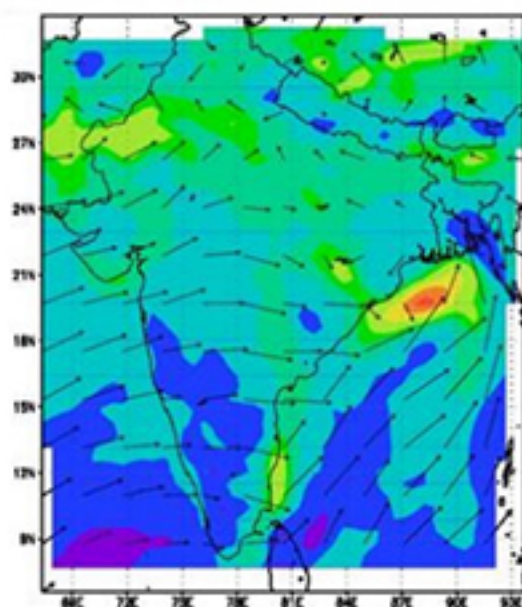




KLASSZIKUS DINAMIKUS METEOROLÓGIAI FELADATGYŰJTEMÉNY II.

BARANKA GYÖRGYI
BORDÁS ÁRPÁD
GYURÓ GYÖRGY
HAVASI ÁGNES
LEELÖSSY ÁDÁM
MÉSZÁROS RÓBERT
SZÉPSZÓ GABRIELLA
TASNÁDI PÉTER
WEIDINGER TAMÁS

Klasszikus dinamikus meteorológiai feladatgyűjtemény II.

Baranka Györgyi (VIII)
Bordás Árpád (I, V, VII, VIII)
Gyuró György (V, VI, XII)
Havasi Ágnes (XI)
Leelőssy Ádám (I, II, III, VI, VIII)
Mészáros Róbert (III, VI)
Szépszó Gabriella (XIII)
Tasnádi Péter (Bevezetés, I, II, V, VI, VII, IX, X, XI, XII)
Weidinger Tamás (Bevezetés, I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII, X)

Klasszikus dinamikus meteorológiai feladatgyűjtemény II.

írta Baranka Györgyi (VIII), Bordás Árpád (I, V, VII, VIII), Gyuró György (V, VI, XII), Havasi Ágnes (XI), Leelőssy Ádám (I, II, III, VI, VIII), Mészáros Róbert (III, VI), Szépszó Gabriella (XIII), Tasnádi Péter (Bevezetés, I, II, V, VI, VII, IX, X, XI, XII), és Weidinger Tamás (Bevezetés, I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII, X)

Szerkesztette:

Weidinger Tamás és Tasnádi Péter

Lektorálta:

Lagzi István László és Nagy Attila

Szerzői jog © 2013 Eötvös Loránd Tudományegyetem

E könyv kutatási és oktatási célokra szabadon használható. Bármilyen formában való sokszorosítása a jogtulajdonos írásos engedélyéhez kötött.

Készült a TÁMOP-4.1.2.A/1-11/1-2011-0073 számú, „E-learning természettudományos tartalomfejlesztés az ELTE TTK-n” című projekt keretében. Konzorciumvezető: Eötvös Loránd Tudományegyetem, konzorciumi tagok: ELTE TTK Hallgatói Alapítvány, ITStudy Hungary Számítástechnikai Oktató- és Kutatóközpont Kft.

Nemzeti Fejlesztési Ügynökség
www.ujszechenyiterv.gov.hu
06 40 638 638



A projekt az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósul meg.



Ajánlás

Tisztelegve elődeink munkája előtt, akiktől a meteorológia elméletét és a szakma szeretetét tanultuk.

Rákóczi Ferenc és Makainé Császár Margit emlékének

Tartalom

ELŐSZÓ	v
I. FELADATOK	1
I. A légköri hidro-termodinamikai egyenletrendszer	4
I.1. Általános mechanikai feladatok	4
I.2. A légkörben ható erők	11
I.3. A vertikális koordinátázás kérdése	16
I.4. A légköri folyamatok nagyságrendi analízise	19
II. A légköri kinematika	26
II.1. A meteorológiai állapothatározók interpolációja	26
II.2. A légkör skalár- és vektormezői, valamint deriváltjaik és integráljaik	32
II.3. Az Einstein-féle jelölésrendszer alkalmazása	42
II.3.1. Vektoralgebra	43
II.3.2. Vektoranalízis	50
II.3.1. Vektoralgebra – feladatok	53
II.3.2. Vektoranalízis – feladatok	54
II.4. A barotróp és a baroklin légkör	55
II.5. Koordináta-rendszer forgatások, a lineáris skalár- és vektormezők felbontása	58
II.6. Véges különbséges módszerek alkalmazása a deriváltak és az invariánsok meghatározásában	65
III. Egyensúlyi és nem-egyensúlyi mozgások a légkörben	74
III.1. A geosztrófikus és a gradiens szél	74
III.2. A termikus szél	78
III.3. Ageosztrófikus áramlás	81
III.4. Az áramvonal és a trajektória	84
IV. A cirkuláció és az örvényesség	86
IV.1. A cirkuláció, az örvényesség és a Bjerknes-féle örvényességi tétel	86
IV.2. Az örvényességi és a divergencia-egyenlet, a potenciális örvényesség és szerepe a légköri folyamatok leírásában	90
V. A légkördinamikai egyenletek felállítása, vizsgálata és megoldása	96
V.1. Kétdimenziós folyadékáramlás	96
V.2. A sekély víz típusú áramlások	102
V.3. Előrejelzési légkörmodellek	106
VI. Diszkontinuitási felületek a légkörben	109
VI.1. Légköri frontok	109
VI.2. A tropopauza	113
VI.3. A sugáráram (jet stream)	117
VII. A légköri turbulencia	120
VII.1. Térbeli és időbeli átlagok	120
VII.2. Átlagolt egyenletek, főbb egyszerűsítések, lezárási hipotézisek	122
VII.3. A turbulencia Kolmogorov-féle spektrális elmélete	129
VIII. A felszínközeli réteg és a planetáris határréteg	134
VIII.1. A felszínközeli réteg szélprofiljai	136
VIII.2. Monin–Obukhov-féle hasonlósági elmélet és alkalmazásai	140
VIII.3. A felszínközeli réteg turbulencia karakterisztikáinak számítása	145
VIII.4. Az Ekman-spirál	149
VIII.5. A stabil és az instabil keveredési réteg vastagságának számítása	156
VIII.5.1. A keveredési rétegvastagság meghatározása különböző napszakokra	157
VIII.5.2. A termikus turbulencia által létrehozott keveredési rétegvastagság meghatározása	159
IX. Légköri hullámok	177
IX.1. Felületi és térbeli hullámok, a kis perturbációk módszere	177
IX.2. Hanghullámok	183
IX.3. Tehetetlenségi és gravitációs hullámok	184
X. Légköri energetika	189
X.1. Légköri energiafajták	189

X.2. A légköri energiák közötti átalakulások	191
X.3. A felhasználható potenciális energia	193
XI. A szinoptikus skálájú légköri folyamatok dinamikája	197
XI.1. A szinoptikus mozgásrendszerek főbb sajátosságai, matematikai leírásuk	197
XI.2. A tendencia- és az omegaegyenlet	199
XI.3. A vertikális sebesség becslése, a Q-vektor szerepe	200
XII. Különböző típusú és különböző skálájú légköri instabilitások	203
XII.1. A hidrosztatikai instabilitás	203
XII.1.1. Néhány index a hidrosztatikai instabilitás általános jellemzésére	205
XII.1.2. Néhány index a heves hidrosztatikai instabilitás jellemzésére	209
XII.2. A barotróp instabilitás	223
XII.3. A baroklin instabilitás	226
XIII. Feladatok a numerikus prognosztika témaköréből	230
XIII.1. Bevezetés	230
XIII.2. A vizsgált parciális differenciálegyenletek	230
XIII.3. Véges differencia sémák az időbeli és a térbeli deriváltak közelítésére	232
XIII.4. A numerikus megoldással szemben támasztott matematikai követelmények	233
XIII.4.1. Konzisztencia	233
XIII.4.2. Konvergencia	234
XIII.4.3. Numerikus stabilitás	234
XIII.5. A stabilitás vizsgálata	242
XIII.5.1. CFL-kritérium	242
XIII.5.2. Stabilitásvizsgálati módszerek	243
XIII.6. Hatékony numerikus sémák	254
XIII.6.1. Szemi-implicit séma	255
XIII.6.2. Szemi-Lagrange módszer	255
XIII.7. Kitekintés	259
XIII.8. Irodalomjegyzék	260
Köszönetnyilvánítás	260
II. MEGOLDÁSOK	261
I. A légköri hidro-termodinamikai egyenletrendszer	264
I.1. Általános mechanikai feladatok	264
I.2. A légkörben ható erők	277
I.3. A vertikális koordinátázás kérdése	284
I.4. A légköri folyamatok nagyságrendi analízise	292
II. A légköri kinematika	298
II.1. A meteorológiai állapothatározók interpolációja	298
II.2. A légkör skalár- és vektormezői, valamint deriváltjaik és integráljaik	302
II.3. Az Einstein-féle jelölésrendszer alkalmazása	314
II.3.1. Vektoralgebra	314
II.3.2. Vektoranalízis	319
II.4. A barotróp és a baroklin légkör	330
II.5. Koordináta-rendszer forgatások, a lineáris skalár- és vektormezők felbontása	335
II.6. Véges különbséges módszerek alkalmazása a deriváltak és az invariánsok meghatározásában	345
III. Egyensúlyi és nem-egyensúlyi mozgások a légkörben	355
III.1. A geosztrófikus és a gradiens szél	355
III.2. A termikus szél	360
III.3. Ageosztrófikus áramlás	366
III.4. Az áramvonal és a trajektória	369
IV. A cirkuláció és az örvényesség	374
IV.1. A cirkuláció, az örvényesség és a Bjerknes-féle örvényességi tétel	374
IV.2. Az örvényességi és a divergencia-egyenlet, a potenciális örvényesség és szerepe a légköri folyamatok leírásában	381
V. A légkördinamikai egyenletek felállítása, vizsgálata és megoldása	390
V.1. Kétdimenziós folyadékáramlás	390
V.2. A sekély víz típusú áramlások	400
V.3. Előrejelzési légkörmodellek	404

