϕ). Ezzel N -re egyenlet írható fel:

$$Nr_i^3 = r_N^3 (1 - \phi) \quad (2.28.)$$

Ezt behelyettesítjük 2.27.-be:

$$\kappa_{ekv} = \frac{\kappa_k (3\kappa_i - \phi(\kappa_i - \kappa_k))}{3\kappa_k + 2\phi(\kappa_i - \kappa_k)} \quad (2.29.)$$

Ha a gömböket jellemző paraméterrel (κ_i) végtelenhez tartunk (ez pl. a közet fajlagos ellenállás modellezésénél lényeges), akkor 2.29 az alábbi formára egyszerűsödik:

$$\kappa_{ekv} = \frac{3-\phi}{2\phi} \kappa_k \quad (2.30.)$$

A 2.29. formula helyes eredményt ad, ha a porozitással zérushoz tartunk, vagy ha a kontrasztot csökkentjük zérusra. Mivel a gömböket közelítve, az elhanyagolt kölcsönhatás jelentősége nagyobb, ez a modell inkább nagy porozitásoknál ad jó eredményt. Az eredmény elektromos vezetéssel, dielektromos állandóval, hővezetéssel stb. kapcsolatos problémáknál is felhasználható. A formula az összetevők felcserélésére nem szimmetrikus.

2.1.3. Szemcsék közötti kölcsönhatást figyelembe vevő modellek

Az előző fejezetben vázolt modellben elhanyagoltuk a részecskék (közetszemcsék) kölcsönhatását, kontaktusát, lokális termódosító hatását. Ennek közelítő figyelembevételére többféle megoldás is kínálkozik:

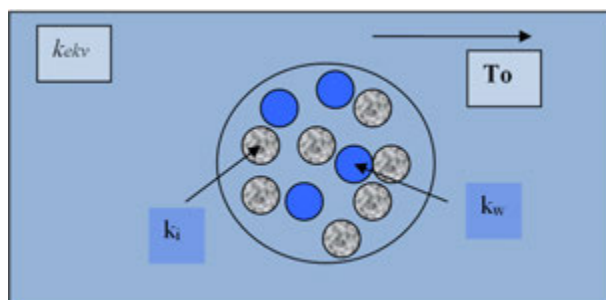
1. Átlagtér modellek (mean field model), melyben a szomszédos részecskéktől származó módosított tér átlagával számolnak a közegen belül.
2. Effektív közrg modellek, melyeknél az egy részecskére épülő többrészecskés modellben megváltoztatjuk a beágyazó közeg tulajdonságait, szimulálva a többi részecske hatását.

A részletek ismertetése nélkül, a sokféle lehetséges közelítés közül kiragadunk néhányat.

Az úgynevezett **önkonzisztens (self consistent) modellben** (Hill 1965) úgy tekintjük, mintha az egyetlen vizsgált közetszemcse az egyelőre ismeretlen ekvivalens közetfizikai tulajdonsággal jellemezhető közegbe lenne beágyazva. Kövessük most is a Maxwell-modellnél alkalmazott gondolatmenetet. A szemcse legyen gömb, mely kétféle közetalkotót (mátrix, pórusfolyadék) megfelelő térfogati arányban reprezentálva kisebb gömbökből épül fel (2.5 ábra). A nagy gömböt és a kis gömböket is az egyelőre ismeretlen ekvivalens fizikai paraméterrel jellemezhető közeg fogja körül. Írjuk fel 2.24. egyenlet alkalmazásával egy távoli pontban a potenciált.

$$U(r) = -\frac{N_1 r_i^3 T_0 (\kappa_m - \kappa_{ekv}) \cos \Theta}{(2\kappa_m + \kappa_{ekv})} \frac{1}{r^2} - \frac{N_2 r_i^3 T_0 (\kappa_w - \kappa_{ekv}) \cos \Theta}{(2\kappa_w + \kappa_{ekv})} \frac{1}{r^2} - T_0 r \cos \Theta = -T_0 r \cos \Theta \quad (2.31.)$$

A jobb oldalon csak a homogén térre jellemző érték van, hiszen ekvivalens jellemzővel jellemezhető közegben, ekvivalens jellemzővel jellemezhető gömb van, így a perturbációs hatás zérus.



2.5. ábra. A közetszemcse és a beágyazó közeg önkonzisztens modellje

Figyelembe véve, hogy a pórusfolyadékot reprezentáló kiscömbök térfogata az összes kiscömb térfogatához képest a porozitással (ϕ) egyezik meg:

$$\frac{N_2 r_i^3}{(N_1 + N_2) r_i^3} = \phi \quad (2.33.)$$

Átalakítások után:

$$\frac{\kappa_i - \kappa_{ekv}}{\kappa_{ekv} + 2\kappa_i} \cdot (1 - \phi) + \frac{\kappa_w - \kappa_{ekv}}{\kappa_{ekv} + 2\kappa_w} \cdot \phi = 0 \quad (2.34.a)$$

A fenti összefüggés több komponensre is kiterjeszthető. Azaz:

$$\sum_j \frac{\kappa_j - \kappa_{ekv}}{\kappa_{ekv} + 2\kappa_j} V_j = 0 \quad (2.34.b)$$

Az önkonzisztens modellben a komponensek szerepe szimmetrikus, így felcserélhetők.

A fenti homogenizálás differenciális lépésekben is végrehajtható ún. differenciális önkonzisztens (Hashin 1988) modellben. Ekkor differenciálegyenletet kapunk az effektív paraméterre a porozitás függvényében (kétkomponensű közetre – 2.35.). Ha tisztán mátrixból indulunk:

$$\frac{\kappa_{ekv}(\phi) - \kappa_{ekv}(\phi + d\phi)}{\kappa_{ekv}(\phi + d\phi) + 2\kappa_{ekv}(\phi)} \cdot (1 - d\phi) + \frac{\kappa_w - \kappa_{ekv}(\phi + d\phi)}{\kappa_{ekv}(\phi + d\phi) + 2\kappa_w} \cdot d\phi = 0 \quad (2.35.a)$$

Látható, hogy a porozitás változtatása előtti ekvivalens érték játssza a mátrix szerepét. Fejtsük sorba a porozitás függvényében a megváltozott ekvivalens értéket, majd $d\phi$ -vel tartsunk zérushoz:

$$\frac{d\kappa_{ekv}}{d\phi} = \frac{\kappa_{ekv}(\phi) - \kappa_w}{\kappa_{ekv}(\phi) + 2\kappa_w} 3\kappa_{ekv}(\phi) \quad (2.35.b)$$

Az ekvivalens paraméter meghatározását a differenciálegyenlet megoldásával nyerjük, úgy hogy a zérus porozitásnál, mint kezdőértéknél az ekvivalens érték a mátrix értékével egyezik meg, majd a megoldásnál zérustól a keresett porozitásig integrálunk.

Átlagtér modell kialakítható úgy, hogy az egyrészeske modell esetére meghatározzuk a szemcsék körüli perturbált tér átlagát. T_0 külső tér helyett, a módosított tér értékét használjuk fel az effektív közetfizikai paraméter meghatározására (**Mori-Tanaka modell** – Mori, Tanaka, 1973)

2.1.4. Perturbációs módszer (gyenge inhomogenitások esete)

Gyenge inhomogenitások hatása jól leírhatók perturbációs módszerrel. Ekkor a közetfizikai jellemzőktől függő és a mért teret leíró differenciál operátor felbontható egy homogén és egy fluktuációs tagra. A homogén közegre vonatkozó egyenlet L differenciáloperátorral, k_h közetfizikai jellemzővel és U_h térjellelmezővel vagy potenciállal az f forrás terében a következő:

$$L(k_h)U_h = f \quad (2.36.)$$

Az inhomogén esetre vonatkozó egyenlet, perturbált operátorral (δL) és potenciálokkal (δU_i):

$$L(k_{ih})U_{ih} = \{L(k_h) + \lambda \delta L(k)\} \left\{ U_h + \sum_i \lambda^i \delta U_i \right\} = f \quad (2.37.)$$

A λ együttható a közetfizikai fluktuációk relatív arányát, kontrasztját fejezi ki (kiemelésével könnyebben azonosíthatjuk a különböző rendű tagokat). A perturbált potenciált a képletben szereplő függvénysor alakjában keressük. Gyengén inhomogén esetben:

$$\frac{\delta \kappa}{\kappa} = \lambda \ll 1 \quad (2.38.)$$

A 2.37. egyenletben végezzük el a formális beszorzást és álljunk meg az elsőrendű közelítésnél (λ első hatványánál):

$$L(k_h)U_{ih} = L(k_h)U_h + \lambda \{ \delta L(k)U_h + L(k_h)\delta U_1 \} = f \quad (2.39.)$$

Gyenge inhomogenitásoknál az elsőrendű közelítés is megfelelő lehet. Az egyenlet két oldalán a λ azonos hatványú tagjaiban az együtthatóknak meg kell egyeznie. A nulladik hatványhoz tartozik a homogén probléma egyenlete. Az elsőrendű perturbációs potenciálra vonatkozó egyenlet λ elsőrendű hatványának együtthatójából:

$$L(k_h)\delta U_1 = -\delta L(k)U_h \quad (2.40.)$$

Látható, hogy első rendben pl. az inhomogenitások forrásként viselkednek. Erősségüket megszabja a fluktuációhoz tartozó kontraszt és a homogén térjellemző. Így a homogén térbeli megoldás Green-függvénye (G) felhasználható a perturbált eset megoldásánál is:

$$U \approx U_h + \lambda \delta U_1 = U_h - \lambda \delta L(k)U_h * G \quad (2.41.)$$

A közelítés jósága a Green-függvény lecsengésén is múlik. Elmondható, hogy az első rendű közelítés $O(\delta k^2)$ hibával jellemezhető. Az ilyen típusú modellezésnél általában a fluktuációk hatását távoli pontban összegezzük (az összegzést legalább a referencia térfogatra kell végrehajtani) és ebből határozzuk meg az ekvivalens közetfizikai jellemzőt. Ezt az utat követtük pl. a Maxwell-modellnél. A 2.41. képletben az elsőrendű perturbációs megoldásnál látható, hogy az inhomogenitások határai független forrásként viselkednek, így adnak járulékot a megoldáshoz.

Vegyük példának (Landau, Lifsic 1960) a Poisson-egyenlettel leírható tereket x -irányú homogén térerősségnél ($\mathbf{E}_0$). A közetfizikai perturbációkat (δk) tekintsük az átlagos paraméter ($\bar{k}$) körüli zérus várható értékű véletlen mennyiségnek. Ekkor első rendű közelítésben a potenciál két tagból áll, egyrészt az átlagos paraméterrel jellemzett homogén térre vonatkozó potenciálból (U_0) és a potenciál fluktuációjából (δU). Így az egyenlet:

$$\nabla[(\bar{k} + \delta k)\nabla(U_0 + \delta U)] = f \quad (2.42a)$$

Első rendben elkülöníthető a perturbációs operátor, mely abból adódik, hogy most k is változik, így nem emelhető ki a differenciálás elé. A potenciálhoz tartozó térerősséggel felírva ugyanez:

$$\nabla[(\bar{k} + \delta k)(\mathbf{E}_0 + \delta \mathbf{E})] = -f \quad (2.42b)$$

Átalakítások után a forrásrégió kívül az első rendű tagokig:

$$\bar{k}\nabla\delta\mathbf{E} + \mathbf{E}_0\nabla\delta k + \dots = 0 \quad (2.43.)$$

Feltételezzük, hogy a térerősség fluktuációk eloszlása irány független és $\mathbf{E}_0$ x -irányú. Átlagoljuk a térerősséget a szemcsék térfogatára, Ekkor az izotrópia miatt a térerősség fluktuáció divergenciájának átlaga:

$$\frac{1}{3}\nabla\delta\bar{\mathbf{E}} = \frac{\partial\delta\bar{E}_x}{\partial x} = \frac{\partial\delta\bar{E}_y}{\partial y} = \frac{\partial\delta\bar{E}_z}{\partial z} \quad (2.44.)$$

Így egy x komponensekre vonatkozó egyenlet is felírható a 2.43 és 2.44 egyenletek alapján:

$$3\bar{k}\frac{\partial}{\partial x}\delta\bar{E}_x = -E_0\frac{\partial\delta k}{\partial x} = -\bar{E}_x\frac{\partial\delta k}{\partial x} \quad (2.45.)$$

Integráljuk formálisan:

$$\overline{\delta E_x} = -\frac{\overline{E_x}}{3\bar{k}} \delta k \quad (2.46.)$$

A térerősség bármilyen irányú is lehet, így vektoros formában is megadható az egyenlet:

$$\overline{\delta \mathbf{E}} = -\frac{\overline{\mathbf{E}}}{3\bar{k}} \delta k = -\frac{\mathbf{E}_0}{3\bar{k}} \delta k \quad (2.47.)$$

Összefüggést nyertünk a térerősség fluktuációk egy közetösszetevőre vonatkoztatott átlagértéke és a közetfizikai paraméter fluktuációja között. A fenti kifejezést behelyettesíthetjük az ekvivalens fizikai mennyiséget meghatározó 2.7. egyenletbe.

$$k_{ekv} \overline{\mathbf{E}} = \overline{k \mathbf{E}} = \bar{k} \overline{\mathbf{E}} + \overline{\delta k \delta \mathbf{E}} \quad (2.48.)$$

Itt az átlagképzés már a reprezentatív térfogatra vonatkozik. Mivel:

$$\overline{\delta k \delta \mathbf{E}} = -\frac{\mathbf{E}_0}{3\bar{k}} \overline{(\delta k)^2} \quad (2.49.)$$

így az ekvivalens közetfizikai paraméter első rendű közelítése:

$$k_{ekv} = \bar{k} - \frac{\overline{\delta k^2}}{3\bar{k}} \quad (2.50.)$$

A k a példában a vezetőképességgel azonos. (De analóg módon tanulmányozható a hővezetőképesség, a dielektromos állandó stb.). Ugyanerre az eredményre jutunk az elsőrendű perturbációs megoldás segítségével is.

Tételezzük fel továbbiakban, hogy a közeg kétkomponensű, véletlen eloszlású. Az adott komponenshez tartozó szemcsék helyzetét jelölje két komplementer – 0 és 1 értékű – függvény (karakterisztikus függvény):

$$\chi_1(\mathbf{x}) = \frac{k_2 - k(\mathbf{x})}{k_2 - k_1} \quad (2.51a.)$$

$$\chi_2(\mathbf{x}) = \frac{k(\mathbf{x}) - k_1}{k_2 - k_1} \quad (2.51b.)$$

melyekkel a perturbációk eloszlása:

$$\delta k(\mathbf{x}) = \chi_1(\mathbf{x}) \delta k_1 + \chi_2(\mathbf{x}) \delta k_2 \quad (2.52.)$$

Mivel a későbbiekben szükség lesz rá, alábbiakban becsüljük egy kétállapotú véletlen függvény szórásnégyzetét, azaz az autokovariancia függvény zérus távolsághoz tartozó tagját.

$$\overline{(k - \bar{k})^2} \approx \frac{1}{V_r} \int_{V_r} (\chi_1(\mathbf{x}) k_1 + \chi_2(\mathbf{x}) k_2 - \bar{k})^2 d\mathbf{x} \quad (2.53.)$$

$$\overline{(k - \bar{k})^2} \approx \frac{1}{V_r} \int_{V_r} (\chi_1(\mathbf{x}) k_1^2 + \chi_2(\mathbf{x}) k_2^2 - 2(\chi_1(\mathbf{x}) k_1 + \chi_2(\mathbf{x}) k_2) \bar{k} + \bar{k}^2) d\mathbf{x} \quad (2.54.)$$

$$\overline{(k - \bar{k})^2} \approx \phi_1 k_1^2 + \phi_2 k_2^2 - \bar{k}^2 = \phi_1 \phi_2 (k_1 - k_2)^2 \quad (2.55.)$$

Ezzel kifejezhető k_{ekv} első rendű közelítése 2.50. egyenlet felhasználásával:

$$k_{ekv} = \bar{k} - \frac{\phi_1 \phi_2}{3\bar{k}} (k_2 - k_1)^2 \quad (2.56.)$$

Látható, hogy az eredmény összhangban van a korábban állítottakkal, azaz átlagból és egy kölcsönhatást leíró tagból áll.

2.1.5. Határok a közetek ekvivalens fizikai jellemzőire

A közet, mint keverék effektív közetfizikai paramétereinek kérdését közelíthetjük úgy is, hogy milyen alsó és felső korlát állapítható meg rá, ha ismerjük a komponensek részarányát és közetfizikai jellemzőit. (Hashin 1963) (Markov 1999). Az utóbbi publikáció levezetésén alapul ez a fejezet.

Induljunk ki az energia integrálból (2.8.), elhagyva a magasabb rendben perturbált tagokat:

$$(\bar{k} + \delta k)(\bar{\nabla} U + \delta \nabla U)^2 = \bar{k} \cdot \bar{\nabla} U^2 + 2\bar{k} \cdot \bar{\nabla} U \delta \nabla U + \delta k \bar{\nabla} U^2 + \dots \quad (2.57.)$$

A perturbációk térfogati átlagát most is zérusnak vesszük. Az első tag a perturbáció nélküli energiaintegrált adja, mely kifejezhető a makroszkópikus mérések eredményével is.

$$\bar{k} \bar{\nabla} U^2 = k^0_{ekv} \mathbf{T}_{mért}^2 = \bar{k} \cdot \mathbf{T}_{mért}^2 \quad (2.58.)$$

A második tag:

$$2\bar{k} \bar{\nabla} U \delta \nabla U = \frac{1}{V_r} \int_{V_r} 2k \nabla U(\mathbf{x}) \delta \nabla U(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = -\frac{1}{V_r} \int_{V_r} 2\delta U \cdot \nabla(k \nabla U) d\mathbf{x} + \frac{1}{V_r} \int_{\partial V_r} 2k \nabla U \frac{\partial \delta U}{\partial n} ds \quad (2.59.)$$

Parciális integrálással két taggá, egy térfogati és egy felületi integrállá alakítva látható, hogy ez a tag eltűnik. A térfogati integrál azért, mert magába foglalja az áram jellegű mennyiség divergenciáját, a felületi integrál pedig azért, mert a potenciál fluktuációi eltűnnek a felületen.

A harmadik tagot a közetfizikai paraméter perturbációi definiálják:

$$\delta k \bar{\nabla} U^2 = \delta k_1 \cdot \chi_1 (\bar{\nabla} U)^2 + \delta k_2 \cdot \chi_2 (\bar{\nabla} U)^2 = \delta k_{ekv} \mathbf{T}_{mért}^2 \quad (2.60.)$$

Első rendben az ekvivalens érték $\bar{k} + \delta k_{ekv}$ formában is kifejezhető. Innen felírható az ekvivalens perturbáció függése a közetkomponensek okozta perturbációtól:

$$\frac{\partial \delta k_{ekv}}{\partial k_1} = \frac{1}{\mathbf{T}_{mért}^2} \chi_1 (\bar{\nabla} U)^2 \quad (2.61.a)$$

$$\frac{\partial \delta k_{ekv}}{\partial k_2} = \frac{1}{\mathbf{T}_{mért}^2} \chi_2 (\bar{\nabla} U)^2 \quad (2.61.b)$$

Végezzük el az alábbi azonos átalakításokat a Cauchy-Schwarz egyenlőtlenség felhasználásával, valamint kihasználva, hogy:

$$(\chi_i)^2 = \chi_i \quad (2.62.)$$

$$\left| \int_{V_r} \chi_1(\mathbf{x})(\nabla U(\mathbf{x})) d\mathbf{x} \right|^2 = \left| \int_{V_r} \chi_1(\mathbf{x}) \chi_1(\mathbf{x})(\nabla U(\mathbf{x})) d\mathbf{x} \right|^2 \leq \int_{V_r} (\chi_1(\mathbf{x}'))^2 d\mathbf{x}' \int_{V_r} \chi_1(\mathbf{x}'')^2 (\nabla U(\mathbf{x}''))^2 d\mathbf{x}''$$

(2.63.)

Amely átalakítható az alábbi formára:

$$\left| \int_{V_r} \chi_1(\mathbf{x})(\nabla U(\mathbf{x})) d\mathbf{x} \right|^2 \leq \int_{V_r} \chi_1(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' \int_{V_r} \chi_1(\mathbf{x}'') (\nabla U(\mathbf{x}''))^2 d\mathbf{x}''$$

(2.64.)

Felhasználva továbbá:

$$V_1 = \int_{V_r} \chi_1(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

(2.65.)

és a 2.64. egyenlőtlenséget az alábbi összefüggést kapjuk:

$$\frac{\partial k_{ekv}}{\partial k_1} \geq \frac{V}{V_1 \mathbf{T}_{mért}^2} (\overline{\chi_1 \nabla U})^2$$

(2.66.)

A karakterisztikus függvény definíciója (2.51.) és az ekvivalens érték definíciója alapján a jobb oldali kifejezésben levő átlagérték is megadható.

$$\overline{\chi_1 \nabla U} = \frac{k_2 - k_{ekv}}{k_2 - k_1} \mathbf{T}_{mért}$$

(2.67.)

Ezt beírva 2.66-ba:

$$\frac{\partial k_{ekv}}{\partial k_1} \geq \frac{V}{V_1} \left(\frac{k_2 - k_{ekv}}{k_2 - k_1} \right)^2$$

(2.68a.)

Hasonlóan a másik összetevőre is:

$$\frac{\partial k_{ekv}}{\partial k_2} \geq \frac{V}{V_2} \left(\frac{k_{ekv} - k_1}{k_2 - k_1} \right)^2$$

(2.68b.)

Ezek olyan koncentrációfüggő k_{ekv} függvényeket definiálnak, melyek monotonon változnak az egyik koncentrációval. Feltételezve, hogy k_{ekv} homogén függvénye argumentumainak:

$$\lambda k_{ekv}(k_1, k_2) = k_{ekv}(\lambda k_1, \lambda k_2)$$

(2.69.)

Ilyen típusú függvényekre igaz az Euler-összefüggés, mely a fenti egyenlet λ szerinti deriváltjából származtatható:

$$k_{ekv}(k_1, k_2) = \frac{\partial k_{ekv}}{\partial k_1} k_1 + \frac{\partial k_{ekv}}{\partial k_2} k_2$$

(2.70.)

Beírva a parciális deriváltakra vonatkozó egyenlőtlenségeket az un. Bergmann egyenlőtlenséghez jutunk (Bergman 1978):

$$k_{ekv} \geq \frac{k_1 (k_2 - k_{ekv})^2}{\phi_1 (k_2 - k_1)^2} + \frac{k_2 (k_{ekv} - k_1)^2}{\phi_2 (k_2 - k_1)^2} \quad (2.71.)$$

Innen:

$$k_{ekv} \phi_1 \phi_2 (k_2 - k_1)^2 - \phi_2 k_1 k_2^2 - \phi_2 k_1 k_{ekv}^2 + 2k_1 k_2 k_{ekv} (\phi_1 + \phi_2) - \phi_1 k_2 k_{ekv}^2 - \phi_1 k_2 k_1^2 \geq 0 \quad (2.72.)$$

További átrendezéssel:

$$-k_{ekv}^2 (\phi_1 k_2 + \phi_2 k_1) + k_{ekv} (\phi_1 \phi_2 (k_2 - k_1)^2 + 2k_1 k_2) + k_1 k_2 (\phi_2 k_2 + \phi_1 k_1) \geq 0 \quad (2.73.)$$

A fenti parabola gyökei a sorba és párhuzamosan kapcsolt komponensek, melyek alsó és felső határt jelentenek ez ekvivalens paraméterre (**Reuss és Voigt határok** – Reuss 1929, Voigt 1889):

$$\bar{k}^{-1-1} \leq k_{ekv} \leq \bar{k} \quad (2.74.)$$

Élesítsük a lehetséges alsó és felső határt, melyek még biztosan közrefogják a mérhető ekvivalens értéket. Vezessünk be egy függvényt (Markov 1999):

$$F(k_1) = \frac{1}{k_2 - k_{ekv}} - \frac{1}{\phi_1 (k_2 - k_1)} \quad (2.75.)$$

Rögzítsük k_2 -t és deriváljuk az F függvényt k_1 szerint, kikötve, hogy a $k_1 > k_2$ eseteket vizsgáljuk:

$$\frac{\partial F}{\partial k_1} = \frac{\partial k_{ekv}}{\partial k_1} \frac{1}{(k_2 - k_{ekv})^2} - \frac{1}{\phi_1} \frac{1}{(k_2 - k_1)^2} \quad (2.76.)$$

Kis átalakítással két tényezőre bonthatjuk:

$$\frac{\partial F}{\partial k_1} = \frac{1}{(k_2 - k_{ekv})^2} \left[\frac{\partial k_{ekv}}{\partial k_1} - \frac{(k_2 - k_{ekv})^2}{\phi_1 (k_2 - k_1)^2} \right] \geq 0 \quad (2.77.)$$

Mindkét tényezőről látható hogy zérusnál nagyobb, a második tényező esetében a Bergman-egyenlőtlenség alapján (2.71.).

Ebből következik, hogy k_1 függvényében monotonon növekvő függvényről van szó, mely a minimumát – szélső helyzetben – a $k_1 = k_2$ esetben veszi fel. Az F függvény szélsőértéke viszonylag nagy pontossággal meghatározható közelítő formulákból is, hiszen a kontraszt csökkenésével nő ezek pontossága, ehhez az elsőrendű perturbációs megoldást használjuk fel (2.56.). A L'Hospital szabály alkalmazásával belátható:

$$\lim_{k_1 \rightarrow k_2} F(k_1) = \min F(k_1) = \frac{-\phi_2}{3k_2 \phi_1} \quad (2.78.)$$

Így felírható a következő egyenlőtlenség:

$$F(k_1) = \frac{1}{k_2 - k_{ekv}} - \frac{1}{\phi_1 (k_2 - k_1)} \geq -\frac{\phi_2}{3k_2 \phi_1} \quad (2.79.)$$

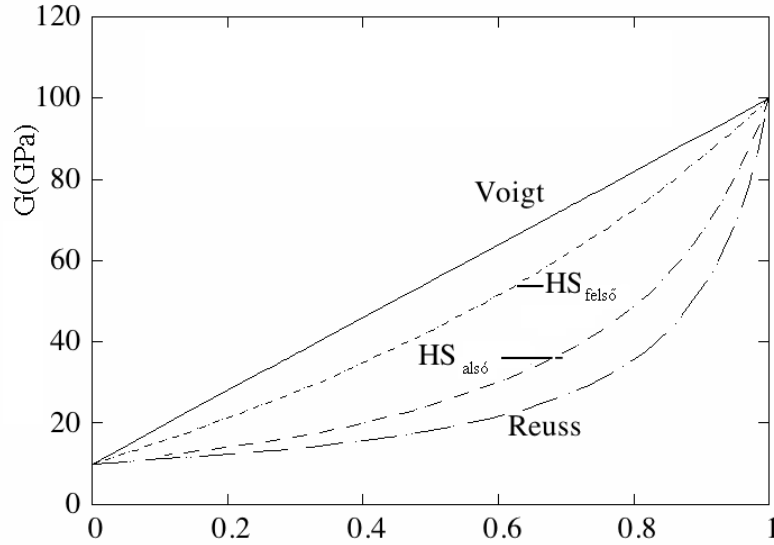
Átrendezés után kapjuk az un. **Hashin-Shtrikman** alsóhatárt:

$$k_{ekv} \geq \bar{k} - \frac{\phi_1 \phi_2 (k_2 - k_1)^2}{3k_2 - \phi_2 (k_2 - k_1)} \quad (2.80.)$$

Illetve a szerepek felcserélésével a felsőhatárt:

$$k_{ekv} \leq \bar{k} - \frac{\phi_1 \phi_2 (k_2 - k_1)^2}{3k_1 - \phi_1 (k_2 - k_1)} \quad \text{ha } k_2 > k_1. \quad (2.81.)$$

Megjegyezzük, hogy a fenti összefüggések általánosíthatók nem csak skalármennyiségekre.



2.6. ábra. Nyírási moduluszra vonatkozó alsó és felső határok (Hashin-Shtrikman, Reuss, Voigt) a két komponens részarányának függvényében.

A határokat gyakran alkalmazzák bizonytalansági analízisnél, illetve konzervatív becsléseknél.

3. fejezet - Kőzetek, tárolók tulajdonságai

A következő alfejezetekben a legfontosabb **kőzetparamétereket** tekintjük át, melyek meghatározzák a mérhető **kőzetfizikai paramétereket** is. Mindkét mennyiségtípus általában fajlagos mennyiség, azaz a kőzet egységnyi térfogatára vonatkoznak és gyakran egy mikro szinten inhomogén rendszer átlagos, pontosabban ekvivalens jellemzői.

3.1. Kőzetek összetétele

A kőzet ásványok együttese, általában inhomogén, polikristályos, véletlen mikrostruktúrájú rendszer, ahol a komponensek eloszlása (nagyobb skálán nézve) lehet homogén és inhomogén (pl. rétegzett, repedezett összletek, gradált rétegek stb.). A komponensek eloszlásának, a mikrostruktúrájának lehet irány függése, lehet anizotrop (pl. a kompakció következményeként az üledékes kőzeteknél ez elég általános).

Elsősorban törmelékeny üledékes kőzetek lényeges eleme lehet a szemcsék között esetlegesen megtalálható – általában folyadékkal kitöltött – pórustér (porózus kőzetek). A pórus szerkezet szempontjából döntő a szemcseméret eloszlás és a szemcsék alakja.

A kőzet struktúráját meghatározza a kialakulás módja és a kőzetet utólag ért hatások (mechanikai, kémiai). Az eredet szerint **vulkáni**, **metamorf** és **üledékes** kőzetekről beszélhetünk, melyek átalakulhatnak egymásba (tektonikai és lepusztulási folyamatok révén).

A vulkáni kőzetek (melyek a kéreg 95 %-t adják) összetételét a magma típusa, differenciációja, szerkezetét (kristályok méretét) a kihűlés módja, gáztartalom határozzák meg (kőzetüveg, porfirok szövet, nagy kristályok). Porozitásuk általában elhanyagolható (kivételet képezhetnek tufák, tufitok). Akárcsak a metamorf kőzetek esetében, melyek összetételét a kiindulási kőzet határozza meg, szerkezetére jellemző a nyomás hatására kialakuló anizotropia.

Természetesen utólagos hatások – repedezettség, mállás – megváltoztathatja az eredeti kőzettípus jellemzőit.

Az üledékes kőzetek – bár a kéregben a térfogati arányuk nem nagy – a kontinensek felszínének kb. 75 %-át borítják. Bonyolult diagenetikus folyamatok eredményeképp jönnek létre az üledékgyűjtőkben, inhomogén nyomástér hatására. A szemcsék összetétele és eloszlása a lepusztulás és szállítás módjától függ, gyakran jelentős szemcseközti pórustér alakul ki. A kőzetstruktúra kialakításában a kompakció mellett fizikai és kémiai folyamatok is szerepet játszanak (cementáció, oldási jelenségek, repedezés stb.). Megjegyzendő, hogy a szemcsekontaktusok kis kiterjedése miatt a nyomástér mikro szinten is nagyon inhomogén, mely hozzájárul különböző fizikai és kémiai folyamatok aktiválásához (szemcse deformáció, oldódás, kiválás stb.). Az üledékes kőzetekben kialakult pórusstruktúrájának nagy jelentősége van a szénhidrogén felhalmozódása, migrációja szempontjából. A pórusfolyadék is aktívan befolyásolja a diagenetikus folyamatokat. A diagenézis során a 80 % víztartalommal rendelkező óceáni üledékből 5-35 % porozitású üledékes kőzet alakulhat ki.

A legfontosabb üledékes kőzetcsoporthoz: homokkővek, agyagok-márgák, karbonátos üledékek, evaporitok, szenes üledékek. Az üledékes kőzeteket szénhidrogén rendszerek körében betöltött szerepük miatt a továbbiakban kiemelten kezeljük.

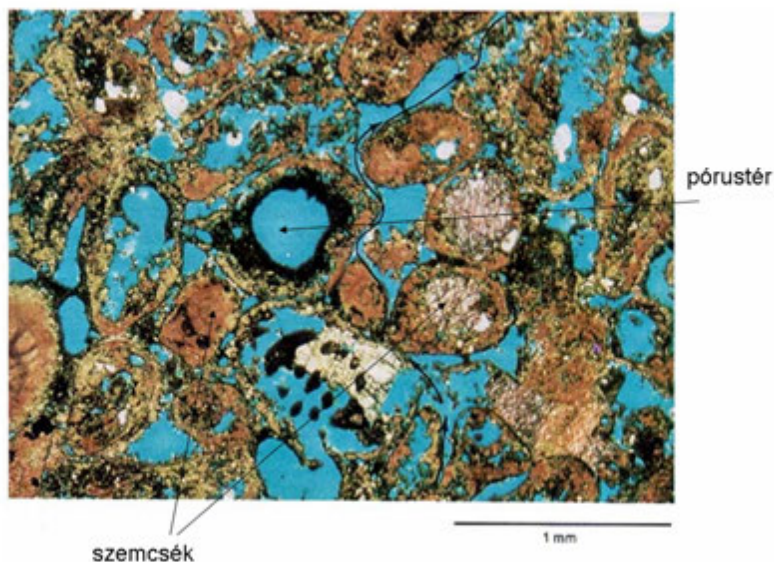
A kőzetösszetételre vonatkozóan több geofizikai mérés szolgáltat információ, ilyenek a spektrális természetes-gamma, spektrális gamma-gamma (Pe) és neutron-gamma módszerek valamint az akusztikus p- és s-hullám sebességének arányán alapuló módszerek. A neutron és gamma módszerekből az elemi összetételre kaphatunk információt. A nukleáris méréseken alapuló megközelítés általános problémája az inverzió az elemi összetétel és az ásványos összetétel összekötése.

3.2. Porozitás (ϕ)

A porozitást a kőzetek fajlagos hézagtérfogatával definiáljuk:

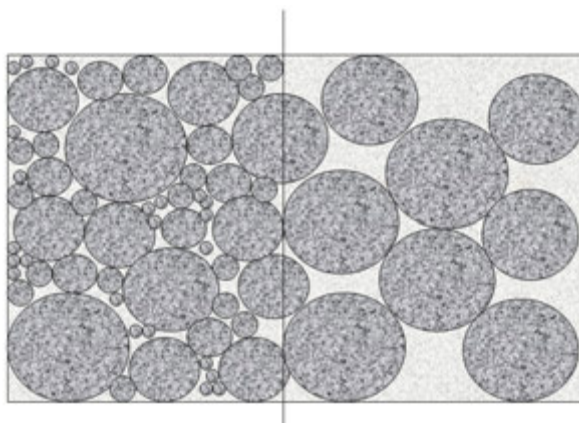
$$\phi = \frac{V_{\text{hézag}}}{V} \quad (3.1.)$$

A porozitás lehet szemcseközi porozitás, mely a diagenézis során alakul ki. Ebből a szempontból meghatározó a kompakció, a szemcseeloszlás, majd a cementáció. Geológiai terminológia szerint ez az ún. elsődleges porozitás.



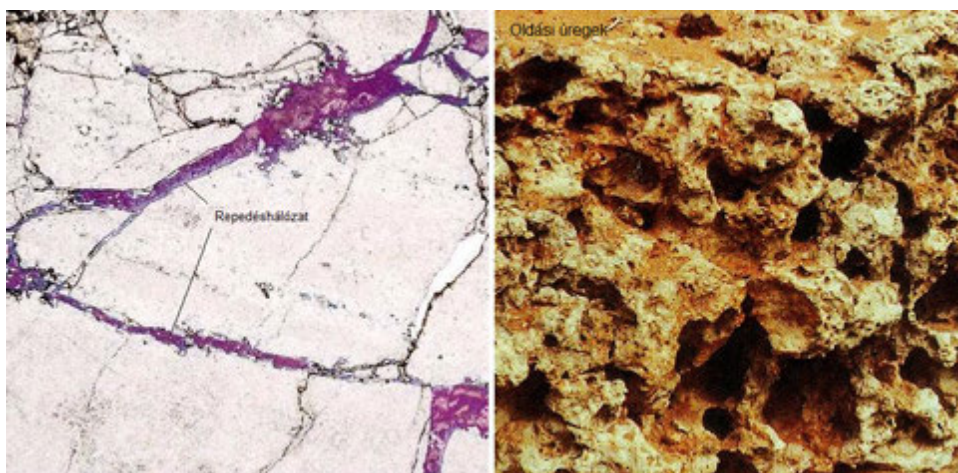
3.1. ábra. Szemcseközi pór ustér vékonycsiszolaton (kék) (Kansas University <http://www.kgs.ku.edu/Publications/Oil/primer03.html>)

Jól osztályozott szemcséjű kőzetek esetében a hézagterfogat nagyobb lehet, kevésbé osztályozott eloszlás esetén a kisebb szemcsék kitöltik a nagyobbak közötti tér egy részét, csökkentve a porozitást.



3.2. ábra. Szemcseközi porozitás alakulása különböző szemcseméret-eloszlás esetén

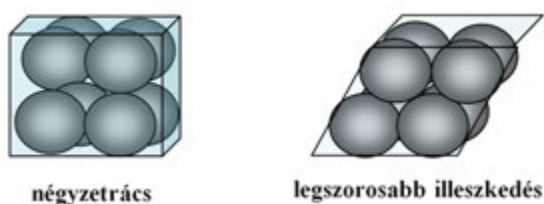
Repedések létrejöttével vagy oldódással további (geológiai terminológia szerint másodlagos) porozitás alakulhat ki, melynek geometriai tulajdonságai jelentősen eltérnek az elsődleges porozitástól (3.3. ábra). Részarányát az ún. másodlagos porozitás index (SPI) segítségével adják meg.