VI. Diszkontinuitási felületek a légkörben	407
VI.1. Légköri frontok	407
VI.2. A tropopauza	416
VI.3. A sugáram (jet stream)	420
VII. A légköri turbulencia	422
VII.1. Térbeli és időbeli átlagok	422
VII.2. Alkalmazott egyenletek, főbb egyszerűsítések, lezárási hipotézisek	426
VII.3. A turbulencia Kolmogorov-féle spektrális elmélete	431
VIII. A felszínközeli réteg és a planetáris határréteg	436
VIII.1. A felszínközeli réteg profiljai	436
VIII.2. Monin–Obukhov-féle hasonlósági elmélet és alkalmazásai	440
VIII.3. A felszínközeli réteg turbulencia karakterisztikáinak számítása	452
VIII.4. Az Ekman-spirál	459
VIII.5. A stabil és az instabil keveredési réteg vastagságának számítása	462
VIII.6. A turbulens keveredés, a szennyezőanyag diszperziója	464
IX. Légköri hullámok	470
IX.1. Felületi és térbeli hullámok	470
IX.2. Hanghullámok megoldások	481
IX.3. Tehetlenségi és gravitációs hullámok	484
X. Légköri energetika	496
X.1. Légköri energiafajták	496
X.3. A felhasználható potenciális energia	514
XI. A szinoptikus skálájú légköri folyamatok dinamikája	522
XI.1. A szinoptikus mozgásrendszerek főbb sajátosságai, matematikai leírásuk	522
XI.2. A tendencia- és az omega-egyenlet	524
XI.3. A vertikális sebesség becslése	525
XII. Különböző típusú és különböző skálájú légköri instabilitások	529
XII.1. A hidrosztatikai instabilitás	529
XII.2. A barotróp instabilitás	534
XII.3. A baroklin instabilitás	537

ELŐSZÓ

Feladatgyűjteményünk a 2007-ben megjelent Klasszikus dinamikus meteorológiai feladatgyűjtemény második része, annak szerves folytatása, céljaiban és szemléletében mindenben követi az első rész megírásakor kitűzött célokat. Érdemesnek látjuk tehát idézni az első kötet előszavának ide vágó részeit:

A meteorológia fiatal tudomány. Elméleti alapjait, a dinamikus meteorológiát a XX. század első harmadától kezdték kidolgozni, és egyes ágai, például a felhőfizika, a műholdfizika, a radarmeteorológia csak a XX. század közepén, végén kezdtek kifejlődni. Ennek megfelelően a rendelkezésre álló magyar nyelvű tankönyvi kínálat is szerényebb a korábban kialakuló, szélesebb területet átfogó tudományokéhoz képest.

Különösen igaz ez a feladatgyűjteményekre! Pedig ma már mindenütt az alkalmazásképes tudást keressük. Nem elég a törvények megértése, tudása, képesnek kell lennünk az ismeretanyag sokoldalú alkalmazására, gyakorlati körülmények közötti felhasználására. A feladatgyűjtemények az alkalmazás gyakorlására, a megértés ellenőrzésére kínálnak lehetőséget. Jelen feladatgyűjtemény az egyetemi tankönyv-kínálatban hiányt pótol. A magyar nyelvű irodalomban ilyen méretű és a meteorológia egyetemi tananyagát ilyen teljességgel lefedő mű még nem jelent meg.”

A fentiekben lefektetett elveket követve megtartottuk szerkesztési alapként, hogy minden fejezetet részletes elméleti összefoglalóval indítunk, ami ebben a kötetben annál is inkább indokolt volt, mert tankönyvi anyag gyakran csak angol nyelven áll rendelkezésre. A feladatok megoldását minden esetben részletesen közöljük, mert úgy gondoljuk, hogy ez a dinamikus meteorológia elméleti anyagának megértését is segíti a hallgatók számára. Figyelembe vettük, hogy az elektronikus tankönyvek a nyomtatottnaknál kissé nehezebben tekinthetők át és a hivatkozások kezelése is nehezekebb, ugyanakkor a terjedelem kevésbé korlátozott és a keresés is könnyebb. Ezt kihasználva esetenként vállaltuk a redundáns megfogalmazásokat, és szükség esetén az egyszer már leírt képletek megismétlését.

A feladatanyag bősége már az első kötet megírásakor is zavarba ejtő volt a szerzők számára, éppen ezért kellett a feladatgyűjtemény anyagát két részre bontani. Az első kötet az alapokat fedi le, a meteorológiai termodinamikát, a légköri folyamatok hidrosztatikai leírását, a felhőfizikát és a szinoptikus meteorológia műveléséhez szükséges, egyszerű adatbázisok kezelését tartalmazza. A munka megjelenésekor is éreztük azonban, hogy a mű a meteorológia dinamikai folyamatainak tárgyalása nélkül csonka. Így nagy örömről szolgált, hogy az ELTE Természettudományi Kar által elnyert TÁMOP pályázat keretében, ha e-könyv formában is, de mód nyílik a munka teljessé tételére.

A feladatanyag tizenhárom fejezetre tagolódik. Alapját az első öt fejezet alkotja (A légköri hidro-termodinamikai egyenletrendszer; A légköri kinematika; Egyensúlyi és nemegyensúlyi mozgások a légkörben; A cirkuláció és az örvényesség; A légkördinamikai egyenletek felállítása, vizsgálata és megoldása) amely a klasszikus dinamikus meteorológia témaköreit és mozgásformáit öleli fel. A légköri folyamatokat leíró hidro-termodinamikai egyenletrendszer a Newton törvények és a termodinamika alaptörvényeinek speciális megfogalmazását jelenti a Földdel együtt forgó koordináta-rendszerben. Alapvető célunk volt, hogy ezt minden meteorológushallgató értse, és világosan lássa. Emiatt a példatár jócskán tartalmaz tisztán a fizika témakörébe tartozó feladatokat is. Ezek a feladatok azonban mindig azt célozzák, hogy a későbbiekben a megoldásukhoz használt gondolatmenetek már ismertként jelenhessenek meg a tisztán légköri folyamatok leírásában. Hasonlóképpen fontosnak éreztük, hogy a fizikában alkalmazott matematikai technikák is részletezésre kerüljenek. A meteorológia elméleti szakirodalma nem alakított ki egységes jelölésrendszert, s erre mi sem törekedtünk. Inkább azt kívántuk megmutatni, hogy a különféle jelölésrendszerek ekvivalensek, s érdemes mindig az adott feladatkörhöz legjobban illeszkedővel dolgozni. Ezzel segíteni kívánjuk a hallgatókat a meteorológia szakirodalmának olvasásában is, hiszen a sokszínű jelölésrendszer ott is megjelenik. A kinematikai leírás keretében tárgyaljuk a meteorológiában alkalmazott vektoralgebrái és vektoranalitikai összefüggéseket is, újdonságként, a nabla szimbólika mellett részletesen kitérünk az Einstein szimbolikával történő leírására is. Kiemelt jelentőségű a cirkuláció és örvényesség kérdéskörét feldolgozó fejezet a lokális és a globális leírás kapcsolatának megértésében. Az alapozó fejezetekben, de a későbbiek során is nagy hangsúlyt fektettünk a légköri folyamatok nagyságrendi analizisére és annak bemutatására, hogy a nagyságrendi analízis hogyan vezet a különböző skálájú folyamatok leírásában az általános egyenletrendszer egyszerűsítésére. A légkördinamikai egyenletek felírásakor kiemelten foglalkoztunk a kétdimenziós sekélyvíz típusú áramlásokkal, mint a légköri folyamatok egyszerűsített hidrodinamikai modelljeivel.

A VI–IX fejezet speciális légköri mozgásformákkal és rétegekkel foglalkozik (Diszkontinuitási felületek a légkörben; A légköri turbulencia; A felszínközeli réteg és a planetáris határréteg; A légköri hullámmozgások) A légköri

turbulencia és a planetáris határréteg viszonylag részletesebb kidolgozását az ebbe szükségessé, hogy ezek a folyamatok alapját képezik a felszín-légkör kölcsönhatást leíró modelleknek.

A következő három fejezet (X., XI. és XII.) speciális kérdésekkel foglalkozik. A X. fejezet a légköri energetikát dolgozza fel, míg XI. a szinoptikus skálájú folyamatokkal, a XII. pedig a különböző nagyságrendű folyamatokban megjelenő instabilitásokkal foglalkozik. Bár nem tekintettük elsődleges feladatunknak a kétciklusú képzés szerkezetéhez való illeszkedést, ezek a fejezetek a dinamikus meteorológia tárgy keretein túlmutatva segédletül szolgálnak a képzésben megjelenő légköri energetika, szinoptikus meteorológia és mezoszínoptika tantárgyakhoz. (Hasonló módon a hullámtani fejezet is felhasználható a Folyadékdinamika c. tantárgyhoz.) Ezekben a szinoptikus meteorológiához kapcsolódó fejezetekben törekedtünk arra, hogy a szokásos számítással követhető megoldások mellett a szemléletből adódó, pusztán a folyamatok jellegéből következő kvantitatív megoldásokat is bemutassunk.

A modern meteorológia elképzelhetetlen a numerikus módszerek használata nélkül. Ezek alkalmazásához szolgál feladatokkal a könyv utolsó fejezete, amely épít a Numerikus prognosztika c. tankönyv, valamint az Alkalmazott számszerű előrejelzés c. e-jegyzet anyagára, segítve a számszerű előrejelzés oktatását. E fejezetet Szépszó Gabriella, az OMSZ munkatársa készítette, ezzel is kifejezve az Országos Meteorológiai Szolgálat szerepét a fiatal generáció oktatásában.

Bár az e-könyv elsősorban a meteorológushallgatók egyetemi képzését célozza, úgy gondoljuk, hogy haszonnal forgathatják azok a régebben végzett kollégák is, akik örömeiket lelik „egy kis agytornában”, illetve érdeklődnek a meteorológusképzésbe a gyakorlat szintjén bekerült új témák iránt. Bízunk abban is, hogy a hidrodinamika és környezetfizika iránt érdeklődő nem meteorológushallgatók is találnak speciális, a szakjukhoz illeszkedő feladatokat és felhasználható probléma-megoldási módszereket a munkában.

Említettük már a bőség zavarát a feladatokkal kapcsolatban. Hisszük, hogy a feladatgyűjtemény szerkezete nyitott, s az e-könyv forma természetes lehetőséget nyújt a bővítésre, így a későbbiekben a feladatgyűjtemény tovább gazdagodhat.

Alkotó szerkesztőkként kötelességünknek érezzük, hogy kiemeljük a szerzőgárdának a képzés iránti elkötelezettségét, amellyel a vállalt terjedelemtől függetlenül arra törekedett, hogy minden fontosnak gondolt ismeret bekerüljön a kötetbe. A szerzők mellett sokan járultak hozzá feladatokkal és ötletekkel a példatárhoz, közülük szeretnénk ezen a helyen megkülönböztetett köszönetet mondani volt kollégáknak Prof. Szunyogh Istvánnak (Texas A&M University, Department of Atmospheric Sciences) az V.1. és V.2. fejezet feladatainak rendelkezésre bocsátásáért, valamint Horányi Andrásnak (OMSZ) a XIII. fejezet elkészítéséhez nyújtott segítségéért.

A feladatgyűjtemény színességéhez és használhatóságához nagyban hozzájárulnak az ábrák és videók. Megköszönjük az ábrák rajzolásában nyújtott segítséget Varga Attila, 2013-ban végzett környezettudomány szakos hallgatónak, valamint az interaktív videók elkészítését Bordás Árpádnak és Sóti Gergelynek, akik a videókat még korábban, az Újvidéki Egyetemen készítették. Köszönjük Bájhóber Eszter Lilla II. éves meteorológus MSc-, valamint Ludányi Erika 2013-ban végzett meteorológia szakirányos BSc-s hallgatóink segítségét is, akik saját számítási eredményeik alapján készítettek modell animációkat.

Segítettek a példák átnézésében az I. éves meteorológus MSc hallgatók, mindenekelőtt Kovács Attila, köszönet érte.

A légkördinamikai és a határréteg modellezéssel foglalkozó feladatokban összefoglalt ismeretanyag hozzájárult a Nemzeti Közszerződési Egyetem vezetésével megvalósuló TÁMOP-4.2.1.B-11/2/KMR-2011-0001 pályázat sikeréhez.

Végül megköszönjük a feladatgyűjteménynek a tankönyvtár formátumához való illesztését pályázati partnerünknek a PROMPT-G Számítástechnikai Oktatóközpont Kft-nek és Rétsághy Zsolt témafelelősnek.

A feladatgyűjtemény nem készülhetett volna el a „A földtudományok oktatásának megújítási lehetőségei az e-learning fejlesztések és lehetőségek tükrében” TÁMOP-4.1.2.A/1-11/1-2011-0073 pályázat támogatása nélkül, köszönetet mondunk a pályázat kiíróinak, valamint a pályázat managementjének.

Budapest, 2013. szeptember 5.

Tasnádi Péter és Weidinger Tamás

I. rész - FELADATOK

Tartalom

I. A légköri hidro-termodinamikai egyenletrendszer	4
I.1. Általános mechanikai feladatok	4
I.2. A légkörben ható erők	11
I.3. A vertikális koordinátázás kérdése	16
I.4. A légköri folyamatok nagyságrendi analízise	19
II. A légköri kinematika	26
II.1. A meteorológiai állapotváltozók interpolációja	26
II.2. A légkör skalár- és vektormezői, valamint deriváltjaik és integráljaik	32
II.3. Az Einstein-féle jelölésrendszer alkalmazása	42
II.3.1. Vektoralgebra	43
II.3.2. Vektoranalízis	50
II.3.1. Vektoralgebra – feladatok	53
II.3.2. Vektoranalízis – feladatok	54
II.4. A barotróp és a baroklin légkör	55
II.5. Koordináta-rendszer forgatások, a lineáris skalár- és vektormezők felbontása	58
II.6. Véges különbséges módszerek alkalmazása a deriváltak és az invariánsok meghatározásában	65
III. Egyensúlyi és nem-egyensúlyi mozgások a légkörben	74
III.1. A geosztrófikus és a gradiens szél	74
III.2. A termikus szél	78
III.3. Ageosztrófikus áramlás	81
III.4. Az áramvonal és a trajektória	84
IV. A cirkuláció és az örvényesség	86
IV.1. A cirkuláció, az örvényesség és a Bjerknes-féle örvényességi tétel	86
IV.2. Az örvényességi és a divergencia-egyenlet, a potenciális örvényesség és szerepe a légköri folyamatok leírásában	90
V. A légkördinamikai egyenletek felállítása, vizsgálata és megoldása	96
V.1. Kétdimenziós folyadékáramlás	96
V.2. A sekély víz típusú áramlások	102
V.3. Előrejelzési légkörmodellek	106
VI. Diszkontinuitási felületek a légkörben	109
VI.1. Légköri frontok	109
VI.2. A tropopauza	113
VI.3. A sugáráram (jet stream)	117
VII. A légköri turbulencia	120
VII.1. Térbeli és időbeli átlagok	120
VII.2. Átlagolt egyenletek, főbb egyszerűsítések, lezárási hipotézisek	122
VII.3. A turbulencia Kolmogorov-féle spektrális elmélete	129
VIII. A felszínközeli réteg és a planetáris határréteg	134
VIII.1. A felszínközeli réteg szélprofiljai	136
VIII.2. Monin–Obukhov-féle hasonlósági elmélet és alkalmazásai	140
VIII.3. A felszínközeli réteg turbulencia karakterisztikáinak számítása	145
VIII.4. Az Ekman-spirál	149
VIII.5. A stabil és az instabil keveredési réteg vastagságának számítása	156
VIII.5.1. A keveredési rétegvastagság meghatározása különböző napszakokra	157
VIII.5.2. A termikus turbulencia által létrehozott keveredési rétegvastagság meghatározása	159
IX. Légköri hullámok	177
IX.1. Felületi és térbeli hullámok, a kis perturbációk módszere	177
IX.2. Hanghullámok	183
IX.3. Tehetetlenségi és gravitációs hullámok	184
X. Légköri energetika	189
X.1. Légköri energiasajtók	189
X.2. A légköri energiák közötti átalakulások	191
X.3. A felhasználható potenciális energia	193
XI. A szinoptikus skálájú légköri folyamatok dinamikája	197
XI.1. A szinoptikus mozgásrendszerek főbb sajátosságai, matematikai leírásuk	197

XI.2. A tendencia- és az omegaegyenlet	199
XI.3. A vertikális sebesség becslése, a Q-vektor szerepe	200
XII. Különböző típusú és különböző skálájú léggöri instabilitások	203
XII.1. A hidrosztatikai instabilitás	203
XII.1.1. Néhány index a hidrosztatikai instabilitás általános jellemzésére	205
XII.1.2. Néhány index a heves hidrosztatikai instabilitás jellemzésére	209
XII.2. A barotróp instabilitás	223
XII.3. A baroklin instabilitás	226
XIII. Feladatok a numerikus prognosztika témaköréből	230
XIII.1. Bevezetés	230
XIII.2. A vizsgált parciális differenciálegyenletek	230
XIII.3. Véges differencia sémák az időbeli és a térbeli deriváltak közelítésére	232
XIII.4. A numerikus megoldással szemben támasztott matematikai követelmények	233
XIII.4.1. Konzisztencia	233
XIII.4.2. Konvergencia	234
XIII.4.3. Numerikus stabilitás	234
XIII.5. A stabilitás vizsgálata	242
XIII.5.1. CFL-kritérium	242
XIII.5.2. Stabilitásvizsgálati módszerek	243
XIII.6. Hatékony numerikus sémák	254
XIII.6.1. Szemi-implicit séma	255
XIII.6.2. Szemi-Lagrange módszer	255
XIII.7. Kitekintés	259
XIII.8. Irodalomjegyzék	260
Köszönetnyilvánítás	260

I. fejezet - A légköri hidro-termodinamikai egyenletrendszer

Weidinger Tamás

Tasnádi Péter

Bordás Árpád

Leelőssy Ádám

I.1. Általános mechanikai feladatok

Egyenletesen változó mozgás esetén a t idő alatt megtett út (x)

a) ha a test $t=0$ időpillanatban nyugalomban van ($v_0=0$):

$$x = \frac{a}{2} t^2,$$

ahol a a gyorsulás. t idő múlva a test sebessége: $v = at$.

b) ha a test sebessége $t=0$ időpillanatban v_0 :

$$x = v_0 t + \frac{a}{2} t^2.$$

Ha a tömegpont, melyre megadott szabad erő hat, csak előírt pályán (előírt felületen, vagy görbén) mozoghat (például egy fonálon függő inga), akkor kényszermozgásról beszélünk. A mozgás dinamikai leírásánál a tömegpontot meghatározott pályára kényszerítő test hatását ún. kényszererővel vesszük figyelembe. Ha a kényszererőről csak annyit teszünk fel, hogy mindig az előírt pálya normálisába esik, akkor a kényszermozgást végző testnek a pálya érintőjébe eső (tangenciális) gyorsulását a testre ható szabaderő érintő irányú összetevője szabja meg ($m a_t = F_t$).

A szabaderőnek a pálya normálisába eső (F_n) összetevője és a kényszererő (F_k) algebrai összege a tömegpontra

ható normális irányú erőt határozza meg, ami egyenlő az $m \frac{v^2}{r}$ centripetális erővel:

$$F_k + F_n = F_{cp} = m \frac{v^2}{r},$$

ahol r a mozgás pályájának (pillanatnyi) sugara.

A pontrendszerek mozgásának leírásakor a pontrendszer minden egyes tagjára felírjuk a mozgásegyenletet, számításba véve az összes belső és külső erőt és a fennálló kényszerfeltételeket.

A pontrendszer mozgásmennyisége (impulzusa) a tömegpontok mozgásmennyiségeinek vektori összege, ami csak a külső erők ($\mathbf{F}_i^k$) hatására változik. Zárt rendszer mozgásmennyisége állandó. Newton III. törvénye (hatás-ellenhatás)

szerint a belső erők eredője zérus: $\sum_{i,j} \mathbf{F}_{ij}^b = 0$, ahol i és j a két egymásra ható tömegpont száma, $i \neq j$, a b index pedig a belső erőkre utal.

A pontrendszer $\mathcal{S}$ tömegközéppontja úgy mozog, mintha benne a pontrendszer egész tömege $m = \sum_i m_i$ volna egyesítve és rá a pontrendszer tagjaira (m_i) ható külső erők vektori összege hatna.

$$\ddot{\mathbf{r}}_s = \frac{\sum_i \mathbf{F}_i^k}{\sum_i m_i}$$

A merev testek statikája

Síkban koncentrált erőrendszerről beszélünk, ha a síkbeli erőrendszert alkotó erők hatásvonalai közös pontban metszik egymást. A síkban koncentrált erőrendszer egyetlen eredő erővé egyesíthető:

- az eredő hatásvonala mindig átmegy az összetevő erők hatásvonalainak közös metszéspontján,
- síkban koncentrált erőrendszer eredőjének nyomatéka a sík tetszőleges pontjára egyenlő az összetevő erők ugyanezen pontra számított nyomatékainak algebrai összegével,
- síkban koncentrált erőrendszer eredője zérus, ha három nem egy egyenesben fekvő pontra számított nyomatéka zérus.

Egyetlen esettől – az erőpártól – eltekintve párhuzamos hatásvonalú erők rendszere is helyettesíthető egyetlen erővel. Ha a síkbeli erőrendszer tagjainak hatásvonalai nem közös pontban metszik egymást, akkor síkban szétszórt erőrendszerről beszélünk. Általában fennáll, hogy a merev testre ható tetszőleges erőrendszer egyetlen erővel és egyetlen erőpárral helyettesíthető. Az erő a testre ható erők, a forgatónyomaték pedig a testre ható forgatónyomatékok vektori összege. Egyensúlyi állapotban a merev testre ható erők és forgatónyomatékok vektori összege is zérus. (Megjegyezzük, hogy merev test mozgása esetén a test kiválasztott bármely két pontjának egymáshoz képesti távolsága nem változik.)