3.3. ábra. Repedések (bal) és oldási folyamatok (jobb) által kialakított pórusrendszer

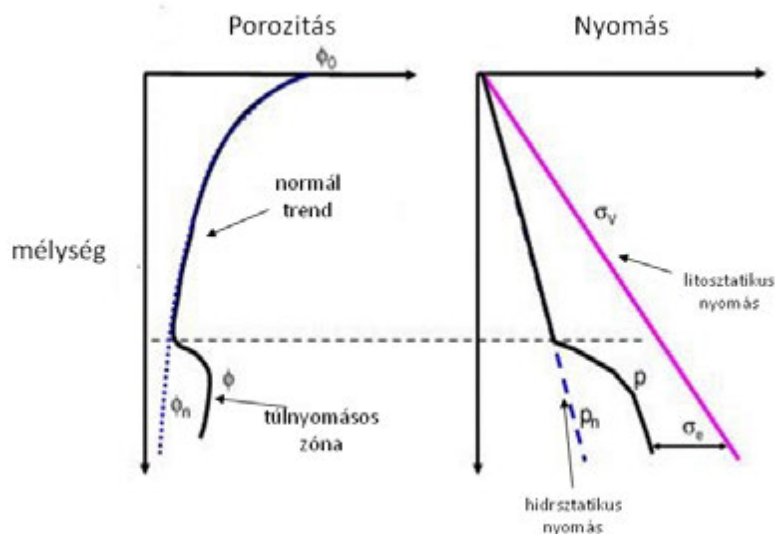
Az oldódási folyamatok révén létrejött pórushálózat általában bonyolultabb szerkezetű, mint az elsődleges porozitás hálózata, míg a repedésrendszer egyszerűbb. Ez hatással van a pórusrendszerben történő folyadék vagy iontranszportra. A pórusrendszer lehet összetett, azaz a másodlagos pórushálózat által körülvett kőzetblokkoknak lehet elsődleges porozitása. A pórusrendszer jellege meghatározza a tároló kőzet tulajdonságait.

A szemcsék közötti porozitás a mélységgel, a nyomással általában – a kompakció és cementáció hatására – csökken és nem haladja meg 33-35 %-ot. (Az elvi felsőhatár azonos gömbökből felépülő modellből kapható, négyzetes rácsban 47.6%, ortorombos elrendezésben 39.5 %, legszorosabb illeszkedéssel 26%.) A porozitás értékére természetesen a textúra, a kőzetszemcsék alakja is hatással van.



3.4. ábra. Pórustér alakulása különböző elrendezések esetén

A kompaktálódó üledékekben a porozitás megőrzésében szerepet játszik a cementált szemcsékből felépülő kőzetváz, de gyakran a póruskitöltő folyadék is, részben viselve a réteg feletti üledékek nyomását az ún. litosztatikus nyomást. Ha a folyadék ebből adódóan, az adott mélységre számítható hidrosztatikus nyomásnál nagyobb nyomású, akkor túlnyomásos rétegről beszélünk. A kompakció porozitás csökkenéssel jár. A nyomásviszonyokat és a kompakciós folyamat történetét tükrözik a mélység-porozitás trendek, melyek kőzetzfizikai paraméterek mélységtrendjeiben is kifejeződnek.



3.5. ábra. Porozitás trendje a mélység függvényében

A porozitás-mélység függvény általában exponenciális jellegű, mivel a porozitás csökkenése (a kőzet kompresszibilitása) a porozitástól magától is függ.

$$\frac{d\phi}{dz} = -f(K, \phi, \sigma(z)) \quad (3.2.)$$

Az üledékes tárolók esetében a porozitás csökkenésében kisebb mélységeknél a szemcsék átrendeződése, nagyobb mélységeknél a szemcsék deformációja majd a cementáció játssza főszerepet. Az említett kompaktációs trendeket kőzetfizikai paraméterek (fajlagos ellenállás, akusztikus sebesség) mélység trendjeiből becsülhetjük.

Hidraulikus vagy elektromos vezetés szempontjából lényeges, hogy a hézagtér elemei kommunikálnak-e, összefüggő rendszert képeznek-e, illetve mekkorák a legszűkebb pórustorkok. Ebből a szempontból beszélhetünk teljes porozitásról (ϕ_t), effektív porozitásról (ϕ_e), mely az összeköttetésben levő pórustér azon része, ahol a kitöltő folyadék áramolhat, dinamikus porozitásról (mely valójában részt vesz a hidraulikus vezetésben, pl. „zsákutcák” nem tartoznak ide). Nem tekintjük az effektív pórustér részének a kisebb szemcsefrakció szemcsék felületéhez (másodlagos erővel) kötődő tapadó vizet, a pórustér egyre nagyobb frakciója tartozhat ebbe a kategóriába, ha a szemcseméret csökken és ezzel együtt a szemcsék un. fajlagos felülete növekszik. Jelentősen növeli a tapadó víz frakciót a nagy fajlagos felületű agyagásványok jelenléte, csökkentve az effektív porozitást és a kőzet hidraulikus vezetőképességét.

A fontosabb (konvencionális) szénhidrogén-tárolók effektív porozitása általában meghaladja a 10 %-ot. Megjegyezzük, hogy a földgáz nagyon kis effektív porozitású tárolókból (tight gas sand, gas shale stb.) is kitermelhető megfelelő un. rétegrepsztesztelési eljárásokkal, mikor mesterségesen hozunk létre fluidum-transzportra alkalmas pórusrendszert (repedéshálózatot).

3.2.1. Porozitás mérése

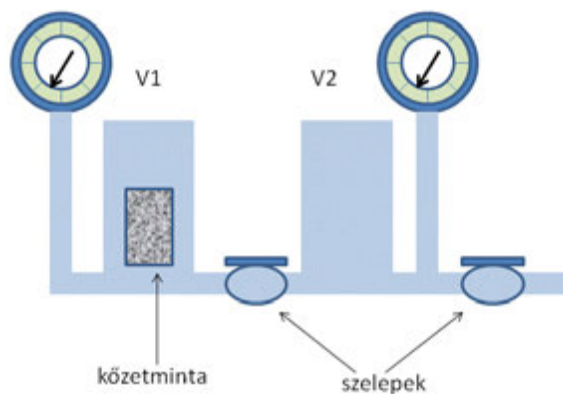
A porozitást kőzetmintákon mérhetik direkt módszerrel, térfogat és súlyméréssel, mérhetik kiszáritást követően vízszaturálással, mikor is a kapilláris hatás juttatja a vizet a minta belsejébe.

Lehetséges a mérést un. gázexpanziós módszerrel is végezni, mikor valamely ideális gázként viselkedő gázzal töltött tartályba helyezzük a mintát, mikor is a gáz a pórustér elérhető – egyelőre ismeretlen - részét is kitölti. Megméri a mérő térfogatbeli nyomást, majd megnövelve a térfogatot egy ismert értékkel, megméri a bekövetkező nyomáscsökkenést. Ebből az ismeretlen pórustérfogat a gáztörvény segítségével meghatározható (3.6. ábra).

$$P_1 \cdot (V_1 - V_r + \phi) = P_2 \cdot (V_1 + V_2 - V_r + \phi) \quad (3.3.)$$

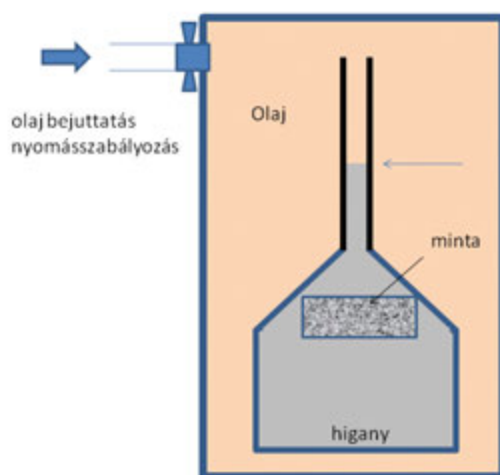
Átrendezve a porozitásra:

$$\phi = \frac{(P_2 - P_1)(V_1 - V_r) + P_2 V_2}{P_1 - P_2} \quad (3.4)$$



3.6. ábra. Porozitásmérés gázexpánzióval

A kőzetmintát – nyomás növelésével – telíthetjük nem nedvesítő higannyal. Ekkor a nyomás és higanytelítettség összefüggése a pórusszerkezetről (un pórustörkök eloszlásáról) is számot ad.



3.7. ábra. A higanytelítési módszer – mérési elrendezés. A telítési nyomást az olaj szabályozza.

A módszer feltételezi, hogy a nyomás növelésével a bepréselt higany egyre kisebb átmérőjű pórustörkökön jut át. Természetesen itt is fontos szerepe van a felületi feszültségnek, mely jellemezhető a kapilláris falánál kialakuló felület szögével (θ).

Mint ismeretes a kapillárisnyomás a szög, a felületi feszültség (σ) és a kapilláris sugár (R) segítségével az alábbi módon írható fel (ez is Laplace-egyenlet):

$$P = \frac{2\sigma \cos \Theta}{R} \quad (3.5.)$$

A mérésekből a kapilláris sugarak (torkok) sűrűségfüggvényét $f(R)$ határozzák meg, mely megmutatja, hogy $R+dR$ intervallumba a kapillárisok milyen valószínűséggel esnek. A dP nyomásnövelés dS higanyszaturáció változást okoz a kőzetben belüli pórustérben, mely azt is jelenti, hogy a teljes pórustérfogatból (V_p) további (dV_p) térfogatot foglalt el a higany.

$$dS = \frac{dV_p}{V_p} \quad (3.6.)$$

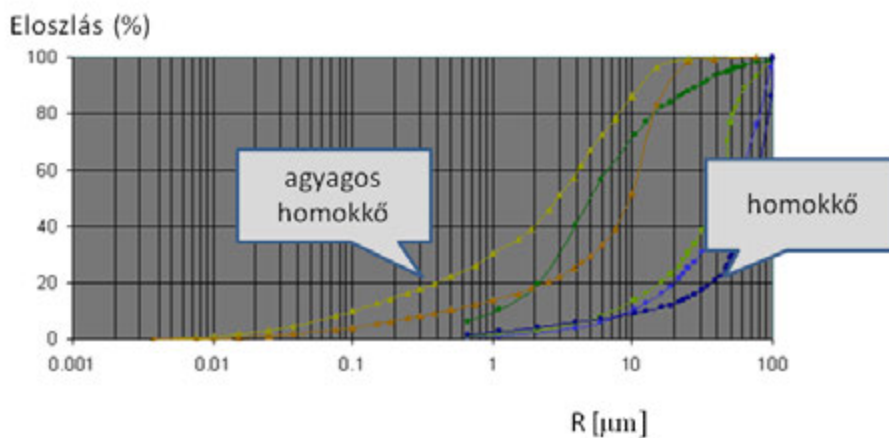
Így a szaturáció változás összeköthető az adott mérethez tartozó pórusfrakcióval és ezen keresztül a keresett sűrűségfüggvénnyel:

$$f(R)dR = -dS \quad (3.7.)$$

Felhasználva a kapilláris nyomásra vonatkozó Laplace összefüggést:

$$f(R) = -\frac{dS}{dR} = \frac{dS}{dP} \frac{dP}{dR} = \frac{dS}{dP} \frac{2\sigma \cos \Theta}{R^2} \quad (3.8.)$$

A $\frac{dS}{dP}$ mennyiség mérhető, mint a telítési görbe meredeksége és ebből a felületi feszültség és felületi szög ismeretében, ekvivalens kapilláris sugár eloszlást határozhatunk meg.

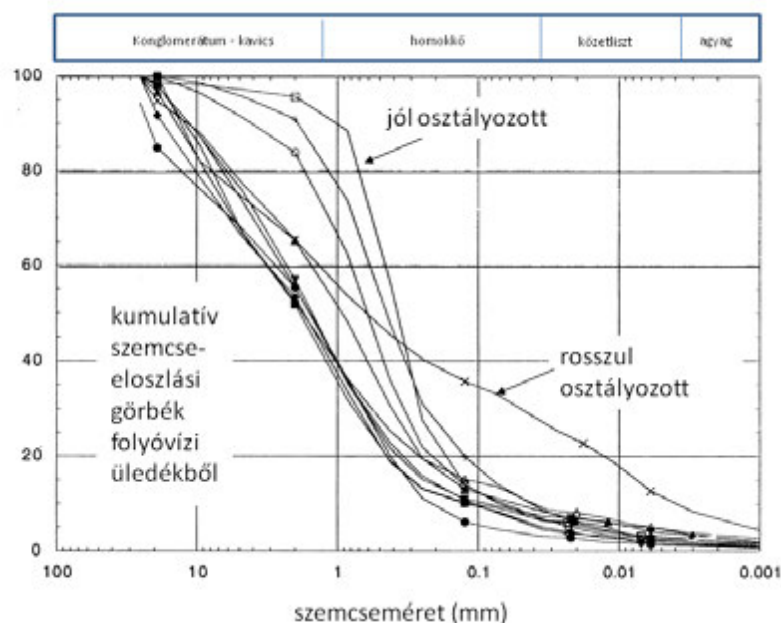


3.8. ábra. Tipikus higanytelítési mérésből származó pórustorok eloszlás görbék $F(R)$

A porozitás meghatározása mélyfúrási geofizikai mérések alapján is történhet. Leggyakrabban a gammaszóródás mérésén alapuló sűrűségméréssel, neutronter paramétereinek mérésével és akusztikus hullámok sebessége alapján következtethetünk a kőzet porozitására. A porozitás – a pórusteret kitöltő fluidum – jelentős hatással van a kőzet fajlagos ellenállására és dielektromos állandójára is. A pórustér eloszlására az NMR mérések szolgáltatnak információt.

3.3. Szemcseméret és szemcseméret eloszlás

A törmelékes üledékes kőzetek tulajdonságai szempontjából lényeges tulajdonság a szemcsék méretszerinti eloszlása és az ebből meghatározható átlagos szemcseméret. Az eloszlást meghatározzák a szállítás és ülepedés viszonyai. Az alábbi ábrán különböző kőzettípusok jellegzetes kumulatív szemcseméret eloszlása látható. A széles tartományon elterülő eloszlás rosszul osztályozott üledékből származik.



3.9. ábra. Tipikus szemcseeloszlási görbék

A 3.9. ábrán látható, hogy a szemcseméret kategóriák – ekvivalens sugár tekintetében – sok nagyságrendet fognak át.

Kategória	Kategória alja μm -ben
Kavics	2000
Durva szemcsés homok	1000
Közepes szemcseméretű	250
Finomszemcsés üledék	125
Kőzetliszt (silt)	10
agyag	< 10

A kőzetstruktúrát jelentősen befolyásolja a szemcsék osztályozottsága, mely végső soron az ülepedés módjától és helyétől függ. Szemcseeloszlási görbét a 25%-os és 75%-os szintekhez tartozó szemcseméreteket hányadosának gyökével jellemezhetjük az osztályozottság szempontjából:

$$S = \sqrt{\frac{D_{75}}{D_{25}}} \quad (3.9.)$$

Az 1.4-nél kisebb érték jól osztályozott kőzetre, míg a 2.7 feletti rosszul osztályozott szemcseeloszlásra utal. Az osztályozottsággal, szállítással általában a szemcsék anyagában dominál a kevésbé mállékony komponens.

3.4. Fajlagos felület

Az előző alfejezetben tárgyalt szemcseeloszlás, valamint a szemcsék alakja meghatározza a kőzet un. fajlagos felületét, mely elektromos és kapilláris jelenségeknél, így a kőzetben belüli folyadéktranszport leírásánál is szerephez jut, de lényeges pl. az elektromos vezetés szempontjából is.

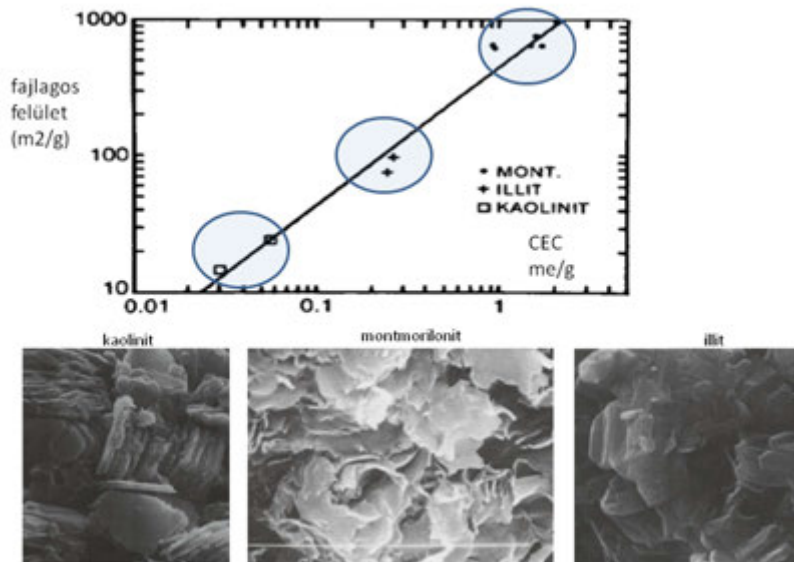
$$S_f = \frac{A_{teljes_belső}}{V} \quad (3.10.)$$

A fajlagos felület ásványszemcsék felülete és pórusteret kitöltő fluidum közötti kölcsönhatás egyik legfontosabb tényezője, mely jelentős hatással van a folyadékáramlásra. Bizonyos ásványok ionhelyettesítések miatt (Al^{3+} - Si^{4+}), felületi töltéssel is rendelkeznek, amely viszont az elektromos tulajdonságokra van hatással (agyagásványok).

Példaként a 3.10. ábrán bemutatjuk a legnagyobb fajlagos felülettel bíró agyagásványokat jellemző értékeket (a montmorillonit eléri $800-1000 \text{ m}^2/\text{g}$ -t !!!!).

A fajlagos felület értéke közvetlenül nem mérhető. közvetett mérésének egyik lehetséges módja, az ún. kationcserekapacitás (CEC) mérése. Ennek során mérik az ásványok felületén az ásványszemcsét körülvevő oldatból megkötött és a labormérés során más típusú kationnal lecserélt kationok fajlagos mennyiségét.

Geofizikai mérések közül az NMR szolgáltat az ásványok felületén megkötött vízről (tapadó víz) információt, mely szintén arányosnak vehető a fajlagos felülettel.



3.10. ábra. Agyagásványok fajlagos felülete és kationcsere-kapacitása (CEC) közötti kapcsolat

3.5. Póruskitöltő anyagok - víztelítettség

Az elsődleges pórusteret leggyakrabban az üledékgyűjtő medencében található víz, általában fosszilis tengervíz tölti ki. Így sótartalma – ionösszetétele – is ennek megfelelő. Leggyakrabban 25-35000 ppm sótartalmú rétegvizek fordulnak elő, melyek normál tengervíznek felelnek meg, de a rétegvíz származhat csökkent sósvízi körülmények közül 6 – 15 000 ppm (ez a magyarországi pannon szénhidrogén-tárolóknál gyakori). Főként felszín közeli rétegekben gyakran találunk édesvizű rétegeket. Ebben karbonát (CO_3^{2-}), hidrokarbonát (HCO_3^-), Ca^{++} ionok jelenléte jellemző.

Mélyebb rétegekben a pórustér megőrzésében is szerepe van a pórusvíznek, gyakran a litosztatikai nyomás egy részét viselve túlnyomásos zóna alakulhat ki.

Ha megfelelő összetételű és jelentős szervesanyag-tartalmú üledékek megfelelő mélységbe (hőmérséklet, nyomás) kerülnek, szénhidrogének: földgáz és kőolaj keletkezhetnek, melynek minősége a kiindulási szerves anyag (un. kerogén) összetételétől és az érési-krakkolódási folyamatától függ. A szénhidrogének un. migrációval kerülnek a tárolótérrel (porozitás) rendelkező kőzetekbe (csapdák) a keletkezési un. anyakőzetből. A szénhidrogén megjelenése általában akadályozza a további cementációt.

Az apoláros szénhidrogén molekulákból víztől elkülönült cseppek képződnek, melyek általában a pórustér nagyobb hézagait töltik ki (ezt a vízre és szénhidrogénre vonatkozó eltérő kapilláris nyomás is indokolja). A cseppek mozgása a csepp deformációjával jár, mely felületi energia befektetést igényel. A könnyű olajok és a gáz mozgása könnyebb a nehéz (éretlen) olajok a nagy viszkozitás miatt nehezen mozognak, így a kitermelés néha másodlagos eljárásokat igényel.

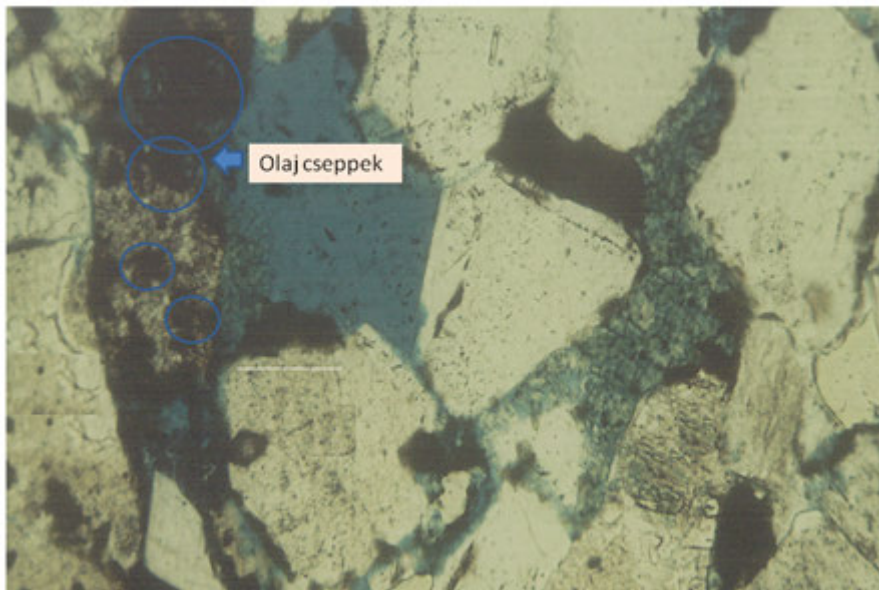
A víz pórustérre vonatkozó részaránya a víztelítettség (S_w – water saturation). A pórustér többi részét a szénhidrogén tölti ki melynek pórustérre vonatkozó telítettsége: S_{ch} .

$$1 = S_w + S_{CH} \quad (3.11.)$$

A víztelítettség általában soha sem éri el a zérus értéket, mivel a tároló kőzet eredeti pórustartalma tengervíz és a kőzetszemcsék általában vízre nedvesednek, így a fajlagos felülettel arányos tapadó víz a víztelítettség nem redukálható részét képezi (S_{wi}). Ez a tároló típusától függően 10-50 % lehet. Megjegyezzük, hogy a tárolóban a szénhidrogén sűrűsége miatt elkülönül – a fázishatár is definiálható -, de az S_w a határ felett folyamatos csökkenéssel éri el az S_{wi} értéket. Az átmenetet a kapilláris emelés határozza meg (3.12. ábra). A fázis határ feletti átmeneti zóna a permeabilitás romlásával növekszik, lehet néhány deciméter, de lehet több mint száz méter is.

A kapilláris nyomásra vonatkozó Laplace-egyenletből (3.5. egyenlet) származtatható az un. emelési magasság:

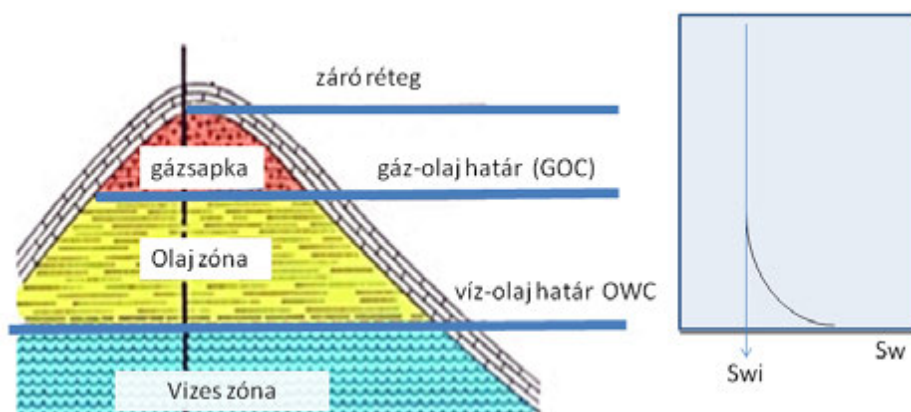
$$h = \frac{P_{kap}}{g(\rho_w - \rho_0)} = \frac{2\sigma \cos \Theta}{Rg(\rho_w - \rho_0)} \quad (3.12.)$$



3.11. ábra. Szénhidrogéncseppek elhelyezkedése a nagyobb szemcseközi hézagokban

A nem keveredő fázisok elhelyezkedése egészen különböző is lehet, ha a kőzetszemcsék olajra nedvesednek.

A pórusnyomás és a kapilláris nyomás alakítja ki a szaturáció viszonyokat a vegyes rendszerben. Előfordulhat, hogy keskenyebb kapillárisokban nagyobb a víztelítettség, mint a nagyobb átmérőjűekben, azaz a szénhidrogén szaturáció nem lesz egyenletes a tárolóban.



3.12. ábra. Víztelítettség változása az víz-olaj határ felett.

A nem redukálható víztelítettség labormérésekkel meghatározható, porozitás és víztelítettség becslésekből becsülhető. A becslés azon alapul, hogy a teljesen szénhidrogénnel szaturált kőzetek relatív víztartalma (tapadó víz) a tárolón belül nem igen változik, azaz:

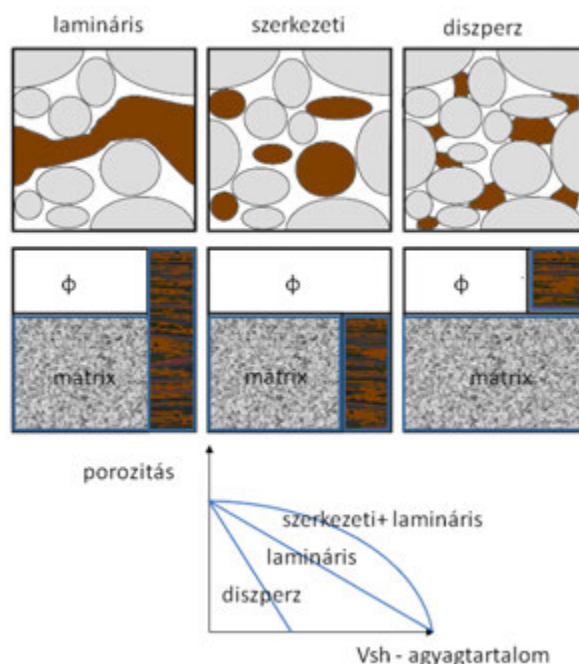
$$\phi \cdot Sw = \phi \cdot Sw_i = const \quad (3.13.)$$

A fenti egyenletet kielégítő pontok (hiperbola) egy porozitás-víztelítettség diagramon azonosíthatók. A konstans kőzettípus függő. A tapadó víz mennyisége hatékonyan becsülhető NMR mérésekből is.

3.6. Agyagok, márgák, záró rétegek

Az agyagokat és márgákat (agyagászványokból és más anyagok keverékéből álló üledékes kőzetek) célszerű kiemelni a kőzetalkotók közül speciális tulajdonságaik miatt (nagy fajlagos felület, negatív felületi töltés, víztartalom, lapszerkezetű szilikát kristályok, rendkívül kisméretű szemcsék, vízre duzzadás stb.) Kőzetfizikai paraméterek szempontjából a mátrix és pórusfolyadék tulajdonságai között helyezkednek el.

Agyagos-márgás rétegek esetében – éppen az ásványszemcsék tulajdonságai miatt - hidraulikusan vezető pórustér-hálózat nem marad fenn. Záró réteggé viselkednek, így szerepük lehet a tároló rétegek kialakulásában, a migráció, a folyadék vagy gázáramlás megakadályozásában. Agyagászványok (illit, kaolinit, montmorillonit stb.) különböző eloszlásban megjelenhetnek a tároló rétegekben is. Beteleplezhetnek vékony csíkokban (lamináris agyag), a pórustér egy részét is kitölthetik (diszperz agyag), a kőzetszemcsék átalakulásával szemcsék formájában (szerkezeti agyag).



3.13. ábra. Agyagbetelepülés típusai

Megjegyezzük, hogy a monmorillonit – illit átalakulásoknak a szénhidrogén elsődleges migrációjában is szerepe lehet. Geofizikai módszerek szinte mindegyike érzékeny a kőzet agyagtartalmára (V_{sh}), de leggyakrabban a természetes gamma intenzitás vagy a természetes potenciál alapján számoljuk. Agyag jelenlétében (pl. agyagos tárolók) az egyenletek az agyag hatását is figyelembe veszik.

3.7. Anizotrópia

A kőzetfizikai paraméterek gyakran irányfüggést mutatnak. Az üledékekben a kompakció, a nyomástér iránya anizotróp kőzetszerkezetet hoz létre és a kőzetfizikai tulajdonságok is ennek megfelelően változnak (pl. más a vertikális és a horizontális permeabilitás, vezetőképesség stb.). Ilyen típusú inhomogenitást az ún. anizotrópia koefficienssel jellemezzük:

$$\lambda = \sqrt{\frac{k_{\text{vízszintes}}}{k_{\text{függőleges}}}} \quad (3.14.)$$

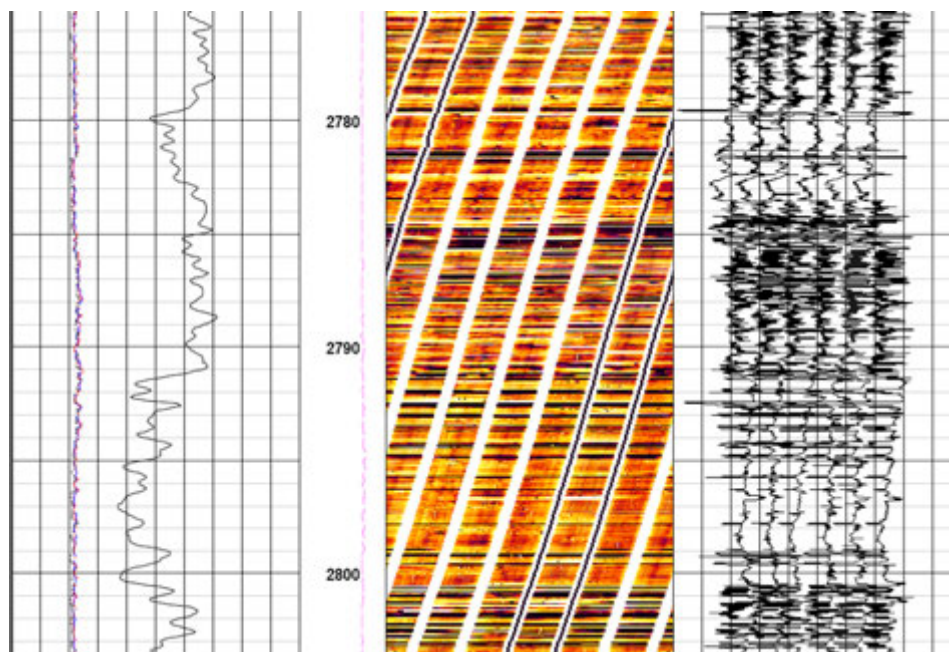
Ezt a hatást a 2.6. kőzetfizikai egyenletekben figyelembe kell venni, úgy hogy a kőzetfizikai paramétert tenzorként írjuk az egyenletekbe. A kőzetet alkotó ásványok gyakran rendelkeznek anizotróp tulajdonságokkal, de a véletlen orientáció miatt a kőzet izotróp lehet. Az anizotrópia megvalósulhat úgy, hogy a kőzet összetevőinek eloszlása izotróp marad, de úgy is, hogy az összetevők eloszlása is nagyobb léptékű anizotrópiát tükröz (pl. rétegzettség, repedezettség).

3.8. Rétegzettség

A geofizikai kutatások célja gyakran üledékes sorozatok, pl. a szénhidrogén tárolók (de az anyakőzetek is) ilyen sorozatokhoz kapcsolódnak. Az üledékes sorozatok (üledékciklusok) szerkezetét, átmeneteit a szedimentológia tanulmányozza. Az üledékes sorozat elemeit az ülepedés kori üledékföldtani környezet határozza meg, majd az azt követő diagenézis. Osztályozhatók az üledékek anyaguk, osztályozottságuk, szervesanyag-tartalmuk szerint. A geofizikai mérések szempontjából is lényeges, hogy milyen az összlet vertikális inhomogenitása, rétegzettsége (vastagpados, vékonypados, lamináris stb.), melyben az üledékgyűjtő átmozgatottságának és a bentosznak van jelentős szerepe. Ugyancsak lényeges a „közepes” inhomogenitások lencsék, kavicsok esetleges megjelenése.

Speciális geofizikai eljárásokkal (FMI, dőlésmérés stb.) a rétegek dőlése, finomszerkezet is meghatározható, beleértve a szedimentológiai döléseket is (keresztarétegzettség stb.). Ha a rétegzettség finomabb szerkezetű, mint az alkalmazott geofizikai módszer felbontóképesége, akkor a rétegzettség hatását a kőzetfizikai modellbe kell beépíteni.

Üledékes medencékben a rétegzettség feltárása is kőzetfizikai paraméterek eloszlása alapján történik, korrelálhatók a rétegek az egyes kutakban végzett mérések eredményei (elsősorban természetes gamma és természetes potenciál mérések alapján), illetve szeizmikus mérések alapján.



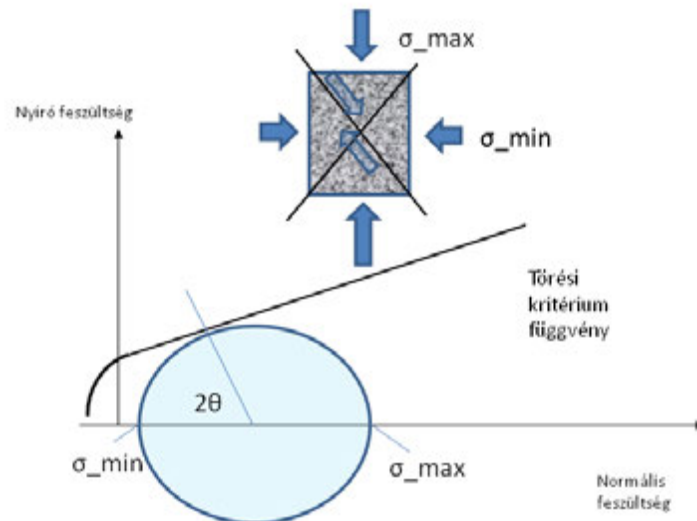
3.14. ábra. Lamináris agyag vezetőképésén alapuló lyukfal leképezésen (FMI szelvényen)

3.9. Repedezettség

A litosztatisztikus nyomás és a tektonikai okokra visszavezethető komplex feszültségtér deformálja a kőzeteket. A feszültségtér lokális irányfüggő leírására a feszültségtenzort (σ), míg a kialakuló deformációk irányfüggő leírására a deformáció tenzort (ϵ), használjuk. A kettőt kis deformációk esetén (Hooke-törvény) a rugalmassági tenzor kapcsolja össze. A feszültség tenzor az ún. főfeszültségekkel jellemezhető (a feszültség tenzor lokális sajátvektorai). Ezek segítségével tetszőleges pontban és tetszőleges irányú síkra megadható a síkra merőleges (nyomó) és a síkkal párhuzamos nyíró feszültség (Mohr-kör). Ha a deformáció mértéke meghaladja a rugalmassági határt a kőzet deformálódik. A feszültség felhalmozódás töréshez is vezethet, amennyiben a kőzetre vonatkozó ún. törési kritériumot (Mohr-Coulomb, Griffith függvények) adott sík esetén a normális és nyíró feszültségek meghaladják.

$$\sigma_{nyiró_kritikus} = f(\sigma_{normális}) \quad (3.15.)$$

Ez másként úgy is kifejezhető, hogy a Mohr-kör érinti a törési kritérium függvényt. Az érintési pont határozza meg a törési sík szögét. A törési kritérium függvény a kőzet rugalmas paramétereitől is függ.



3.15. ábra. Feszültségek ábrázolása un. Mohr-körrel a megválasztott sík szögének függvényében és a törési kritérium függvény

A kőzetben először mikrorepedés-rendszer jön létre, amely fejlődve repedéseket alakít ki, az ezek mentén történő elmozdulás törést hoz létre. A repedésrendszer a másodlagos porozitás része, de inhomogén és gyakran irányított jellege miatt lényegesen nehezebb ekvivalens kőzetparaméterként kezelni és különösen nehéz a repedezettség kőzetfizikai paraméterekkel való kapcsolatát meghatározni. A kőzetben zajló transzportfolyamatokban (hidrodinamikai, elektromos) fontos szerepe lehet. Jelentős a hatása a mechanikai tulajdonságok tekintetében is. A repedésrendszer irányultságával, nyitottságával (apertúra) és kitöltöttségével jellemezhető. Megjegyezzük, hogy rossz permeabilitású szénhidrogéntárolók termeltetésénél a hidraulikus vezetést javító repedésrendszert mesterségesen hozzák létre (un. hidraulikus repesztés).

Repedésrendszer azonosításában szerepet kap a kitöltő anyag és a környező kőzet fizikai tulajdonságainak kontrasztja (elektromos és akusztikus), de szerepe lehet az repedésrendszerhez kötődő urán transzportnak is. A fúrásokban képalkotó eljárásokkal végzett mérésekkel a repedésrendszer jellege direkt módon is tanulmányozható.

4. fejezet - Kőzetfizikai jellemzők

Ebben a fejezetben a természetes vagy mesterséges forrás környezetében – a vizsgált kőzetben – kialakult térjellemzők mérésével megcélzott kőzetfizikai jellemzőket tekintjük át.

A kőzetfizikai jellemzők esetében kulcskérdés, hogy az inhomogén kőzet átlagos térjellemzőiből milyen ekvivalens kőzetfizikai jellemző adható meg a vizsgált kőzetre és az milyen kapcsolatban van a kőzet mikrostruktúrájával (homogenizáció). A mérési adatok petrofizikai interpretációja ezeken az összefüggéseken alapul.

5. fejezet - Permeabilitás – folyadékáramlás közetben

A permeabilitás (k) fajlagos mennyiség, a közetstruktúra függvénye és a struktúrában kialakuló kapilláris jelenségeké. A közet folyadékáramlással kapcsolatos „vezetőképességet” fejezi ki. Az áramlási tér a nyomástér változásainak (nyomás gradiens) megfelelően alakul ki az inhomogén közetben. Nagyobb közettesten (reprezentatív térfogat) az alkalmazott nyomáskülönbség és a határokon mérhető folyadék fluxus definiálja az ekvivalens mennyiséget.