A merev test tengely körüli forgását dinamikailag az

$$M = \Theta \frac{d^2 \phi}{dt^2} = \Theta \ddot{\phi}$$

összefüggés írja le, ahol $\Theta = \sum_i m_i \cdot r_i^2$ most a testnek az adott tengelyre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatéka,

ahol az m_i tömegpont forgástengelytől mért távolsága r_i , $\dot{\phi}$ a forgás szögsebessége $\ddot{\phi}$ a szöggyorsulás, $M = \sum_i M_i$ pedig a merev testre ható külső erők adott tengelyre vonatkozó forgatónyomatékainak összege. Ha a súlyponton átmenő tengelyre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomaték Θ_s , akkor az ezzel párhuzamos és a súlyponton átmenő tengelytől d távolságra levő tengelyre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomaték Steiner tétele szerint:

$$\Theta_d = \Theta_s + m d^2$$

A rögzített tengelyre vonatkoztatott forgásmennyiség vagy impulzusnyomaték (N) nagysága a tehetetlenségi nyomaték és a szögsebesség (ω) szorzata:

$$N = \Theta \frac{d\phi}{dt} = \Theta \dot{\phi} = \Theta \omega$$

A tengelyre vonatkoztatott impulzusnyomaték változására fennáll, az

$$M = \frac{dN}{dt}$$

összefüggés. Vektori alakban írva:

$$\mathbf{N} = \mathbf{r} \times \mathbf{p},$$

ahol most $\mathbf{p}$ a forgatónyomaték vektor. Newton második törvénye alapján:

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}.$$

Teljesül továbbá, hogy

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}.$$

A forgómozgás során végzett dW elemi munka alakja pedig

$$dW = M d\phi,$$

míg a *munkatétel* alakja:

$$dW = d\left(\frac{1}{2} I \omega^2\right).$$

Merev test síkmozgása az

$$\sum_i \mathbf{F}_i^k = \frac{d(m_i \mathbf{v}_i)}{dt}, \quad \sum_i \mathbf{M}_i^k = \frac{d\mathbf{N}}{dt}$$

egyenletekkel írható le, ahol $\sum_i \mathbf{F}_i^k$ a testre ható külső erők eredője, $m_i \mathbf{v}_i$ a test teljes impulzusa, $\sum_i \mathbf{M}_i^k$ a testre ható külső erők tömegközéppontra vonatkoztatott forgatónyomatékának eredője, $\mathbf{N}$ a test tömegközéppontra vonatkoztatott teljes impulzusmomentuma.

A gravitációs tér

A Föld középpontjától r ($r > R_F$, ahol $R_F \cong 6371 \text{ km}$ a Föld sugara) távolságban a gravitációs térerősséget az általános gravitációs törvény alapján írhatjuk fel:

$$\mathbf{g}_a = -\gamma \frac{m_F}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r},$$

ahol $m_F \cong 6 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ a Föld tömege, $\gamma = 6,67428 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$ a gravitációs állandó. Így a Föld középpontjától r távolságra a Φ_γ geopotenciál értéke:

$$\Phi_\gamma = -\gamma \frac{m_F}{r},$$

az m tömegű test potenciális energiája pedig: $m\Phi_\gamma = mgr$.

Ha a síkban fekvő (x, y) koordináta-rendszer a síkra merőleges tengely körül állandó Ω szögsebességgel forog, akkor e rendszerhez viszonyított $\mathbf{a}$ gyorsulással és $\mathbf{v}$ sebességgel mozgó test gyorsulása az abszolút (inercia) rendszerben:

$$\mathbf{a}_{\text{abs}} = \mathbf{a} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})$$

Az egyenlet jobb oldalának második tagja a Coriolis-gyorsulás, míg a harmadik a centrifugális gyorsulás. Mindkettő tehetetlenségi gyorsulás (másképp kifejezve inerciális, vagyis a forgó inerciarendszerben tapasztalható gyorsulás). A tömegpontnak a forgó rendszerhez viszonyított gyorsulását a testek által kifejtett tényleges és a bevezetett tehetetlenségi erők eredője szabja meg. Megjegyezzük, ha a Föld szögsebesség változásából származó hatást is figyelembe kívánjuk venni (az egyik nap nem pontosan olyan hosszú, mint a másik, hiszen a Föld-légkör rendszer impulzusmomentuma állandó, de külön a légkör és külön a Föld impulzusmomentuma nem állandó), akkor egy

$\beta \times \mathbf{r}$ taggal is számolni kell, ahol $\beta = \frac{d\omega}{dt}$ a szöggyorsulás. Ezt a tagot meteorológiai feladatokban figyelmen kívül hagyjuk.

Ideális gázok, illetve folyadékok stacionárius áramlása esetén érvényes a Bernoulli-törvény, ami nem más, mint az egységnyi tömegre vonatkozó leegyszerűsített energiatétel. Minden áramfonalon:

$$\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}v^2 + gh = \text{állandó}$$

ahol ρ az áramló közeg sűrűsége, p a nyomás (sztatikus), g a nehézségi gyorsulás, h a folyadékelemnek a választott 0 szinttől mért magassága. Valós folyadékok (ahol a belső súrlódás nem elhanyagolható) réteges (lamináris) áramlása esetén az egymáson elcsúszó egységnyi felületek között a belső súrlódási erő nagysága:

$$F_z = \eta \frac{dv}{dz}$$

ahol η az adott közegre jellemző belső súrlódási együttható.

A feladatok kijelölésében támaszkodtunk Kovács és Párkányi (1980) példatárára.

I.1.1. Milyen magasra repül és mennyi idő múlva esik ismét a talajra az 5 m s^{-1} kezdősebességgel feldobott test?

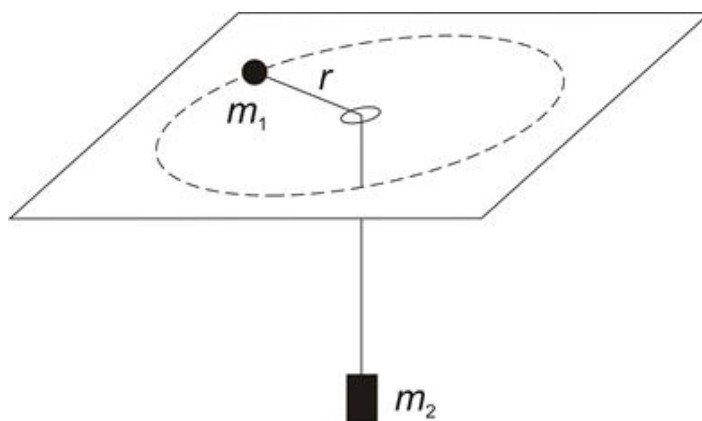
A közegellenállástól eltekintünk, $g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$ itt és a továbbiakban is a nehézségi gyorsulás nagyságát adjuk meg. A nehézségi gyorsulás iránya természetesen a z -tengely (a helyi függőleges) irányával ellentétes.

I.1.2. Milyen magasról esett az a test, amely az esés utolsó t_1 másodpercében n -szer akkora utat tett meg, mint addig?

I.1.3. Mekkora távolságban ér földet a száz méter magas hegyről 45° -os szög alatt kilőtt ágyúgolyó a hegy lábától?

Az ágyúgolyó kezdeti sebessége $v_0 = 100 \text{ m s}^{-1}$.

I.1.4. Egy $m_2 = 1 \text{ kg}$ tömegű test súlytalan fonálon lóg az I.1.1. ábrán látható elrendezésben. A fonál másik végén $m_1 = 10 \text{ kg}$ tömegű test van, amely súrlódásmentesen mozoghat a vízszintes asztalon.

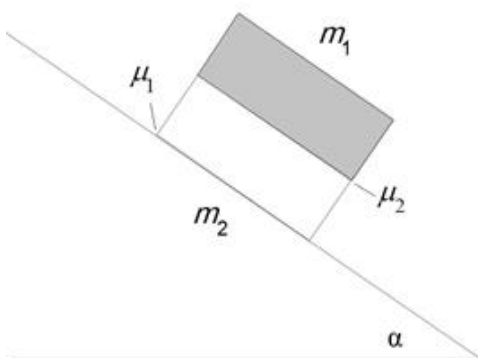


I.1.1. ábra. A súlytalan fonálon függő és az asztalon körmozgást végző test.

Mekkora szögsebességgel kell az m_1 tömegű testnek mozognia, hogy az m_2 tömegű test nyugalomban maradjon. Az m_1 tömegű test $r = 1\text{ m}$ -es sugarú körpályán mozog. Hogyan változik az m_1 tömegű test szögsebessége, ha az m_2 tömegű testet 10 cm-rel lejjebb húzzuk? Mekkora munkavégzésre van ehhez szükség? (Az egyszerűség kedvéért legyen $g \approx 10\text{ m s}^{-2}$.)

I.1.5. A kúpíng (kőring) l hosszúságú fonala a függőlegessel α szöget zár be. Az m tömegű ingatest v állandó sebességgel körpályán mozog. Mekkora a keringési idő? Mekkora erő feszíti a fonalat? Milyen esetben maradhat egyáltalán körpályán az inga?

I.1.6. Az α hajlásszögű lejtőre m_2 tömegű s erre m_1 tömegű hasábot helyezünk (I.1.2. ábra). A két hasáb között a súrlódási együttható μ_1 a hasáb és a lejtő között μ_2 . Határozzuk meg az egyes hasábok gyorsulását! ($\alpha = 45^\circ$, $\mu_1 = 0,3$ és $\mu_2 = 0,4$.)



I.1.2. ábra. A lejtőn csúszó hasábok.

I.1.7. Mekkora tolóerőt fejt ki a magas légkört kutató, v sebességgel haladó rakétára a rakétához viszonyított u sebességgel kiáramló gáz, ha az időegység alatt kiáramló gáz tömege állandó: $\frac{dm}{dt} = \text{const}$.

I.1.8. Mutassuk meg, hogy közös pontban támadó három erő nem tarthat egyensúlyt, ha a három erő közül kettőnek (és csak kettőnek) a hatásvonala közös!

I.1.9. Mutassuk meg, hogy síkban koncentrált erőrendszer eredőjének a sík tetszőleges pontjára számított nyomatéka egyenlő az összetevők ugyanezen pontra számított algebrai összegével! Mutassuk meg azt is, hogy síkban koncentrált tetszőleges erőrendszerre az összetevők nyomatékainak algebrai összege az eredő tetszőleges pontjára zérust ad!

I.1.10. Mutassuk meg, hogy síkban koncentrált erőrendszer egyensúlya esetén az erők tetszőleges pontra számított nyomatékainak összege zérus!

I.1.11. Mutassuk meg, hogy a merev test tengely körüli forgásából származó kinetikus energia

$$K = \frac{1}{2} \Theta \omega^2,$$

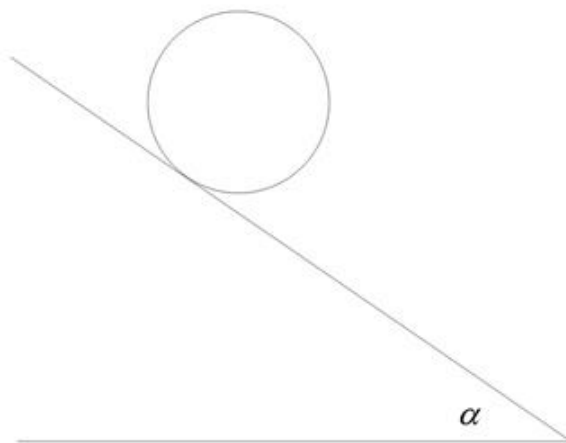
ahol Θ a merev test forgástengelyén átmenő tehetetlenségi nyomatéka.