A definíciós egyenlet az ún. Darcy törvény, mely egyben a permeabilitás mérés módját is megadja:

$$q = -\frac{k}{\eta} \frac{dP}{dx} \quad (5.1.)$$

q : un. Darcy sebesség [cm s^{-1}]

η : viszkozitás [10^{-2} Poise]

A permeabilitás gyakorlatban használt mértékegysége a CGS rendszerhez kötődő Darcy (D)

($1 \text{ D} = 0.97 \cdot 10^{-12} \text{ m}^2$). Ez alapján, mint effektív áramlási keresztmetszetet is értelmezhetjük.

Pl. szénhidrogén kutatás területén a jó tárolók permeabilitása nagyobb, mint 100 mD, de 1 mD felett még lehetőség van a szénhidrogén kitermelésére, ez alatt általában már csak rétegrepesztési eljárások alkalmazásával (pl. „tight gas reservoir”). Megjegyezzük, hogy a permeabilitás térbeli eloszlása határozza meg a felszín alatti folyadékáramlást vagy éppen a szénhidrogén migrációt. Lecsökkenése önmagában is szénhidrogéncsapdák kialakulásához is vezethet. A permeabilitás térbeli eloszlása fontos eleme a rezervoár szimulációknak. Ekvivalens értéke a közet pórushálózatainak függvénye.

Vizsgáljuk meg a Darcy-törvény érvényességi határát a dimenzióanalízis eszközeivel. A „feszültség tenzor” sűrűlódásos folyadékokra (az ideális folyadékokra a tenzor csak a hidrosztatikai nyomást tartalmazza és diagonális):

$$\sigma_{i,j} = -p\delta_{i,j} + \eta \left[\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right] \quad (5.2.)$$

ahol:

$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{u}}{dt}$ a folyadékáramlási sebessége,

$\mathbf{u}$ az elmozdulás vektor. Az i és j indexek a térkoordinátákon futnak végig. A sűrűlódás (jobb oldali második tag) akkor lép fel, ha valamilyen irányban változik a sebesség profil. Legyen a folyadék összenyomhatatlan – azaz a folyadéksűrűség is állandó.

Ekkor $\sum \frac{du_k}{dx_k} = 0$, melyből $\sum \frac{dv_k}{dx_k} = 0$ is következik.

A deformációs erőhatást a feszültség térbeli változása hozza létre. Így 5.2. egyenletből:

$$\frac{\partial \sigma_{i,j}}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_j} \delta_{i,j} + \eta \left[\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2} + \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \right] \quad (5.3.)$$

(A formula felírásánál az Einstein-konvenciót alkalmaztuk.) Ezeket felhasználva készítsük el a mozgásegyenletet egy differenciális térfogatra, baloldalra írva a térfogatra ható erőket:

$$-\frac{dp}{dx_i} + \eta \Delta v_i = \rho \frac{dv_i}{dt} \quad (5.4.)$$

Navier-Stokes egyenlethez jutunk. (a folyadék összenyomhatatlanság miatt hiányzik a $v \operatorname{grad} v$ tag – a konvektív gyorsulás). Ugyancsak elhanyagoltuk a hidrosztatikai nyomás változás leírására szolgáló ρg tagot. Vizsgáljuk meg a sebességtől függő tagok viszonyát. Ha elhanyagolható a gyorsulást tartalmazó tag (stacioner áramláshoz közeli helyzet) a sebesség Laplace-át tartalmazó taghoz képest, akkor nagyságrendi becsléshez felírhatjuk:

$$\left| \rho \frac{dv}{dt} \right| \leq |\eta \Delta v| \quad (5.5.)$$

Az áramlási rendszerre jellemző karakterisztikus hossz (l) segítségével, a fenti egyenlőtlenség becslhető az alábbi módon:

$$\left(\rho \frac{v}{l} \right) \leq \left(\eta \frac{v}{l^2} \right) \quad (5.6.)$$

Ahhoz, hogy az első tag sokkal kisebb legyen a másodiknál, teljesülnie kell:

$$\operatorname{Re} = \frac{\rho v l}{\eta} \ll 1 \quad (5.7.)$$

Így a Reynolds számra (az egyenlet baloldala) kaptunk feltételt. Ha ez teljesül, akkor a N-S egyenlet az alábbira egyszerűsödik:

$$\eta \Delta v_i = \frac{dp}{dx_i} \quad (5.8.)$$

Ez lamináris áramlást ír le és láthatóan „Darcy-szerű”. (Ettől eltérő esetek a közetbeli áramlásnál csak extrém helyzetben fordulhatnak elő – nagyon nagy permeabilitású közetben vagy gázáramlás – kis viszkozitás - esetén). A Darcy egyenlethez a súrlódást leíró baloldali tagot arányosnak kell venni a sebességgel, azaz a sebességtér görbületét meghatározó Laplace operátor hatását közelíthetjük:

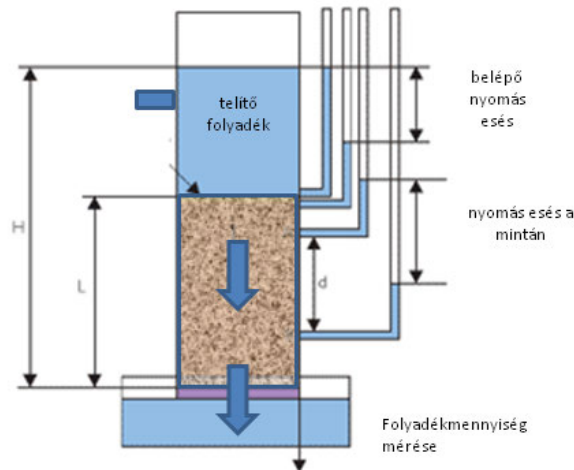
$$\Delta v_i \approx -\frac{\phi}{k} v_i \quad (5.9.)$$

A problémát pontosabban közelítő ún. Brinkman-egyenletben ezt a tagot nem hanyagoljuk el.

$$q + \beta \Delta q = -\frac{k}{\eta} \frac{dP}{dx} \quad (5.10.)$$

5.1. Permeabilitás mérése

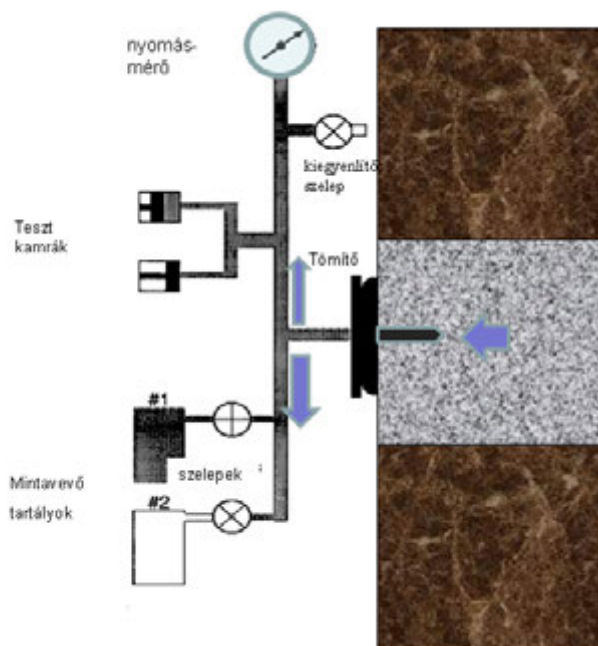
A közetek permeabilitását a Darcy-egyenlet alapján labormérésekkel (magmintákon) mérhetjük (5.1. ábra) a nyomásgradiens és az átáramló folyadék vagy gáz mennyiség mérésével.



5.1. ábra. Permeabilitás mérése kőzetmintán

Gázok esetében az így mért permeabilitás nyomásfüggést mutat. Ennek az az oka, hogy a gázáramlás másként történik, különösen kis nyomáson a diffúziónak is jelentős a szerepe. Ilyenkor gyakran a nagyobb nyomásokra extrapolált permeabilitást adják meg (Klinkenberg korrekció)

Fúrásokban ún. teszteres mérésekkel határozzák meg (ez utóbbinál a nyomásgradiens csak becsülhető). A tesztet leereszthetjük a fúrásban a vizsgálni kívánt réteghez, ahol a rétegfalhoz szorítva szabályozott körülmények között az áramlás sebesség és a nyomás mérése mellett történhet rétegfolyadék mintavétel (5.2. ábra).



5.2. ábra. In situ permeabilitás mérés teszterrel

5.2. A permeabilitás változásai

A litosztatikai nyomás emelkedésével – a kompaktió miatt – romlik a permeabilitás. A repedezettség megjelenése fokozza, míg a cementáció előrehaladása és az agyagtartalom csökkenti. A hőmérséklet növekedése szintén hat a permeabilitásra, mivel szerepe lehet a mikrorepedések kialakulásában, illetve a cementációt befolyásoló oldódási-

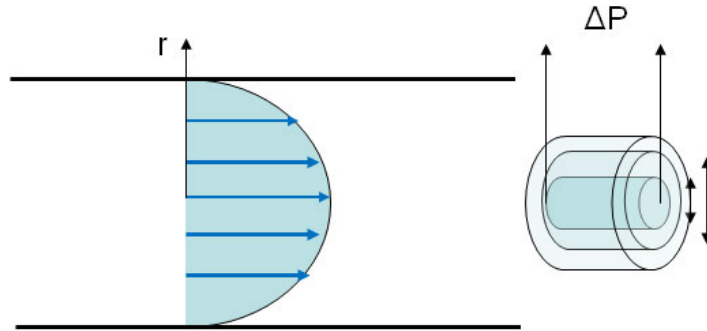
kiválási folyamatokban. A porozitás és permeabilitás között általában szoros kapcsolat van, mely közettípusonként eltérő lehet (5.5. ábra). Törmelékes üledékeknél ez a kapcsolat általában jobban definiált, mint karbonátos üledékeknél.

5.3. Permeabilitás modellezése

A permeabilitás modellezésének célja, hogy kapcsolatot találjunk a közet belső geometriája és a mérhető permeabilitás között. Ehhez elsőként egy kapillárisban történő hidraulikus vezetést tanulmányozunk, melyet a Hagen-Poiseuille törvény ír le. Egy r sugarú kapillárisban történő áramlás leírására, az áramlással összefüggő nyomásesés ΔP lamináris áramlás feltételezésével:

$$\Delta P = \frac{8\eta L Q}{\pi r^4} \quad (5.11.)$$

Az összefüggésnek alapvető szerepe van a permeabilitás közetfizikai modellezésében, azaz közetstruktúrával való összefüggések feltárásában, hiszen a pórústérben a kapilláris vezetés többnyire meghatározó.



5.3. ábra. Lamináris áramlásnál kialakuló sebességprofil

Számazzuk a fenti összefüggést. Viskózus folyadék csőben történő lamináris áramlása esetén az egyes – különböző sebességgel áramló hengergyűrűk között súrlódás lép fel. Az ezzel kapcsolatos felületfüggő erők:

$$F_s = -\eta A \frac{dv_x}{dr} = -\eta 2\pi r \Delta x \frac{dv_x}{dr} \quad \text{a centrális tartomány határán.} \quad (5.12.)$$

A következő hengergyűrű határán:

$$F_s(r + dr) = \eta 2\pi(r + dr)\Delta x \frac{dv_x(r + dr)}{dr} \quad (5.13.)$$

A hengergyűrűre felírva az erők egyensúlyát, figyelembe véve, hogy a kapilláris nyomásból származó erő tart egyensúlyt a fenti súrlódási erőkkel.

$$0 = -\Delta P 2\pi r dr - F_s(r) + F_s(r + dr) = -\Delta P 2\pi r dr - \eta 2\pi r \Delta x \frac{dv_x(r)}{dr} + \eta 2\pi(r + dr)\Delta x \frac{dv_x(r + dr)}{dr} \quad (5.14.)$$

A radiális sebességprofil változást Taylor-sorba fejtvé:

$$\frac{dv_x(r + dr)}{dr} = \frac{dv_x(r)}{dr} + \frac{dv_x^2(r)}{dr^2} dr \quad (5.15.)$$

Beleírva 5.13. összefüggésbe:

$$0 = -\Delta P 2\pi r dr + \eta 2\pi r dr \Delta x \frac{dv_x(r)}{dr} + \eta 2\pi r dr \Delta x \frac{d^2 v_x(r)}{dr^2} \quad (5.16.)$$

Átrendezve:

$$\frac{1}{\eta} \frac{\Delta P}{\Delta x} = \frac{d^2 v_x}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dv_x}{dr} \quad (5.17.)$$

Kihasználva a differenciálforma összevonhatóságát.

$$\frac{1}{\eta} \frac{\Delta P}{\Delta x} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{dv_x}{dr} \quad (5.18.)$$

A sebességprofilra kapott differenciálegyenlethez meghatározhatók a peremfeltételek.

Egyrészt a cső falnál az áramlási sebesség zérus, másrészt a cső közepén az áramlási sebességnek maximuma van, így itt a sebesség radiális deriváltja zérus. A differenciálegyenlet közvetlenül kiintegrálható két lépésben, két integrálási állandó bevezetésével:

$$v_x(r) = \frac{1}{4\eta} r^2 \frac{\Delta P}{\Delta x} + a \ln(r) + b \quad (5.19.)$$

Deriváljuk és érvényesítsük az első határfeltételt.

$$\frac{dv_x(r=0)}{dr} = \frac{1}{2\eta} r \frac{\Delta P}{\Delta x} + a \frac{1}{r} = 0 \quad (5.20.)$$

Ez a -t nullának választva, teljesíthető. A második határfeltételből b meghatározható.

$$v_x(R) = \frac{1}{4\eta} R^2 \frac{\Delta P}{\Delta x} + b = 0 \rightarrow b = -\frac{1}{4\eta} R^2 \frac{\Delta P}{\Delta x} \quad (5.21.)$$

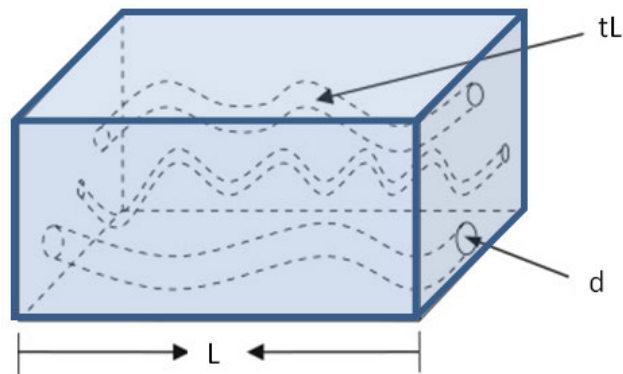
Így parabolikus sebességprofilt kapunk:

$$v_x(r) = -\frac{1}{4\eta} \frac{\Delta P}{\Delta x} [R^2 - r^2] \quad (5.22.)$$

A sebességprofil ismeretében egy radiális integrálással állítható elő a csövön egységnyi idő alatt átáramló folyadékmennyiség:

$$q = \frac{\pi}{2\eta} \frac{\Delta P}{\Delta x} \int_0^R [rR^2 - r^3] dr = \frac{\pi R^4}{8\eta} \frac{\Delta P}{\Delta x} \quad (5.23.)$$

A kapillárisokból felépíthető egy közetmodell az ún. kapilláris csőköteg-modell.



5.4. ábra. Kapilláris-csőköteg modell

A modell legfontosabb paramétere az ekvivalens hidraulikus sugár valamint a csövek száma, mely kapcsolatba hozható a makroszkópikus közetfizikai jellemzővel a permeabilitással. Fontos paraméter továbbá az un. tortuozitás (t), mely a kapillárisok kanyarulatosságát írja le.

Ehhez egyesítsük a H-P (5.11.) egyenletet a Darcy egyenlettel (5.1.) n darab kapilláris csőre:

$$A \frac{k}{\eta} \frac{\Delta P}{L} = \frac{n \pi r^4}{8 \eta} \frac{\Delta P}{tL} \quad (5.24.)$$

Valamint felhasználva a porozitás kifejezését a tortuozitással:

$$\Phi = \frac{n r^2 \pi L}{A L} \rightarrow A = \frac{n r^2 \pi L}{\Phi} \quad (5.25.)$$

Így 5.24. átírható:

$$\frac{n r^2 \pi}{\Phi} \frac{k}{\eta} \frac{\Delta P}{L} = \frac{n \pi r^4}{8 \eta} \frac{\Delta P}{tL} \quad (5.26.)$$

Ebből a permeabilitásra az alábbi összefüggést kapjuk:

$$k = \frac{r^2 \Phi}{8 t^2} \quad (5.27.)$$

Tehát a permeabilitás és az ekvivalens kapilláris sugár kapcsolatba hozható. A kapilláris sugár helyett bevezethető az összefüggésbe a fajlagos felület (S_f). Ennek az az értelme, hogy S_f karotázs szelvényekből jobban becsülhető a tapadó vízzel való közvetlen kapcsolata miatt.

A fajlagos felület a csőköteg modellel:

$$S_f = \frac{n 2 \pi L t}{A L} \quad (5.28.)$$

Négyzetre emelve:

$$S_f^2 = \frac{n^2 4\pi^2 r^2 t^2}{A^2} = 4 \frac{\Phi^2}{r^2} \quad (5.29.)$$

$$r^2 = 4 \frac{\Phi^2}{S_f^2} \quad (5.30.)$$

Ezzel a permeabilitás kifejezésének gyakorlatban jobban használható formája:

$$k = \frac{\Phi^3}{2t^2 S_f^2} \quad (5.31.)$$

A fenti eredmény alapján vezettek be ún. félempirikus formulákat a permeabilitás becslésére, ahol a fajlagos felületet az azzal arányos nem redukálható víztelítettség (Sw_i) helyettesíti (pl. Timur, Tixier, Coates formulák).

$$k = c \frac{\Phi^3}{Sw_i^2} \quad (5.32.)$$

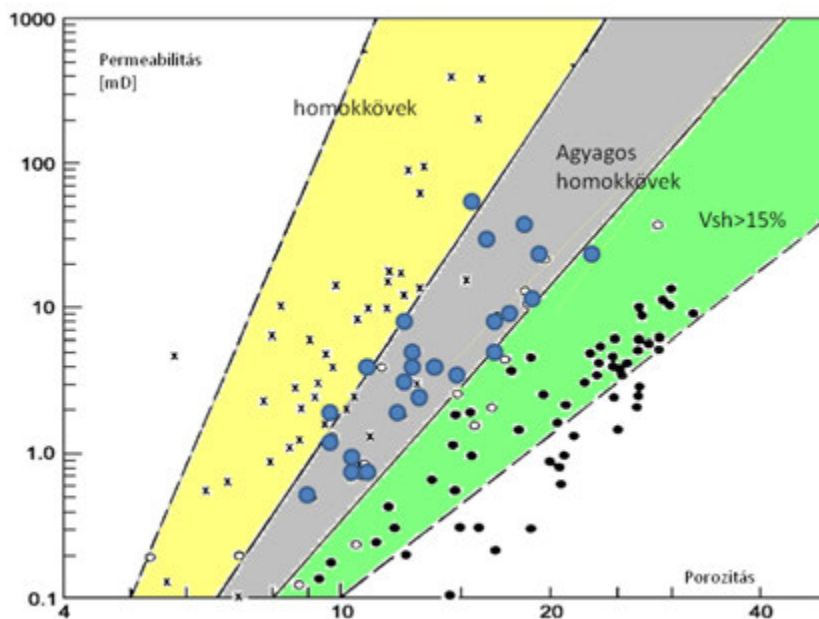
Példaként néhány iparban használt félempirikus formula.

$$k = \left[100 \frac{\Phi^{2.25}}{Sw_i} \right]^2 \quad (\text{Timur-formula}) \quad (5.32a.)$$

$$k = \left[200 \frac{\Phi^3}{Sw_i} \right]^2 \quad (\text{Tixier-formula}) \quad (5.32b.)$$

A fenti formulák is mutatják, Sw_i ismeretében a permeabilitás becsülhető a mért porozitás segítségével. Erre általában terület és kőzettípus függő összefüggéseket állítanak fel, melyben szerep jut a magvizsgálatoknak is (5.5. ábra.)

A permeabilitás és kőzetfizikai paraméterek összefüggését szokás még véletlen cső és repedésrendszerrel modellezni (un. perkolációs modellek). Ekkor is a modell valamilyen paramétereivel hozzuk kapcsolatba a makroszkopikus permeabilitást. Ezek a modellek különösen a kis permeabilitások esetén alkalmazhatók jól.



5.5. ábra. Porozitás és permeabilitás összefüggése egy adott területen

A perkolációs transzportmodellek közös jellemzője, hogy adott térfogatba véletlen eloszlás szerint helyezünk el átvezetéseket (csövecskéket, gömböket stb.). Ezek egy adott koncentráció küszöb után – perkolációs küszöb – már valamilyen valószínűséggel összefüggő átvezetést képezhetnek. Ez a küszöb porozításra vonatkozóan is megadható. További átvezetések beiktatásával – porozitás növelésével - növelhető az átvezető képesség. Az ezzel a modellel megvalósított rendszerek esetében a porozitás és a vezetőképesség között jellegzetes kapcsolat van:

$$q \approx c(\phi - \phi_{crit})^m \quad (5.33.)$$

ahol ϕ_{crit} az átvezetés megjelenéséhez tartozó kritikus porozitás és m a geometriával és a póruseloszlással összefüggő exponens.

5.4. Relatív permeabilitás

A többfázisú áramlás esetén a permeabilitás függ az áramló folyadék, gáz összetételétől is. Ekkor értelmes a permeabilitást fázisonként vizsgálni. A fázisok egymást akadályozhatják. Ennek jellemzésére vezették be a dimenziótlán relatív permeabilitást, mely megmutatja, hogy a tisztán vízáramláshoz képest, az adott fluidum esetében a permeabilitás miként változik. Ez részben az eltérő kohéziós erők, eltérő kapillaritás miatt illetve a fázisok egymásra hatása miatt következik be. Definiálható a víz, gáz és olaj relatív permeabilitása (k_{rw} , k_{ro} , k_{rg}).

$$k_w = k \cdot k_{rw} \quad (5.34.)$$

$$k_o = k \cdot k_{ro}$$

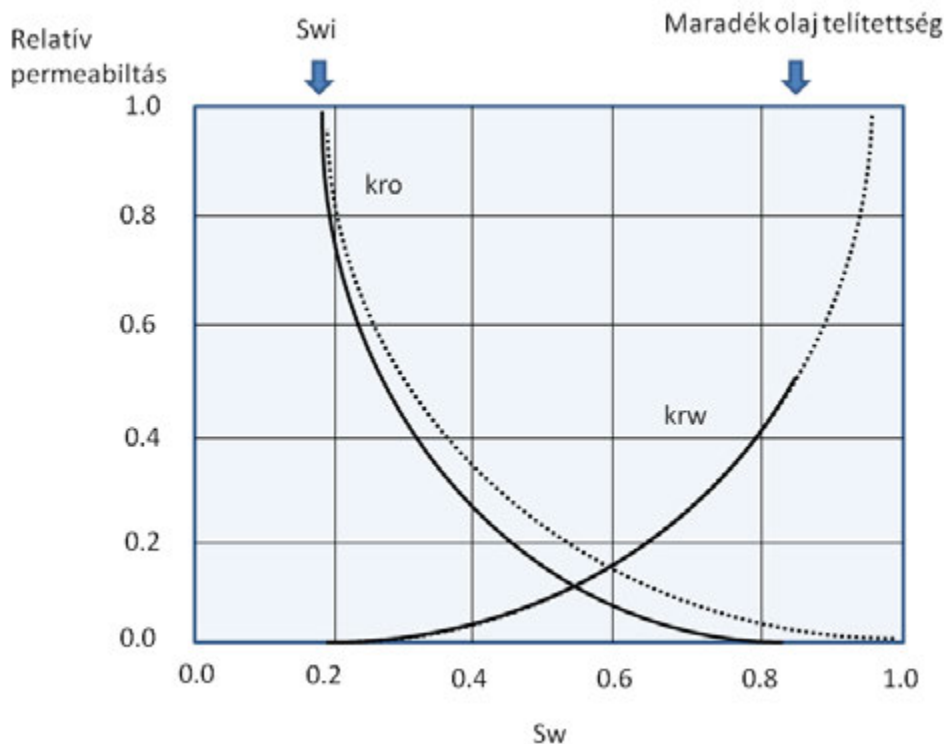
$$k_g = k \cdot k_{rg}$$

Kétfázisú áramlásnál a víz és az olaj relatív permeabilitása a következő módon becsülhető:

$$k_{rw} = \left(\frac{S_w - S_{wi}}{1 - S_{wi}} \right)^3 \quad (5.35.)$$

$$k_{ro} = \frac{(1 - S_w)^{2.1}}{(1 - S_{wi})^2} \quad (5.36.)$$

A relatív értékeket megszabja a nem redukálható víztelítettség.

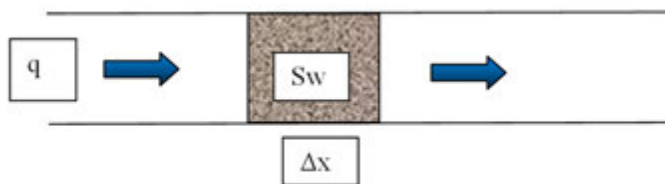


5.6. ábra. Relatív permeabilitás értékek kétfázisú tárolónál. A folytonos görbe a víztartalom növelése mellett, a szaggatott a szénhidrogéntartalom növelés mellett kialakuló értékeket mutatja.

A relatív permeabilitások (5.6. ábra) fogják meghatározni, hogy egy rezervoárból (adott szaturáció mellett) milyen összetételű folyadék termelhető. Megemlítjük, hogy az alacsony permeabilitású gáztárolóknál a gáz és víz fázis blokkolhatja egymás áramlását, megnehezítve a termelést (permeabilitás jail).

5.5. Elárasztás kialakulása a permeábilis zónákban

A rétegyomásnál nagyobb fűróiszap-nyomás hatására permeábilis rétegeknél ún. elárasztás jön létre, melynek során a fűróiszap finomabb frakciója beáramlik a pórusterbe, és részben lecseréli az eredeti pórustartalmat. A folyamatot mely egy egyfázisú vagy többfázisú folyadék transzport porózus közegben, az iszaplepleny kialakulása zárja le. A folyamat közelítő leírását a Buckley-Leverett egyenlet adja meg.



5.7. ábra. Elárasztásra vonatkozó egyenlet modellje

Az egyenlet származtatásához vegyünk egy A felületű Δx hosszúságú köztérfigatot, melybe ρ_w sűrűségű víz áramlik be. A beáramló víz térfogati árama (q_w). A mérlegegyenlet ekkor:

$$[(q_w \rho_w)_x - (q_w \rho_w)_{x+\Delta x}] \Delta t = A \Delta x \Phi [(S_w \rho_w)_{t+\Delta t} - (S_w \rho_w)_t] \quad (5.37.)$$

A fenti egyenletből látható, hogy a belépő és kilépő víz különbsége szaturáció (S_w) változást okoz a vizsgált térfogat pórusterében. Megfelelő határátmenettel differenciálegyenlethez jutunk:

$$-\frac{\partial}{\partial x}(q_w \rho_w) = A \Phi \frac{\partial}{\partial t}(S_w \rho_w) \quad (5.38.)$$

Ha a folyadékot összenyomhatatlannak tekintjük, azaz $\rho_w = \text{const}$, valamint a víz térfogati áramát felírjuk úgy, mint az össz folyadékáram (q) frakciója:

$$q_w = f_w q \quad (5.39.)$$

Ekkor a mérlegegyenlet:

$$-\frac{\partial f_w}{\partial x} = \frac{A \Phi}{q} \frac{\partial S_w}{\partial t} \quad (5.40.)$$

Mivel a víz frakció f_w a szaturáció függvénye:

$$-\frac{\partial f_w}{\partial S_w} \frac{\partial S_w}{\partial t} = \frac{A \Phi}{q} \frac{\partial S_w}{\partial t} \quad (\text{Buckley-Leverett 1942.}) \quad (5.41.)$$

A fenti egyenletből származtatható az elárasztási front időbeli mozgását leíró egyenlet.

Mivel $S_w(x, t)$, így a szaturáció teljes differenciálja:

$$dS_w = \frac{\partial S_w}{\partial x} dx + \frac{\partial S_w}{\partial t} dt \quad (5.42.)$$

Ebből a konstans szaturáció értékkel jellemezhető front egyenlete:

$$0 = \frac{\partial S_w}{\partial x} dx + \frac{\partial S_w}{\partial t} dt \quad (5.43.)$$

Ha ezt a Buckley-Leverett egyenletbe helyettesítjük:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{q}{A \Phi} \frac{df_w}{dS_w} \quad (5.44.)$$

Mely a front sebességét adja meg. Ha integráljuk idő szerint a front helyzetét kaphatjuk meg:

$$\int_i \frac{dx}{dt} dt = \int_i \frac{q}{A \Phi} \left(\frac{df_w}{dS_w} \right) dt \quad (5.45.)$$

Melynek közelítő megoldása, ha a jobb oldali integrandus időfüggésétől eltekintünk:

$$x_f = \frac{qt}{A\Phi} \left(\frac{df_w}{dS_w} \right)_f \quad (5.46.)$$

A jobboldali kifejezés utolsó tagja a relatív permeabilitásoktól függ, melynek értékét a víz relatív permeabilitása alapján (5.6 ábra) tudjuk meghatározni. Az elárasztás folyamatának vizsgálata, lényeges a mérések korrekciójának szempontjából, illetve az elárasztott zónában történő szaturáció változás alapján becslést tehetünk a kitermelhető szénhidrogén hányadra.

6. fejezet - Vezetőképesség – fajlagos ellenállás

A kőzetek fajlagos ellenállás mérésének alapvető jelentősége van a geofizikai kutatások során. Egy sor felszíni és mélyfúrás mérési módszer célparamétere a szénhidrogén kutatásban, vízkutatásban, mérnökgeofizikai kutatásban stb. A módszerek alkalmazhatóságának alapja, hogy jelentős a fajlagos ellenállás kontraszt például a kőzetmátrix és a pórusvíz között (akár 10 – 12 nagyságrend), vagy a pórusvíz és a szénhidrogének között. Az alábbi táblázatban látható néhány tipikus fajlagos ellenállás érték.

Kőzet összetevő	Fajlagos ellenállás ohmm
Mészkö	$5 \cdot 10^7 - 10^9$
Kvarz	$10^{12} - 3 \cdot 10^{14}$
Olaj	$2 \cdot 10^{14}$
Desztillált víz	$2 \cdot 10^{14}$
Sósvíz (15 C) 2000 ppm	3.4
10000 ppm	0.72
20000 ppm	0.38
Agyagok	2-10
homokkővek – vízzel telített pórustérrel	0.5 – 10
Olajjal telített homokkővek	$5 - 10^3$

A kHz-nél kisebb frekvenciáknál a kőzetfizikai probléma egyenáramú közelítéssel tárgyalható. Váltakozóáramú módszereknél (magnetotellurikus módszer stb.) a fajlagos ellenállást számíthatjuk a térerő komponensekből származtatott impedanciából is. A mért térjellemzőket az Ohm-törvény illetve az ezzel összefüggő Laplace egyenlet segítségével köthetjük össze a kőzet fajlagos vezetőképességével.

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad (6.1.)$$

Megjegyezzük, hogy a vezetőképesség lehet tenzor is. A kőzetek jelentős részében anizotrópia tapasztalható a vezetőképesség tekintetében.

6.1. Elektrolitikus vezetés

Eltekintve az ércektől, bizonyos szulfidoktól a vezetés fő mechanizmusa ionos vezetés. A kőzetek fajlagos ellenállását a pórushálózat szerkezete és az azt kitöltő elektrolit határozza meg. Ebben az alfejezetben az elektrolitikus vezetéssel foglalkozunk. Az áramsűrűség $\mathbf{q}$ töltéssel rendelkező n koncentrációjú részecskék mozgásánál:

$$\mathbf{J} = nq\mathbf{v} \quad (6.2.)$$

Rövid tranziens után kialakul egy stacionárius töltésáramlás. A töltésmozgás átlagos sebessége első közelítésben arányos a térerővel (az arányossági tényező az un. ion mozgékonyság - μ).

$$\mathbf{v} = \mu \mathbf{E} \quad (6.3.)$$

A két egyenletet összevonva, megkapjuk a stacionárius ionáramlással kapcsolatos vezetőképességet, mely arányos a töltéssűrűséggel:

$$\sigma = nq\mu \quad (6.4.)$$

Az elektrolit vezetőképesége tehát arányos az ion koncentrációval. Különböző ionok transzportja esetén a vezetőképeségek összeadódnak (Kohlrausch törvény híg oldatokra).

A hőmérséklet növekedése a mozgékonyág növekedésével jár, így nő a vezetőképeség.

Ha a fenti iontranszporthoz kapcsolódva valamilyen koncentráció különbség is kialakul, akkor a térerő által meghatározott egyenletes mozgás mellett megjelenik az iondiffúziót leíró tag is. A diffúziós tagot az ionok diffúziós állandójával (D) írhatjuk az egyenletbe:

$$\mathbf{J} = -D \frac{\partial n}{\partial x} + \mathbf{v}n \quad (6.5.)$$

Az áramsűrűséget a konvektív transzport és a diffúzió alakítja ki. Ha a nettó áramsűrűség zérus:

$$D \frac{\partial n}{\partial x} = \mathbf{v}n \quad (6.6.)$$

Kialakul egy stacionárius térbeli koncentráció eloszlás és ehhez kapcsolódó tértöltés. A koncentráció eloszlás Boltzman-eloszlás feltételezésével:

$$n(x) = n_0 \exp\left(-\frac{qV}{kT}\right) \quad (6.7.)$$

A Boltzman-eloszlást külső potenciál (V) alakítja, míg a koncentráció különbségtől függő diffúzió visszarendezni igyekszik. A potenciál létrejöhet tértöltés kialakulása miatt is. Határozzuk meg az eloszlás térbeli változását:

$$\frac{dn}{dx} = -\frac{n}{kT} qE \quad (6.8.)$$

Ezt visszaírva a stacionárius eloszlás egyenletébe (6.6.-ba):

$$\frac{\mathbf{v}}{D} = \frac{qE}{kT} \quad (6.9.)$$

Így az ionmozgékonyág kifejezhető más mennyiségekkel:

$$\mu = \frac{qD}{kT} \quad (6.10.)$$

A korábbiak alapján a vezetőképeség is kifejezhető.

$$\sigma = nq^2 \frac{D}{kT} \quad (6.11.)$$

A hőmérsékletfüggésre kaptunk összefüggést. A modellben az ionok zömét adó Na^+ és Cl^- ionok nagyjából egymástól függetlenül mozognak, cipelve az ionhoz kapcsolódó hidrát burkot (keverék elektrolitok párhuzamosan kapcsolódnak). Nagyobb koncentrációnál már nem tekinthetünk el az ionok egymás mozgását gátló hatástól (nem híg oldatok).

Tételezzük fel, hogy az elektrosztatikus tér hatására (qE) bekövetkező gyorsulást a közegellenállás akadályozza és kialakul egy egyenletes mozgás. Alkalmazzuk a közegellenállással kapcsolatos Stokes- törvényt:

$$qE = 6\pi\eta r\mathbf{v} \quad (6.12.)$$

ahol r az effektív ionrádiusz. Így ebből az összefüggésből is származtatható ion mozgékonyaság.

$$\mu = \frac{q}{6\pi\eta r} \quad (6.13.)$$

Ennek segítségével is felírható az oldat vezetőképessége:

$$\sigma_w = \frac{nq^2}{6\pi\eta r} \quad (6.15.)$$

Itt is megjelenik a koncentrációval való arányosság, a hőmérsékletfüggés a viszkozitáson keresztül kerül az összefüggésbe.

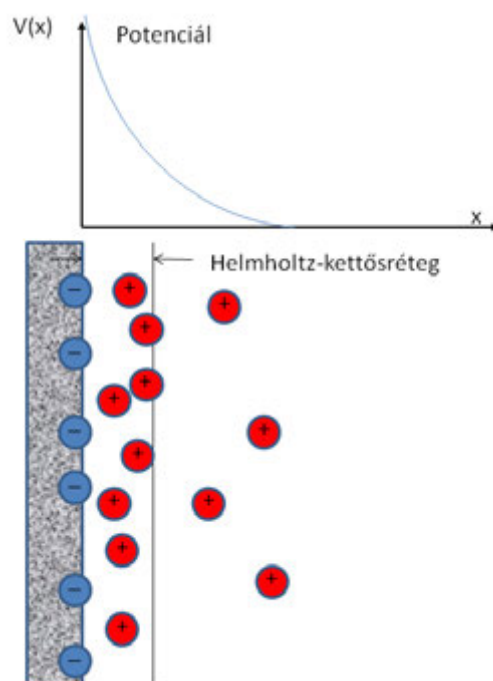
Az elektrolitok fajlagos ellenállás hőmérsékletfüggése lényeges pont a kőzetek fajlagos ellenállásának meghatározásakor. A levezetett fordított arányosság alapján az elektrolitokra használható összefüggés:

$$R_{NaCl}(T_2) = R_{NaCl}(T_1) \frac{T_1 + 21.5}{T_2 + 21.5} \quad (6.16.)$$

6.2. Elektromos kettősréteg az agyagásványok felületén.

A kőzetek fajlagos ellenállásának leírásakor figyelembe kell venni, hogy egyes kőzetalkotók, elsősorban az agyagok, effektív pórusrendszer hiányában is rendelkeznek vezetőképességgel. Ez az agyagásványok felületén kötött víz iontartalmának köszönhető, ahol az ion koncentráció nagyobb, mint a pórustér belsejében.

Az agyagásványok felületén – ionhelyettesítések miatt ($\text{Si}^{4+} \rightarrow \text{Al}^{3+}$) – gyakran negatív felületi töltések vannak jelen, mely a felületéhez csatlakozó rétegvízben ún. elektromos kettősréteget (Helmholtz kettős réteg, Gouy-Chapman diffúz határú kettősréteg) alakít ki, melynek fontos szerepe van az elektromos illetve az agyag elektrokémiai tulajdonságainál.