I.1.12. Egy korong egyenletes forgómozgást végez $K = \frac{1}{2} \Theta \omega^2$ szögsebességgel. A korongon a forgástengelytől 3 m-es távolságban $m = 5 \text{ kg}$ tömegű test van. A korong impulzusnyomatéka $N = 150 \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1}$.

a) Mekkora munkát kell végeznie a tengelyen elhelyezkedő motornak ahhoz, hogy a testet sugárirányban lassan 2 m-rel beljebb húzza?

b) Az eredeti szögsebesség visszaállításához a tengelyt fékezni kell. Mekkora hőmennyiség adódik át a környezetnek, ha feltételezzük, hogy a fékezés során fellépő hő teljes egészében a környező levegőt melegíti?

I.1.13. Az α hajlásszögű lejtőn csúszás nélkül gördül le az r sugarú m tömegű korong (I.1.3. ábra). A gördülési ellenállástól eltekintünk. Írjuk le a korong mozgását! Mekkora sebességet ér el a nyugalmi helyzetből induló korong a h magasságú lejtő alján?



I.1.3. ábra. Korong a h magasságú lejtőn.

I.1.14. Egy mesterséges hold a Föld körül olyan ellipszis pályán kering, melynek nagytengelye $2a$. Határozzuk meg a mesterséges hold sebességét a) a pálya Földhöz legközelebbi (perigeum) b) a pálya Földtől legtávolabbi (apogeum) c) a pálya tetszőleges pontján!

I.1.15. Milyen távol van a Föld felszínétől a Földdel azonos szögsebességgel (geoszinkron pályán) keringő műhold? Mekkora ez a távolság a Naprendszer többi bolygóján és a Holdon (lásd az I.1.1. táblázatot is)?

*I.1.1. táblázat. Az égitestek néhány adata (nehézségi gyorsulás a felszínen, tengely körüli forgási idő és az egyenlítői sugár). * A Föld forgásával ellentétes forgási irány.*

Égitest	g [m s ⁻²]	T (forgási idő) [földi nap]	r_0 [km]
Merkúr	3,8	58 nap 15 óra	5 000
Vénusz	8,7	243 nap [*]	12 400
Föld	9,81	23 óra 56 perc	12 756
Mars	3,9	24 óra 38 perc	6 760
Jupiter	25,1	9 óra 50 perc	143 000
Szaturnusz	10,4	10 óra 25 perc	121 000
Uránusz	9,4	17 óra 15 perc [*]	46 700
Neptunusz	9,8	16 óra 6 perc	45 000
Hold	1,6	27 nap 7 óra 43 perc	3 476

I.1.16. Mekkora erővel lehet pályán tartani azt a geoszinkron műholdat, amely a geostacionárius pálya kétszeres távolságára kering a Föld körül? (A geostacionárius pálya Föld középpontjától mért távolsága r_{geost} .)

I.1.17. Mekkora különbséget mérhet súlyában az a 80 kg testtömegű személy, aki a 110 km h^{-1} sebességgel közlekedő vonaton a 45° szélességi körön előbb keletről nyugatra, majd nyugatról keletre utazik?

I.1.18. Egy körhinta kötelébe épített rugós erőmérő a függőleges állásnál leolvasható értéknél 10%-kal többet mutat, amikor a szék 10 m s^{-1} egyenletes sebességgel mozog. Mekkora a pálya sugara?

I.1.19. Két 4 cm átmérőjű labdát helyezünk el egymástól 100 m-re vízszintes síkon az északi szélesség (ϕ) 43. fokán. Mekkora sebességgel kell elindítani egymással szembe a két labdát, hogy éppen elkerüljék egymást?

I.1.20. A $\phi = 45^\circ$ szélességi fokon kelet-nyugat irányba állított biliárdasztalon 4 m-re található egymástól két 2 cm sugarú golyó. Mekkora sebességgel kell meglöknie a játékosnak az egyik golyót, hogy az a Coriolis-erő úgy térítse el, hogy az csak érintse a másikat. A súrlódás elhanyagolható.

I.1.21. Egy test a $\phi = 45^\circ$ szélességi körön kelet felé halad $u = 100 \text{ m s}^{-1}$ sebességgel. Mennyire téríti el a Coriolis-erő, ha adott a kelet felé történő elmozdulás (x)?

I.1.22. A $2 \cdot 10^5 \text{ kg}$ tömegű mozdony 50 m s^{-1} -mal mozog egyenes pályán az északi szélesség 43. foka mentén. Mekkora oldalirányú erő hat a sínekre? Hogyan változik a mozdony súlya a keleti, illetve a nyugati irányú mozgás esetén?

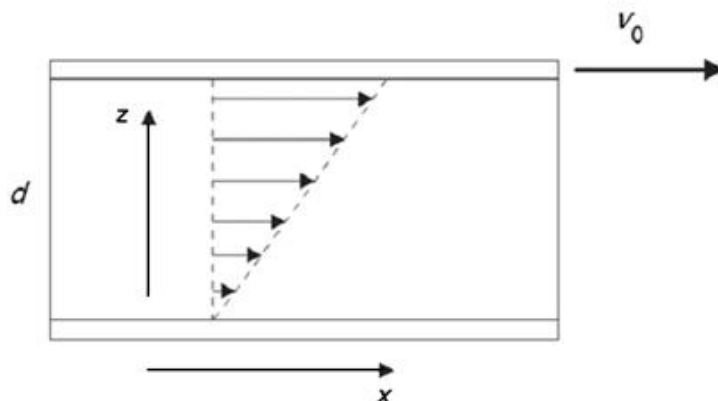
I.1.23. Annak bizonyítására, hogy a Föld nem inercia-rendszer, Galilei ki akarta mutatni, hogy a függőlegesen elejtett test nem pontosan az ejtés alatti pontban csapódik be. Mekkora az eltérés nagysága és iránya, ha az Egyenlítőn 10 m-ről ejtünk le egy súlyos tárgyat? És ha 5 000 m-ről? (Tekintsünk el a közeg-ellenállástól!)

I.1.24. Vertikálisan fölfelé kilövének egy golyót $w = 1000 \text{ m s}^{-1}$ kezdeti sebességgel a $\phi = 45^\circ$ szélességi körön. Mekkora lesz a golyó zonális eltérése, amikor újra földet ér, feltételezve, hogy a golyóra nem hat súrlódási erő? A vertikális mozgásegyenletben a Coriolis-erő elhanyagolható a nehézségi erőhöz képest.

I.1.25. Függőleges tengely körül ω_0 szögsebességgel forgó nagyméretű vízszintes korong közepén állva l hosszúságú fonálra kötött m tömegű kisméretű testet vízszintes síkban körbe forgatunk. A fonálba helyezett erőmérő F erőt jelez. Hogyan magyarázza az F erő fellépését a) az aki a jelenséget a forgó rendszerhez képest írja le (együttforgó megfigyelő, b) egy külső megfigyelő?

I.1.26. Az r sugarú, henger alakú edényt szimmetriatengelye körül ω szögsebességgel forgásba hozzuk. Milyen alakot vesz fel a folyadék felszíne? Írjuk le a jelenséget a) együttforgó, b) nyugvó koordináta-rendszerben is!

I.1.27. Párhuzamos síklemezek között d vastagságú folyadékréteg van a felső lemezt v_0 sebességgel mozgatjuk (I.1.4. ábra). Az alsó lemez nyugalomban van. Mekkora a mozgó lemeztől egy adott távolságra a folyadék sebessége?



I.1.4. ábra. Folyadék mozgása párhuzamos sík lemezek között.

I.1.28. Határozzuk meg az r sugarú csővön időegység alatt átáramló folyadék mennyiségét a Newton-féle belső súrlódási törvény felhasználásával!

I.2. A légkörben ható erők

A légkörben ható erőket két csoportra osztjuk: térfogati és felületi erők. A térfogati erők egy kiválasztott térfogatban lévő levegő „minden pontjában” hatnak, míg a felületi erők csak a térfogat határain fejtik ki hatásukat (I.2.1. táblázat).

Másik csoportosítás szerint megkülönböztetünk valódi és tehetetlenségi erőket. Valódi erők azok, amelyek inerciarendszerből nézve is fellépnek a Föld légkörében, tehetetlenségi erők pedig azok, amelyek csak a Földhöz rögzített, forgó koordináta-rendszerben jelennek meg.

I.2.1. táblázat. A légkörben ható erők csoportosítása.

	Térfogati erők	Felületi erők
Valódi erők	Gravitációs erő	Nyomási gradiens erő Molekuláris súrlódási erő
Tehetetlenségi erők	Centrifugális erő Coriolis-erő Metrikus erők	

A gravitációs erő és a centrifugális erő

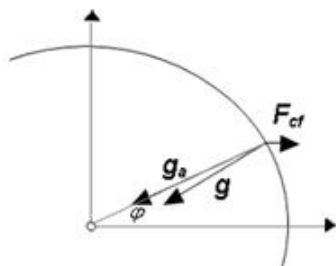
A légkörben a centrifugális erő hatását beépítjük a gravitációs erőbe. Állandó Ω nagyságú szögsebességgel forgó koordináta-rendszerben ható centrifugális erő:

$$F_{cp} = -\Omega^2 \mathbf{r}_\perp,$$

ahol $\mathbf{r}_\perp$ a forgástengely felé mutató vektor, amelynek hossza az adott pontnak a tengelytől mért távolsága

$$|\mathbf{r}_\perp| = |\mathbf{r}| \cos \phi,$$

ahol $\mathbf{r}$ a Föld középpontjába mutató vektor, ϕ pedig a földrajzi szélesség. A Föld szögsebessége: $\Omega = 7,292 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$.



I.2.1. ábra. Az abszolút gravitációs erő ($\mathbf{g}_a$) és a centrifugális erő ($\mathbf{F}_{cf}$) eredője a felszínre merőleges gravitációs erő ($\mathbf{g}$). Megjegyezzük, hogy a meteorológiában tömegegységnyi légrésszre ható erővel dolgozunk (ilyen értelemben gyorsulás dimenzióval dolgozunk).