6.1. ábra. Elektromos kettősréteg a negatív töltéssel rendelkező agyagásványok felületénél

A kettős réteg kiterjedését (Gouy-Chapman, Stern modell szerint) a hőmozgás által vezérelt diffúzió és az agyagásványok felületi töltése által kialakított elektrosztatikus potenciál határozza meg. Ezt az agyagfelületénél Boltzmann-eloszlás feltételezésével felírt tértöltés segítségével modellezhetjük. A pozitív ionok koncentrációja megnő az agyag felületénél, míg a negatív ionoké csökken a potenciálnak köszönhetően. Összességében a távolsággal – a potenciállal – csökkenő pozitív töltés többlet alakul ki.

$$N(x) = N(0) \frac{\exp\left(\frac{-qV(x)}{k_B T}\right) - \exp\left(\frac{qV(x)}{k_B T}\right)}{\exp\left(\frac{-qV(x)}{k_B T}\right) + \exp\left(\frac{qV(x)}{k_B T}\right)} \quad (6.17.)$$

amely, mint tértöltés, az elektrosztatikus potenciált leíró Poisson-egyenlet forrástagjaként adható meg.

A megoldás egyszerűsítése végett – feltételezve, hogy a forrástag exponense kicsi – a jobboldali tagnál Taylor-sorfejtést hajthatunk végre és megállunk az első tagnál (Debye-Hückel egyenlet). Így a Laplace-operátor sajátérték-egyenletéhez jutunk, azaz Helmholtz-egyenlethez:

$$\nabla^2 V = \frac{q}{\epsilon_r \epsilon_0} N_0 \frac{qV(x)}{k_B T} \quad (6.18.)$$

A fenti egyenlet megoldását - 1 dimenzióban - 2 független megoldás összegeként, a következő alakban kereshetjük (λ_D : Debye-távolság bevezetésével)

$$V(x) = C_1 \exp\left(-\frac{1}{\lambda_D} x\right) + C_2 \exp\left(\frac{1}{\lambda_D} x\right) \quad (6.19.)$$

Homogén térben – a megoldás végtelenbeli lecsengése miatt – C_2 értelemsszerűen zérus. Ezt behelyettesítve 6.18.-ba, megkapható a Debye-távolság is, mely a lecsengés karakterisztikus távolsága:

$$\lambda_D = \sqrt{\frac{\epsilon_r \epsilon_0 k_B T}{q^2 N_0}} \quad (6.20.)$$

mely a kettős réteg vastagságával azonosítható. Látható, hogy a diffúz tértöltés tartomány szélesebb, ha a hőmérséklet magasabb és hígabb az oldat. A kettős réteg eltérő ionkoncentrációja miatt egy speciális vezetési útvonalat képez a szemcsék felülete mentén, melyet a kőzetek elektromos modellezésénél figyelembe kell venni.

6.3. Természetes potenciál (SP)

Ebben a fejezetben egy komplex, a kőzetek többféle fizikai tulajdonságától (ellenállás, permeabilitás, rétegvíz ionkoncentráció stb.) is függő jelenséget tárgyalunk.

Korábbi fejezetekben szóba került, hogy a kőzetek pórusterében található pórúsvízben különböző ionok fordulnak elő különböző koncentrációban. Fosszilis tengervizekben a Na^+ és Cl^- ionok a legfontosabbak míg édesvizekben a Ca^{++} , Mg^{++} , HCO_3^- stb. ionok koncentrációja is jelentős lehet. Az esetleges koncentráció különbségeket, melyet például fúrások környezetében a fúróiszap és a rétegvizek eltérő koncentrációjából származhat, diffúziós folyamatok egyenlítene ki. A koncentráció kiegyenlítődése bizonyos feltételek mellett lokális töltésszétválasztódással járhat együtt, azaz természetes potenciál megjelenésével. A legfontosabb mechanizmusok a pozitív és negatív ionok eltérő mozgékonyasága miatt létrejövő **diffúziós potenciál**, a különböző töltésű ionok transzportját eltérően akadályozó membrán hatás következtében létrejövő **membrán potenciál**. Pórusfolyadék áramlása esetén felléphet az ún. **elektrokinetika** **potenciál** is, amely a szemcsék felületénél kialakuló eltérő ionkoncentrációjú kettősréteg és a mellette áramló kisebb koncentrációjú áramló pórusfolyadék közötti diffúzió eredményeként jön létre.

Érctestek közelében szintén kialakulhat természetes potenciál az érctest felszínén bekövetkező oxidációs és redukciós folyamatok eredményeképpen.

A töltésszétválasztó mechanizmus az iontranszporthoz kötődő SP áramok szempontjából elektromotoros erőként viselkedik, fenntartva az SP „áramköröket”, melyek az érintett közzestesteken okoznak fajlagos ellenállás eloszlástól függő feszültségesést.

A diffúziós potenciált tekintve, a folyamat motorja a koncentráció különbség. A diffúzióból származó áramsűrűség a Fick-féle differenciálegyenlettel írható le:

$$J = -D \frac{dn}{dx} \quad (6.21.)$$

Korábban (6.10.) a diffúziós állandót (D) kifejeztük az ionmozgékonyssággal (Nerst-Einstein).

Kétféle, azonos irányba haladó, de eltérő mozgékonyaságú ionra (NaCl oldat) a nettó – töltés szétválasztásból származó – áramsűrűség:

$$J_{net} = -\frac{kT}{q} (\mu_{Na} - \mu_{Cl}) \frac{dn}{dx} \quad (6.22.)$$

Az áramsűrűség kifejezhető a töltésszétválasztás eredményeképpen létrejött tértöltés által generált térerősséggel és az oldatok vezetőképességével is:

$$J = \sigma E = (\sigma_{Na} + \sigma_{Cl}) E = (nq\mu_{Na} + nq\mu_{Cl}) E \quad (6.23.)$$

Az áramsűrűség kétféle alakját egyenlővé téve elsőrendű differenciálegyenletet kapunk:

$$-\frac{(\mu_{Na} - \mu_{Cl}) kT}{\mu_{Na} + \mu_{Cl}} \frac{1}{q^2} \frac{dn}{n} = E dx \quad (6.24.)$$

Kiintegrálva a koncentrációváltozás tartományára:

$$\Delta U = \int E dx = -\frac{(\mu_{Na} - \mu_{Cl}) kT}{\mu_{Na} + \mu_{Cl}} \frac{1}{q^2} \ln \frac{n_1}{n_2} \quad (6.25.)$$

Pl. fűrási környezetben, ha a fűróiszap és a rétegvíz NaCl koncentrációja eltérő, az elárasztott zónában a fent jelzett diffúziós potenciál alakul ki. A membrán potenciál hasonlóan számítható, csak a mozgékonyaságokat a félig áteresztő membrán adott ionra vonatkozó áteresztőképességével kell kicserélni. A membrán hatás leggyakrabban az agyagok felületi elektromos kettősrétegének köszönhető. Az ion helyettesítések miatt kialakuló negatív felületi töltés megakadályozza a negatív ionok áthaladását. Ha a fenti képletben zérusra cseréljük a Cl^- ionok mozgékonyaságát, megkaphatjuk a membrán potenciál leírására használható képletet.

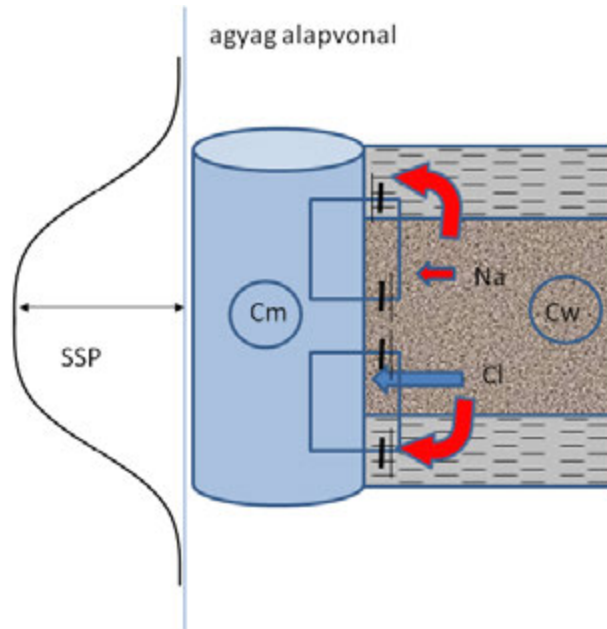
$$\Delta U = \int E dx = -\frac{kT}{q^2} \ln \frac{n_1}{n_2} \quad (6.26.)$$

A fenti képletek segítségével kvalitatív módon is értelmezhetővé válnak pl. a fűrási környezetben, az agyagos és permeabilis zónák határán kialakuló természetes potenciál értékek. Ekkor a fűrás és rétegvíz eltérő koncentrációja a fenti mechanizmusok alapján potenciálkülönbséget hoz létre az agyagos zóna és a permeabilis – elárasztott zóna között. Az elárasztott zóna irányában a diffúziós potenciál, míg az agyagrétegen keresztül a membrán potenciál hoz létre természetes potenciált. A fűráson keresztül a természetes potenciál által létrehozott áramtér záródik.

A két effektus eredőjeként, a rétegvíz ionkoncentrációjával (C_w) és az iszapfiltrátum ionkoncentrációjával (C_{mf}) felírható az SP áramkör eredő elektromotoros ereje:

$$SSP = \Delta U = \Delta U_D + \Delta U_M = -(65 + 0.24T) \log \frac{C_w}{C_{mf}} \quad (6.27.)$$

A teljes SP-ből származó potenciálkülönbség az agyag potenciáljához képest (un. agyag alapvonal) értendő.



6.2. ábra. Természetes potenciál kialakulása agyag és permeábilis zóna határán

Az agyagalapvonal változhat pl. agyagtípus változás miatt, ekkor a szomszédos agyagzóna értékét használhatjuk referenciaként.

Felhasználva az ionkoncentráció és fajlagos ellenállás közötti összefüggést, 6.27. egyenlet felhasználható a rétegvizek fajlagos ellenállásának (R_w) becslésére.

$$R_w = R_{mf} \cdot 10^{\frac{-SSP}{65+0.24T}} \quad (6.28.)$$

A rétegvíz fajlagos ellenállás igen lényeges paramétere a szénhidrogén telítettségre vonatkozó formuláknak. Megjegyezzük, hogy nagyobb NaCl koncentrációk esetén (30000 ppm felett) a fenti formula korrekcióra szorul.

Fontos megjegyezni, hogy a mérhető SP értéket csökkenti, ha a permeábilis formációnak van agyagtartalma, ilyenkor a membrán potenciál itt is érvényesül. Ebből kiindulva az SP eltérés csökkenése az agyagtartalommal (V_{sh}) is kapcsolatba hozható és alkalmas agyagtartalom meghatározására, ha ismerjük az agyagmentes zóna SP választát (SSP).

$$V_{sh} = 1 - \frac{SP}{SSP} \quad (6.29.)$$

6.4. Kőzetek vezetőkéessége

Miután az előző fejezetekben foglalkoztunk a kőzetet kitöltő elektrolitok vezetőkéességével, rátérünk a pórushálózattal rendelkező kőzetek vezetőkéességének vizsgálatára. A probléma egzakt módon elvileg a differenciális Ohm-törvény alapján oldható meg.

$$J(r) = \sigma(r)E(r) = -\sigma(r)\nabla V(r) \quad (6.30.)$$

Melyből az effektív vezetőképesség származtatható lenne, de melynek megoldása és átlagolása meglehetősen nehéz, ahogy azt a 2. fejezetben részleteztük. A nehézséget a nagy fajlagos ellenállás kontraszt jelenti a mátrix és pórusvíz között. A mátrixra vonatkozó értékeket praktikusán végtelennek vehetjük. Kiszámításához elvileg a következő integrált kellene meghatározni egy A keresztmetszetű L hosszúságú téglatestre, melyen a feszültségés ΔV :

$$\sigma_{eff} = \left(\frac{L}{\Delta V} \right) \frac{1}{A} \int \int \sigma(r) (\nabla V) dS dx \quad (6.31.)$$

A két komponensű (rétegvíz és mátrix) közet vezetőképességre is származtatható alsó és felső határ, a szemcsék eloszlásának magasabb momentumainak ismerete nélkül (Hashin-Shtrikman határok 2.80, 2.81):

$$\sigma'' \leq \sigma_{eff} \leq \sigma' \quad (6.32.)$$

$$\sigma'' = \sigma_m \left[1 + \frac{3\phi\delta\sigma}{3\sigma_m + (1-\phi)\delta\sigma} \right]$$

$$\sigma' = \sigma_w \left[1 - \frac{3(1-\phi)\delta\sigma}{3\sigma_w + \phi\delta\sigma} \right]$$

ahol:

$$\delta\sigma = \sigma_w - \sigma_m$$

A közetek fajlagos vezetőképessége szempontjából kiemelkedő jelentősége van a labormérésekből származtatott effektív értékre vonatkozó összefüggésnek az un. Archie-formuláknak, mely izotróp porozitású közetre ad gyakorlatban is jól használható egyenletet (Archie 1942). Ezek tulajdonképpen magmintákon elvégzett mérésekből származó regressziós formulák. Használhatóságukat az adja, hogy a közet belső geometria kevés paraméterrel (exponensek) képződik le és ezek változási tartománya viszonylag szűk és közettípusonként meghatározható.

Az első Archie-formula a σ_w vezetőképességű vízzel telített közetekre vonatkozik:

$$\sigma_{eff} = \frac{1}{F} \sigma_w \quad (6.33.)$$

ahol az F un. formációfaktor porozitás függésére a mérésekből a következő adódott:

$$F = a\phi^{-m} \quad (6.34.)$$

A formula kulcsparamétere az m un. cementációs kitevő. Ha értelmezni próbáljuk a paraméterek jelentését, összevethetjük a legegyszerűbb (végtelen kontraszthoz kapcsolódó) modellel a kapilláris csököteg modellel (5.4. ábra). Erre alkalmazva a 6.34. formulát, azt kapjuk, hogy az a paraméter a tortuozitással analóg és a cementációs kitevő pedig egy. Ebből arra következtethetünk, hogy a cementációs kitevő valamilyen módon az ionáramlás bonyolultságához, „dimenziószámához” köthető. A két paraméter gyakrabban használatos értékei:

m	a	alkalmazás
2	1	alapértékek, nem repedezett karbonátok
2.15	0.62	un. Humble-formula homokkövekre (Winsauer 1952)
2	0.85	kevésbé konszolidált közetek (Tixier 1979)

m	a	alkalmazás
1.87+0.019/φ	1	kis porozitású karbonátok un. Shell-formula

A magméréseken kívül a cementációs tényező értékét, ellenállás és porozitás mérések kétszer logaritmikus grafikonján (Picket-plot) is ellenőrzik.

Néhol használják az Archie-formula perkolációs modellek eredményeivel konform formáját is.

$$F = (\phi - \phi_0)^{-m} \quad (6.35.)$$

Ahol a képletben megjelenik az átvezetéshez kapcsolódó ϕ_0 küszöbporozitás.

Archie kiterjesztette vizsgálatait szénhidrogén tartalmú kőzetekre is. A vízsaturáció értékét a tisztán vízzel telített kőzet (R_0) és a szénhidrogénnel is szaturált kőzet fajlagos ellenállás (R_t) értékeiből tudta kifejezni.

$$S_w = \left[\frac{R_0}{R_t} \right]^{1/n} = \left[\frac{\sigma_t}{\sigma_0} \right]^{1/n} \quad (6.36.)$$

Ez a 2. Archie-formula, mely alapvető összefüggés a szénhidrogén telítettség meghatározására és az olajiparban ma használatos összetettebb kőzetek modellezésénél is a kiinduló pontot jelentette. A formulában szereplő n az un. szaturációs exponens. Ennek értéke is 2 körüli. Ha az olajcseppek eloszlása és felszíne hasonló lenne a kőzetszemcsék eloszlásához, akkor a két exponens megegyezne. A szaturációs exponens értéke akkor tér el jelentősen kettőtől, ha a kőzet vízre nem nedvesedő. Helyettesítsük a formulába a 6.34-t ekkor a víztelítettséget a formáció víz értékével, a porozitással és a mért fajlagos ellenállással tudjuk kifejezni:

$$S_w = \sqrt[n]{\frac{aR_w}{\phi^m R_t}} \quad (6.37.)$$

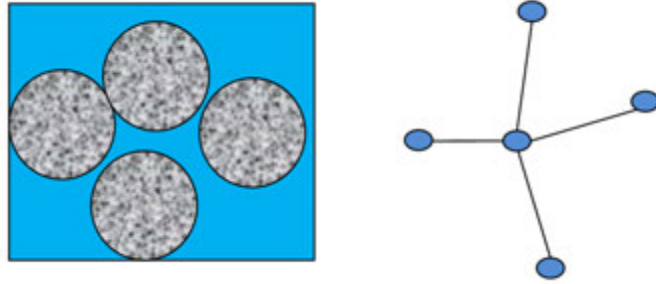
Az inhomogén közegek homogenizációjával kapcsolatos modellezések eredményei is felhasználhatók. Ahogy a 2. fejezetben láthattuk a gömbökből felépített Maxwell modellre kapott eredmények főként nagyobb porozítások esetén alkalmazhatók. A Maxwell-modellből származtatott formáció faktor:

$$F_{Maxwell} = \frac{3 - \phi}{2\phi} \quad (6.38.)$$

Látható, hogy a modell elhanyagolásai miatt ez felső becslés, éppen megegyezik a Hashin-Shtrikman határral. Megjelent a gyakorlatban az önkonzisztens modell és ennek differenciális formája (pl. Bruggeman és Landauer), melyek kisebb porozításoknál is jobb közelítést adnak.

6.5. Ellenállás-hálózat modell

A fajlagos ellenállás modellezésénél, éppen a nagy kontrasztok miatt jelentős szerepet kaptak a véletlen hálózatok is. Ezekben a modellekben a nagyobb pórustereket csomópontként az összekötő szűkebb pórustorkokat átkötéseként modellezzük.



6.3. ábra. Ekvivalens hálózat, ekvivalens koordinációs számmal

Az ellenállás hálózattal diszkrétizáljuk a modellezni kívánt közet, a hálózatot jellemzi az átkötések fajlagos ellenállás eloszlása, illetve a csomópontokhoz tartozó koordinációs szám.

A hálózat tetszőleges helyén érvényes az Ohm-törvény és az áramsűrűség divergenciájára vonatkozó egyenletek. Legyen a hálózat koordinációs száma z (egy csomópontba befutó ágak száma). Az átkötések csövekként értelmezhető, pl. egy vizes átkötés vezetőképesége:

$$\sigma = \sigma_w \frac{\pi R^2}{L} \quad (6.39.)$$

Az i -edik csomópont potenciálja $V_i = V(r_i)$. Ha a háló átkötései azonos hosszúságúak és az i -edik csomópontban nincs áramforrás, ekkor a divergencia mentesség alapján:

$$\sum_j \sigma_{ij} (V_i - V_j) = 0 \quad (6.40.)$$

Legyen ez egy végtelen véletlen ellenállás hálózat. (A levezetésnél Guéguen Y., Pakiauskas V. 1994 gondolatmenetét követjük.) Az ekvivalens értéket (σ_{ekv}) úgy definiáljuk, hogy ugyanilyen geometria mellett, milyen σ_{ekw} izotróp hálózattal helyettesíthető az eredeti hálózat, úgy hogy a vizsgált helyen nem változik a potenciál.

Másként megfogalmazva, ha az ekvivalens hálózat egy elemét kicseréljük a valódi hálózat egy elemére ez A és B pont között δV potenciálváltozást okoz és ha ezt átlagoljuk, valamennyi lehetséges hálózati átkötés véletlen cseréjére, akkor zérus értéket kapunk.

Legyen A és B szomszédos rácspont, ekkor közöttük folyó áram:

$$i = \sigma_m \Delta V_m \quad (6.41.)$$

Ahol ΔV_m két szomszédos pont közötti mért potenciálkülönbség. Ha az átkötést kicseréljük σ_m helyett σ_0 -ra, akkor ez feszültség perturbációt okoz (δV). Ez úgy is tekinthető mintha fiktív áramot $-\delta i$ – vezettünk volna be A és B között, melynek értékét a nem perturbált potenciálkülönbséggel is ki tudjuk fejezni.

$$\delta i = (\sigma_m - \sigma_0) \Delta V_m \quad (6.42.)$$

A perturbáció kétféle megközelítése közötti kapcsolat:

$$\delta V = \frac{\delta i}{\sigma_0 + \Sigma'} \quad (6.43.)$$

Ahol Σ' ekvivalens vezetés nem más, mint a háló vezetése σ_0 nélkül a mérési pontok között és Σ legyen a teljes ekvivalens háló vezetése, azaz:

$$\Sigma' = \Sigma - \sigma_m \quad (6.44.)$$

Így a perturbált feszültség így is írható:

$$\delta V = \frac{\delta \tilde{V}}{\sigma_0 + \Sigma - \sigma_m} = \frac{\sigma_m - \sigma_0}{\sigma_0 - \sigma_m + \Sigma} V_m \quad (6.45.)$$

A fenti kifejezés kiértékeléséhez a következőkben Σ -t határozzuk meg a következő megfontolásokból. Állítsuk elő az A-nál bevezetett és B-nél kilépő áramteret két áramtér szuperpozíciójaként.

- Vezessünk be a hálózatba i_0 áramot A-nál és végtelen távolban minden irányban egyenletesen vezessük el.
- Vezessünk i_0 áramot a hálózatba végtelen távol B-től egyenletes irányeloszlásban és vezessük ki B-nél.

Szuperponáljuk a két eset árameloszlását. Mivel A-ból egyenletesen kerül minden ágba áram és B-be egyenletesen érkezik minden ágból, a szuperpozíciót követően:

$$\Delta V_{AB} = \frac{2i_0}{z} \frac{1}{\sigma_m} = \frac{i_0}{\Sigma} \quad (6.46.)$$

Ebből következik, hogy A és B között végtelen hálózat eredő vezetőképessége:

$$\Sigma = \frac{z}{2} \sigma_m \quad (6.47.)$$

Ezt visszairva a perturbált feszültség kifejezésbe:

$$\delta V = \frac{\sigma_m - \sigma_0}{\sigma_0 + \left(\frac{z}{2} - 1\right) \sigma_m} V_m \quad (6.48.)$$

A fenti kifejezést – mint Green-függvényt – alkalmazhatjuk az ekvivalens vezetőképesség meghatározására. Most érvényesítsük a perturbált feszültség átlagára vonatkozó előírást:

$$\langle \delta V \rangle = 0 \quad (6.49.)$$

A feltételt σ_{ekv} alkalmas megválasztásával teljesíthetjük. Azaz:

$$\left\langle \frac{\sigma_{ekv} - \sigma}{\sigma + \left(\frac{z}{2} - 1\right) \sigma_{ekv}} \right\rangle = 0 \quad (6.50.)$$

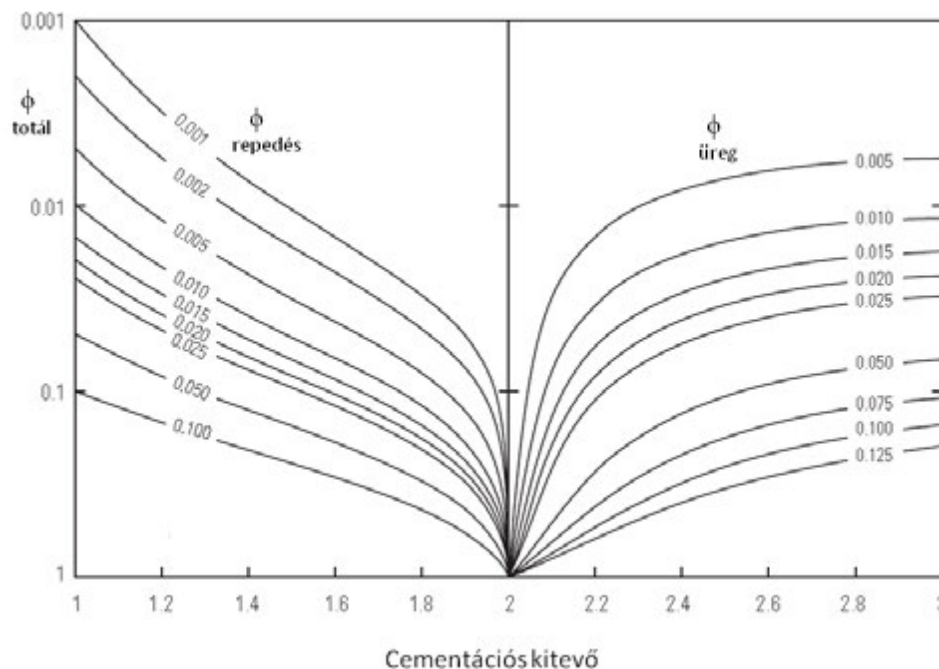
Az önkonzisztens megoldáshoz hasonló effektív érték adódik. Egyezést abban az esetben kapunk, ha koordinációs szám (z) hatos.

6.6. Másodlagos porozitású összetett pórusrendszerek

A közeteken belül kialakuló pórusrendszer geometriája meghatározó a közet vezetőképessége szempontjából. A gyakorlatban használt Archie-formulák izotróp szerkezetű szemcseközi pórustérre adják a legjobb közelítést. A másodlagos porozitás megjelenése megváltoztatja a pórus geometriát. A repedések megjelenése leegyszerűsíti az

iontranszportot, bizonyos esetekben irányokat is kitüntet. Az oldási üregek jelenléte viszont bonyolíthatja a vezetési útvonalakat és megnövelheti a pórustérnek azon részét, amely nem vesz érdemben részt a vezetésben.

Ezeket a hatásokat a cementációs kitevő megfelelő megválasztásával lehet közelítőleg figyelembe venni, amennyiben rendelkezésre áll a másodlagos porozitás és teljes porozitás aránya. A repedések egyszerűsítve a pórusgeometriát csökkentik, míg az oldási üregek növelik a cementációs kitevő értékét (Aguilera 2003)

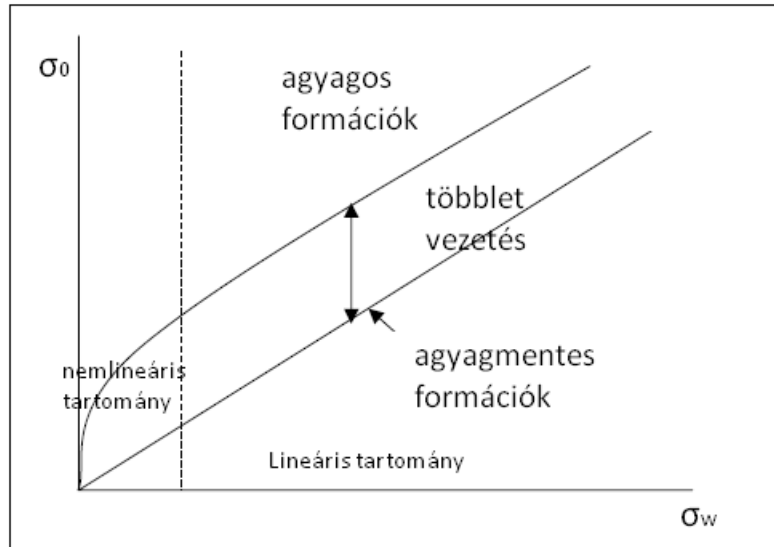


6.4. ábra. Összetett pórusrendszerek modellezése a cementációs kitevő változtatásával (Aguilera 2003)

6.7. Agyagos tároló kőzetek modellezése

Az agyagásványok a tároló kőzetekben különböző formában (diszperz, lamináris, szerkezeti vagy vegyes) vannak jelen. Nagy fajlagos felületükhöz kapcsolódó kötött víz révén jelentős saját vezetőképességgel rendelkeznek. A kötött víz képviselte vezetési útvonalat is figyelembe kell venni az ilyen típusú kőzetek kőzetfizikai modellezésénél. Az agyaghoz kapcsolódó vezetés például elfedheti a szénhidrogén cseppeknek köszönhető ellenállás növekedést és figyelmen kívül hagyása a szénhidrogénkészletek alulbecslését eredményezheti.

Az agyagtartalomhoz kapcsolódó többlet vezetőképesség az agyag felületi negatív töltésének köszönhetően kialakuló többlet kation tartalmú elektromos kettősréteghez kötődik. Az effektus összefügg az agyag típusával és fajlagos felületével. Ebben a közelítésben az agyag hatása a rétegvíz ionkoncentrációjától is függ, hiszen ennek szerepe van a kettős réteg ionkoncentrációjának kialakulásában. Ez bizonyos tartományban nemlineáris hatásként jelentkezik (6.5. ábra).



6.5. ábra. Agyagtartalom által okozott többlet vezetés

Az agyagos homokkőre vonatkozó fajlagos ellenállás modellek hátterében is gyakran az Archie-formula módosított változata áll. Az agyag térbeli eloszlását figyelembe véve, párhuzamos vezetési útként kapcsoljuk az Archie-típusú elektromos modellhez. A modell építésben gyakran szerepet kapnak tapasztalati, kísérleti elemek is.

Az agyagos homokkő modellek formailag 4 kategóriába sorolhatók:

1. Típus
$$\sigma_t = A \cdot S_w^n + B \quad (6.51.)$$

Ilyen például a **lamináris agyag** modell, melyben a permeabilis rétegben levő agyagcsíkok vezetése – térfogati arányuknak megfelelően – párhuzamosan kapcsolódik az Archie-formulával leírható tároló rétegekkel:

$$\sigma_t = \frac{(1 - V_{sh}) \sigma_w}{F} S_w^2 + V_{sh} \sigma_{sh} \quad (6.52.)$$

Alakját tekintve hasonló az összetett agyagtípusok esetén használható ún. **Simandoux-formula**, amely inkább nagyobb sótartalmú agyagos formációk esetén alkalmazható sikerrel.

$$\sigma_t = \frac{\sigma_w}{F} S_w^2 + V_{sh} \sigma_{sh} \quad (6.53.a)$$

Eredetileg az akusztikus mérésekre alapozott formáció faktort használták. Tényleges fizikai modell nincs mögötte, az eredeti formához később képest módosították és a formula 2. típusba sorolódott át.

$$\sigma_t = \frac{\sigma_w}{F} S_w^2 + V_{sh} \sigma_{sh} S_w \quad (6.53.b)$$

2. Típus
$$\sigma_t = A \cdot S_w^n + B \cdot S_w \quad (6.54.)$$

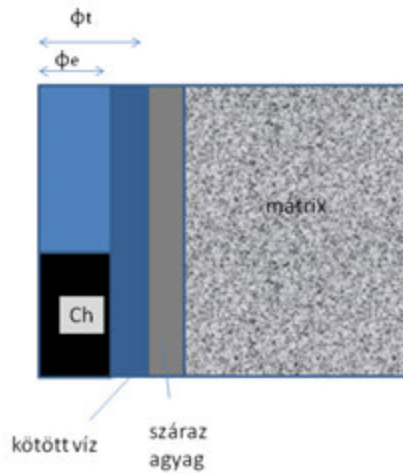
Ebbe a körbe sorolható a **Waxman-Smits** modell, mely laborban mérhető mennyiségre az ún. kationcsere-kapacitásra (CEC) alapozott agyagos modell. Az agyag többletvezetése két tényező által meghatározott: egyrészt a térfogategységre vonatkozó kationcsere-kapacitás (Q) mely az agyagtartalom felületén megkötött vízzel arányos illetve a többlet kationtartalmú szemcsékhez tapadó vízfilm vezetőképességével (B).

$$\sigma_t = \frac{\sigma_w}{F_t} S_{wt}^2 + \frac{BQ}{F_t} S_{wt} \quad (6.55.)$$

A fenti mennyiségek geofizikai mérésekből nem határozhatók meg. Gyakorlatban is használható formulát származtattak (**Dual-water** modell), ahol az Archie-formula felhasználásával becsülték az agyaghoz kapcsolódó kötött víz vezetőképességét. A modell jellegzetessége, hogy az un. teljes porozitáshoz sorolja az agyag kötött vizét különválasztva az agyag szárazanyagtartalmát.

Juhász (Dual-water)

$$\sigma_t = \frac{\sigma_w}{F} S_{wt}^2 + \left(\frac{\sigma_{sh}}{F_{sh}} - \sigma_w \right) \frac{V_{sh} \phi_{sh} S_{wt}}{\phi} \quad (6.56.)$$



6.6. ábra. Dual-water modell felépítése

A formulákban megjelenő S_{wt} az un. teljes víztelítettség, amely a teljes, agyag kötött vizét is magába foglaló pórustérre vonatkozik.

3.Típus

$$\sigma_t = AS_w^n + BS_w' + C \quad (6.57.)$$

Ebben a csoportban kevesebb gyakorlatban is elterjedten használatos formula található. Általában vegyes agyagtípusok esetére vonatkoznak. Példaként Doll formuláját említjük.

$$\sigma_t = \frac{\sigma_w}{F} S_w^2 + 2V_{sh} \sqrt{\frac{\sigma_w \sigma_{sh}}{F}} + V_{sh}^2 \sigma_{sh} \quad (6.58.)$$

Ide tartozik például a pórustérben eloszló agyagtartalom hatását leíró, un. **diszperz agyag** modell. A modellnél az agyag vezetése párhuzamosan kapcsolódik a pórusvíz vezetésével, keverék elektrolitot képezve a Kohlrausch szabály alapján:

$$\sigma_{we} = \frac{\phi \sigma_w + V_{sh} \sigma_{sh}}{\phi + V_{sh}} \quad (6.59a)$$

és ezt az Archie-formulába helyettesítve:

$$\sigma_t = \frac{\sigma_w}{F_z} S_{wz}^2 \quad (6.59b)$$

Ahol F_z az agyagot is magába foglaló szemcseközi térre vonatkozó formáció faktor és S_{wz}

az erre vonatkozó víztelítettség, amely az effektív pórustérre vonatkoztatott víztelítettséggel az alábbi kapcsolatban van:

$$S_w = \frac{S_{wz} - V_{sh}}{1 - V_{sh}} \quad (6.59c.)$$

4.Típus

$$\sigma_t = AS_w^n + BS_w^T + CS_w^S \quad (6.60.)$$

Ebből a csoportból a legismertebb és legszélesebb körben alkalmazott formula az ún. Indonesia-formula (Poupon and Leveaux).

$$\sigma_t = \frac{\sigma_w}{F} S_w^2 + 2 \sqrt{\frac{\sigma_w \sigma_{sh} V_{sh}^{2-V_{sh}}}{F}} S_w^2 + V_{sh}^{2-V_{sh}} \sigma_{sh} S_w^2 \quad (6.61.)$$

A formula csökkent sósvízi formációk esetén is használható. Pl. magyar pannon-tárolók esetében is sikerrel alkalmazható. Jó közelítést biztosít a 6.5. ábrán jelzett nemlineáris tartományban is.

7. fejezet - A közetek dielektromos tulajdonságai

Nagyfrekvenciás elektromágneses hullámok közetekben való terjedésénél fontos szerepet játszik a dielektromos állandó (ϵ_r) vagy más néven a közet relatív permittivitása. A dielektromos tulajdonságok a közet elektromos polarizálhatóságával kapcsolatosak és frekvencia függő tulajdonság. Az elektromos tér hatására töltés elmozdulások történnek, így megszűnik a lokális elektromos semlegesség (eltolási áram). Az elektromos tér által d távolságra elmozdított $\pm q$ töltések elektromos dipólt (qd) hoznak létre, a kialakuló dipólmomentumok (**P**: polarizáció – egységnyi térfogatban kialakuló dipólmomentum) a polarizáció mértékét jellemzik. A polarizáció által torzított anyagi teret az elektromos eltolás (**D**) vektorral jellemezzük:

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \epsilon \mathbf{E} = \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E} \quad (7.1.)$$

A fenti összefüggésben szereplő ϵ_0 a vákuum permittivitás ($8.845 \cdot 10^{-12}$ F/m). A polarizációs jelenség a kényszerrezgéssel analóg. A frekvenciafüggés a polarizációval létrehozott tértöltés relaxációs idejétől függ. Az elektromos polarizáció minden halmazállapotú anyagban kialakulhat. Megjegyezzük, hogy a relatív permittivitás bevezetése is átlagtér közelítéshez kapcsolódik.

Forrásai: az alacsonyabb frekvenciákon jellemző **ionos polarizáció**, mely ionok relatív elmozdítása révén alakít ki elektromos polarizációt, rövidebb karakterisztikus idővel jellemezhető, ha dipól (vagy indukált dipól) **molekulák orientációjának** eredményeként alakul ki makroszkopikus polarizáltság. Az atomi elektronhéjhoz kötődő polarizáció karakterisztikus ideje még rövidebb (látható fény frekvenciája).

A polarizációt további effektusok is erősíthetik, pl. hosszabb relaxációs idejű ion mozgások esetén az ún. Maxwell-Wagner effektus, mely szerint a porózus közegben szemcsefalak blokkolják az iontranszportot, a pórusrészek így kis dipólként viselkednek. Ez az effektus a relaxációs időkre is visszahat.

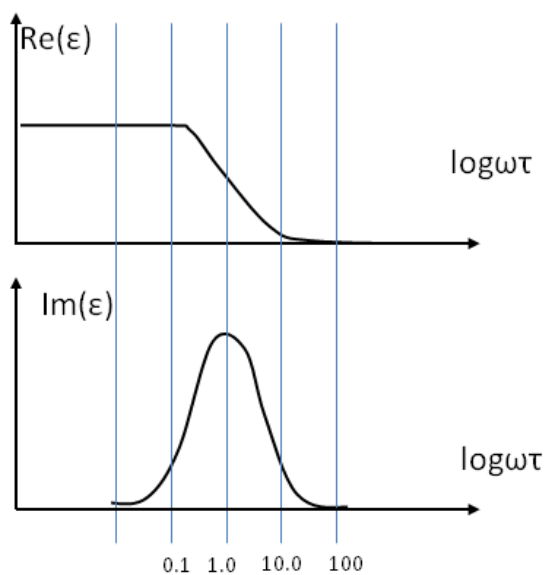
Adott relaxációs idővel jellemezhető polarizációs effektust az ún. Debye-moddal vizsgálhatjuk (kényszerrezgést végző harmonikus oszcillátor modell).

A polarizációt létrehozó adott frekvenciájú változó elektromos térhez képest a polarizáció és így az eltolási áram is késik (kényszerrezgés). A fáziskésést komplex permittivitás bevezetésével is leírhatjuk.

$$\epsilon(\omega) = \epsilon_{\text{Re}}(\omega) - i\epsilon_{\text{Im}}(\omega) \quad (7.2.)$$

Ennek segítségével felírhatjuk egy (τ) relaxációs idővel jellemezhető polarizációs mechanizmus esetére a permittivitás frekvenciafüggését.

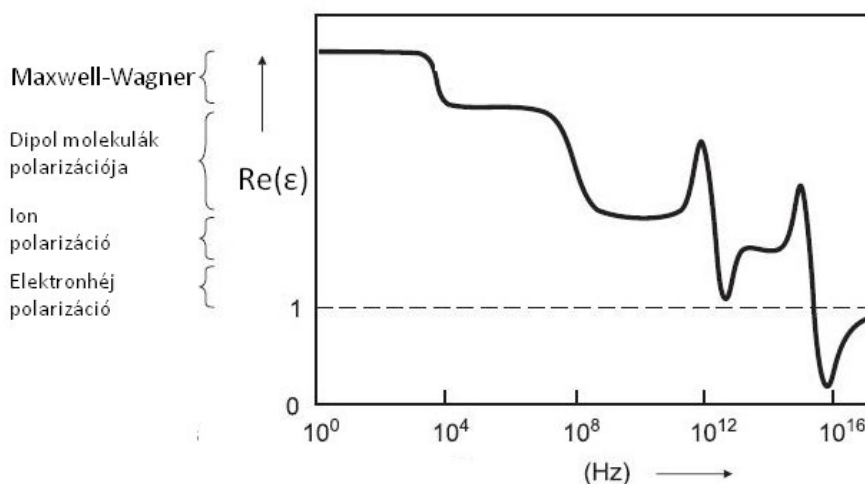
$$\epsilon(\omega) = \epsilon_{\infty} + \frac{\epsilon_0 - \epsilon_{\infty}}{1 + i\omega\tau} \quad (7.3.)$$



7.1. ábra. Egy relaxációs idővel jellemzett Debye-moddal számított dielektromos állandó frekvenciamenete.

Az imaginárius rész maximuma (rezonancia) a polarizációs mechanizmus sajátfrekvenciájánál lép fel, itt a legnagyobb az energiadisszipáció.

Többféle polarizációs mechanizmus esetén a frekvenciamenet közelítőleg a Debye-moddal leírható – különböző relaxációs időhöz tartozó karakterisztikák szuperpozíciójaként kapható meg.



7.2. ábra. A dielektromos állandó jellegzetes frekvenciamenete, mely tükrözi a különböző polarizációs effektusok hatását.

Valós méréseknél a Debye modellhez képest az átmenetnél kiszélesedés látható, melyet az ún. Cole-Cole modell pontosít. Az alábbi táblázatban néhány kőzetalkotó dielektromos állandója látható:

Kőzetalkotó	rádiófrekvencián	optikai frekvencián
Anhidrit	6.5	2.5
Halit	6	2.4
Kvarc	5	2.36
Kalcit	6.35	2.3

Kőzetalkotó	rádiófrekvencián	optikai frekvencián
Dolomit	7.5	2.2
Földpát	7	2.5
Víz	85	2.2

A víz molekulájának nagy dipólmomentuma miatt jól polarizálható. Ebből származik a kiugróan magas dielektromos állandó érték, mely a nagyfrekvenciás geofizikai kutatásban jól felhasználható (Földradar, EPT-log stb.). Frekvenciafüggése a Debye-moddal viszonylag jól leírható (kb. 10^{10} Hz maximális abszorpcióhoz tartozó frekvenciával). A víz dielektromos állandója természetesen hőmérséklet- és sótartalomfüggést is mutat.

A hőmérséklet növekedésével - a hőmozgás dezorientációs hatásának köszönhetően - a dielektromos állandó csökken. (pl. $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ -nál 75, míg $100\text{ }^{\circ}\text{C}$ -nál 55 és a csökkenés lineáris). A só koncentráció növekedése szintén csökkenti a dielektromos állandót, a Na^+ és Cl^- ionoknak köszönhető csökkenő polarizálhatóság miatt.

Megjegyezzük, hogy a jég esetében a hőmérséklet csökkenése általában a dielektromos állandó csökkenését vonja maga után a kristályszerkezet hatásaként.

A nagyfrekvenciás teret – elektromágneses hullámok terjedését – felhasználó geofizikai módszerek, a hullámterjedés paraméterei (terjedési sebesség, amplitúdó csökkenés stb.) segítségével következtethetnek a dielektromos állandó effektív értékére. A változó elektromos tér esetén a teljes áramsűrűség:

$$\mathbf{J}_T = \sigma \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \sigma \mathbf{E} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (7.4.)$$

Az eltolási áram döntően a polarizáció eredménye. Harmonikus térérő változásnál ez komplex permittivitásként értelmezhető, mely a térerősséghez képest a fáziseltolódást is tartalmazza:

$$\mathbf{J}_T = (\sigma + i\omega\varepsilon)\mathbf{E} = \sigma_T \mathbf{E} = \varepsilon_T \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (7.5.)$$

A probléma komplex vezetőképességgént is kezelhető. A kettő közötti összefüggés:

$$\sigma_T = i\omega\varepsilon_T \quad (7.6.)$$

Az imaginárius rész az energia-disszipációval kapcsolatos. A Maxwell-egyenletekből az elektromágneses hullámok terjedésére az alábbi egyenlet adódik (telegráf egyenlet):

$$\Delta \mathbf{E} = \sigma\mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \varepsilon\mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad (7.7.)$$

Harmonikus térváltozók esetén a Helmholtz egyenlet kapjuk. A komplex hullámszámra (k)

akkor a következő írható fel:

$$k^2 = i\sigma\mu_0\omega + \omega^2\mu\varepsilon = \omega^2\mu\left(\varepsilon + i\frac{\sigma}{\omega}\right) \quad (7.8.)$$

Ahol k a komplex hullámszám (több dimenziós problémánál hullámvektor). A közetek dielektromos tulajdonságait 7.7. egyenlet megoldásaiként felírható harmonikus elektromágneses jelek terjedésének vizsgálatával mérhetjük, az amplitúdó csökkenés és fázis eltolódás vagy a terjedési sebesség méréseivel. A mérhető jel jellemzők és a dielektromos állandó kapcsolatát kell feltárni. Ehhez bontsuk fel a hullámszámot valós és képzetes részre.

$$k = \alpha - i\beta \Rightarrow E_y = E_0 e^{-\beta x} e^{i(\omega t - \alpha x)} \quad (7.9.)$$

Az amplitúdó csökkenés és a fázis eltolódás két pozíció között (x_1, x_2) felírható a komplex hullámszám reális és imaginárius részével:

$$\frac{A(x_2)}{A(x_1)} = e^{-\beta(x_2-x_1)} \quad (7.10.)$$

$$\Delta\varphi = \alpha(x_2 - x_1)$$

Innen a permittivitás elemeire a következő egyenletek adódnak:

$$\text{Re}(\varepsilon) = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\mu_0 \omega^2} \quad (7.11.)$$

$$\text{Im}(\varepsilon) + \frac{\sigma}{\omega} = \frac{2\alpha\beta}{\mu_0 \omega^2}$$

A terjedési sebességet is a dielektromos állandó valós része határozza meg:

$$v = \frac{c}{\sqrt{\text{Re}(\varepsilon)}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0 \text{Re}(\varepsilon)}} \quad (7.12.)$$

7.1. Közetek dielektromos tulajdonságai

Az inhomogén közetek effektív dielektromos tulajdonságait – ahogy más közetfizikai paramétereknél – az effektív térjellemzők segítségével definiáljuk.

$$\langle \mathbf{D} \rangle = \langle \varepsilon \mathbf{E} \rangle = \varepsilon_{\text{ekv}} \langle \mathbf{E} \rangle \quad (7.13.)$$

Az effektív érték is természetesen frekvenciafüggő. A közetalkotó ásványok esetében a GHz frekvencia tartományban 5 körüli dielektromos állandó a jellemző, míg a vízé kb. 80, az olaj 2 és a gáz jellemző értéke 1 körül van.

A inhomogén közetek esetére gyakran alkalmazott összefüggés az „átlagidő egyenlet”. Ennél a modellnél sorba kapcsoljuk a közetalkotókat és az elektromágneses hullám terjedési idejét így határozzuk meg.

$$\frac{1}{c_{\text{ekv}}} = \sum_i V_i \frac{1}{c_i} \quad (7.14.)$$

Innen 7.12. felhasználásával a dielektromos állandóra adódó keverési törvény (un. CRIM egyenlet) kétkomponensű közetre:

$$\sqrt{\varepsilon_{\text{eff}}} = \phi \sqrt{\varepsilon_w} + (1 - \phi) \sqrt{\varepsilon_m} \quad (7.15.)$$

A fenti összefüggés jól használható az 1 GHz körüli frekvenciákon. A gyakorlatban – kisebb frekvenciákon – használatos még az önkonzisztens modell (Bruggeman-egyenlet):

$$\sum_i V_i \frac{\varepsilon_i - \varepsilon_{\text{ekv}}}{\varepsilon_i + 2\varepsilon_{\text{ekv}}} = 0 \quad (7.16.)$$

8. fejezet - A kőzetek mágneses tulajdonságai

Felszíni mágneses kutatás célja remanens vagy indukált mágneses hatók okozta anomáliák azonosítása és ezek interpretációja. A paleomágneses módszer alkalmazásához orientált minta remanens mágnesezettségét tárják fel, hogy a minta keletkezésekor „befagyott” mágneses tér irányát határozza meg és így pl. a keletkezés ideje vagy helye (földrajzi szélesség) meghatározható. A kőzet, mint mágneses memória őrzi meg a keletkezése kori mágneses teret. Megjegyezzük, hogy ferromágneses anyagok esetében spontán mágnesezettség is létezik, azaz zérus külső tér mellett is kialakulhat mágnesezettség.

Külső mágneses tér az anyag atomjainak mágneses momentumával kölcsönhatásban, azok polarizálásával az anyagon belül torzul. Ezt fejezi ki az indukció vektorra vonatkozó anyagi egyenlet.

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H} \quad (8.1)$$

A két mennyiséget a vákuum mágneses permeabilitása (μ_0) és a relatív permeabilitás (μ_r) szorzata köti össze.

Külső tér hatására létrejövő, makroszkopikusan is mérhető mágnesezettség ($\mathbf{M}$) (mágneses momentum sűrűség) alakulhat ki a kőzetekben, amely a belső mágneses teret megváltoztatja. A két mennyiséget a kőzet mágneses szuszceptibilitása (χ) köti össze (átlagtér közelítés).

$$\mathbf{M} = \chi \mathbf{H} \quad (8.2)$$

A mágneses térerősség ($\mathbf{H}$) az anyagban a polarizáció hatásának levonásával kapható meg az indukció vektorból:

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \quad (8.3)$$

(megjegyzés: a mágneses térerősség és mágnesezettség mértékegysége azonos A/m)

Az anyag egyenleteket összevetve:

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) \rightarrow \mu = \mu_0 (1 + \chi) \rightarrow \mu_r = 1 + \chi \quad (8.4)$$

Geofizikai kutatás szempontjából leginkább a szuszceptibilitás közettípus függő változásait lehet felhasználni.

8.1. A mágneses szuszceptibilitás mikro szintű modellje

A mágneses tulajdonságok szempontjából az atomi elektronhéj konfigurációjának van alapvető jelentősége.

Az atomhéj elektronjainak pálya és saját impulzusmomentumuk (spinjük) van. Mivel töltött részecskék, ehhez – mint „köráramhoz” – mágneses momentum is rendelhető. A klasszikus kép szerint, A területű kört (normál vektorával jellemzett) körülfogó I köráram mágneses momentuma:

$$\mathbf{m} = I \mathbf{A} \quad (8.5)$$

Az e töltésű elektron „keringése”, mint áram kifejezhető a keringés frekvenciájával:

$$I = e v = e \frac{\omega}{2\pi} \quad (8.6.)$$

A Bohr sugárral felírhatjuk a pályához tartozó mágneses momentumot (továbbra is klasszikus képpel)

$$m = e \frac{\omega}{2\pi} r^2 \pi \quad (8.7.)$$

Mivel a Plank-állandóval és a megfelelő mellékkvantumszámmal könnyen kifejezhető, tegyük bele a fenti kifejezésbe a pálya impulzusmomentumot ($\mathbf{L}$):

$$|\mathbf{L}| = m_e r^2 \omega \quad (8.8.)$$

Ahonnan a mágneses momentum és az impulzusmomentum közötti kapcsolat:

$$\mathbf{m} = -\frac{e}{2m_e} \mathbf{L} \quad (8.9.)$$

A mágneses momentumot az impulzusmomentummal összekötő mennyiség a giromágneses arány. Az impulzusmomentum a megfelelő mellékkvantum számmal kifejezve:

$$|\mathbf{L}| = \sqrt{l(l+1)}\hbar \quad (8.10.)$$

Ezt beírva a mágneses momentum képletbe az ún Bohr magneton értékkel kifejezett mágneses momentum értéket kapjuk. A Bohr-magneton:

$$\frac{e\hbar}{2m_e} = M_B = 9.7 \cdot 10^{-24} \text{ J/T} \quad M_B = 9.7 \cdot 10^{-24} \text{ J/T} \quad (8.11.)$$

A fenti gondolatmenet alapján mágneses momentum rendelhető az elektron spinhez is. A kétféle impulzus momentum komponens csatolódik, így a mágneses momentum is.

Az előbb számított elektronhoz köthető mágneses momentum kölcsönhatásba lép a külső mágneses térrel, azaz a kvantummechanika szabályainak megfelelően, ahhoz képest diszkrét irányokban állhat be, különböző energiájú állapotba kerülve (energianív felhasadás a mágneses térben, Zeeman-effektus). A diszkrét energia értékek:

$$E_i = -\mathbf{m}_i \mathbf{B} \quad (8.12.)$$

Az adott energiaállapot betöltöttségét az energia értékek eloszlása és a hőmozgás alakítja ki. A különböző irányokba történő beállítás a kétféle ellentétes hatás eredményeképp hőmérséklettől függő Maxwell-Boltzmann eloszlást követ. Azaz N atom esetén az i -edik állapot betöltöttsége (számlálóban az állapot energiája az exponensben, nevezőben az állapotösszeg):

$$\frac{n(E_i)}{N} = \frac{\exp\left(-\frac{E_i}{kT}\right)}{\sum_k \exp\left(-\frac{E_k}{kT}\right)} \quad (8.13.)$$

Ahol k a Boltzmann állandó: $1.38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$. A makroszkópikus mágnesezettség a térfogategységre összegzett momentumok eredőjeként áll elő:

$$\mathbf{M} = \sum_i n_i \mathbf{m}_i \quad (8.14.)$$

Az egyszerűség kedvéért vegyünk kétállapotú rendszert, ahol a momentumok beállása a külső térrel azonos vagy ellentétes lehet.

$$\begin{aligned} E_1 &= \mathbf{mB} \\ E_2 &= -\mathbf{mB} \end{aligned} \quad (8.15.)$$

Az elemi mágneses momentum ekkor tulajdonképpen a Bohr-magneton. Legyen x a M-B eloszlás exponense, ekkor a két állapot betöltöttség arányai:

$$\begin{aligned} \frac{n_1}{N} &= \frac{e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \\ \frac{n_2}{N} &= \frac{e^x}{e^x + e^{-x}} \end{aligned} \quad (8.16.)$$

Ezek összegzésével az eredő, makroszkópikus mágneses momentum:

$$\mathbf{M} = (n_2 - n_1) \mathbf{m} \quad (8.17.)$$

$$\mathbf{M} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} N \mathbf{m} \quad (8.18.)$$

Mivel az exponens tartalmazza a külső teret, megpróbálhatjuk a szuszceptibilitást kiemelni. Ehhez linearizálni kell 8.18.-at, adott hőmérsékletnél és indukció értéknél. Ehhez fejtsük sorba az exponenst és álljunk meg a lineáris közelítésnél, melyet megtehetünk mivel a Föld felszínén a mágneses tér értéke 10^{-4} T értékű és a Bohr magneton 10^{-23} J/T nagyságrendű. Mivel:

$$e^x \approx 1 + x \quad (8.19.)$$

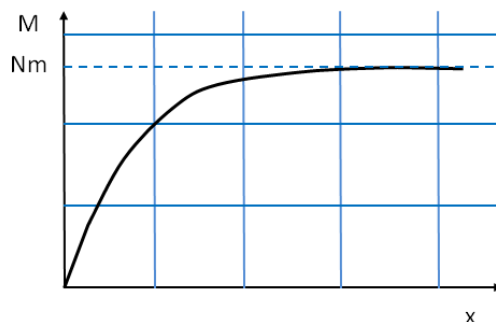
$$\mathbf{M} \approx N \mathbf{m} x = \frac{Nm^2 \mathbf{B}}{kT} \quad (8.20.)$$

Így az ilyen kétállapotú rendszer szuszceptibilitása közelítőleg:

$$\chi = \frac{Nm^2 \mu_0}{kT} \quad (8.21.)$$

Figyelemre méltó, hogy az egyszerű modellel megkaptuk a Curie-törvényt: az abszolút hőmérséklettel fordítva arányos szuszceptibilitást.

Ha az előbb definiált x függvényében ábrázoljuk a mágnesezettséget, telítési görbét kapunk melynek jelentése érthető: a telítési mágnesezettség jelenti az atomi mágneses momentumok egy irányba állását, mely pl. zérus abszolút hőmérsékletnél, illetve végtelen nagy $\mathbf{B}$ értéknél következhet be.

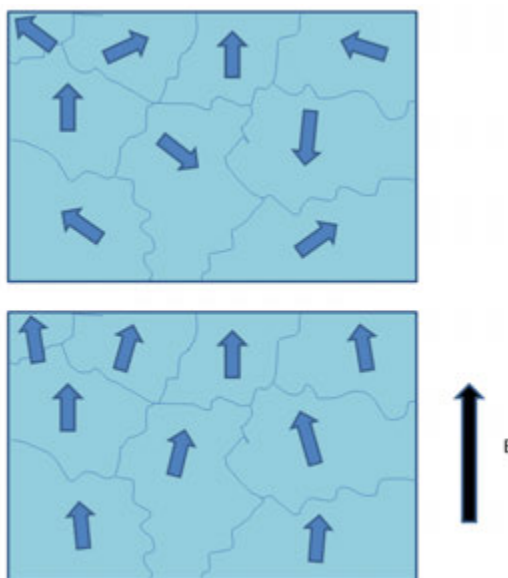


8.1. ábra. A mágnesezettség alakulása az indukció és a hőmérséklet függvényében

A görbe menetét a hőmozgás és a mágneses orientáció alakítja ki. A fenti modell jól magyarázza a paramágneses anyagok kis szuszceptibilitás értékeit is. Legtöbb közetalkotó atom ebbe a kategóriába esik. A paramágneses anyagok atomjaira jellemző, hogy a külső elektronhéjak nincsenek lezárva. A paramágneses anyagok szuszceptibilitása 10^{-6} nagyságrendű, mivel ez egynél jóval kisebb a mágneses permeabilitást érdemben nem változtatja meg (8.4.).

Megemlítjük, hogy teljesen zárt elektronpályák esetén – $L = S = 0$ – is tapasztalható válasz a külső mágneses tér hatására. Klasszikus kép alapján, úgy értelmezhetjük, hogy a tér hatására megváltozik az elektronok keringési frekvenciája (Lenz-tétel). A csökkenő belső mágneses tér korrekció így negatív. Ez a diamágnesség, mely minden esetben fellép, azonban az ebből eredő szuszceptibilitás nagyságrendje 10^{-9} és az előjele negatív. Diamágnesként viselkednek pl. a nemesgáz atomok, de pl. a Na^+ és Cl^- ionok is.

Nagy mágnesezettség értékeket és szuszceptibilitást tapasztalhatunk az ún. ferromágneses anyagoknál. Ezeknél az előbb említett mechanizmuson kívül további mechanizmus is segíti az elemi momentumok mágneses orientációját. Ennek lényege, hogy bizonyos elektron struktúra lehetővé teszi az elektronok állapotfüggvényeinek olyan átfedését, melyben az ún. kicserélődési kölcsönhatás kisebb energia állapot elérését teszi lehetővé azonos saját impulzusmomentum beállásnál. Fontos megjegyezni, hogy ezt a „kollektivitást” nem a mágneses momentumok kölcsönhatása dominálja, hanem az elektrosztatikus kölcsönhatás. A mechanizmus eredményeképp a ferromágneses anyagokban azonos mágnesezettségű domének alakulnak ki, egymástól ún. Bloch-falakkal elválasztva. A külső térrel való kölcsönhatás energiája így domén szinten számolható. A domének elfordításával kerülhet az anyag alacsonyabb energiájú állapotba.



8.2. ábra. Ferromágneses anyagok doménstruktúrája

A jelenség tárgyalásánál ismét felhasználhatjuk az átlagtér elméletet (Weiss), mely szerint az anyagban mérhető belső mágneses tér H_m arányos a mágnesezettséggel:

$$\mathbf{H}_m = \lambda \mathbf{M} \quad (8.22.)$$

Így tulajdonképp egy $\mathbf{M} = f(\mathbf{M})$ típusú rekurzív összefüggést definiáltunk, melynek megoldását kell megkeresni a korábban definiált telítési diagramon (önkonzisztens megközelítés). Az egyik oldalon áll a doménekre felírt eredő mágnesezettség függvény:

$$\mathbf{M} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \frac{N}{n} \mathbf{m} \quad (8.23.)$$

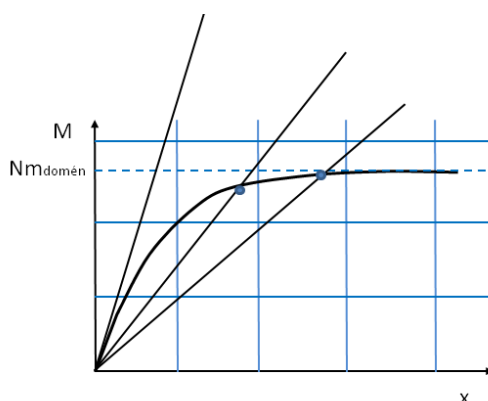
ahol x -t most a domének mágneses momentumával kell felírni. Az atomok száma most is N és tartalmazzon minden domén n atomot. Így a vizsgálandó momentumok száma N/n .

$$x = \frac{Bmn}{kT} = \frac{\mu_0 Hmn}{kT} = \frac{\mu_0 \lambda Mmn}{kT} \quad (8.24.)$$

A 8.24. egyenlet alapján a makroszkópikus mágnesezettség kifejezhető közvetlenül x értékével:

$$M = \frac{kT}{\lambda \mu_0 nm} x \quad (8.25.)$$

Amely hőmérséklettől függő meredekségű egyenest definiál (8.3. ábra). M adott hőmérséklethez tartozó lehetséges értékeit 8.23. és 8.25. függvények metszéspontjánál találjuk. Látható, hogy létezik egy küszöb érték az egyenesek meredekségére, amely felett már nincs megoldás.



8.3. ábra. Mágnesezettség grafikus meghatározása az átlagtér-elmélet alapján

Az ehhez tartozó hőmérsékletet értelmezhetjük Curie-hőmérsékletként, ugyanis e felett nincs metszéspont a két görbe között így megoldás csak a zérus mágnesezettség lehet. A domének átorientálása energia befektetést igényel (potenciálgát), ennek köszönhető a hiszterézis, mely az átmágnesezési folyamatot jellemzi, illetve oka a remanens mágnesezettség lehetőségének. Nézzük miként alakul a ferromágneses anyagok szuszceptibilitása a modell szerint. Feltételeztük, hogy egy átlagos domén n atomból áll, így N atom esetén a domén szám: N/n .

Ez alapján a ferromágneses anyagok szuszceptibilitása:

$$\chi_f = \frac{N}{n} (nm)^2 \frac{\mu_0}{kT} \quad (8.26.)$$

Összevetve a paramágneses szuszceptibilitás becsült értékével. látható, hogy itt n -szeres értéket kapunk. Nagyságrendileg 10000 atomból álló domének esetén visszkapjuk a ferromágneses és paramágneses anyagok közötti szuszceptibilitás arányt. A ferromágneses viselkedés nem teljesen betöltött 3d pályákkal rendelkező átmeneti

fémeknél a leggyakoribb. A kicserélődési kölcsönhatás következményeként más típusú kollektivitás (domén szintű rendeződés) is felléphet (antiferromágneses vagy ferrimágneses viselkedés).

A remanens mágnesezettség kialakulásáért a kőzetekben elsősorban a vas felelős (magnetit tartalom).

A kőzetek mágnesezettségének lehet egy indukált ($\mathbf{M}_i$) – aktuális külső tértől függő – és remanens mágneszettsége ($\mathbf{M}_r$). Ezek arányát az ún. Koenigsberger viszonysszámmal fejezzük ki.

$$Q = \frac{|\mathbf{M}_r|}{|\mathbf{M}_i|} \quad (8.27.)$$

A remanens mágnesezettség orientációja a keletkezéskor mágneses tér irányára enged következtetni. A kőzetek szuszceptibilitása első közelítésben a magnetit koncentráció (c_m) függvénye

$$\chi = c_m \chi_m \quad (8.28.)$$

ahol χ_m a magnetit szuszceptibilitása, mely 1-hez közeli érték 3-4 nagyságrenddel nagyobb, mint a többi kőzetalkotóé.

Remanens mágnesezettség több ok miatt is kialakulhat. Ezek a termoremanens mágnesezettség (TRM), mely a Curie-hőmérséklet alatt jelenik meg vulkanitokban, ún. viszkózus remanens mágnesezettség (VRM), mely konstans külső tér melletti lassú átrendeződésből származik, kémiai remanens mágneszettség (CRM), mely a ferromágneses kristályok növekedésével kapcsolatos és az ún. üledékes remanens mágnesezettség (DRM), mely az üledékszemcsék ülepedéskori mágneses orientációjával kapcsolatos. Fokozatos lemágnesezés esetén az egyes komponensek eltávolíthatók.

9. fejezet - Nukleáris mérésekkel kapcsolatos közetfizikai jellemzők

Ebben a fejezetben a nukleáris mérések közetfizikai vonatkozásaival foglalkozunk. A nukleáris mérések elsősorban a nagyobb áthatolóképeségű gammafoton és neutron transzportra alapozódnak. Közefizikai szempontból a transzportot meghatározó kölcsönhatásokat, azok fizikai hátterét tekintjük át.

Megjegyezzük, hogy más részecskék is szerephez juthatnak pl. a Föld mélyszerkezetének kutatásában pl. a neutrínók.

9.1. Kőzetek természetes aktivitása

A kőzetek természetes gammaforrásként is viselkednek, mivel a különböző ásványokhoz kapcsolódva találhatók olyan radioaktív izotópok, melyek felezési ideje elég hosszú a Föld anyagának korához viszonyítva. Részarányuk ma is eléri, vagy meghaladja a néhány ppm-t és ennek köszönhetően mérhetőek a bomlás során kibocsátott gamma-fotonok.

A radioaktivitás az atommag instabilitásával kapcsolatos. Az instabil radioaktív izotóp összetételétől függően alfa- vagy bétabomlással kerülhetnek alacsonyabb energiájú állapotba. A bomlásokat követően az atommag gyakran gerjesztett állapotban marad, a gerjesztési energiát gamma fotonok formájában sugározza ki. Az alfa és béta részecskék a kőzetekben rendkívül kis távolságon abszorbeálódnak, a gamma fotonok „hatótávolsága” lényegesen nagyobb: energiától függően, néhány deciméter.

A radioaktív bomlás véletlen folyamat, mely az alábbi differenciálegyenlettel írható le:

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N \quad (9.1.)$$

A bomlási sebesség arányos a még elbomlásra képes atommagok számával (N). Az arányossági tényező az ún. bomlási állandó (λ), mely a felezési idővel ($T_{1/2}$) is kifejezhető:

$$\lambda = \frac{\ln(2)}{T_{1/2}} \quad (9.2.)$$

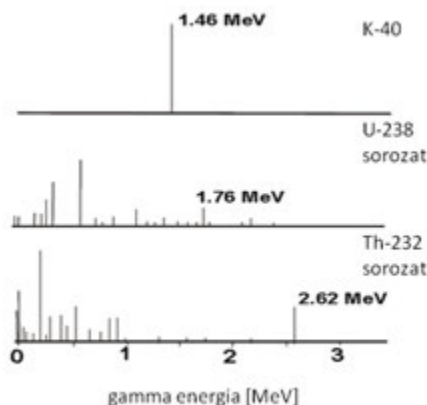
A differenciálegyenlet jobb oldalán levő λN szorzat az **aktivitás**, mely az időegységre eső bomlások számával egyenlő. Fajlagos értéke (fajlagos aktivitás) a térfogategységre vonatkoztatott bomlások számát adja meg. Az időegységre eső gammafoton kibocsátás is ezzel arányos. A bomlás során a bomló izotóp koncentrációja az idővel exponenciálisan csökken. Legfontosabb hosszú felezésű izotópok, melyek a kőzetek gamma-aktivitását adják:

Izotóp, izotóp család	bomlás típusa	felezési idő	Jellemző gamma energia
K-40	elektron befogás és béta	1.3 milliárd év	1.46 MeV
U-238 és bomlási sora	alfa és béta bomlások	4.5 milliárd év	1.76 MeV
Th-232 és bomlási sor	alfa és béta bomlások	14 milliárd év	2.62 MeV

Az U-238 és a Th-232 több radioaktív izotópot tartalmazó bomlási sor végén jut el a stabil állapotig. A gammasugárzáshoz így a bomlási sor több tagja is hozzájárul, melyek aktivitás tekintetében közelítőleg ún. szekuláris egyensúlyban vannak, amely azt jelenti, hogy az anya és leányelemek aktivitása megegyezik.

$$\lambda_i N_i \approx \lambda_{i+1} N_{i+1} \quad (9.3.)$$

A bomlás során felszabaduló energia végső soron hőenergiává alakul, így az említett izotópoknak jelentős a szerepe a Föld hőtörténetében is.



9.1. ábra. Természetes radioaktív izotópok gammaspektruma

Spektrális (energia szelektív) gammamérésekkel a kőzetek K, U és Th tartalma, koncentrációja meghatározható. A természetes gamma háttér nagy részét adó említett izotópok eloszlása a kőzetekben nem egyenletes. Így a természetes gammasugárzás jórészt litológia függő.

A **K-40** a természetes káliummal együtt fordul elő. Részaránya a K izotópok között 0.0117 %. Általában földpátokhoz, csillámokhoz, agyagásványokhoz kötődik, de jelentős a mennyisége K tartalmú evaporitoknál, illetve savanyú vulkanitoknál is.

A **Th-232 (és bomlási sorának izotópjai)** is meghatározott ásványokkal együtt fordulnak elő, törmelékes üledékekben gyakran agyagásványokhoz kötődve, nagyobb koncentrációban néhány nehéz ásványokkal együtt (monacit) torlatokban.

Az **U-238** kevésbé kötődik ásványokhoz, jellemző hogy oxidatív környezetben oldódni képes sókat alkot, míg redukív környezetben kiválik. Magas szerves anyag tartalmú üledékekben is magas koncentrációban lehet jelen. Az urán is megkötődhet a nagy fajlagos felületű agyagásványokon. Az oldhatósága miatt repedéseknél is kiválhat, így repedésindikátorként is használható.

Általánosságban elmondható, hogy üledékes sorozatokban a magas természetes gamma szintek általában agyagos, nem permeábilis üledékekhez köthetők. Az összgamma intenzitás relatív értéke (I_{GR}) így agyagindikátorként is használatos:

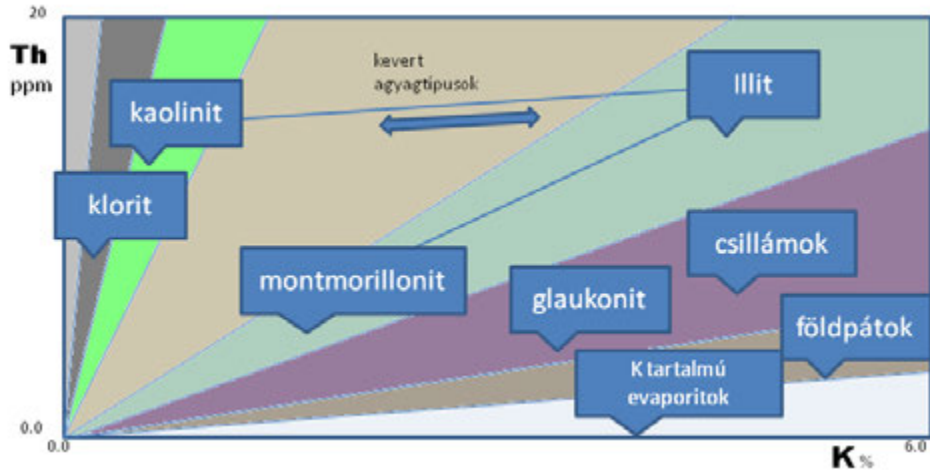
$$Vsh_{GR} = I_{GR} = \frac{GR - GR_{hk}}{GR_{agyag} - GR_{hk}} \quad (9.4.)$$

Mivel nemcsak a radioaktív izotópok eloszlása, hanem az elnyelődés is litológia függő lehet. A kisebb sűrűségű agyagban a gamma fotonok szóródása elnyelődése kisebb mértékű, mely a lineáris modell (9.4.) módosításával figyelembe vehető. Példaként konszolidált és kevésbé konszolidált üledékekre vonatkozó összefüggéseket mutatunk be (Larionov 1969):

$$Vsh = 0.33 \cdot (2^{2 \cdot I_{GR}} - 1) \quad \text{konszolidált üledékekre,} \quad (9.5a)$$

$$Vsh = 0.083 \cdot (2^{3.7 \cdot I_{GR}} - 1) \quad \text{kevésbé konszolidált üledékekre.} \quad (9.5b)$$

Ha spektrális gammamérést végzünk, az agyagtartalom becslés pontosítható, ha az urán bomlási sorhoz kötődő gamma intenzitás rész elhagyásával a fenti agyagtartalom becslés pontosítható. A K és Th tartalom a litológia pontosítását is lehetővé teszi. A K/Th arány segítségével pontosítható az agyagtípus. Általánosságban elmondható, hogy ez az arány csökken a szállítódással és a mállási folyamatok előrehaladásával.



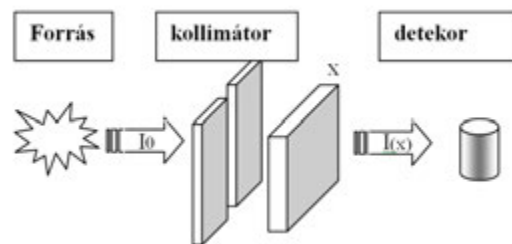
9.2. ábra. Kálium és tórium arány és ásványos összetétel összefüggése.

Megemlítjük, hogy az urán bomlási sorában található, 3.8 nap felezési idejű Rn-222 izotóp, mint nemesgáz, általában diffúzióval vagy vízben oldva elszállítható a keletkezés helyéről. A radon koncentráció mérése így az urán kutatás egyik eszköze lehet.

9.2. Részecske transzport

A részecskék közetbeli elnyelődését figyelembe véve a neutron- és gammasugárzásra alapozható geofizikai módszer. Adott forrás környezetében ($S(x, E, t)$) a közetösszetételtől függő részecsketranszport probléma megoldása szükséges a mérések elemzésére, modellezésére.

A részecskétér leírására ún. fázistérrel használunk, ahol a tér ($\mathbf{r}$) és időkoordináták mellett megjelenik a részecske energiája (E) és mozgásának irányszöge (Ω). A teret jellemezhetjük a fázistérbeli részecske sűrűséggel $n(\mathbf{r}, E, \Omega, t)$, de gyakoribb hogy a részecske fluxust használjuk a probléma megoldásakor. A részecske fluxus $\Phi(r; E, \Omega, t)$ a részecske sűrűség és a részecskék sebességének szorzata, mely sokkal jobban kifejezi a részecskék reakciókészségét. A semleges részecskék többé-kevésbé véletlen bolyongást folytatnak a kölcsönhatások között egyenes vonalú egyenletes mozgással. A lehetséges kölcsönhatások általában a szórás és abszorpció. Ezek valószínűségét ún. hatáskeresztmetszetekkel jellemezhetjük. Részecske nyaláb gyengülésének mérésével az ún. makroszkópikus hatáskeresztmetszetek határozhatók meg:



9.3. ábra. Makroszkópikus hatáskeresztmetszet mérése nyaláb kísérlettel

Az I_0 részecske intenzitás csökkenése az alábbi egyenlettel írható le:

$$\frac{dI}{dx} = -I(x)\Sigma_t \quad (9.6.)$$

Ahol Σ_t az un. totális makroszkópikus hatáskeresztmetszet. Minden lehetséges reakcióhoz definiálhatunk hatáskeresztmetszeteket (Σ_a abszorpciós hatáskeresztmetszet, Σ_s szórási hatáskeresztmetszet stb.) és ezek összegeként kapjuk meg a totális hatáskeresztmetszetet.

A 9.6. exponenciális intenzitáscsökkenést ír le.