A Föld adott pontján érzékelhető, az egységnyi tömegre ható valódi $\mathbf{g}$ gravitációs erőt a forgásból adódó centrifugális erő és az **I.1. fejezetben** bemutatott $\mathbf{g}_a$ abszolút gravitációs erő eredője adja meg. Ennek iránya egyúttal a helyi függőleget is kijelöli (I.2.1. ábra):

$$\mathbf{g} = \mathbf{g}_a + \Omega^2 \mathbf{r}_\perp.$$

A helyi függőleges irányt a meteorológiában a gömb alakúnak tekintett Föld középpontja felé mutató iránnyal közelítjük. A $\mathbf{g}$ skalármennyiség ebben az értelmezésben az adott helyen mérhető nehézségi gyorsulás nagysága, ami megegyezik a helyi függőleges irányba mutató $\mathbf{g}$ vektor hosszával. A $\mathbf{g}$ konzervatív vektormező, amelyből következik, hogy felírható skalárpotenciál, az ún. geopotenciál gradienseként:

$$\mathbf{g} = -\nabla \varphi.$$

A nyomási gradiens erő és a hidrosztatikai felhajtóerő

A légköri mozgásokat a nyomási mező inhomogenitása irányítja. A nyomáskülönbségből származó, egységnyi térfogatú levegőre ható erő nagysága a térfogat határoló felületeire ható erők vektori összegzésével állapítható meg. Az eredő erő nagysága egyenesen arányos a nyomási gradiens nagyságával, iránya pedig azzal ellentétes (a nyomási gradiens erő a nagyobb nyomási hely felől a kisebb nyomási hely felé mutat, ezért szerepel a képletben negatív előjellel):

$$\mathbf{F}_p = -\frac{1}{\rho} \nabla p,$$

ahol $\mathbf{F}_p$ a tömegegységre ható nyomási gradiens erő, p a nyomás, ρ a sűrűség, ∇ pedig a gradiens operátor. A nyomási gradiens erő függőleges komponensét hidrosztatikai felhajtóerőnek is nevezik. A hidrosztatikai felhajtóerő hatását gyakran egyesítik a gravitációs erővel, egyetlen, eredő függőleges irányú erőt definiálva:

$$F_{fei} = -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}$$

Hidrosztatikai egyensúly esetén a gravitációs erő és a hidrosztatikai felhajtóerő nagysága megegyezik, az eredő függőleges irányú erő nulla.

A molekuláris súrlódási erő

A folyadékban fellépő belső súrlódás (viszkózitás) a folyadékrétegek közötti kölcsönhatás erősségétől függ. A súrlódási erő minden komponense arányos a megegyező irányú sebesség komponens Laplace-operátorával ($\Delta = \nabla^2$), az arányossági tényező pedig a ν kinematikai viszkózitás:

$$\mathbf{F}_\tau = \nu \nabla^2 \mathbf{v}$$

komponensenként kiírva:

$$\begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} = \nu \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \end{pmatrix}$$

A Coriolis-erő

A forgó Földön elmozduló légréteg magával hordozza a Föld forgásából származó impulzusmomentumot. Mivel a Föld kerületi sebessége a szélesség függvényében változik, a légréteg a Földhöz viszonyítva eltérül, rá egy látszólagos (tehetetlenségi) erő hat. Ezt az erőt nevezzük Coriolis-erőnek.

Az egységnyi tömegre ható horizontális Coriolis-erő nagyságát az f Coriolis-paraméter határozza meg:

$$f = 2\Omega \sin \varphi$$

ahol Ω a Föld forgásának szögsebessége, φ pedig a földrajzi szélesség. A egységnyi tömegre ható Coriolis-erő:

$$\mathbf{F}_{Cor} = -2\mathbf{\Omega} \times \mathbf{v}$$

A képlet jól mutatja, hogy a Coriolis-erő mindig merőleges a sebesség irányára, nem végez munkát. A légkörben a Coriolis-erő hatását legtöbbször elegendő csak vízszintes irányban figyelembe venni, ezért a vertikális sebesség és a Coriolis-erő elhanyagolásával a következő, egyszerűbb formulát használhatjuk:

$$\mathbf{F}_{Cor} = -f(\mathbf{k} \times \mathbf{v})$$

Itt $\mathbf{k}$ a függőleges irányú egységvektor.

Komponenseként kiírva:

$$\mathbf{F}_{Cor} = \begin{pmatrix} f v \\ -f u \\ 0 \end{pmatrix}$$

Itt elhanyagoltuk a vertikális sebesség hatását.

I.2.1. Egy rakétát Budapestről (É.sz. 47,5°) nyugat felé indítunk. Mekkora távolsággal és milyen irányba térül el a rakéta a nyugati iránytól 900 km megtétele után? A rakéta sebessége 300 m s^{-1} . Tegyük fel, hogy az eltérés olyan kicsi, hogy u és f állandónak tekinthető! A Föld szögsebessége: $\Omega = 7,292 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$.

I.2.2. Mekkora tömeget képes felemelni a felszínről az 5 liter héliummal töltött léggömb? A levegő sűrűsége $1,3 \text{ kg m}^{-3}$; a héliumé $0,18 \text{ kg m}^{-3}$. Tegyük fel, hogy a légkör hidrosztatikai egyensúlyban van, $g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$!

I.2.3. Mekkora sebességgel kell a Föld körül keringenie a 800 km magasságban lévő műholdnak, hogy a centrifugális erő kiegyenlítse a rá ható gravitációs erőt? A Föld sugara 6370 km , tömege $5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg}$, a gravitációs állandó: $\gamma = 6,67428 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$.

I.2.4. Egy mesterlövész célba vesz egy tőle keletre lévő tárgyat. A célponttól jobbra vagy balra, fölé vagy alá kell céloznia, hogy korrigálja a Coriolis-erőből származó eltérítő hatást?

I.2.5. Egy tornádóban a levegő 100 m s^{-1} sebességgel áramlik, a tölcser átmérője 200 m . Mekkora a tölcser forgásából származó centrifugális erő? Mekkora a légrészre ható Coriolis-erő akkor, amikor éppen észak felé áramlik? A Coriolis-paraméter értéke $f = 10^{-4} \text{ s}^{-1}$.

I.2.6. a) Az Egyenlítőn 3 km magasságból szabadon esik egy test. Mennyivel és milyen irányba térül el horizontálisan a becsapódásig? A gravitációs gyorsulás értéke $9,81 \text{ m s}^{-2}$, ennek magasság szerinti változását és a közegellenállást elhanyagoljuk. A Föld szögsebessége: $\Omega = 7,292 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$.

b) Oldjuk meg az a) részben szereplő feladatot Budapestre vonatkozóan is (É.sz. 47,5°)!

I.2.7. Mekkora sebességgel kell az 1000 kg tömegű versenyautónak az 50 m sugarú körív alakú dombon áthaladnia ahhoz, hogy a levegőbe emelkedjen? A gravitációs gyorsulás értéke $9,81 \text{ m s}^{-2}$.

I.2.8. Mekkora az első kozmikus sebesség? Ez az a sebesség, amellyel a közvetlenül a Föld felszíne fölött keringő képzeletbeli műhold körpályán tudna maradni. A Föld sugara 6370 km , a gravitációs gyorsulás értéke $9,81 \text{ m s}^{-2}$.

I.2.9. Mekkora szöget zár be az abszolút gravitációs erő és a gravitációs vektor

a) az Egyenlítőn,

b) az Északi-sarkon,

c) Budapesten (É.sz. 47,5°)?

A gravitációs vektor nagysága legyen $9,81 \text{ m s}^{-2}$. A Föld sugara 6370 km , szögsebessége: $\Omega = 7,292 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$.

I.2.10. Melyik szélességen zárja be egymással a legnagyobb szöget az abszolút gravitációs erő és a gravitációs vektor? Mekkora ez a szög? A szükséges állandók megegyeznek az **I.2.9. feladatnál** megadottakkal.

I.2.11. A felszínhez közel a z magasságban mérhető u szélességet megadó formula közelítő alakja:

$$u(z) = u_0 \ln \left(\frac{z}{z_0} \right),$$

ahol u_0 és z_0 adott konstansok.

a) Ha $u_0 = 0,8 \text{ m s}^{-1}$ és $z_0 = 5 \text{ cm}$, mekkora súrlódási erő hat a 2 m magasban áramló levegőre? A levegő kinematikai viszkozitása $1,48 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$.

b) Az a) részben megadott paraméterek mellett mekkora Coriolis-erő hat a 2 m magasban áramló levegőre? A Coriolis-paraméter értéke $f = 10^{-4} \text{ s}^{-1}$.

I.2.12. A légkör adott A pontján 1020 hPa, a tőle 1000 km-re keletre fekvő B pontban 990 hPa légnyomás mérhető. Tegyük fel, hogy a két pont között lineárisan változik a légnyomás.

a) Mekkora nyomási gradiens erő hat a két pont között elhelyezkedő egységnyi tömegű légrészre?

b) Mekkora munkát végez a nyomási gradiens erő, mialatt az egységnyi tömegű légrészt A -ból B pontba juttatja? A levegő sűrűsége $1,3 \text{ kg m}^{-3}$.

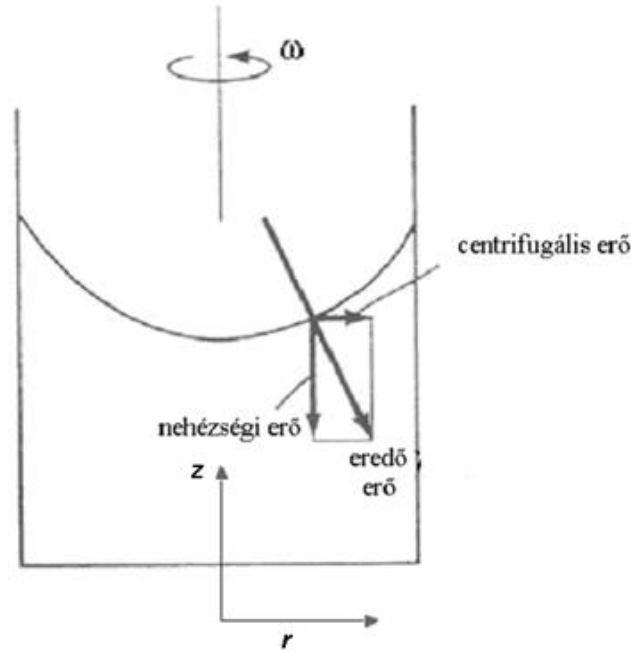
I.2.13. Egy ciklon középpontjában 980 hPa, tőle 1000 km távolságban 1020 hPa légnyomás mérhető. Tegyük fel, hogy a két pont között lineárisan változik a légnyomás. Mekkora sebességgel kell a ciklonban körkörös irányban haladnia az egységnyi tömegű légrésznek, hogy a Coriolis-erő kiegyenlítse a nyomási gradiens erőt? A levegő sűrűsége $1,3 \text{ kg m}^{-3}$, a Coriolis-paraméter értéke $f = 10^{-4} \text{ s}^{-1}$. A centrifugális erő hatását hanyagoljuk el.

I.2.14. Az É.sz. 50° -án egy súrlódásmentesen mozgó testet 10 m s^{-1} kezdősebességgel északi irányba indítunk. Milyen alakú pályán fog haladni? Mennyi idő alatt ér vissza a test a kiindulási helyzetébe? A Föld szögsebessége: $\Omega = 7,292 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$, a Coriolis-paraméter szélesség szerinti változását hanyagoljuk el!

I.2.15. Egy tornádó középpontjában a légnyomás 890 hPa, tőle 1000 m távolságban 990 hPa. Feltéve, hogy a légnyomás lineárisan változik a két érték között, mekkora sebességgel kell áramlania az 500 m sugarú körpályán a levegőnek, hogy a nyomási gradiens erőt kiegyenlítse a centrifugális erő? Mekkora ennél a sebességnél a Coriolis-erő? A levegő sűrűsége $1,3 \text{ kg m}^{-3}$.

I.2.16. Az É.sz. 15° -án elhelyezkedő hurrikán középpontjában a légnyomás 950 hPa, tőle 500 km távolságban 1000 hPa. Feltéve, hogy a légnyomás lineárisan változik a két érték között, mekkora sebességgel kell áramlania a 100 km sugarú körpályán a levegőnek, hogy a Coriolis-erő és a centrifugális erő együttesen kiegyenlítse a nyomási gradiens erőt? Mekkora arányban osztozik ezen az erőn a Coriolis-erő és a centrifugális erő? A levegő sűrűsége $1,3 \text{ kg m}^{-3}$, a Föld szögsebessége: $\Omega = 7,292 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$, a Coriolis-paraméter szélesség szerinti változását hanyagoljuk el.

I.2.17. *A nehézségi és a centrifugális erő hatása – a forgó tartály problémája (I.2.2. ábra).* Írjuk fel a nehézségi és a centrifugális erő hatása alatt kialakuló szabad felület egyenletét abban az esetben, ha a forgástengely a tartály középpontján halad keresztül!



I.2.2. ábra. Az Ω szögsebességgel forgó hengerben levő folyadék felszíne, amit a nehézségi és a centrifugális erő alakít.

I.3. A vertikális koordinátázás kérdése

Tekintsük az (x, y, η, t) koordináta-rendszert, ahol új (η) vertikális koordináta-rendszerben a *horizontális mozgásegyenletek*:

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial \Phi}{\partial x} + f_v - l \frac{1}{g} \frac{d\Phi}{dt} + \frac{1}{\rho} F_x,$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial \Phi}{\partial y} - fu + \frac{1}{\rho} F_y,$$

ahol $f = 2\Omega \sin \phi$, $l = 2\Omega \cos \phi$, a két Coriolis-paraméter, F_x és F_y a turbulens és molekuláris viszkozitási erő x és y tengely irányú összetevője. A teljes deriváltak alakja az (x, y, η, t) rendszerben:

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + \dot{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta},$$

ahol az új rendszerbeli horizontális sebesség komponensek $u = u_\eta$, $v = v_\eta$, míg a vertikális sebesség: $\dot{\eta} = \frac{d\eta}{dt}$.

A *vertikális mozgásegyenlet* általános alakja:

$$\frac{d\left(\frac{1}{g} \frac{d\Phi}{dt}\right)}{dt} = -\frac{\partial \eta}{\partial z} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \eta} - \frac{\partial \eta}{\partial z} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} + lu + \frac{1}{\rho} F_z.$$

Az egyenlet bal oldala tovább alakítható:

$$\frac{d\left(\frac{1}{g} \frac{d\Phi}{dt}\right)}{dt} = \frac{d\frac{1}{g}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{\partial\Phi}{\partial x}u + \frac{\partial\Phi}{\partial y}v + \frac{\partial\Phi}{\partial\eta}\dot{\eta}\right)}{dt}.$$

Ennek felhasználásával az új rendszerbeli vertikális sebesség teljes időbeli $\frac{d\eta}{dt}$ megváltozására kaphatunk egy bonyolult összefüggést.

A sztatikus légkörben a harmadik mozgásegyenlet diagnosztikai összefüggéssé válik (a sztatika alapegyenlete):

$$\frac{\partial p}{\partial \eta} = -\rho \frac{\partial \Phi}{\partial \eta}.$$

Megjegyezzük, hogy hidrosztatikus közelítés esetén nem szerepel a horizontális mozgásegyenletben a Coriolis-erő vertikális sebességtől függő tagja, ez biztosítja, hogy a Coriolis-erő, mint kényszererő szerepeljen (nem végez munkát).

A kontinuitási egyenlet:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial p}{\partial \eta}\right) + \frac{\partial p}{\partial \eta}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \dot{\eta}}{\partial \eta}\right) = 0.$$

A termodinamika I. főtétele:

$$\frac{dT}{dt} - \frac{\kappa - 1}{\kappa} \frac{T}{p} \frac{dp}{dt} = \frac{Q}{c_p},$$

ahol Q az egységnyi tömegű légréteg által egységnyi idő alatt felvett, illetve leadott hő, κ pedig az állandó nyomáson és az állandó térfogaton vett fajhő hányadosa,

$$\kappa = \frac{c_p}{c_v}.$$

A nedvességszállítási egyenlet:

$$\frac{dq}{dt} = \frac{1}{\rho} M,$$

ahol q a specifikus nedvesség, és M a tömeg egységnyi légréteg egységnyi idő alatti nedvesség felvétele. Általános esetben minden fázisra külön egyenletet írunk.

Az állapotegyenlet:

$$p = RT\rho.$$

A leggyakrabban használt vertikális koordinátázások (lásd még a Klasszikus Dinamikus Meteorológia Feladatgyűjtemény I. kötetét is, Weidinger és Tasnádi, 2007):

a) felszínkövető z^* koordináta-rendszer: $\eta = z^* = z - z_0(x, y)$, ahol $z_0(x, y)$ a felszín magassága,

b) nyomási rendszer: $\eta = p(x, y, z, t)$,

c) potenciális hőmérsékleti (vagy izentróp) rendszer: $\eta = \Theta(x, y, z, t)$,

d) Phillips-féle σ koordináta-rendszer: $\eta = \sigma = \frac{p}{p_0}$, ahol $p_0(x, y, z_0, t)$ a felszíni légnyomás,

e) módosított felszínkövető koordináta-rendszer: $\eta = \frac{z_f - z}{z_f - z_a}$, ahol $z_a(x, y)$ és $z_f(x, y, t)$ a modell alsó és felső határfelülete. Általában $z_f = \text{állandó}$,

f) módosított Phillips-féle nyomási rendszer: $\eta = \frac{p - p_f}{p_a - p_f}$, ahol $p_a(x, y, t)$, $p_f(x, y, t)$ a nyomás a modell alsó és felső határán, általában $p_f = \text{állandó}$,

g) módosított potenciális hőmérsékleti (vagy más néven izentróp) rendszer: $\eta = \frac{\Theta_f - \Theta}{\Theta_f - \Theta_a}$, ahol $\Theta_a(x, y, t)$, $\Theta_f(x, y, t)$ a potenciális hőmérséklet modell alsó és felső határán.

I.3.1. Mi a feltétele annak, hogy az (x, y, η, t) koordináta-rendszer alkalmas legyen a légköri folyamatok tanulmányozására?

I.3.2. Ha Descartes-féle koordináta-rendszerből (x, y, z, t) új vertikális koordináta-rendszerre térünk át, akkor megkülönböztetésül indexes jelöléseket használunk pl: $(x_1, y_1, z_1 \equiv \eta, t_1)$. Miért van erre szükség, ha tudjuk, hogy $x = x_1, y = y_1, t = t_1$?

I.3.3. Adjuk meg a z rendszerbeli és az η rendszerbeli vertikális sebesség közötti kapcsolatot!

I.3.4. Írjuk át a Descartes-rendszerben adott sebesség divergenciát az új η vertikális koordináta-rendszerbe!

I.3.5. Adjuk meg a kontinuitási egyenletet az η vertikális koordináta-rendszerben a divergencia ismeretében (lásd az **I.3.4. feladatot** is)!

I.3.6. Adjuk meg a kontinuitási egyenletet nyomási rendszerben. Milyen analógiával élünk a nyomási rendszerben?

I.3.7. Milyen egyszerűsítő feltétel használatával írjuk fel a nyomási gradiens erő alakját az új vertikális koordináta rendszerben?

I.3.8. Adjuk meg a módosított Phillips-féle nyomási koordináta-rendszerben a légköri hidrotermodinamikai egyenletrendszert! (Sztatikus légkört tételezünk fel.)

I.3.9. Írjuk fel a légköri dinamikai és termodinamikai egyenleteket izentróp koordináta-rendszerben bevezetve az Exner-függvényt

$$\Pi = c_p \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}, \text{ ahol } \frac{\kappa-1}{\kappa} = \frac{R}{c_p}$$

és a Montgomery-potenciált

$$\nu = \frac{\kappa - 1}{\kappa} RT + \Phi,$$

ahol $\Phi = gz$ a geopotenciál az izentróp felület adott pontjában! p_0 jelöli az 1000 hPa-os standard nyomási szintet. Megjegyezzük, hogy a potenciális hőmérsékleti rendszerben vagy stabilis, vagy teljesen labilis légkört (ez utóbbi nem bír gyakorlati jelentőséggel) modellezhetünk, hiszen teljesülnie kell a magasság és a potenciális hőmérséklet közötti bijekciónak. Itt is sztatikus légkör feltételezésével élünk.

$$\Pi = c_p \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{\kappa - 1}{\kappa}}$$

I.3.10. Adjuk meg az Exner-függvényt, mint vertikális koordináta segítségével a mozgásegyenletek, a kontinuitási egyenlet és termodinamikai egyenlet alakját! Ezt a koordináta-rendszert elterjedten alkalmazzák a mezoskálájú modellezésben mind hidrosztatikus, mind nem-hidrosztatikus modellekben.

Az Exner-függvény önmagában is fontos a klasszikus dinamikus meteorológiában. Adiabatus feltételezés mellett leegyszerűsíti a z rendszerben felírt légköri hidrotermodinamikai egyenletrendszert.

I.3.11. Írjuk fel a légköri dinamikai és termodinamikai egyenleteket módosított izentróp koordináta-rendszerben,

$$\eta = \frac{\Theta_f - \Theta}{\Theta_f - \Theta_a},$$

I.3.12. Adjuk meg a potenciális hőmérsékletet ha a 850, 700, 500 és a 300 hPa-os főizobár szinten a hőmérséklet rendre $T_{850} = 1,5^\circ\text{C}$, $T_{700} = -9,2^\circ\text{C}$, $T_{500} = -26,4^\circ\text{C}$ és $T_{300} = -48^\circ\text{C}$!

I.3.13. Adjuk meg a Montgomery-potenciál értékét a 300 K izentróp felületen, ha ennek nyomása 500 hPa, a geopotenciál értéke 504 geopotenciális dekaméter! A geopotenciál számításánál $g_0 = 9,8 \text{ m s}^{-2}$ normáló tényezővel számolunk.

I.3.14. Mennyivel különbözik a Montgomery-potenciál értéke a geopotenciáltól a 310 K izentróp felületen, ha itt a hőmérséklet -48°C ?

I.3.15. Határozzuk meg az izentróp felület hajlásszögét, ha az $11,5 \cdot 10^7$ térképen 5°C -os hőmérséklet különbséghez – a legnagyobb változás irányába 0,5 cm-es távolság tartozik! A potenciális hőmérséklet a magassággal 100 m-enként $0,35^\circ\text{C}$ -ot emelkedik.