A kitevőben levő makroszkópikus hatáskeresztmetszet meghatározza a részecskék átlagos szabadúthosszát, azaz két kölcsönhatás közötti úthossz várható értékét. Ennek bizonyításához állítsuk elő azt a sűrűség függvényt ($f(x)$), mely azt a valószínűséget adja meg, hogy valamilyen kölcsönhatás pont x és $x+dx$ között következik be. Ezt két független valószínűség szorzataként állítjuk elő: az x -ig való eljutás és az x és $x+dx$ közötti kölcsönhatás valószínűségének szorzataként:

$$f(x) = e^{-\Sigma_t x} \Sigma_t dx \quad (9.7.)$$

Ezzel a keresett várható érték:

$$\int_0^{\infty} x e^{-\Sigma_t x} \Sigma_t dx = - \left[x e^{-\Sigma_t x} \right]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-\Sigma_t x} dx = 0 + \left[-\frac{e^{-\Sigma_t x}}{\Sigma_t} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{\Sigma_t} \quad (9.8.)$$

Közetek esetében a makroszkópikus hatáskeresztmetszet (minden reakcióra) lineáris modell szerint, térfogati súlyozással kapható meg a közetösszetevők hatáskeresztmetszeteiből:

$$\Sigma = \sum_{i=1}^N V_i \Sigma_i \quad (9.9.)$$

A makroszkópikus hatáskeresztmetszet un. mikroszkópikus hatáskeresztmetszetekből állítható össze. A mikroszkópikus hatáskeresztmetszet (σ) adott kölcsönhatás típusra (típusokra) vonatkozó valószínűséget jelent egy atomra (neutronok esetén atommagra) vonatkoztatva. A makroszkópikus hatáskeresztmetszet atomi koncentrációval arányos súlyozással állítható elő a mikroszkópikus hatáskeresztmetszetekből.

$$\Sigma = \sum_{i=1}^N n_i \sigma_i \quad (9.10.)$$

Az elnevezés kicsit megtévesztő, felületre utal (a mértékegység is. 1 barn = 10^{-28} m^2) valóságban kvantummechanikai effektusok miatt a hatáskeresztmetszetek általában erősen energiafüggők és un. rezonancia csúcsokat is tartalmazhatnak.

A probléma általánosan az un. transzportegyenlet segítségével oldható meg, mely nem más, mint a fázistér $(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, E)$, elemi térfogatára szubsztanciális időderiválttal felírt mérlegegyenlet (integro-differenciálegyenlet).

$$\frac{dn(\mathbf{r}(t), E, \mathbf{\Omega}, t)}{dt} = \frac{\partial n(\mathbf{r}, E, \mathbf{\Omega}, t)}{\partial t} + \mathbf{\Omega} \cdot \nabla n(\mathbf{r}, E, \mathbf{\Omega}, t) = -\Sigma_t(\mathbf{r}, E) \Phi(\mathbf{r}, E, \mathbf{\Omega}, t) + Q(\mathbf{r}, E, \mathbf{\Omega}, t) \quad (9.11a.)$$

Az egyenletet a fluxusra átírva:

$$\frac{1}{v} \frac{\partial \Phi(\mathbf{r}, E, \mathbf{\Omega}, t)}{\partial t} = -\mathbf{\Omega} \cdot \nabla \Phi(\mathbf{r}, E, \mathbf{\Omega}, t) - \Sigma_t(\mathbf{r}, E) \Phi(\mathbf{r}, E, \mathbf{\Omega}, t) + Q(\mathbf{r}, E, \mathbf{\Omega}, t) \quad (9.11b.)$$

Ahol a forrástag (Q) is összetett: lokális forrás (S) és a fáziscellába szóródás kettős integrálja.

$$Q(\mathbf{r}, E, \mathbf{\Omega}, t) = \int_{4\pi} \int_0^{\infty} \Sigma_s(\mathbf{r}, E' \rightarrow E, \mathbf{\Omega}' \rightarrow \mathbf{\Omega}, t) \Phi(\mathbf{r}, E', \mathbf{\Omega}', t) dE' d\mathbf{\Omega}' + S(\mathbf{r}, E, \mathbf{\Omega}, t) \quad (9.11c.)$$

Gammatranszport esetén a sebesség (v) helyére a fénysebesség kerül. Az időbeli tag, a térbeli és energia szerinti függés legtöbbször szeparálható. Említettük, hogy a probléma megoldásának fő nehézségét az energiafüggő hatáskeresztmetszetek adják, ezért általában leegyszerűsítve, függvényegyütthatós differenciálegyenlet helyett, az együtthatós függvények diszkretizálásával ún. energiacsoportokra oldják meg. Így viszont csatolt differenciálegyenlet-rendszerhez jutunk, ahol már ún. energiacsoportra számolt állandók szerepelnek együtthatóként. Az együtthatók az energia szerint változó függvények energia spektrumra vett átlagai.

A térszög változótól is megszabadulhatunk, ha a fluxustér kevéssé szögfüggő, ekkor a szögfüggő változók sorba fejthetők gömbfüggvények szerint (pl. a fluxusra):

$$\Phi(r, E, \Omega, t) = \frac{1}{4\pi} \Phi(r, E, t) + \frac{3}{4\pi} \Omega J(r, E, t) + \dots \quad (9.12.)$$

A jobb oldalon – a sorfejtés együtthatói – térszög szerinti integrálok.

$$\Phi(r, E, t) = \int_{4\pi} \Phi(r, E, \Omega, t) d\Omega \quad \text{a fluxus szögszerinti átlaga,} \quad (9.12a.)$$

$$J(r, E, t) = \int_{4\pi} \Omega \Phi(r, E, \Omega, t) d\Omega \quad \text{az áramsűrűség nettó értéke.} \quad (9.12b.)$$

Az áramsűrűsége felhasználva a diffúzióra vonatkozó Fick-törvényt:

$$J(r, E, t) = -D(E) \nabla \Phi(r, E, t) \quad (9.13.)$$

ahol D az energiától függő diffúzióállandó.

Ennek felhasználásával az ún. diffúziós egyenlethez juthatunk.

$$\frac{1}{v} \frac{\partial \Phi(r, E, t)}{\partial t} = \nabla(D(E) \nabla \Phi(r, E, t)) - \Sigma_t(r, E) \Phi(r, E, t) + Q(r, E, t) \quad (9.14.)$$

A diffúzióállandó szintén közegjellemző, amely kapcsolatba hozható a makroszkópikus hatáskeresztmetszetekkel és az átlagos szórási szöggel ($\mathcal{G}$).

$$\lambda_{tr} = \frac{1}{\Sigma_{tr}} = \frac{1}{\Sigma_t - \Sigma_s \cos \mathcal{G}} = \frac{1}{3D} \quad (9.15.)$$

Ahol λ_{tr} az ún. transzport szabadúthossz.

Látható, hogy stacionárius probléma esetén, homogén közegben a fenti egyenlet Helmholtz-egyenletbe megy át. Vegyük homogéntérben az egyenlet térfüggő részét:

$$D \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} (r\Phi) + \Sigma_a \Phi + \delta(r) = 0 \quad (9.16.)$$

A homogén egyenlet megoldása:

$$\Phi(r) = \frac{e^{-\frac{r}{L}}}{4\pi Dr} \quad (9.17.)$$

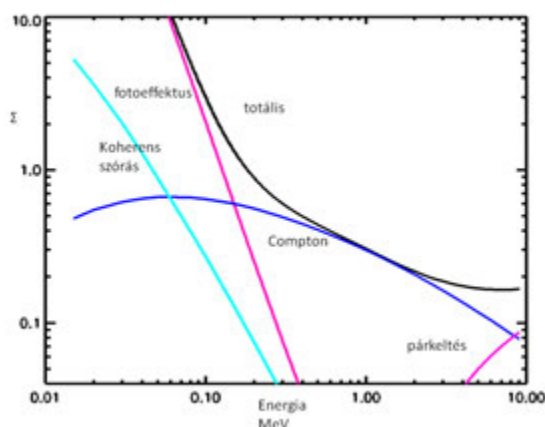
Bevezettünk egy új közegtől függő jellemzőt a diffúzióhosszt (L), mely meghatározza a fluxus térbeli eloszlását.

$$L^2 = \frac{D}{\Sigma_a} \quad (9.18.)$$

A mérésekből a transzportelméleti anyagi jellemzők meghatározhatók, melyek 9.9. segítségével visszavezethetők az anyagi vagy elemi összetételre.

9.3. Gamma transzport és közetfizika

A gammafotonok, mint nagy energiájú elektromágneses sugárzás kvantumjai elsősorban az atomi elektronhéjjal lépnek kölcsönhatásba. A transzportot meghatározó kölcsönhatások a **fotoeffektus** (abszorpció), **Compton-szórás** (és nagyobb energiákon az un. **párváltás**, melynek során a gamma energia egy pozitron-elektron pár képződésére fordul). (Megjegyezzük, hogy a párváltás – elektron-pozitron pár keltése – is abszorpciónak tekinthető.)



9.4. ábra. Gamma kölcsönhatások energiafüggése.

Nagyobb energián a szóródás dominál, az abszorpció valószínűsége kisebb energián lesz jelentős. A Compton-szórás során bekövetkező relatív energiacsökkenés a Klein-Nishina formula szerint a szórás szögétől és a gamma energiától is függ:

$$\frac{E}{E'} = \frac{1}{1 + \frac{E'\gamma}{m_e c^2} (1 - \cos \Theta)} \quad (9.19.)$$

A Compton-szórás valószínűsége alapvetően a közetek elektronsűrűségétől (ρ_e) függ. Adott elem esetén elektronsűrűség a rendszám (Z), atomtömeg (A) és sűrűség (ρ) segítségével felírható a következőképpen:

$$\rho_e = \rho \frac{Z}{A} 6 \cdot 10^{23} \quad (9.20.)$$

A közetalkotó – kisrendszámú – elemek esetében a Z/A arány általában 0.5, kivéve a hidrogént ahol egy. Így a sűrűség és az elektronsűrűség között közelítőleg arányosság áll fenn. A direkt kapcsolat miatt a Compton-szórás által dominált gammatér (gammafluxus) kalibrálható elektronsűrűségre, így közvetve felhasználható sűrűségmérésre és indirekt módon porozitásmérésre.

A közet mérhető, átlagos sűrűsége (un. bulk density ρ_b) elsősorban a porozításra érzékeny közetfizikai jellemező, mivel nagy a sűrűségkontraszt a közetmátrix alkotóelemei és póruskitöltő kisebb sűrűségű anyagok között.

Anyag	sűrűség	$2Z/A$
Kalcit	2.710	0.9991

Anyag	sűrűség	2Z/A
Kvarc	2.654	0.9985
Dolomit	2.870	0.9977
Pirit	5.000	0.9668
Víz	1	1.1101
Sós víz	1.086	1.0918
Olaj	0.85	1.1407

A sűrűség kifejezhető a komponensek részarányával.

$$\rho_b = \sum_{i=1}^N V_i \rho_i \quad (9.21.)$$

Pórustérből és mátrixból álló kétkomponensű közet esetében:

$$\rho = \Phi \rho_{\text{folyadék}} + (1 - \Phi) \rho_{\text{mátrix}} \quad (9.22.)$$

Melyből az un. látszólagos sűrűségporozitás

$$\phi_D = \frac{\rho_{\text{mátrix}} - \rho_b}{\rho_{\text{mátrix}} - \rho_{\text{víz}}} \quad (9.23.)$$

A sűrűségporozitás fenti értéke könnyű szénhidrogén jelenlétében és a mátrix változásakor tér el a valódi porozitástól. Az agyakok sűrűsége általában kisebb a jellemző mátrix porozitásoknál, kompaktio függő is.

Általában a Compton-szórások sorozatával energiát veszítő foton elér abba az energia tartományba, ahol a fotoeffektus valószínűsége már jelentős, ekkor abszorbeálódhat. Beláthatjuk, ha az elektron kötési energiája elhanyagolható a foton energiájához képest, akkor ez olyan mintha a foton energiát szabad elektronnak kellene felvenni. Ha felírjuk az energia és impulzus megmaradást relativisztikus esetre:

$$E_f = h\nu = m_e c^2 = E_e \quad (9.24a.)$$

$$P_f = \frac{h\nu}{c} = m_e v = P_e \quad (9.24b.)$$

A két egyenletet elosztva egymással, az elektron sebességére fénysebesség adódna. A kötött elektron már képes felvenni a foton energiáját. Ahhoz, hogy a fotoeffektus hatását a gammatérben kimérhessük, kisenergiás (100 keV) alatti méréseket kell végezni (Litho-density mérések). A fotoeffektus mikroszkópikus hatáskeresztmetszete erős rendszámfüggést mutat:

$$\sigma_p = C \frac{Z^{3.6}}{E^{3.15}} \quad (9.25.)$$

Ezt a litológia azonosítására használhatjuk fel. A fenti hatáskeresztmetszetből egy un. fajlagos fotoelektromos-abszorpciós indexet (Pe) definiálnak litológiai indikátorként:

$$Pe = \frac{1}{K} \frac{\sigma_p}{Z} \quad (9.26.)$$

A kifejezésben szereplő K konstans biztosítja, hogy a mikroszkópikus hatáskeresztmetszet úgy transzformálódjon, hogy közelítőleg érvényes legyen az alábbi összefüggés:

$$Pe = \left(\frac{Z}{10}\right)^{3.6} \quad (9.27.)$$

Összetett anyagokra (közet) a hatáskeresztmetszet átlaga elkészíthető térfogati elektronsűrűség aránnyal, amely kifejezhető a tömegarányokkal (m_i):

$$\langle \sigma_p \rangle = \frac{\sum_i \left(\frac{Z_i}{A_i}\right) m_i \sigma_{p,i}}{\sum_i \left(\frac{Z_i}{A_i}\right) m_i} \quad (9.28.)$$

Ebből effektív rendszám (keverési szabály) 9.25. egyenlet alapján megadható:

$$Z_{ekv} = \left[\frac{\langle \sigma_p \rangle E^{3.15}}{C} \right]^{1/3.6} \quad (9.29.)$$

Az ekvivalens rendszám felhasználható a keverékek Pe értékének értelmezésekor. A definícióban egy elektronra vonatkozó mikroszkópikus hatáskeresztmetszet szerepel. Ebből gyakran ún. térfogati fotolektromos-abszorpciós indexet (U) hoznak létre:

$$U = Pe \cdot \rho_e \quad (9.30.)$$

Az U már térfogatilag additív, pl. kétkomponensű közetre:

$$U = U_f \phi + (1 - \phi) U_{ma} \quad (9.31.)$$

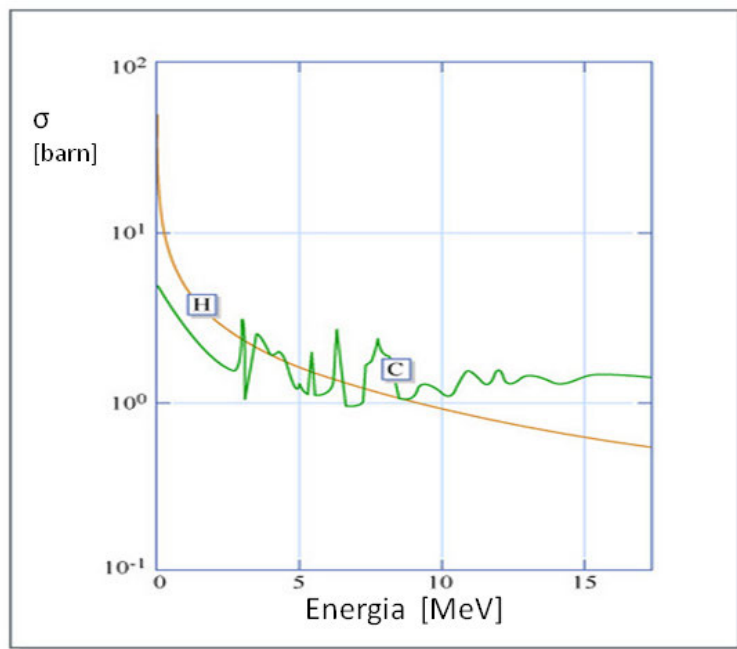
Az alábbi táblázat szemlélteti a bevezetett indexek (Pe , U) litológia szelektivitását.

Kőzetösszetevő	Pe	U
Kalcit	5.084	13.77
Dolomit	3.142	9.0
Kvarc	1.806	4.79
Só	4.169	9.68
Pirit	16.97	82.1
Agyag	3.42	10
Antracit	0.161	
Tiszta víz	0.358	0.398
Sós víz	0.807	0.85
Olaj	0.119	0.136* ρ
Metán	0.095	0.119* ρ

9.4. Neutron módszerekhez kapcsolódó közetfizikai jellemzők

A neutronok 3 kvarkból felépülő nukleonok, szabad állapotban nem stabilak, kisebb tömegű protonná alakulnak. A neutronok, töltésük nem lévén elsősorban az atommagokkal lépnek kölcsönhatásba. A transzportot kialakító

kölcsönhatások közül elsősorban a rugalmas szórás és az abszorpció (neutronbefogás) játszik fontos szerepet. Jelentős neutron energiáknál (10 MeV felett – pl. neutrongenerátoros méréseknél) fontos lehet még a rugalmatlan szórás, melynél az atommag is gerjesztett állapotba kerül. A méréseknél a „forgatókönyv” általában az, hogy a neutronok néhány MeV-es energiával lépnek ki a forrásból (gyorsneutronok), majd sorozatos rugalmas szóródással (ütközés) lassulnak egészen a közeg atommagjainak mozgási energiájának szintjére (hőmozgás). Ezt a szakaszt termalizációnak is nevezik. A termalizálódott (0.1 - 0.01 eV) energiával rendelkező neutron szóródik a közeg atommagjain (termikus diffúzió), majd abszorbeálódik (neutron befogás). A lassulási periódus viszonylag rövid a teljes neutron élettartamnak néhány százaléka (néhány μ s), az abszorpcióig terjedő idő nagy részét a termikus tartományban töltik. A közeg atommagjaival való sorozatos kölcsönhatásoknak köszönhetően a termikus neutronok energia eloszlása Maxwell-Boltzman jellegű (neutron gáz). A neutron gáz – MB eloszlásból levezethető – hőmérséklete általában a lassító közeg hőmérséklete felett van az abszorpció és a termalizáció hatása miatt.



9.5. ábra. A hidrogén és szén neutron reakciókra vonatkozó totális hatáskeresztmetszetének energiafüggése. A csúcsok (rezonanciák) az abszorpciós hatáskeresztmetszeten jellemzők.

A befogás hatáskeresztmetszete általában jelentősen megnövekszik a kisenergiák felé (a neutron sebességgel fordítottan arányos trend). A neutronter kialakulásában tehát nagy szerepet kap a szóródás folyamata. A neutronlassulás – energia veszteség – annál erőteljesebb minél közelebb van a target tömege a neutronéhoz („biliárdgolyó modell”). A következőkben a közetfizikai szempontból is lényeges, lassulás részleteit tárgyaljuk (Szatmáry 2000 – alapján).

A lassulásban, majd a termikus diffúzióban is alapvető szerepet játszó rugalmas szóródás jól tanulmányozható a klasszikus fizika eszközeivel. Ezt un. laboratóriumi (L) és tömegközépponti rendszerben (CM) is tanulmányozható. Az impulzus és energia megmaradást kell előírunk az ütközésekre. Ütközzön a neutron (egységnyi tömeggel) egy A tömegű álló atommaggal. A tömegközéppont (v_{CM}) sebessége a neutron kezdő sebességével (v_L) kifejezve:

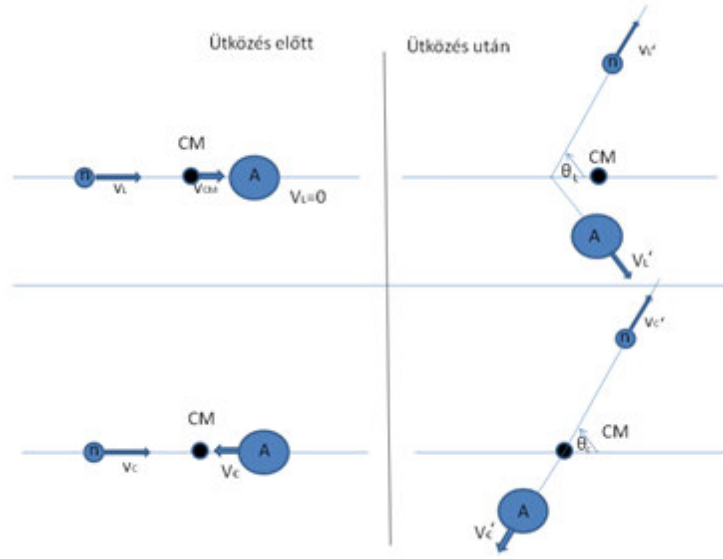
$$v_{CM} = \frac{1}{1+A} v_L \quad (9.32.)$$

A neutron sebessége a tömegközépponti rendszerben

$$v_c = v_L - \frac{1}{1+A} v_L = \frac{A}{1+A} v_L \quad (9.33.)$$

Az atommag sebessége (V_C) ütközés előtt a tömegközépponti rendszerben:

$$V_c = -\frac{1}{1+A} v_L \quad (9.34.)$$



9.6. ábra. Neutron és targetmag ütközése laboratóriumi (bal) és tömegközépponti (jobb) koordinátarendszerben.

Az impulzus x-komponense a tömegközépponti rendszerben:

$$1v_c + AV_c = 0 \quad (9.35.)$$

Mozgási energia (E_L) a laboratóriumi rendszerben megegyezik a neutron mozgási energiájával:

$$E_L = \frac{1}{2} v_L^2 \quad (9.36.)$$

A mozgási energia (E_C) a tömegközépponti rendszerben:

$$E_C = \frac{1}{2} v_c^2 + \frac{1}{2} AV_c^2 = \frac{1}{2} \frac{A}{A+1} v_L^2 = \frac{1}{2} \mu v_L^2 \quad (9.37.)$$

ahol μ a redukált tömeg.

Felírva a tömegközépponti koordinátarendszerre az impulzus megmaradást ütközés előtt és után:

$$1v_c + AV_c = 1v'_c + AV'_c \quad (9.38.)$$

x és y koordinátákra külön-külön, bevezetve a szóródás szögét (θ_C):

$$\begin{aligned} v_c - AV_c &= -AV'_c \cos \theta_C + v'_c \cos \theta_C \\ 0 &= -AV'_c \sin \theta_C + v'_c \sin \theta_C \end{aligned} \quad (9.39.)$$

Ebből az alábbi összefüggések adódnak a target atommag és a neutron sebessége közt.

$$\begin{aligned} v'_c &= AV'_c \\ v_c &= AV_c \end{aligned} \quad (9.40.)$$

Felírva az energia megmaradást a tömegközépponti rendszerre ütközés előtt és utánra:

$$\frac{1}{2}lv_C^2 + \frac{1}{2}AV_C^2 = \frac{1}{2}lv_C'^2 + \frac{1}{2}AV_C'^2 \quad (9.41.)$$

Behelyettesítve a neutron és targetmag sebessége közötti összefüggéseket (9.40.):

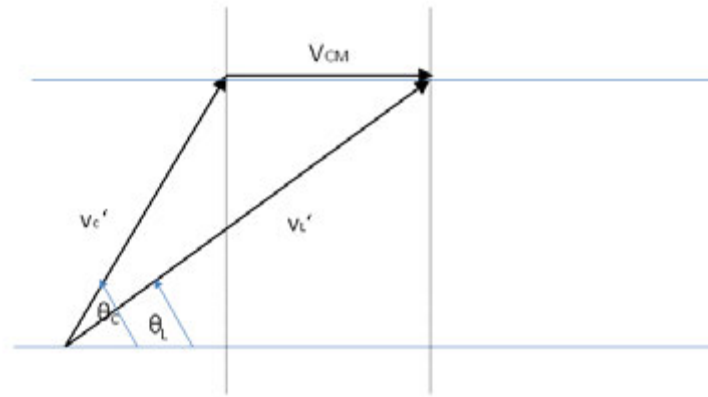
$$(A+1)V_C^2 = (A+1)V_C'^2 \quad (9.42.)$$

Adódik, melyből:

$$\begin{aligned} V_C &= V_C' \\ v_C &= v_C' \end{aligned} \quad (9.43.)$$

is következik. Azaz tömegközépponti rendszerben a rugalmas neutronszórás során csak a sebességek iránya változik. A következőkben az eredmények felhasználásával az ütközés előtti és utáni mozgási energia arányát fejezzük ki.

Laboratóriumi rendszerben a neutronütközés utáni sebessége kifejezhető a tömegközépponti-rendszerbeli sebességgel hozzáadva a tömegközéppont változatlan, x irányú sebességét (9.7. ábra). Ezek egy vektorháromszögből koszinusz-tétellel számíthatók felhasználva a tömegközépponti-rendszer belüli szórási szöget (Θ_C)



9.7. ábra. Tömegközépponti és laborrendszerbeli szórási szögek kapcsolata

$$v_L'^2 = v_{CM}^2 + v_C'^2 - 2v_C'v_{CM} \cos(180 - \Theta_C) \quad (9.44.)$$

felhasználva, hogy a tömegközépponti-rendszerben nem változik a sebesség nagysága:

$$v_L'^2 = v_{CM}^2 + v_C^2 + 2v_Cv_{CM} \cos(\Theta_C) \quad (9.45.)$$

Beírva a korábban meghatározott két rendszer közötti összefüggést (9.32., 9.33.):

$$\frac{v_L'^2}{v_L^2} = \frac{1 + A^2 + 2A \cos \theta_L}{(1 + A)^2} \quad (9.46.)$$

Bevezetve az $\alpha = \left(\frac{A-1}{A+1} \right)^2$ jelölést. Mivel:

$$1 + \alpha = 2 \frac{A^2 + 1}{(A+1)^2} \quad (9.47.)$$

$$1 - \alpha = 2 \frac{2A}{(A+1)^2}$$

Így a keresett összefüggés a szórás előtti és utáni neutron energiák között:

$$E' = \left[\frac{1 + \alpha + (1 - \alpha) \cos \Theta_c}{2} \right] E \quad (9.48.)$$

Látható, hogyha a szórási szög zérus, azaz nincs szórás, akkor nincs energiaveszteség. Maximális az energia veszteség 180 fokos szórási szögnél. Ekkor a szórás utáni neutron energia: $E' = \alpha E$, azaz az energiaveszteség:

$$\Delta E_{\max} = E - E' = (1 - \alpha)E \quad (9.50.)$$

Megjegyzendő, hogy ez egységnyi target mag tömegnél maximális (hidrogén). Ez 9.47. összefüggés A-szerinti deriváltjából közvetlenül látható. Azaz kisebb magok esetében várható nagyobb neutron energia csökkenés. A levezetett eredmények álló targetmag feltételezésével adódtak, termikus energiáknál pontosabb számításoknál, már figyelembe kell venni a magok hőmozgásából származó mozgási energiát is.

A fenti energiaveszteségre vonatkozó összefüggések felhasználhatók, hogy a még informatívabb átlagos – ütközésenkénti – energia veszteséget meghatározzuk. Ehhez először az ütközés utáni energia sűrűségfüggvényére van szükség ($f(E')$). Ez viszont szoros kapcsolatban van a szórási szöggel, így a tömegközépponti rendszerben egyenletes szögeloszlást feltételezve:

$$f(E')dE' = \frac{d\Omega}{4\pi} = \frac{2\pi \sin \Theta_c d\Theta_c}{4\pi} = -\frac{d \cos \Theta_c}{2} \frac{dE'}{dE'} = -\frac{1}{2} \frac{d(\cos \Theta_c)}{dE'} dE' \quad (9.60.)$$

Felhasználva a korábban meghatározott szög és energia összefüggést, kifejezhető a szórási szög koszinusza (9.48.-ból):

$$\cos \Theta_c = \frac{2}{1 - \alpha} \frac{E'}{E} - \frac{1 + \alpha}{1 - \alpha} \quad (9.61.)$$

Elvégezve az energia szerinti deriválást, amely 9.60.-hoz szükséges:

$$\frac{d \cos \Theta_c}{dE'} = \frac{2}{(1 - \alpha)E} \quad (9.62.)$$

Így a keresett sűrűség függvény:

$$f(E') = \frac{1}{(1 - \alpha)E} \quad (9.63.)$$

Látható, hogy ez egyenletes eloszlás sűrűségfüggvénye, amely a korábbiak értelmében E és αE közötti tartományra terjed ki. Ennek segítségével határozzuk meg a logaritmikus energia csökkenés (un. letargia ξ), várható értékét.

$$\xi = \int_E^{\alpha E} \ln \frac{E}{E'} P(E') dE' = \int_E^{\alpha E} \ln \frac{E}{E'} \frac{1}{(1-\alpha)E} dE' \quad (9.64.)$$

Alkalmazzuk az alábbi helyettesítést:

$$\chi = \frac{E'}{E} \quad (9.65.)$$

$$d\chi = \frac{dE'}{E}$$

Ekkor a keresett átlagos logaritmikus energiacsökkenés:

$$\xi = -\frac{1}{1-\alpha} \int_1^{\alpha} \ln \chi d\chi = \frac{1}{1-\alpha} [\chi \ln \chi - \chi]_1^{\alpha} = \frac{1}{1-\alpha} [\alpha \ln \alpha - \alpha + 1] \quad (9.66.)$$

Visszahelyettesítve α értékét:

$$\xi = 1 + \frac{(A-1)^2}{2A} \ln \left(\frac{A-1}{A+1} \right) \quad (9.67.)$$

A fenti kifejezés jól közelíthető a:

$$\xi = \frac{2}{A + \frac{2}{3}} \quad (9.67b.)$$

formulával. A mélyfúrási geofizikai szondázásoknál alkalmazott források vagy 4-5 MeV-es stacionárius forrásokat (Am-Be, Pu-Be) vagy 14 MeV-es impulzusüzemű neutronforrásokat alkalmaznak.

A 9.67. egyenletben atommagtól függő számértékével kell elosztani a forrásenergia és a termikus energia logaritmikus különbségét. Így megkapjuk a termalizálódáshoz szükséges ütközések átlagos számát. Pl. a Hidrogén esetében MeV-es tartományból átlagosan 18 ütközéssel termalizálódik a neutron, míg szén esetében ez a szám 115.

A moderációnál az egy szórásra vonatkoztatott átlagos energiaveszteség csak az egyik faktor, a moderáció erélyessége szempontjából fontos a szórás valószínűsége is. A moderálás hatékonyságát tehát az alábbi szorzat jellemzi jobban:

$$\zeta = \xi \cdot \Sigma_s \quad (9.68.)$$

Amely többféle elem jelenlétében:

$$\zeta = \sum_i \xi_i \cdot \Sigma_{s_i} \quad (9.69.)$$

Figyelembe véve a moderáció erősségére vonatkozó megállapításokat, a lehetséges közetalkotók közül a közeg **hidrogéntartalma** meghatározó a termalizáció szempontjából. A termikus neutronter (elsősorban a termikus neutronok detektálhatók könnyen) mérése alapján, elsősorban a hidrogéntartalomra következtethetünk, mely kapcsolatba hozható a porozitással.

A hidrogén szerepét kiemelve bevezethető, az un. hidrogénindex (HI), mely az adott közet egységnyi térfogatának relatív hidrogéntartalmát jelenti a vízre vonatkoztatva.

A neutronmérés eredménye – adott ponton mért termikus neutronfluxus - alapján megfelelő kalibrálással juthatunk az un. látszólagos neutronporozitáshoz (ϕ_N), mely adott mátrix és vízzel telített póruster esetén a valódi porozitást adja vissza. A neutronporozitást szintén additívnak tekinthetjük:

$$\phi_N = \sum_i V_i \phi_{Ni} \quad (9.70.)$$

Melyet közelítőleg átvihetünk a hidrogénindexre is. A mérőeszközök általában mészköre kalibráltak. Ez azt jelenti, hogy alapesetben a mészkomátrix neutronporozitás járuléka zérus.

Ez a kalibrációs mód kissé megtévesztő lehet, a mátrixnak természetesen ilyenkor is van hatása a neutronterre, mely nem azonos pl. a vákuuméval. Ebből adódik az ún. exkavációs effektus és az ezzel kapcsolatos korrekció kisebb sűrűségű gázzal töltött póruster esetére.

Más közetmátrixra való áttérés néhány százalékos fix porozitás korrekciót jelent. A mérések során stacionárius vagy időtől függő források körüli térben elhelyezett neutrondetektorok jeleit használjuk porozitás becslésre. A mérésből származó értékek, melyek a forrás körül kialakult tér lecsengését reprezentálják, a makroszkópikus hatáskeresztmetszetek függvénye vagy az ebből származtatható transzport paramétereké. Stacionárius terek esetében a térfüggő általában több energiacsoportos problémát meghatározzák az egyes energia csoportokra vonatkozó diffúziós állandók és abszorpciós hatáskeresztmetszetek vagy a diffúzióhosszak.

$$N_{mért} = f(D_1 \dots D_N, L_1 \dots L_N) \quad (9.71.)$$

A diffúziós állandó és úthossz hatáskeresztmetszet függését 9.15. és 9.18. egyenletek adják.

Időben változó neutronterek mérésével a makroszkópikus abszorpciós hatáskeresztmetszet (Σ_a) becsülhető, hiszen a termikus fluxus csökkenése a termikus abszorpció valószínűségétől függ. A klór magas abszorpciós hatáskeresztmetszete sósvizes rétegek esetén jelentős kontrasztot biztosíthat a rétegvíz és a szénhidrogének hatáskeresztmetszete között, így ezek a módszerek a víz-szénhidrogén fázishatások kimérésére is alkalmasak. A hatáskeresztmetszetekre a már tárgyalt lineáris összefüggés vonatkozik:

$$\Sigma = \sum_i V_i \Sigma_i = \phi S_w \Sigma_w + \phi(1 - S_w) \Sigma_{CH} + (1 - \phi - V_{sh}) \Sigma_{ma} + V_{sh} \Sigma_{sh} \quad (9.72.)$$

Megemlítjük, hogy az energiacsoportokat jellemző makroszkópikus hatáskeresztmetszeteket (Σ_i) a csoportra vonatkozó fluxussal történő átlagolással állítjuk elő. Az átlagoláshoz szükséges „előzetes” fluxus eloszlás ($\phi(E)$) a lassulási számításokból adódik.

$$\Sigma_i = \frac{\int_{E1}^{E2} \phi(E) \Sigma(E) dE}{\int_{E1}^{E2} \phi(E) dE} \quad (9.73.)$$

A neutron és gamma módszerek kombinálhatóak. Mérhető a neutronbefogással kapcsolatos csatolt gamma tér. A neutron befogás során ugyanis a befogó mag gerjesztésére fordul a befogott neutron kötési energiája, melyet a mag karakterisztikus gamma foton(ok) formájában kisugároz.

A neutronbefogás instabillá, radioaktívvá is teheti a befogó atommagot, felborítva az energiaminimumhoz tartozó neutron-proton arányt. Ekkor az atommag általában bétabomlással (neutron protonná alakulásával) kerülhet alacsonyabb energiájú állapotba. A bétabomlás követően a bomló atommag általában szintén gerjesztett állapotban maradhat és a többlet energiát megint csak karakterisztikus gamma foton(ok) formájában sugározhatja ki. Ezek segítségével elemi összetételre következtethetünk (neutronaktiváció - NAA).

Ha neutrongenerátort használunk forrásként, a nagyobb neutronenergia miatt létrejöhet a rugalmatlan szórás és a gerjesztett atommagok karakterisztikus gammasugárzást bocsátanak ki, melyet energia szelektív gammadetektorral mérve következtethetünk bizonyos elemek mennyiségére. Hasonlóan felhasználhatók a termalizáció utáni neutronbefogást követő karakterisztikus gamma fotonok is. Gamma spektroszkópia segítségével a közetek elemi összetételére vonatkozó információhoz juthatunk. Általában a gamma és neutrontranszport részleteinek számítása nélkül lehetséges elemarányokra következtetni, így ezeket a módszereket nem a tényleges elemkoncentrációkra élezzük ki.

Gyakori célparaméter a C/O szén-oxigén arány mely a szaturáció és mátrix összetételnek is függvénye, vagy a Si/Ca arány mely alkalmas litológia indikátor vagy a Cl/H arány mely a póruskitöltő folyadék jellegére érzékeny.

9.5. NMR relaxációs idők

Az NMR (Nuclear Magnetic Resonance) mérések egyes nukleonok jelentős mágneses momentumához kapcsolódnak. A nukleonok mágneses térben a tér vektora körül ún. Larmor precessziót végeznek, amely alkalmas mérési módszer alapja lehet a nukleon mennyiségének és – a precesszió időbeli változásainak mérésével – a nukleon környezetének felderítésére.

A geofizikában elsősorban a pórustérben levő protonok mágneses momentumára épül a módszer és így elsősorban a pórusfolyadék mennyiségének és tulajdonságainak meghatározását tűzi ki célul, de a proton precessziós magnetometereknél is ehhez az effektushoz kapcsolódik a mágneses indukció mérése.

Ahogy azt a mágneses szuszceptibilitás modellezésénél megvizsgáltuk, a töltött részecskék esetén az impulzus momentumhoz (pálya és saját impulzus momentumhoz, a spinhez) mágneses momentum kapcsolódik. Ezt korlátozott érvénnyel klasszikus módon is modellezhetjük. A köráram mágneses momentuma (μ) felírható az áramerősség és a köráram (I) által körbefogott felület (A – normális vektorával jellemezve) szorzataként.

$$\mu = IA \quad (9.74.)$$

Klasszikus képpel az áram a részecske q töltésével és sebességével valamint a körpálya sugarával kifejezhető:

$$I = \frac{qv}{2\pi r} \quad (9.75.)$$

A proton esetében a proton feltételezett „sugarát” (r) és töltését írjuk be az összefüggésbe, így a spinhez kapcsolódó mágneses momentum:

$$\mu = \frac{q_p v}{2\pi r} r^2 \pi = \frac{q_p v m_p r}{2m_p} = \frac{q_p}{2m_p} L = \gamma L \quad (9.76.)$$

Kifejezhető vált a spinnel. A két vektormennyiséget az ún. giromágneses arány (γ) köti össze.

A $\frac{q\hbar}{2m_p}$ mennyiséget, mely a mágneses momentum felírásánál alapvető szerepet játszik, mag magnetonnak nevezzük, értéke: $5.05084 \cdot 10^{-27}$ J/T. (Három nagyságrenddel kisebb a Bohr-magnetonnál)

(Megjegyzés: a valóságban a közelítések miatt a mag magnetont még szorozni kell az ún. g-faktorral, hogy megkapjuk a giromágneses arányt.)

(Megjegyzés: A neutron - bár semleges – mégis rendelkezik mágneses momentummal ennek eredete kvark szinten magyarázható)

Eltávolodva a klasszikus képtől, az impulzus momentum egy kitüntetett irányhoz képest $2L+1$ kvantált irányban állhat be. Alapállapotban, zérus pályamomentumnál csak a spin, mint sajátimpulzus momentum lényeges. A proton, mint fermion, $1/2$ -es spinű részecske, mely a saját impulzus momentumát tekintve, egy kitüntetett irányhoz képest két lehetséges állapotban lehet. Kitüntetett irányt jelent pl. a mérésnél alkalmazott külső mágneses indukció ($\mathbf{B}_0$) iránya. Legyen ez a z-koordináta tengely. Az impulzusmomentum z-komponenséhez (S_z) kapcsolódik a mágneses kvantumszám (m). Ennek értéke is $1/2$ és $-1/2$ lehet.

$$S_z = m\hbar \quad (9.77.)$$

Ehhez kapcsolódó mágneses momentum:

$$\mu_z = \gamma S_z = \gamma m \hbar \quad (9.78.)$$

A külső mágneses térben ($\mathbf{B}_0$) a kétféle lehetséges beállítás energiája felhasad, a térrel megegyező momentum beállítás energiája kisebb. Mivel a mágneses dipólmomentum energiája:

$$E = -\boldsymbol{\mu} \mathbf{B} \quad (9.79.)$$

A két állapot közötti energia különbség, a felhasadás tehát a külső mágneses indukcióval lesz arányos.

$$\Delta E = \gamma \hbar B \quad (9.80.)$$

Pont ekkora energiájú elektromágneses sugárzással lehet a kisebb energiájú állapotból a nagyobbba juttatni egy protonot („flip”). A külső mágneses térben tehát kvantált irányok lehetségesek, mind az impulzusmomentumra, mind a hozzákapcsolódó mágneses momentumra vonatkozóan. A mágneses momentum jelenléte miatt a külső tér

$$\mathbf{M} = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B} \quad (9.81.)$$

forgatónyomatékokat gyakorol a protonra, amely miatt mind az impulzusmomentum vektor, mind a mágneses momentum vektor precesszál a külső tér vektora körül. Ha precessziós kúp szöge θ , és az elfordulás szöge φ , akkor a forgatónyomaték:

$$M = \frac{\Delta L}{\Delta t} = \frac{L \sin \Theta \Delta \varphi}{\Delta t} \quad (9.82.)$$

$$M = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B} = |\boldsymbol{\mu} B \sin \Theta| = \gamma \hbar B \sin \Theta$$

Mivel a szögsebesség:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \quad (9.83.)$$

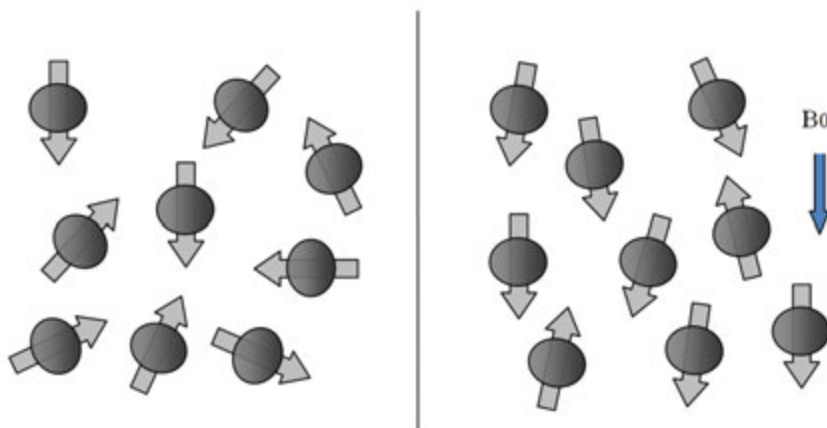
A keresett precessziós frekvencia, a már említett Larmor-frekvencia:

$$\nu = \gamma \frac{B}{2\pi} \quad (9.84.)$$

Látható, hogy a Larmor-frekvencia megegyezik a spin állapotok közötti átmenet energiájával.

A két állapot betöltöttségét egyensúlyi helyzetben az energia különbség és a hőmérséklet határozza meg (Boltzman-eloszlás). A populáció különbség határozza meg a protonok együttes rendszerének indukált mágnesezettségét ($\mathbf{M}$).

A proton Larmor frekvenciája 1 T mágneses térben 42.567 MHz.



9.8. ábra. Protonok mágneses momentumainak beállása mágneses térben és a nélkül.

Megjegyzendő, hogy a precesszáló protonok rendszerében a mágneszettség vektornak, a proton mozgások korrelálatlansága miatt alapesetben nincs x-y síkba eső komponense. A kétállapotú rendszer időegység alatti átmenet valószínűségei legyenek P_{1-2} és P_{2-1} . Egyensúly esetén az átmenetek száma egyenlő, azaz:

$$N_2 P_{2-1} = N_1 P_{1-2} \quad (9.85.)$$

A két állapot betöltöttsége közötti különbség adott hőmérsékleten a külső mágneses tér függvénye. Még jelentős B_0 értékek esetében is kicsi ez a különbség (n) és így kicsi és nehezen mérhető az indukált mágneszettség értéke. A populációk közel azonos értékéből az átmeneti valószínűségek közel azonossága is következik.

$$\frac{P_{2-1}}{P_{1-2}} = \frac{N_1}{N_2} = \frac{\exp\left(-\frac{Bm}{kT}\right)}{\exp\left(\frac{Bm}{kT}\right)} \approx 1 - 2 \frac{Bm}{kT} \quad (9.86.)$$

Ha elhanyagoljuk az átmeneti valószínűségek közötti különbséget, akkor nem egyensúlyi helyzetre is felírhatjuk az eredő mágneszettség időfüggését, az un. relaxációs folyamatot.

$$\frac{dM}{dt} = \frac{d(m(N_1 - N_2))}{dt} = 2Pm(N_2 - N_1) = -2PM \quad (9.87.)$$

Ahol P a közös átmeneti valószínűség. A fenti differenciálegyenlet egyensúlyi végállapotot figyelembe vevő megoldása:

$$M(t) = M_0 \left(1 - e^{-2Pt}\right) = M_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{T_1}}\right) \quad (9.88.)$$

Bevezettük a folyamathoz tartozó un. longitudinális relaxációs időt (T_1), mely az egyensúlyi állapothoz való visszatérés karakterisztikus ideje, melynek során kialakul a z irányban részben rendezett, x-y irányban rendezetlen állapot. Gyakran spin-„rács” (spin-lattice) relaxációként is említik, melynek során a mágneses térhez igazodó proton spin rendszer fuktuációi különböző szomszédos protonok, elektronok kölcsönhatásai révén az egyensúlyi állapothoz tartanak. Definíálhatunk egy un. transzverzális relaxációs időt (T_2), amely a külső térre merőleges rendezettség (pl. korrelált precesszió) eltűnésének karakterisztikus ideje, mivel ez esetben a egy-egy szomszédos spinnel való kölcsönhatás okoz precesszióból való kiesést, ezt spin-spin relaxációnak is nevezik. A kétféle relaxációs idővel felírhatjuk a mágneszettség időbeli változását meghatározó differenciálegyenlet-rendszert az un. Bloch-egyenleteket:

$$\frac{dM_x(t)}{dt} = \gamma(\mathbf{M}(t) \times \mathbf{B}(t))_x - \frac{M_x(t)}{T_2} \quad (9.89.1.)$$

$$\frac{dM_y(t)}{dt} = \gamma(\mathbf{M}(t) \times \mathbf{B}(t))_y - \frac{M_y(t)}{T_2} \quad (9.89.2.)$$

$$\frac{dM_z(t)}{dt} = \gamma(\mathbf{M}(t) \times \mathbf{B}(t))_z - \frac{M_z(t) - M_0}{T_1} \quad (9.89.3.)$$

(Mágneses tér térbeli változásakor további un. diffúziós tag is illeszthető az egyenletekhez.)

Az NMR mérések kivitelezésénél egy z irányú (longitudinális) állandó mágneses tér ($\mathbf{B}_0$) és egy arra merőleges (transzverzális) változó rádiófrekvenciás tér ($\mathbf{B}_1$) alakítja a proton rendszer eredő mágnesezettségét. $\mathbf{B}_1$ tér általában változó irányú és $\mathbf{B}_0$ által meghatározott Larmor frekvenciájú (rezonáns tér).

Szimmetria okokból így lehetséges az x-y komponens összevonása és a komplex írásmód bevezetése:

$$\begin{aligned} M_{xy} &= M_x + iM_y \\ B_{xy} &= B_x + iB_y \end{aligned} \quad (9.90.)$$

Ezzel a Bloch-egyenletek:

$$\begin{aligned} \frac{dM_{xy}}{dt} &= i\gamma(M_{xy}B_z - M_zB_{xy}) - \frac{M_{xy}}{T_2} \\ \frac{dM_z}{dt} &= i\gamma(M_{xy}B_{xy} - M_zB_{xy}) - \frac{M_z - M_0}{T_1} \end{aligned} \quad (9.91.)$$

Ha $T1$ és $T2$ végtelen, azaz nincs relaxáció akkor $\mathbf{B}_0$ konstans z -irányú mágneses indukció jelenlétében végtelen ideig fennmarad a koherens Larmor-precesszió. Mivel ekkor a fenti egyenletek:

$$\frac{dM_{xy}}{dt} = -i\gamma M_{xy} B_0 \quad (9.92.1)$$

$$\frac{dM_z}{dt} = 0 \quad (9.92.2.)$$

Melynek megoldása:

$$M_{xy}(t) = M_{xy}(0)e^{-i\gamma B_0 t} \quad (9.93.1.)$$

$$M_z(t) = M_0 = const \quad (9.93.2.)$$

Szokás a problémát az $\mathbf{M}_{xy}$ vektorral együtt forgó rendszerben (rotating frame) kezelni, ebben eltűnnek a keresztszorzatok és a mágnesezettség transzverzális komponense $T1$ és $T2$ időállandóval változik. A gerjesztés időtartamára az x-y síkban megjelenő mágnesezettség komponens:

$$M_{xy} = C(1 - e^{-\frac{t}{T1}}) \quad (9.94.)$$

Azaz, a gerjesztés idején folyamatosan – telítési görbe szerint – növekszik az x-y síkban mérhető komponens. Míg a gerjesztés megszűnésével exponenciálisan csökken a fázisban precesszáló protonok száma:

$$M_{xy}(t) = De^{-\frac{t}{T_2}} \quad (9.95.)$$

Közetfizikai szempontból egyrészt érdekes a mágnesezettség nagysága az adott ideig alkalmazott **B₁** gerjesztést követően, mely kapcsolatba hozható a vizsgált közettérfogatban levő protonok számával, másrészt fontos információt hordoznak a relaxációs idők, melyek a protonokhoz kapcsolódó mágneses momentumok egymásközi, illetve környezettel kapcsolatos csatolásától függenek.

Az NMR módszer hatékonyságát jelentősen növelte az ún. spin-echo módszer alkalmazása. Ennek lényege a rezonáns cirkuláris, harmonikus transzverzális térerő (**B₁**) ciklikus alkalmazása, mely lehetővé teszi, hogy a nehezen mérhető z-irányú nettó mágnesezettség vektort x-y síkra forgatását. **B₁** rezonáns frekvenciája lehetővé teszi, hogy a leforgatott mágnesezettség vektor is Larmor frekvenciával precesszáljon, mely viszonylag könnyen mérhető jelet generál. Ez mikro szinten szinkronizált spin precessziót jelent. A szinkronizálást követően vizsgálható a precesszáló jel lecsengése és így a relaxációs idő. A spin rendszer 180 átfordításával (**B₁** ismételt alkalmazásával), a mágneses tér lokális inhomogenitásai miatt bekövetkező precesszáló csomag szétfolyás megakadályozható és így a relaxációs folyamatban a valóban közetfizikai okok miatti járulékok tanulmányozhatók.

9.5.1. Proton precesszió póruskítóltó folyadékokban

A relaxációs idők közetfizikai értékeléséhez első lépésben a végtelen kiterjedésű folyadékban kell vizsgálni a spin relaxációt. Ez az ún. térfogati relaxáció (bulk relaxation). A relaxációs folyamatban a diffundáló és precesszáló proton rendszer lokális mágneses fluktuációkat okoz a szomszédos protonok számára. A kölcsönhatások energia átadással és a precesszálás fázisának (irányának) megváltozásához vezetnek. A kölcsönhatás különösen erőteljes, ha a diffundáló proton számára az „érezhető” fluktuációk frekvenciája közel van a Larmor-frekvenciához. E kép alapján belátható, hogy a diffúzió sebességétől és ilyen módon a viszkozitástól, hőmérséklettől függő a relaxáció. A precessziótól származó jel a hidrogéntartalommal, hidrogénindexszel (HI) arányos.

A relaxációs időkre térfogati relaxáció esetében (nagy hőmérséklet tartományon) igaz, hogy $T_1 \geq T_2$. Víz esetében a relaxációs idők 3s körül vannak, mely csökkenhet oldott paramágneses komponensek hatására.

A különböző póruskítóltó folyadékok esetére a térfogati relaxációs idők az alábbi módon közelíthetők (Coates)

$$T_{2b} \approx 3 \frac{T}{298\eta} \quad \text{a víz esetére,} \quad (9.96.1)$$

$$T_{2b} \approx 2.1 \frac{T}{298\eta} \quad \text{az olajok esetére,} \quad (9.96.2.)$$

$$T_{2b} \approx 2.5 \cdot 10^4 \frac{\rho}{T^{1.17}} \quad \text{a gáz esetére.} \quad (9.96.3.)$$

A fenti formulákban szereplő viszkozitás (η) cP-ban a T hőmérséklet Kelvinben, míg a sűrűség g/cm³-ben helyettesítendő.

A méréseknél alkalmazhatunk térben változó mágneses teret, mely G transzverzális gradienssel jellemezhető. Ekkor az eltérő lokális mágneses tér eltérő és térben változó Larmor-frekvenciát jelent, így a protonok diffúziója is relaxációt okoz. A diffúzió jellemezhető a protont tartalmazó molekulák diffúziós állandójával (D). A diffúziós folyamat (véletlen bolyongás) esetében mozgás jellemezhető az eltávolodás várható értékével, melynek idő függése:

$$\langle x^2 \rangle = 6Dt \quad (9.97.)$$

A relaxáció szempontjából is meghatározó mennyiség $\sqrt{DT_{relax}}$. A diffúzióhoz köthető relaxációs idő felírható a mágneses tér gradiensevel (G) és a méréshez köthető echo-ciklusidővel (Te), hiszen az echo periódusban alkalmazott B_1 korrigálja a mágneses tér inhomogenitásait és így a kissé különböző Larmor-frekvenciának köszönhető relaxációs hatást. Ezért a diffúzióval kapcsolatos relaxációs idő:

$$\frac{1}{T_{2D}} = \frac{(\gamma G Te)^2 D}{12} \quad (9.98.)$$

Összetett, több relaxációs mechanizmus eredményeként kialakuló relaxációs idők, az alábbi módon kombinálódnak:

$$\frac{1}{T_2} = \frac{1}{T_{2b}} + \frac{1}{T_{2D}} \quad (9.99.)$$

A fenti összegzési szabályt megkaphatjuk, ha különböző időállandójú exponenseket adunk össze.

$$y = \sum a_i e^{-\frac{t}{T_i}} \quad (9.100.)$$

Sorba fejtve első tagig a fenti kifejezést a relaxációs időkhöz képest kis időkre:

$$y \approx \sum a_i - \sum \frac{a_i}{T_i} t \quad (9.101.)$$

Összevetve ezt egy időállandóval jellemzett folyamat sorba fejtett alakjával, megkaphatjuk az összegzési szabályt. Megjegyezzük, hogy a diffúziós folyamat relaxációjának kimérésével a nagyobb diffúziós állandóval jellemezhető gáz elkülönítése is lehetséges, illetve Te változtatásával D is becsülhetővé válik.

9.5.2. Relaxáció porózus közetekben

A porózus közetekben az eddig ismertetett relaxációs mechanizmusokhoz egy további is járul. A kőzetalkotó ásványok felszínén nagyobb eséllyel találkoznak a vízhez kötődő protonok paramágneses összetevőkkel, mely jelentősebb lokális mágneses fluktuációt okozva, jelentősen hozzájárulhatnak a relaxációhoz. Legtöbb kőzet vízre nedvesedő, így a jelenség modellezhető úgy, hogy feltételezzük, hogy a szénhidrogéncseppek esetében a precesszáló protonok esetében ez elhanyagolható effektus, míg a víz protonjai esetében meghatározó. A víz esetében azt kell figyelembe vennünk, hogy a véletlen bolyongást végző protonok, milyen valószínűséggel és milyen gyakran kerülnek a pórustér határához közel. Érezhető, hogy a fajlagos felületnek (S) a relaxáció szempontjából fontos jelentősége van, hiszen a tapadóvíz (szemcsékhez közeli helyzet) térfogata a pórustérfogathoz képest meghatározza a ásványok felszínével való kontaktus gyakoriságát. Legyen az ásványok felszínén bekövetkező kontaktus esetén a relaxáció ideje T_s . A pórusteret (ϕ) felosztjuk egy belső és egy tapadó víz tartományra ahol a felszín relaxáció végbemehet. Legyen a tapadó vízréteg vastagsága h . Alkalmazva a relaxációs idők kombinálására vonatkozó szabályt.

$$\frac{1}{T_1} = \frac{1}{T_{1b}} \left(1 - \frac{Sh}{\phi} \right) + \frac{1}{T_{1s}} \frac{Sh}{\phi} \quad (9.102.)$$

Bevezetve a felületi relaxivitást (p_s), mely annak a valószínűségét fejezi ki, hogy az ásványok felületén nem következik be relaxáció és elhanyagolva a h miatt kisebb járulékot, az alábbi összefüggést nyerjük a pórusvízre:

$$\frac{1}{T_1} = \frac{1}{T_{1b}} + p_{s1} \frac{S}{\phi} \quad (9.103.1.)$$

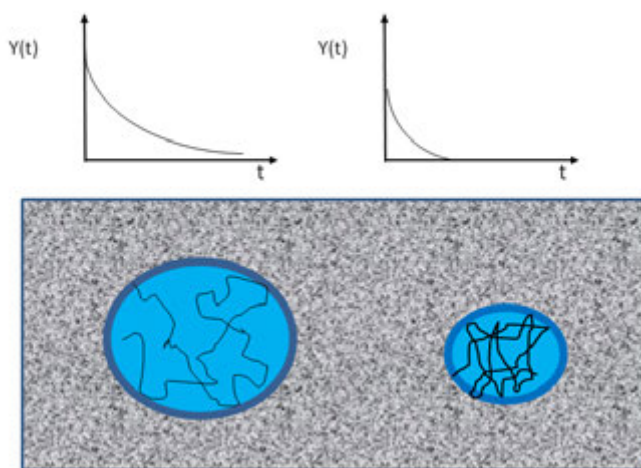
$$\frac{1}{T_2} = \frac{1}{T_{2b}} + p_{s2} \frac{S}{\phi} \quad (9.103.2.)$$

A pórusvíz esetében a relaxációban nagyon fontos szerepet fog betölteni a pórusstruktúra, míg a szénhidrogének esetében ez a hatás elhanyagolható. A pórusvíz relaxációja leképzi a pórustér méretbeli eloszlását a relaxációs idők (T_2) terébe. A nagyobb pórustérben mozgó protonok esetében a precesszió lecsengése jóval hosszabb lesz, mint a kis pórusterekben, ahol a precesszáló proton nagy valószínűséggel esik ki a fázisból felületi relaxáció következményeként.

Legrövidebbek a relaxációs idők a szilárdszemcsékhez köthető kristályvízben, majd a felületi kötöttvízben, majd a kapillárisjellegű hézagokban ahol a precesszió még mindig erősen akadályozott, ezt követik a különböző nagyságú pórusrészek. A spin-echo mérésekből származó lecsengő jel a pórusfrakciók segítségével az alábbi módon írható fel:

$$y(t) = \sum_{i=1}^N \phi_i e^{-\frac{t}{T_{2i}}} \quad (9.104.)$$

Illesztés eredményeképpen egy ún. T_2 eloszláshoz jutunk, mely tulajdonképp a póruseloszlást tükrözi.



9.9. ábra. Precesszió eltérő relaxációja különböző pórusméreteknél

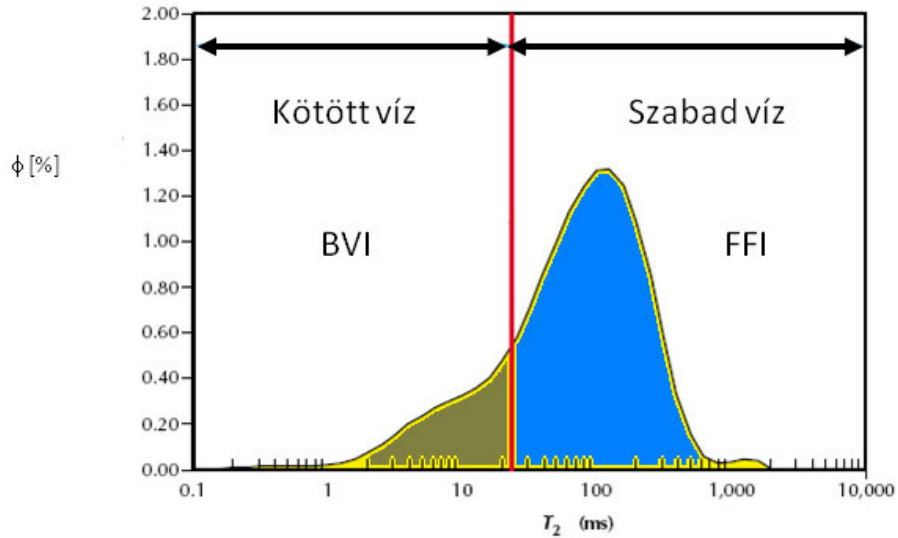
Adott mátrix esetén elkülöníthetővé válik a kötött (kötött víz index: BVI) és szabad pórusvíz frakció (szabadvíz index: FFI) aránya. Az NMR mérések egyik jelentős eredménye a pórusstruktúra felderítésével a pontosabb (labormérésekkel jól korreláló) permeabilitás becslés (Coates)

$$k = a \phi^4 \left(\frac{FFI}{BVI} \right)^2 \quad (9.105.)$$

illetve T_2 logaritmikus átlagára alapozva a permeabilitás szintén hatékonyan becsülhető

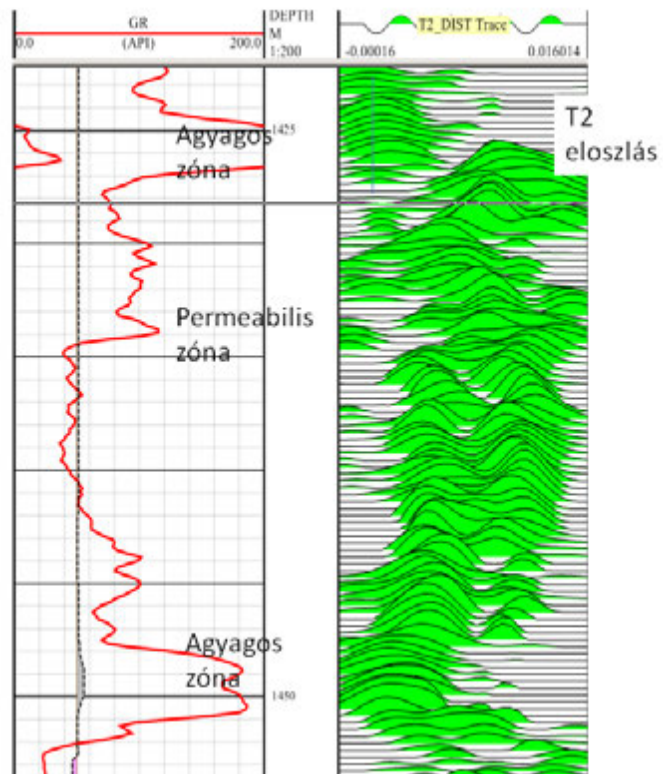
$$k = a \phi^4 \langle \log T_2 \rangle \quad (9.106.)$$

A másik fontos terület – különösen a térben változó terek alkalmazásán alapuló módszerrel – a szénhidrogének pontosabb azonosítása. A szénhidrogének a mérési stratégia (T_1 és T_2) alkalmas megválasztásával azonosíthatók. Pl. többféle polarizációs idő alkalmazásával a könnyebben polarizálható vízfázis elkülöníthető.



9.10. ábra. Tipikus T_2 eloszlás görbe víztartalmú rétegnél

A szabadvíz kötött víz határ, ahogy a 9.10. ábrán látható homokkövek esetében 30 ms-nál vehető fel (homokköveknél). A határ erősen litológia függő, ez nehezíti a módszer alkalmazását. A vizsgálatok azt mutatják, hogy a relaxációs idő eloszlása nagyon jól korrelál a higanytelítési mérésekből származó pórustorok-eloszlás görbével.



9.11. ábra. Fúrólyukban mért T_2 eloszlás görbék, jól mutatják a rövid relaxációs idővel jellemezhető agyagrétegeket, és a nagyobb T_2 -vel jellemezhető szabad pórusvizet. A tároló tetején a szénhidrogén is elkülönül.

10. fejezet - Kőzetek akusztikus és mechanikai tulajdonságai

A kőzetek feszültségtérben (mesterséges vagy természetes) a feszültségtér jellegétől és a kőzetek mechanikai tulajdonságaitól függően, rugalmasan vagy rugalmatlanul deformálódhatnak, vagy nagyobb igénybevételnél törések repedések jöhetnek létre. A deformációs, törési folyamatok vizsgálata lényeges például a tektonikai modellezéseknél, fúrások kialakításánál, tervezésénél, ún. rétegrepesztési eljárások tervezésénél, bányavágatok kialakításánál stb.

A kőzetek rugalmas tulajdonságai a szeizmikus vagy akusztikus hullámok kialakulását és terjedését is meghatározzák, melyek így alkalmasak a kőzetek településének felderítésére és kőzetjellemzők eloszlásának becslésére.

A rugalmas deformációkkal kapcsolatban a kőzetek mechanikus tulajdonságait a Hooke-közelítés alapján, a feszültség (σ) és a deformáció (ϵ) összefüggésének lineáris modellje alapján tárgyaljuk. Megkülönböztetjük a vizsgált térfogatelem térfogati változásával járó kompressziót (dilatációt) és azzal nem járó nyírást.

Megjegyezzük, hogy az erőhatások esetében – az irreverzibilitás szempontjából lényeges az erőhatás fennállásának időtartama is. Ez azzal függ össze, hogy a kőzetben meglevő mikro repedések hosszabb idejű erőhatásra terjednek. A geofizikai mérések (szeizmikus, akusztikus stb.) az időtartam rövid, ilyen típusú irreverzibilis változásokkal nem kell számolni. További megjegyzés, hogy a kis elmozdulások miatt a különböző deformációk nem változtatják meg az anyag rugalmas tulajdonságait így szuperponálhatók.

A feszültség tenzormennyiség (másodrendű, szimmetrikus tenzor), amely egy irányított egységnyi felületre ható erőhatásként értelmezhető, normális és tangenciális komponenseivel (a vektor-vektor hozzárendelés adja a tenzorjellegét). A tenzor elemei a definícióból következően nyomás jellegű mennyiségek. A szimmetria a térfogatelem egyensúlyából következik. A kompressziós erőhatások a diagonális elemekhez köthető. A test deformációit előidéző erők egyensúlyi helyzetben érvényes:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + F_i = 0 \quad (10.1.)$$

A fenti képletben az F_i ún. térfogati erő (pl. a nehézségi erő ilyen), mely nem a vizsgált térfogat felületén fejti ki hatását. Másképpen megközelítve, a térfogat felületén ható összegzett erők (10.2-ben a felületi integrál) egyensúlyt tartanak a térfogatban ébredő rugalmas erőkkel, melyek így a Gauss-törvénnyel kifejezhetők divergenciaként:

$$\oint \sigma_{ik} df_k = \int \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} dV \quad (10.2.)$$

A deformációval kapcsolatos összefüggések levezetésénél egy a deformált tartományon egy kiszemelt távolság ds változását elemezzük a deformációt követően (ds'), ha a lokális elmozdulás vektor u :

$$(ds')^2 = (dx + du_x)^2 + (dy + du_y)^2 + (dz + du_z)^2 \quad (10.3.)$$

Felhasználva, hogy az elmozdulások kicsik:

$$du_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} dx + \frac{\partial u_x}{\partial y} dy + \frac{\partial u_x}{\partial z} dz \quad (10.4.)$$

Ezt a távolság megváltozásába helyettesítve és elhanyagolva a másodrendben kis mennyiségeket:

$$ds'^2 - ds^2 = \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) dx_i dx_j = 2\varepsilon_{ij} dx_i dx_j \quad (10.5)$$

Ebből kiindulva bevezethető az elmozdulásokból a deformáció tenzor (amely szintén másodrendű szimmetrikus tenzor):

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (10.6.)$$

A deformáció tenzor felbontható tisztán nyírási és tisztán kompressziós részre:

$$\varepsilon_{ik} = \left(\varepsilon_{ik} - \frac{1}{3} \delta_{ik} \varepsilon_{nn} \right) + \frac{1}{3} \delta_{ik} \varepsilon_{nn} \quad (10.7.)$$

A nyírási komponens (jobb oldal első tag) az jellemzi, hogy a tenzor spurja, mely a relatív térfogatváltozással azonos, egyenlő zérussal. A kis deformációk esetén a feszültség és deformáció kapcsolata lineáris és reverzibilis.

$$\sigma_{ik} = c_{iklm} \varepsilon_{lm} \quad (10.8.)$$

A lineáris kapcsolatot leíró tenzor elemei a közeg rugalmas jellemzői (modulusok), melyek közül kettő elegendő a homogén, izotróp közegek rugalmas viselkedésének leírására.

A Hooke-törvényt homogén izotróp rugalmas közegre vonatkozó alakja:

$$\sigma_{ik} = K \varepsilon_{nn} \delta_{ik} + 2\mu \left(\varepsilon_{ik} - \frac{1}{3} \delta_{ik} \varepsilon_{nn} \right) \quad (10.9.)$$

A jobb oldal első kompressziós tagjánál az arányossági tényező a kompressziós modulusz (K), míg a második (nyírási tagot) a nyírási modulusz (μ) szorozza. Felírható a fenti összefüggés inverz formában is:

$$\varepsilon_{ik} = \frac{1}{9K} \delta_{ik} \sigma_{nn} + \frac{1}{2\mu} \left(\sigma_{ik} - \frac{1}{3} \delta_{ik} \sigma_{nn} \right) \quad (10.11.)$$

A fontosabb rugalmassági modulusok:

Modulus	Jelölés	Definíció	Leírás
Nyírási modulusz	μ	$\frac{\sigma_{xy}}{2\varepsilon_{xy}}$	nem diagonális elemek arányossági tényezője
Young modulus	E	$\frac{\sigma_{zz}}{\varepsilon_{zz}}$	Adott irányú deformáció arányossági tényezője
inkompresszibilitási, bulk vagy rugalmas modulus	K	$-V \frac{\partial P}{\partial V}$	relatív térfogatváltozásra vonatkozó arányossági tényező
Poisson szám	ν	$-\frac{\varepsilon_{xx}}{\varepsilon_{zz}}$	adott irányú deformációhoz kötődő keresztirányú deformáció aránya
Lamé állandó	λ	$\frac{\sigma_{xx}}{\text{spur}(\sigma)}$	kompresszibilitással összefüggő rugalmas állandó. A nyírási

			modulussal együtt a szabadenergia deformáció szerinti sorfejtésének együtthatója.
--	--	--	---

A fenti állandók nem függetlenek, kettővel kifejezhető az összes többi. A geofizika gyakorlatában a Lamé-állandók (μ, λ) terjedt el, de használják (K, μ) szerinti leírást, mely szemléletesebb jelentéssel bír, illetve használatos még az (E, ν) modulus pár. Mértékegységük nyomás jellegű, kivéve a dimenziótlan Poisson arány. A Poisson-arány általában 0-0.5 között változik, míg a modulusok jellemző értékei 10^{10} - 10^{11} Pa. Megjegyezzük, hogy a bulk modulus reciproka az un. kompresszibilitás.

A rugalmassági modulusoknak mikroszintű jelentést is adhatunk megfelelő mikroszintű modellel (Guéguen, Palciauskas 1994). Vegyünk egy homogén, azonos atomokból/ionokból felépülő anyagot, melynek tömege m_a . Egy atom az egyensúlyi helyzete körül végez mozgásokat, a kitérés egy skalárpotenciállal $(U(r))$ jellemezhető, mely többnyire elektrosztatikus jellegű vonzó kölcsönhatások és Pauli-elvből származó taszítás eredménye. Vizsgáljuk példaként a kompresszibilitást. Vegyünk egy V térfogatot, melyben az atom a szomszédos atomok által behatároltan végezheti a mozgását:

$$V = r^3 \pi \frac{4}{3} \quad (10.12.)$$

Az r a rács két elemének távolságát jelenti. Így a kompresszibilitás a nyomás és a relatív térfogatváltozás arányával kifejezve:

$$\frac{1}{K} = -\frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial P} \quad (10.13.)$$

Felhasználva továbbá:

$$P = -\frac{\partial U}{\partial V} \quad (10.14.)$$

Melyből:

$$K = V \frac{\partial^2 U}{\partial V^2} \quad (10.15.)$$

Közvetett derivált segítségével:

$$P = -\frac{dU}{dr} \frac{dr}{dV} = -\frac{1}{4\pi r^2} \frac{dU}{dr} \quad (10.16.)$$

így az inkompresszibilitás:

$$K = \frac{4}{3} \pi r^3 \frac{\partial}{\partial V} \left(\frac{1}{4\pi r^2} \frac{\partial U}{\partial r} \right) = \frac{4}{3} \pi r^3 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{4\pi r^2} \frac{\partial U}{\partial r} \right) \frac{dr}{dV} = \frac{r}{12\pi} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial U}{\partial r} \right) \quad (10.17)$$

$$K = \frac{r}{12\pi} \left(-\frac{2}{r^3} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} \right) \quad (10.18.)$$

Mivel az egyensúlyi helyzetnél – minimum hely – a potenciál r -szerinti deriváltja zérus, K kifejezhető a másodrendű deriválttal:

$$K_0 = \frac{1}{12\pi r_0} \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} \bigg|_{r=r_0} \quad (10.19)$$

Amely a becslés kedvéért közelíthető:

$$K_0 = \frac{1}{12\pi r_0} \frac{U_0^2}{r_0^2} \quad (10.20.)$$

Behelyettesítve az atomi méreteket és az atomi szintű elektrosztatikus potenciált, 10^{10} Pa értéket kapunk K_0 -ra. Megjegyezzük, hogy a sűrűség és atomtömeg segítségével – makroszkopikus jellemzővel – kiváltható az atomsugár.

A rugalmas tulajdonságokat laboratóriumban, megfelelő deformációk létrehozásával mérik. A geofizika gyakorlatában a rugalmas hullámok terjedése alapján határozhatók meg. Fontos megjegyezni, hogy a kőzettestekben a terjedési sebességek gyakran frekvenciafüggést mutatnak, így eltérő lehet a szeizmikus sebesség (100 Hz alatti frekvencia tartomány) és az akusztikus szondákkal mért sebesség (20 kHz tartomány), ennek megfelelően különbözhet a kőzetfizikai modell is.

10.1. Homogén izotróp közegek

Homogén közegre a deformáció és a feszültségek összefüggése alapján, mozgásegyenlet is felírható a térfogatelemre. Baloldalon a feszültség tenzor elemeinek deriváltjaival kifejezett rugalmas erők, míg a jobb oldalon a térfogat elem tömege és gyorsulása látható:

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (10.21.)$$

A Hooke-összefüggés felhasználásával az egyenlet baloldalán a feszültség tenzor elemei kifejezhetők az elmozdulás vektor komponenseivel. A vektoregyenlet szeparálható egy divergencia mentes és egy rotáció mentes egyenletre, azaz egy longitudinális hullám egyenletére:

$$[\lambda + 2\mu] \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} \quad (10.22.)$$

és egy transzverzális hullám egyenletére:

$$\mu \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} \quad (10.23.)$$

A fenti két módus az un. térhullámok. Felületeknél a határfeltételek alapján további un. felületi hullám módusok jöhetnek létre. A longitudinális hullám terjedési sebessége a hullámegyenletből kifejezhető a rugalmas állandókkal:

$$v_p = \sqrt{\frac{K + \frac{4}{3}\mu}{\rho}} = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \quad (10.24.)$$

ahogy a transzverzális hullámé is:

$$v_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad (10.25.)$$

A kőzetekre jellemző modulus és sűrűség értékeket behelyettesítve, jellemzően néhány km/s terjedési sebességet kapunk. A hullámforrások körül kialakult hullámtér alkalmas a kőzetrétegek, szerkezetek geometriájának felderítésére reflexiós vagy refrakciós szeizmika segítségével. A réteghatárokon való visszaverődés szempontjából alapvető mennyiség az ún. akusztikus impedancia:

$$Z = \rho \cdot v \quad (10.26.)$$

Mely meghatározza a reflexivitást, a visszaverődő hullám és áthaladó hullám relatív amplitúdóját. A reflexió szög és frekvenciafüggő is lehet. A mért p és s-hullám sebességekből a rugalmas kőzetjellemzők becsülhetők. Pl a Poisson-arány:

$$\nu = \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{v_p}{v_s}\right)^2 - 2}{\left(\frac{v_p}{v_s}\right)^2 - 1} \quad (10.27.)$$

A Poisson arány is felhasználható pl. a litológia azonosításánál, de érzékeny a repedések megjelenésére is. Elsősorban a mélyfúrási geofizikai mérésekből meghatározott akusztikus terjedési sebességek, de a szeizmikus sebességek is felhasználhatók kőzetösszetétel becslésre.

Kőzet / kőzetösszetevő	V _p [m/s]	V _s [m/s]
Talaj	300-700	100-700
Homokkővek	2000-3500	800-1800
Mészkővek	3500-6000	2000-3300
Dolomit	3500-6500	1900-3600
Bazalt	5000-6000	2800-3400
Gránit	4500-6000	2500-3300
Só	4500-5500	2500-3100
Szén	2200-2700	1000-1400
Víz	1450-1500	-
Olaj	1200-1250	.

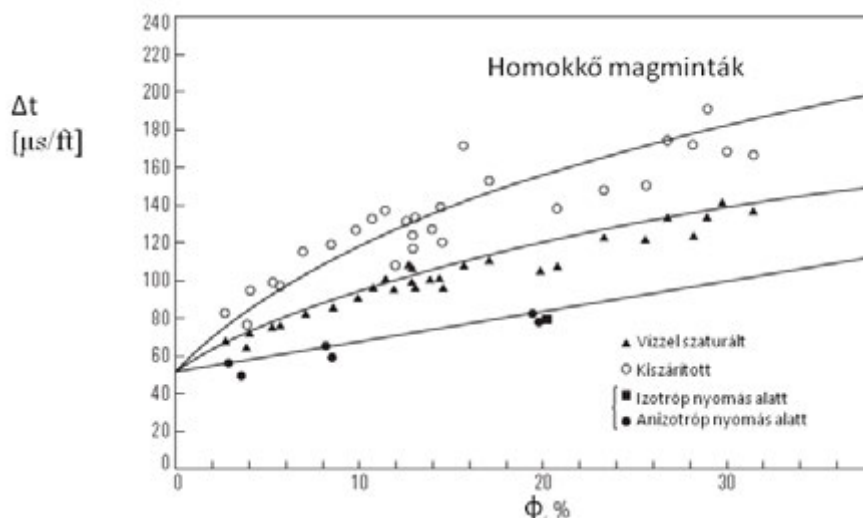
Kőzetösszetevők szeizmikus sebességei (p és s-hullámra)

A póruskitöltő anyagok és a mátrix terjedési sebességek között mutatkozó nagy kontraszt alapján, az akusztikus sebesség nagy érzékenységgel használható fel porozitás meghatározására.

10.2. Fontosabb kísérleti adatok a kőzetfizikai modellezéshez

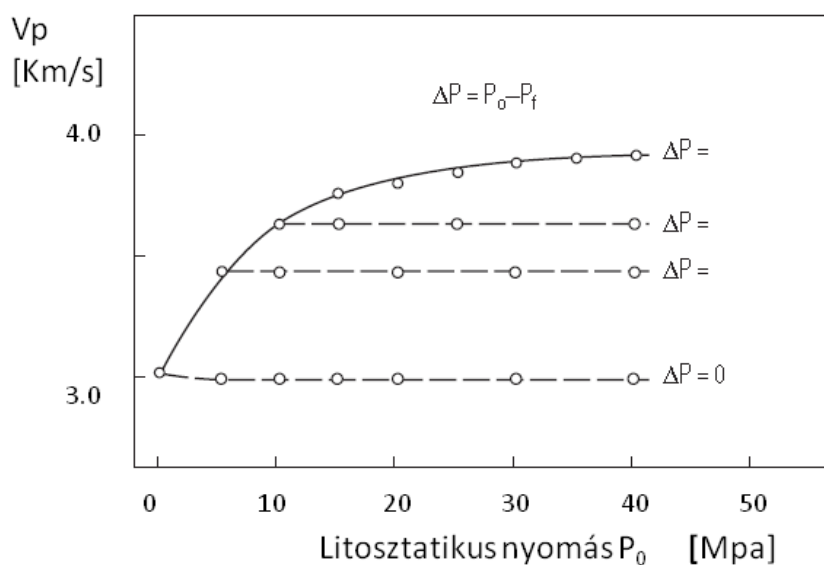
A kőzetfizikai modellezés legfontosabb alapadatai az akusztikus terjedési sebességek tekintetében is a fűrómagokon elvégzett labormérések. A labormérésekkel igyekeztek elkülönítve vizsgálni a kőzetösszetétel, a porozitás, a póruskitöltő fluidum hatását.

A 10.1. ábrán a porozitás hatása látható, ahogy a póruster növekedése a fajlagos akusztikus terjedésideő (un. slowness -Δt) növekedéséhez vezet.



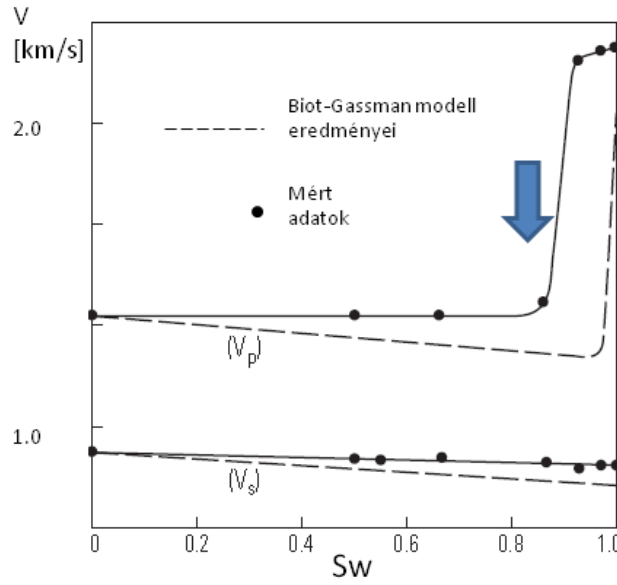
10.1. ábra. A fajlagos terjedési idő növekedése a porozitással. (Wyllie et al, 1956) nyomán

A kísérleti eredmények mutatják egy közelítő lineáris modell jóságát és határait. A kísérletek tanulságai szerint, az akusztikus-szeizmikus közetmodellben különösen nagy a jelentősége a közetszemcsék kontaktusának. Ez nyilvánul meg a terjedési sebesség nyomásfüggésében. Különösen meghatározó az ún. differenciális nyomás, mely a pórustér nyomásának és a litosztatikus nyomásnak a különbsége. Valójában ez terheli a közetvázat, így a sebesség és a rugalmas paraméterek szempontjából is meghatározó.



10.2. ábra. A nyomás emelkedése a terjedési sebesség növekedését idézi elő, de meghatározó a differenciális nyomás. (Wyllie et al, 1958)

További fontos kísérletekkel a pórustérbeli gáz hatását derítették fel. A gáz jelentős kompresszibilitása miatt hatással van a szeizmikus hullámterjedésre. Az s hullám esetében, ahol a terjedést a közetváz határozza meg ez az effektus jóval kisebb. A p-hullám esetében már 10 %-os gázsaturáció is jelentősen csökkenti a terjedési sebességet, megváltoztatva többek között a differenciális nyomást. A nagyobb gázsaturáció esetében tapasztalható enyhe sebesség növekedés, az átlagsűrűség csökkenésével magyarázható.



10.3. ábra. Gáz szaturáció hatása a p és s-hullám sebességére (Timur, 1987)

A gáz jelenléte a p-hullám amplitudó csökkenésében is megmutatkozik. A fenti hatások miatt a szeizmikus szelvényen nagy reflexiós amplitúdóval direkt szénhidrogén indikációk is megjelenhetnek (bright-spot), a gáztároló tetejénél található nagy akusztikus impedancia kontrasztnak köszönhetően.

10.3. Rugalmas hullámok terjedésének empirikus modelljei

Az előző fejezetben is tárgyalt Wyllie által elvégzett kísérletek tanulságai szerint a több komponensű közeg esetén korlátokkal, de viszonylag jól használható a lineáris modell, az ún. átlagidő egyenlet:

$$\Delta t = \sum_i V_i \Delta t_i \quad (10.28.)$$

vagy sebességekre:

$$\frac{1}{v} = \sum_i V_i \frac{1}{v_i} \quad (10.29.)$$

Vegyük észre, hogy a kompozit egyenlet éppen a Reuss-határral becsli a több komponensű közeg sebességét.

Itt is bevezethető – a kétkomponensű közeg modellből kiindulva – a látszólagos akusztikus porozitás:

$$\phi_a = \frac{\Delta t - \Delta t_{ma}}{\Delta t_f - \Delta t_{ma}} \quad (10.30.)$$

Hogy a formula kevésbé konszolidált üledékes kőzetekre is alkalmazható legyen, szokás ennek figyelembevételére korrekciós faktort alkalmazni (B_c).

$$\phi_a = \frac{\Delta t - \Delta t_{ma}}{\Delta t_f - \Delta t_{ma}} \cdot \frac{1}{B_c} \quad (10.31.)$$

A kompakciós faktor becslésére egy közeli agyagréteg fajlagos terjedési idejének század részét szokták alkalmazni. A becslésnél kihasználják, hogy az agyagrétegek akusztikus terjedési sebessége kompakció függő, így kompakciós trendek felvételére is alkalmas.

A 10.1. ábrán látható nemlineáris tendenciát is figyelembe veszi az un. Raymer-Hunt modell.

$$\frac{1}{\Delta t} = \frac{\phi}{\Delta t_f} + \frac{(1-\phi)^2}{\Delta t_{ma}} \quad (10.32.)$$

A fenti összefüggések egyik legfontosabb hiányossága, hogy a gáztelítettség hatását az alkalmazott matematikai modellek nem írják le megfelelően. A sebességek nyomásfüggése és az agyaghatás kezelése is problematikus.

10.4. Akusztikus kőzetfizikai modellek

Az akusztikus kőzetfizikai modellek célja az előző fejezetben leírt modellek hiányosságainak megszüntetése valós mikroszintű modell segítségével. Az akusztikus modellezésnél felhasználják az általános homogenizációs elveket, de ahogy említettük a rugalmas hullámok terjedésénél a szemcsék közötti kontaktusnak fontosabb a szerepe.

A probléma közelíthető úgy hogy az összetevők sebességéből állítunk elő ekvivalens sebességet, de közelíthető a probléma a rugalmas állandókra vonatkozó homogenizációs egyenletek felől. Ez utóbbi az un. poroelastikus modellezés, amelyben fontos szerepet kap a pórusfolyadék és a pórusfolyadék és a cementált szemcsék alkotta kőzetváz kölcsönhatásának, relatív mozgásának vizsgálata.

A folyadék csatolásnál figyelembe kell venni, hogy összefüggő-e a pórushálózat (un. drained model), vagy a pórustér lezárja a folyadékmozgást.

10.4.1. Gassmann-modell

A kisméretű hullámterjedés modellezésénél lényeges kőzetfizikai modell az un. Gassmann-modell. Egyensúlyi helyzetben vizsgálja a teljes kőzet inkompresszibilitási modulusát (K) és nyírási modulusát (μ). A modell egyik fontos sajátossága, hogy külön kezeli a póruskitöltés nélküli kőzetvázat, annak rugalmas tulajdonságait.

A modell paraméterei a kőzetmátrix anyagának modulusai (μ_m, K_m), a kőzetváz modulusai (μ_s, K_s), a kitöltő folyadék inkompresszibilitása (K_f) és a folyadékkal szaturált kőzet ekvivalens modulusai (μ, K).

Ésszerű kiindulási feltételezés, melyet a kísérleti adatok is jórészt alátámasztanak, hogy a folyadékkal szaturált és az üres pórustérű kőzetváz nyírási modulusa megegyezik.

$$\mu = \mu_s \quad (10.33.)$$

Felírhatjuk a keresett ekvivalens inkompresszibilitási modulus definícióját:

$$K = - \frac{\Delta P}{\frac{\Delta V}{V}} \quad (10.34.)$$

Feltételezzük, hogy megoszlik a nyomás a pórustér és a kőzetváz között és az ennek hatására bekövetkező térfogatváltozás részben a pórustér csökkenéséből részben a váz deformációjából és a szemcseátrendeződéséből származik:

$$\Delta P = \Delta P_f + \Delta P_s \quad (10.35.)$$

A térfogatváltozás is két elemre bontható:

$$\Delta V = \Delta V_f + \Delta V_m \quad (10.36)$$

A szemcseátrendeződésből származó változás is végső soron folyadék kompressziót okozhat.

A folyadékkal kitöltött pórus térfogatváltozása felírható a pórusnyomás és folyadék kompresszibilitás segítségével, alkalmazva a inkompresszibilitás definícióját.

$$\Delta V_f = -\phi V \frac{\Delta P_f}{K_f} \quad (10.37)$$

A közetváz térfogatváltozása két faktorra bontható, ha a mátrix anyagának inkompresszibilitásával akarjuk kifejezni, különválasztva a váz deformációjából származó komponenst.

$$\Delta V_m = -(1-\phi)V \frac{\Delta P_f}{K_m} - V \frac{\Delta P_s}{K_m} \quad (10.38)$$

Az első komponens a szemcsék deformációja nélküli, szemcseátrendezésből származó pórusnyomás növekedésből származó szemcsék felületén jelentkező hatást reprezentálja, a második tag a vázra nehezedő többletnyomásból eredő kompresszió.

Rendezzük át úgy a fentieket a két egyenlet összeadásával, hogy baloldalra kerüljön a relatív térfogatváltozás

$$\frac{\Delta V_f + \Delta V_m}{V} = \frac{\Delta V}{V} = \left[-\frac{\phi}{K_f} - \frac{1-\phi}{K_m} \right] \Delta P_f - \frac{1}{K_m} \Delta P_s \quad (10.39.)$$

Másmódon is felírhatjuk a relatív térfogatváltozást, ha úgy szeparáljuk gondolatban a kőzetet, mint üres közetváz és pórusfolyadék. A közetvázra külön kompresszibilitást definiáltunk (K_s).

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta V_f + \Delta V_m}{V} = -\frac{1}{K_f} \Delta P_f - \frac{1}{K_s} \Delta P_s \quad (10.40.)$$

A két egyenletből kifejezve a teljes nyomást és ennek segítségével az ekvivalens kompresszibilitási faktort bevezetve:

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta P}{K} = \Delta P_f \left[\frac{1}{K_s} - \frac{1}{K_f} \right] - \frac{\Delta P}{K_s} \quad (10.41)$$

A teljes nyomásváltozás így kifejezhető a folyadék nyomásváltozásával. Ezt visszaírva 10.39.-be, az ekvivalens inkompresszibilitási tényezőre az alábbi kifejezést kapjuk:

$$K = K_s + \frac{(1-r)^2}{\frac{\phi}{K_f} + \frac{1-\phi}{K_m} - \frac{K_s}{K_m^2}} \quad (10.42)$$

ahol

$$r = \frac{K_s}{K_m}$$

Vagy más formában felírva:

$$\frac{K}{K_s - K} = \frac{K_s}{K_m - K_s} + \frac{K_m}{\phi(K_m - K_f)} \quad (10.43.)$$

A közetre megadott modulusokkal a terjedési sebességek már megadhatók:

$$v_p = \left(\frac{1}{\rho} \left(K_s - \frac{4}{3} \mu_s \frac{\left(1 - \frac{K_f}{K_m} \right)^2}{1 - \frac{K_f}{K_m} - \phi + \frac{\phi K_m}{K_f}} \right) \right)^{0.5} \quad (10.44.)$$

$$v_s = \sqrt{\frac{\mu_s}{\rho}} \quad (10.45.)$$

Az összefüggésben szerepelnek a közetmátrix, a szemcsék és a kitöltő folyadék rugalmas állandói. A modell egyik kritikus pontja váz inkompresszibilitása, amely az ún. Biot összefüggésből származtatható:

$$K_s = K_m \cdot (1 - \beta\phi) \quad (10.46.)$$

A β ún. Biot-koefficiens elméleti modellekből vagy kísérleti eredményekből ismert. A Gassmann-modell leírja a folyadékkal szaturált közetben történő hullámterjedést alacsony frekvenciák esetén, jó közelítést nyújtva a gáztartalom hatásának kezelésére is (10.3. ábra).

A nagyobb frekvenciájú hullámok terjedésének vizsgálatánál Biot a rugalmas hullámokra vonatkozó differenciálegyenletet átalakította, megengedve, hogy a póruskitöltő folyadék áramolhat a közetvázhoz képest (Biot 1956). Ebben csatolta a folyadékmozgás és a vázmozgás egyenletét. A folyadék és a váz relatív elmozdulása úgy is tekinthető, mint lokális folyadékáramlás a porózus közetben. Az áramlást a permeabilitásra vonatkozó egyenletek pl. a Darcy egyenlet írja le. Ez a tag az erőhatások közé írva egy disszipatív tagot definiál, mely a folyadék sebességgel arányos. A feladat könnyebb megoldhatósága érdekében Biot átlagos relatív vízmozgást feltételezett. A folyadék jellemzőiből álló disszipatív tag együtthatója egy határfrekvenciát (10.47.) definiál, mely felett a Biot-közelítés feltételezéseit alkalmazni kell.

$$f_h = \frac{\eta\phi}{2\pi\rho_f} \quad (10.47.)$$

Anélkül, hogy részleteznénk a megoldást, a probléma érzékeltetése végett felírjuk a csatolt differenciálegyenleteket az u közetváz elmozdulásra és w a folyadék relatív elmozdulására, összeköttetésben levő póruster esetére (drained)

$$\begin{aligned} \rho_b \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \rho_f \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= M_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + M_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \\ \rho_f \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + M_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= M_{21} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + M_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\eta}{k} \frac{\partial w}{\partial t} \end{aligned} \quad (10.48.)$$

Az $\mathbf{M}$ elemei rugalmas együtthatókból és porozitásból épülnek fel. A második egyenlet végén látható a Darcy csatolás. Ennek a disszipatív tagnak a következménye a 10.4.2. fejezetben vázolt viszko-elasztikus viselkedés.

A hullámterjedés modellezésében is szerepet kapnak a homogenizációs módszerek, de inkább a szuszpenziók leírására alkalmasak.

Hullámterjedésre vonatkozó becsléseknél felhasználgják a különböző inhomogén rendszerekre levezetett határok (Hashin-Strickman, Voigt, Reuss).

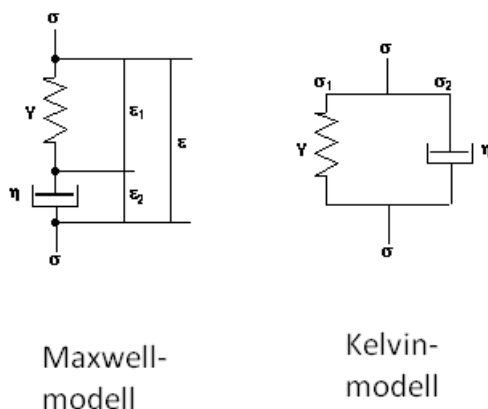
A folyadékok kompresszibilitásának kompozíciójánál (gáz-víz) leggyakrabban a Reuss-típusú átlagolást használják. A Reuss-típusú átlaggal meghatározott modulusokat, mint ekvivalens modulus helyettesítve megkaphatjuk a szeizmikus sebesség becslését (Wood-féle becslés).

Reuss-típusú átlaggal határozzák meg az összetett mátrixok ekvivalens modulusait is.

Rétegzett – szeizmikus hullám szempontjából nem felbontható – réteg együttes ekvivalens értékét a rétegvastagságokkal súlyozva hasonlóan állítják elő a rétegeket jellemző modulusokból (Backus-átlag). A modulusokra vonatkozó Reuss és Voigt átlagok átlaga szintén használatos ekvivalens sebességek meghatározására (Hill)

10.4.2. Amplitúdó csillapodás

A Biot-modell tartalmaz egy folyadék relatív sebességgel arányos a disszipatív tagot. Ez amplitúdó csillapodást és fázistolást okoz, mely szintén felhasználható kőzettani információk szerzésére. Ez az un. viszko-elasztikus viselkedés frekvenciafüggő csillapodást okoz. A probléma un. viszko-elasztikus modellek segítségével tárgyalható.



10.4. ábra. Viszkoelasztikus viselkedés 2 modellje.

Az energia elnyelődés a modell szerint a feszültség és deformáció eltérő fázisával magyarázható. A vizsgálathoz a két mennyiséget általánosított lineáris modellben most komplex, frekvenciafüggő modulus kapcsolja össze (M) (Guéguen, Palciauskas 1994).

$$M = M_1 + iM_2 \quad (10.48)$$

A különböző modellekben a kapcsolatot sorba és párhuzamosan kapcsolt rugalmas és viszkózus elemekkel írják le (Maxwell, Kelvin-Voigt, Burgers stb. modellek)

Vizsgáljuk meg példaképp a Maxwell-modellt. A sorba kapcsolás miatt a teljes deformáció a rugalmas (a) és rugalmatlan (b) deformáció összege, míg a feszültségnek azonosnak kell lennie a két elemen.

$$\varepsilon = \varepsilon_a + \varepsilon_b \quad (10.49.1.)$$

$$\sigma = \sigma_a = \sigma_b \quad (10.49.2.)$$

Írjuk fel a Hooke-törvényt, szem előtt tartva, hogy a viszkózus tagnál a feszültséget a deformáció változása okozza:

$$\begin{aligned} \sigma_a &= M\varepsilon_a \\ \sigma_b &= \eta_b \frac{d\varepsilon_b}{dt} \end{aligned} \quad (10.50.)$$

Legyen az elmozdulás (kényszerrezgésben) periodikus:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 e^{i\omega t} \quad (10.51.)$$

$$\sigma = M\varepsilon \quad (10.52.)$$

A deformáció teljes időbeli változása:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{d\sigma_a}{M_a} + \frac{\sigma_b}{\eta_b} \quad (10.53.)$$

Harmonikus gerjesztés estén:

$$i\omega\varepsilon_0 e^{i\omega t} = \frac{Mi\omega\varepsilon_0 e^{i\omega t}}{M_a} + \frac{M\varepsilon_0 e^{i\omega t}}{\eta_b} \quad (10.54.)$$

Innen M frekvencia függése:

$$i\omega = \frac{Mi\omega}{M_a} + \frac{M}{\eta_b} \rightarrow M = i\omega M_a \eta_b \frac{1}{i\omega\eta_b + M_a} = \frac{i\omega\tau}{1 + i\omega\tau} M_a \quad (10.55.)$$

ahol: $\tau = \frac{\eta_b}{M_a}$ a karakterisztikus idő, mely megszabja az átvitel frekvencia függését. Látható, hogy nagy frekvenciáknál nincs fázistolás és M_a a meghatározó, míg kisfrekvenciáknál 90 fokos tolás van és a viszkozitás a meghatározó.

A szeizmikus szelvényeken az elasztikus energiavesztés jellemzésére gyakran becslik az ún. Q-faktort. Ez lokálisan egy periódusra vonatkozó energiavesztést fejezi ki. Definíciója:

$$Q^{-1} = \frac{1}{2\pi} \frac{\Delta W}{W} \quad (10.56.)$$

Az elmozdulás (u) időfüggvénye adott frekvencián az elmozdulás irányában:

$$u = u_0 e^{i\omega \left(t - \frac{x}{v} \right)} \quad (10.57.)$$

A viszko-elasztikus modellekből a komplex modulusok segítségével frekvenciafüggő komplex sebesség származtatható, mely felelős az amplitúdó csökkenésért. Ha ennek figyelembevételével átírjuk az elmozdulásra vonatkozó összefüggést:

$$u = u_0 e^{-\alpha x} e^{i\omega \left(t - \frac{x}{v_0} \right)} \quad (10.58.)$$

Belátható, hogy az amplitúdó csökkenésért felelős α faktor kifejezhető a Q-faktorról:

$$\alpha = \frac{\omega Q^{-1}}{2v_0} \quad (10.59.)$$

A folyadék, gáz tartalom illetve repedések megjelenése okoz jelentős viszko-elasztikus tagot a hullámterjedésnél.

11. fejezet - Kőzetek hővezető képessége

A kőzetekben zajló hő transzport összetett folyamat és több anyagi jellemző függvénye. Az ezzel kapcsolatos közzefizikai paraméterek geotermikus energia kiaknázásánál, geotermikus rezervoárok feltárásánál, különösen lényegesek. Az üledékek hőmérséklet-történetének rekonstrukciója fontos eleme a szénhidrogén kutatásnak, hiszen a szénhidrogének keletkezését, érését, átalakulását alapvetően meghatározza a hőmérséklet.

A kőzetekben a hőtranszport (hőenergia terjedése) kétféle módon valósulhat meg, advekciónal (pórusfolyadék részvételével) és hővezetés révén. A advektív hőtranszport függ az áramló folyadék mennyiségétől (Darcy-sebesség), fajhőjétől (c) és hőmérsékletétől.

$$Q = qcT\rho \quad (11.1.)$$

Az ilyen típusú transzport módhoz megfelelő permeabilitás szükséges, így elsősorban a kéreg felső 10 km-en jellemző. A tömegáramot meghatározó Darcy-sebesség a Darcy-törvényből származtatható.

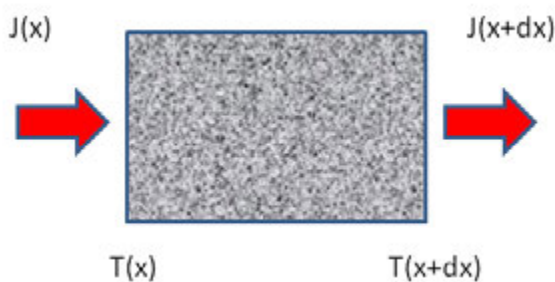
Hőtranszport történhet nettó tömegáram nélkül is, ilyenkor hőmozgás – rezgésállapotok – továbbterjedésével valósul meg a hővezetés (fonon). A hővezetést a Fourier-törvény írja le a hőáramra (J) vonatkozóan:

$$J_i = -\lambda_{i,j} \frac{\partial T}{\partial x_j} \quad (\text{ha a hővezetés anizotrop}). \quad (11.2.)$$

Általában a kőzetalkotó ásványok jelentős részénél van ilyen anizotrópia, viszont a véletlen orientáció miatt a kőzeteknél ez már nem figyelhető meg. Ekkor a Fourier-törvény egyszerűbb formát ölt:

$$J_x = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x_j} \quad (11.3.)$$

Írjuk fel a hő transzportban résztvevő térfogatelemre az energiamérleg-egyenletet x irányú hőfluxus mellett.



11.1. ábra. Hővezetés térfogatelemen

Ekkor a különbség a belső energiaváltozásra fordítódik és ezzel összefüggésben hőmérsékletváltozásra:

$$c\rho\delta T\delta xA = (J(x) - J(x+dx))\delta t \quad (11.4.)$$

Ha a térfogatelemben nincs hőforrás, formálisan átrendezve:

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial J}{\partial x} \quad (11.5.)$$

Az egyenletet 3 dimenzióra általánosítva:

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} + \nabla \mathbf{J} = H \quad (11.6.)$$

A hőfluxus ($\mathbf{J}$) itt tartalmazza az advektív és konduktív elemeket is, H a lokális hőforrás, amely eredhet pl. radioaktív bomlásból.

Vizsgáljuk most csak a konduktív esetet mikor $q = 0$. Ekkor a Fourier-összefüggés (11.3.) felhasználásával:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \nabla^2 T \quad (11.7)$$

Parciális differenciálegyenletet kapunk a hőmérsékleti mezőre, formailag diffúziós egyenlet.

Melyben a jobb oldalon megjelenő állandó:

$$\alpha = \frac{\lambda}{c\rho} \quad \text{az un. hődiffúzitívitas.} \quad (11.8)$$

Közeteknél tipikus értékek: $\lambda = 2-3 \text{ W/m/C}$ és $\alpha = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$

A diffúziós egyenletet Fourier-módszerrel oldhatjuk meg szeparálva a változókat.

$$\frac{T'(t)}{\alpha T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} \quad (11.9)$$

Ennek megoldásai:

$$\begin{aligned} T(t) &= A e^{-\kappa \alpha t} \\ X(x) &= B \sin(\sqrt{\kappa} x) + C \cos(\sqrt{\kappa} x) \end{aligned} \quad (11.10.)$$

A megoldás komplex alakban is felírható, így szemléletesen a forrás változásaihoz képesti fáziskésés is bevezethető.

11.1. Inhomogén közet hővezető képessége

Közetalkotó ásványok hővezetőképessége többnyire 1-10 W/m/C között váltakozik. Mérése gyakran impulzusszerű felfűtés hatásának időbeli változásából történik, azaz a hőmérsékleti mező karakterisztikus pontjainak mérésével.

Keverék hővezetőképessége becsülhető a Hashin-Strikman határokból az alábbi módon:

$$\lambda_{\text{eff}} = \frac{1}{2} (\lambda_{\text{alsó}} + \lambda_{\text{felső}}) \quad (11.11)$$

Kétkomponensű közet esetére:

$$\lambda_{\text{alsó}} = \lambda_s \left(1 + \frac{3\Phi \delta \lambda}{3\lambda_s + (1-\Phi)\delta \lambda} \right) \quad (11.12.)$$

$$\lambda_{\text{felső}} = \lambda_w \left(1 - \frac{3(1-\Phi)\delta \lambda}{3\lambda_w - \Phi \delta \lambda} \right) \quad (11.13.)$$

A hővezetőképesség esetében is alkalmazhatók a 2. fejezetben levezetett ekvivalens paraméterek, bár a hővezetés esetében is igen fontos elem a szemcsék kontaktusa. Ez jelenik meg a hővezetőképesség nyomásfüggésében.

A mátrixalkotók esetére Debye fonon-modell alkalmazásával, a fonon-gáz transzportjából vezethető le a hővezető képesség hőmérséklet függése. Kristályos anyagokra a hőmérséklettel fordítottan arányos hővezetőképesség kapható, melyet a kísérleti adatok is alátámasztanak Pl.:

$$\lambda_{\text{quartz}} = 7.67 \left(1 + 4 \cdot 10^{-3} T\right)^{-1} \quad \lambda_{\text{földpát}} = 2.3 \left(1 + 5 \cdot 10^{-4} T\right)^{-1} \quad (11.14.)$$

Víz esetében azonban más a helyzet, a hőmérséklet növekedése javítja a hőtranszportot, a molekulák mozgékonyságának növekedésével.

$$\lambda_w = 0.93 \left(1 + \frac{T}{273}\right)^{3/2} - 0.37 \left(1 + \frac{T}{273}\right)^{5/2} \quad (11.15.)$$

A fenti kifejezések, a hővezető képességek hőmérséklet-függése nemlinearitást visznek a problémába.

11.2. Hővezetés Debye-féle modellje

A konduktív hőtranszport kristályos anyagokban tárgyalható fonon-transzportként, azaz a rezgésállapotok terjedésének vizsgálatával (Allison W. 2013). A rácsrezgések a rács hőmérsékletnek megfelelő energia eloszlású fonon populációval jellemezhető. Hasonlóan a fotonokhoz, a fononoknak is értelmezhető a frekvenciától függő energiája és impulzusa. A hő konduktív terjedése során vizsgálható a hőmérsékleti eloszláshoz képest többlet energiával rendelkező fononok transzportja.

A fononok transzportjuk során többféle mechanizmus révén szóródhatnak, megváltoztatva a fonon impulzusát és energiáját. A szóródási folyamathoz ez esetben is rendelhető szabad úthossz (l).

A hőtranszport történjen homogén összetételű kristályos anyagban x -irányban és a kapcsolódó fonon-transzportot vizsgáljuk egy x -irányra merőleges síkon. Írjuk fel, hogy az x -tengellyel α szöget bezáróan mozgó fononok átlagos szabad úthosszán mekkora a hőmérsékletváltozás:

$$\Delta T = -\frac{\partial T}{\partial x} \Delta x = -\frac{\partial T}{\partial x} l \cos \alpha \quad (11.16.)$$

A negatív előjellel figyelembe vettük a hő terjedésének irányát a hőmérsékleti gradienshez képest. A fonon energia eloszlás megfigyelhető a fonon terjedési sebesség (v) eloszlásnak. Legyen $f(v)$ az ehhez rendelhető sűrűségfüggvény. Rögzített számú, n fonon esetében a v és $v+dv$ sebességintervallumba eső fononszám:

$$n \cdot f(v) dv \quad (11.17.)$$

Adott fonon által szállított többlet energiát (ΔE_f) kifejezhetjük a hőmérséklet növekménnyel, ha bevezetjük a fononra vonatkozó fajhőt c_f .

$$\Delta E_f = c_f \Delta T \quad (11.18.)$$

Feltételezve, hogy a szög szerinti eloszlás egyenletes α szög körül $d\alpha$ intervallumba szóródás valószínűsége tehát:

$$\frac{2\pi \sin \alpha d\alpha}{4\pi} = \frac{-d \cos \alpha}{2} \quad (11.19.)$$

Összegezve a sebesség eloszlásra és szög eloszlásra a fononokhoz tartozó hőfluxust (J):

$$J(x) = \int_0^{\infty} \int_1^{-1} (v \cos \alpha) \left(c_f l \cos \alpha \frac{\partial T}{\partial x} \right) \left(\frac{d \cos \alpha}{2} n f(v) dv \right) \quad (11.20.)$$

Kiemelve a nem változó mennyiségeket:

$$J(z) = \frac{c_f n l}{2} \frac{\partial T}{\partial x} \int_1^{-1} \cos^2 \alpha d(\cos \alpha) = \frac{c_f n l}{2} \frac{\partial T}{\partial x} E(v) \frac{1}{3} [x^3]_1^{-1} = \frac{c_f n l}{3} \frac{\partial T}{\partial x} E(v) = \frac{c \cdot l}{3} \frac{\partial T}{\partial x} E(v) \quad (11.21.)$$

Ahol $E(v)$ a fononsebesség várhatóértéke. Ebből a hővezetőképesség:

$$\lambda = \frac{1}{3} c E(v) l \quad (11.22.)$$

A modell alapján kapott hővezetőképesség hőmérsékletfüggése is vizsgálható.

A hőmérsékletfüggés a kifejezés tényezőinek hőmérsékletfüggése által meghatározott. A szabadúthossz a fonon szórási valószínűség reciproka. A fononszórás esetében pl. a rácshibákra való szóródás geometriai és hőmérsékletfüggés szempontjából elhanyagolható, a fonon-fonon szórás viszont hőmérsékletfüggő, a hőmérséklettel közelítőleg lineárisan növekvő valószínűségű, így a szabad úthossz a hőmérséklettel fordítottan arányos, amely megjelenik a kristályos anyagok hővezetőképességében is.

Irodalom

- Aguilera, MS és Aguilera, R.. 2003. *Improved models for petrophysical analysis of dual porosity reservoirs* In: *Petrophysics*. American Journal on Mental Retardation. No. 44. Vo 1.. 21-35..
- Allison, W.. 2013. *Lecture notes – statistical physics*. Cavendish Laboratory. <http://www-sp.phy.cam.ac.uk/~wa14/camonly/statistical/Lecture13.pdf>.
- Archie, G. E.. 1942. *The electrical resistivity log as an aid in determining some reservoir characteristics*. Trans. AIME (Am. Inst. Min. Metall. Eng.). Vo. 146.. 54-67..
- Balázs, L.. 2009. *Egyenáramú elektromos mérések modellezése inhomogén közegekben*, PhD értekezés. ELTE.
- Bergman, D.J.. 1978. *The dielectric constant of a composite material - a problem in classical physics*. In: *Phys. Reports*. Vo 43C.. 377-407..
- Beran,, M.. 1968. *Bounds on field fluctuations in a random medium* In: *J. Appl. Phys.* Vo 39.. 5712-5714..
- Biot, M.A.. 1956. *Theory of Propagation of Elastic Waves in a Fluid-Saturated Porous Solid*. The Journal Of The Acoustical Society Of America. No. 2. Vo 28.. 179-191..
- Buckley, S.E. és Leverett, M.C.. 1942. *Mechanism of Fluid Displacement in Sands*. AIME. Vo 146.. 107..
- Coates, G.R. és Dumanoir, J.L.. 1974. *A New Approach to Improved Log-Derived Permeability* In: *The Log Analyst*. January-February. 17..
- Eshelby, J.D.. 1957. *The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems*. Proc. Roy. Soc. London A.. Vo. 241.. 376-396..
- Guéguen, Y. és Pakiauskas, V.. 1994. *Introduction to the Physics of Rock*. Princeton University Press.
- Hashin, Z.. 1988. *The differential scheme and its application to cracked materials* In: *J. Mech. Phys. Solids*. Vo. 36.. 719-734..
- Hashin, Z. és Shtrikman, S.. 1962. *On some variational principles in anisotropic and nonhomogeneous elasticity* In: *J. Mech. Phys. Solids*. Vo. 10.. 335-342..
- Hill, R.. 1965. *A self-consistent mechanics of composite materials* In: *J. Mech. Phys. Solids*. Vo. 13.. 213-222..
- Juhasz, I.. 1981. *Normalized Qv- The key to shaly sand evaluation using the Waxman-Smiths Equation in the absence of core data,* In: *SPWLA, 22nd Annual Logging Symposium*.
- Kirkpatrick, S.. 1973. *Percolation and conductivity* In: *Rev. Mod. Phys.* Vo. 45.. 574-588..
- Landau,, L.D. és Lifshitz,, E. M.. 1960. *Electrodynamics of Continuous Media*. Pergamon Press, Oxford.
- Markov, Z. és Birkhauser, L. P.. 1999. *Heterogeneous Media: Modelling and Simulation*. Boston. 1-162..
- Maxwell, J.C.. 1954. *A Treatise on Electricity and Magnetism, Republication of 3rd edition of 1891*. Dover, New York.
- Mori,, T. és Tanaka,, K.. 1973. *Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions* In: *Acta Metall.* Vo. 21.. 571-574..
- Poupon,, A. és Leveaux,, J.. 1971. *Evaluation of Water Saturations in Shaly Formation* In: *SPWLA 12th Logging Symposium*.
- Reuss,, A.. 1929. *Berechnung der Fließgrenze von Mischkristallen auf Grund der Plastizitätsbedingung für Einkristalle* In: *Z. angew. Math. Mech.* Vo. 9.. 49-58..

- Szatmáry, Z.. 2000. *Bevezetés a reaktorfizikába*. Akadémiai Kiadó. ISBN 9630577348.
- Simandoux, P.. *Dielectric measurements on porous media: Application to measurement of water saturation: Study of the Behavior of Argillaceous Formation* In: *SPWLA*. Houston. 4.. 97-124..
- Timur, A.. 1987. *Acousting logging*. In: *Bradley H. (ed), Petroleum production handbook*. SPE, Dallas, TX.
- Tittman, J.. 1986. *Geophysical Well Logging*. Academic Press.
- Voigt, W.. 1889. "Über die Beziehung zwischen den beiden Elastizitätskonstanten isotroper Körper" In: *Wied. Ann.* Vo. 38.. 573-587..
- Wyllie, M.R.J., Gregory, A.R., és Gardner, L.W.. 1956. *Elastic wave velocities in heterogeneous and porous media* In: *Geophysics*. Vo. 21. (1). 41-70..
- Wyllie, M.R.J., Gregory, A.R., Gardner, L.W., és Gardner, G.H.F.. 1958. *An experimental investigation of factors affecting elastic wave velocities in porous media* In: *Geophysics*. Vo. 23. (3). 459-493..