I.3.16. Becsüljük meg az izentróp koordináta-rendszerben a vertikális sebességet, ha éjszaka a kisugárzási folyamatok során a légtömeg hőmérséklete 6 óra alatt 8°C -kal csökkent. Feltesszük, hogy $\Theta/T \approx 1$ és $\Delta T \approx \Delta\Theta$.

I.3.17. Becsüljük meg az izentróp koordináta-rendszerben a vertikális sebességet, ha 4 óra alatt 3 g kg^{-1} felhőlevegő kondenzálódik! Most is feltesszük, hogy $\Theta/T \approx 1$ és $\Delta T \approx \Delta\Theta$.

I.3.18. Egy légréteg emelkedési sebessége $0,4 \text{ m s}^{-1}$. A légnyomás 8,5 m-enként csökken 1 hPa-t. Adjuk meg a vertikális sebességet nyomási rendszerben!

I.4. A légköri folyamatok nagyságrendi analízise

A meteorológiai állapothatározók és deriváltjaik értéke különböző skálájú folyamatok esetén más és más lehet (I.4.1. táblázat).

I.4.1. táblázat. Meteorológiai állapothatározók és változásainak karakterisztikus értékei különböző méretskálákon 10^7 – 10^{-2} m mérettartományban. (Orlanski, 1975; Práger, 1982; Stull, 1988 és Czelnai, 1995 alapján).

Karakterisztikus értékek	Jelölés, mértékegység	Méretskála			
		Szinoptikus Makro- β	Mezo- α	Mezo- β, γ	Mikro
Élettartam	T_r [s]	10^6-10^9	10^5-10^6	Változó	Változó
Horizontális kiterjedés	L [m]	10^5-10^7	10^5-10^5	10^3-10^5	$10^{-2}-10^3$
Vertikális kiterjedés	D [m]	$1-2 \cdot 10^4$	$1-2 \cdot 10^4$	$0,5-1 \cdot 10^4$	$10^{-2}-10^2$
Horizontális sebesség	V [m s ⁻¹]	10–40	10–40	10–20	1–5
Vertikális sebesség	W [m s ⁻¹]	10^{-2}	$1-5 \cdot 10^{-2}$	$10^{-2}-10$	$10^{-2}-1$
Horizontális (L) és lokális (T_E)* változások					
Horizontális sebesség	$\Delta V _{x,y,t} = V$	10–40	10–40	10–20	1–5
Vertikális sebesség	$\Delta W _{x,y,t} = W$	10^{-2}	$1-5 \cdot 10^{-2}$	$10^{-2}-10$	$10^{-2}-1$
Nyomás	$\Delta p _{x,y,t}$ [Pa]	$2-5 \cdot 10^3$	$1-3 \cdot 10^3$	$1-3 \cdot 10^2$	0,1–10
Hőmérséklet	$\Delta T _{x,y,t}$ [K]	10–20	10–20	5–10	0,1–1
Sűrűség	$\Delta \rho _{x,y,t}$ [kg m ⁻³]	0,01	0,01	0,01	0,01
Coriolis-paraméter	$\Delta f _{x,t}$ [s ⁻¹]	0	0	0	0
	$\Delta f _y$ [s ⁻¹]	$10^{-5}-10^{-4}$	10^{-5}	$10^{-6}-10^{-7}$	~0
Vertikális változások					
Horizontális sebesség	$\Delta V _{x,y,t} = V$	10–40	10–40	10–20	1–5
Vertikális sebesség	$\Delta W _{x,y,t} = W$	10^{-2}	$1-5 \cdot 10^{-2}$	$10^{-2}-10$	$10^{-2}-1$
Nyomás	$\Delta p _z$ [Pa]	10^5	10^5	$1-0,5 \cdot 10^5$	$0,1-10^4$
Hőmérséklet	$\Delta T _z$ [K]	50–100	50	25–50	< 20
Sűrűség	$\Delta \rho _z$ [kg m ⁻³]	1	1	0,5–1	< 0,1
Coriolis-paraméter	$\Delta f _z$ [s ⁻¹]	0	0	0	0

A karakterisztikus Euler-féle időbeli változás a $T_E = L/V$ hányados alapján becsülhető.

A skálaválasztásától függ, hogy a kormányzó egyenletekben mely tagok válnak fontossá, illetve melyeket hanyagolhatunk el. A dinamikus meteorológiában meghatározó szerepe van a nagyskálájú (szinoptikus, vagy mezo- α skálájú) mozgásrendszereknek (I.4.1. táblázat). A légköri hidrotermodinamikai egyenletrendszer általános érvényű, az áramló közeg bármely pontjában, bármely időpontban teljesül. A meteorológiai mérések, és az időjárási előrejelzések térben és időben átlagolt mennyiségekre vonatkoznak. Amikor meteorológiai rácshálózaton számolunk szintén tér- és időbeli átlagokkal foglalkozunk. A turbulenciát az átlagos mozgástól, pontosabban a várható értéktől vett eltéréssel értelmezhetjük.

Nézzük a legegyszerűbb ún. Reynolds (1895) átlagolást! Legyen $X(x, y, z, t)$ és $Y(x, y, z, t)$ állapotjelző a tér és az idő folytonos, többszörösen deriválható függvénye. Az átlagolást matematikai operációnak (az adott térrészre és az adott átlagolási időszakra vonatkozó tér- és időbeli integrálásnak) tekintve az alábbi posztulátumokat tehetjük:

$$\overline{AX + BY} = A\overline{X} + B\overline{Y}, \quad \overline{\overline{X}Y} = \overline{X}\overline{Y}, \quad \frac{\partial \overline{X}}{\partial s} = \overline{\frac{\partial X}{\partial s}},$$

ahol A és B állandók, s adott tér-, vagy idő-koordináta ($s \in (x, y, z, t)$). Az X állapotjelző tetszőleges $P(x, y, z)$ pontban és t időpillanatban két mennyiség az átlagérték ($\overline{X}$) és az ettől vett eltérés az ún. fluktuáció (X') összegeként írható fel:

$$X = \overline{X} + X'.$$

A fenti felírásból következik a Reynolds-féle átlagolás negyedik posztulátuma:

$$\overline{X'} = 0,$$

vagyis a fluktuációk átlaga nulla.

Hasonlósági kritériumok

Ha egy fizikai rendszert n darab mennyiség jellemez, akkor a rendszert leíró összefüggések mindig k darab dimenziómentes változó közti összefüggésre redukálhatóak. A redukcióra érvényes a $k = n - j$ összefüggés, ahol j a rendszert jellemző azon fizikai mennyiségek maximális száma, amelyekből még nem képezhető dimenziómentes szorzat. Ez a *Buckingham-tétel*. Az egyszerűség kedvéért tekintsük a metrikus gyorsulások elhanyagolásával vektori alakban felírt Navier–Stokes-egyenleteket. Jelöljük a molekuláris ($\mathbf{F}_{\text{mol}}$) és a turbulens diffúziós folyamatok $\mathbf{F}_{\text{turb}}$ hatására kialakuló súrlódási erőt.

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = \frac{d\mathbf{v}_h}{dt} + \mathbf{k} \frac{d\mathbf{w}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla_h p - \mathbf{k} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{g} + \mathbf{F}_{\text{turb}} + \mathbf{F}_{\text{mol}}$$

$$\frac{V^2}{L} \quad \frac{V^2}{L} \quad \frac{W^2}{D} \quad \frac{\delta p}{\rho_0 L} \quad \frac{p_0}{\rho_0 D} \quad fV \quad g \quad \frac{\nu W}{D^2} \quad \frac{K_m V}{D^2}.$$

Az egyes tagok nagyságrendi becslésénél $\delta p = \Delta p|_{x,y}$ a horizontális nyomás perturbáció (nagyságrendje 10 hPa), ν a kinematikai viszkozitási együttható, K_m az impulzusszállításra vonatkozó turbulens diffúziós együttható, s emlékeztetőül a Coriolis-paraméter alakja, $f = 2\Omega \sin \varphi$.

Molekuláris viszkozitási erő legfeljebb az alsó néhány cm-es rétegben jelentős (D_ν). A turbulens súrlódási erővel a határretegben számolhatunk, melynek karakterisztikus vastagságát D_h -val jelöljük: az éjszakai stabil rétegződés esetén 100 m-es, míg nappal a konvekció eredményeként km-es nagyságrendű.

Az impulzusszállításra vonatkozó turbulens diffúziós együttható (K_m) hozzávetőlegesen a határreteg harmadánál éri el a maximális értékét, határretegbeli karakterisztikus értéke: 10–50 m² s⁻¹. A szabad légkörben $K_m = 0$, nincs turbulens keveredés, és súrlódási erő sem. Természetesen ez alól kivételt képeznek az erős szélnyírással rendelkező területek (konvektív rendszerek, vagy a futóáramlások).

A mozgásegyenletekben 6 tag szerepel (gyorsulás, nyomási gradiens-erő, Coriolis-erő, gravitációs erő, molekuláris és turbulens viszkozitásból származó súrlódási erő). A gyorsulás dimenziójában két mértékegység – a hosszúság és az idő – van, így a *Buckingham-tételben* szereplő $\bar{J}$ értéke 1. Ez azt jelenti, hogy $k=5$ jól megválasztott dimenzió nélküli számmal pl. az erők eredőjeként létrejövő gyorsulás (V^2/L) és valamelyik másik erő hányadosával jellemezhetjük az áramlást. Itt kihasználjuk, hogy a vertikális gyorsulás (W^2/D) legalább egy nagyságrenddel kisebb mint a horizontális, illetve tudjuk, hogy a nyomási gradiens erő függőleges komponense és a nehézségi gyorsulás azonos nagyságrendű (10 m s^{-2}). Nézzük ezeket az egymástól független dimenziótlan számokat!

i) Az Euler-szám (Eu) a horizontális nyomási gradiens erő és a gyorsulás hányadosa:

$$Eu = \frac{\delta p}{\rho_0 V^2}$$

ii) A Rossby-szám (Ro) (nevezik Kibel-számnak is) a horizontális gyorsulás és a Coriolis-erő közötti arányt fejezi ki:

$$Ro = \frac{V^2 / L}{f \cdot V} = \frac{V}{fL}$$

iii) A gyorsulás és a nehézségi erő hányadosa a Froude-szám, horizontális áramlás esetén (Fr_h):

$$Fr_h = \frac{V^2 / L}{g} = \frac{V^2}{Lg}$$

A meteorológiai gyakorlatban a vertikális instabilitások vizsgálatánál használják.

iv) A turbulens viszkozitási erő és a Coriolis-erő hányadosa az Ekman-szám ($\hat{Ek}$):

$$\hat{Ek} = \frac{K_m V / D_E^2}{fV} = \frac{K_m}{fD_E^2}$$

Az Ekman-szám arányos a határréteg, illetve az óceáni súrlódási réteg vastagságával, mivel a forgó közegben a súrlódási erőt elsősorban a Coriolis-hatás tartja egyensúlyban, a nyomási gradiens erő nem lényeges ebből a szempontból.

Gyakran a fenti kifejezés négyzetgyökét adják meg Ekman-számként (Ek):

$$Ek = \frac{1}{D_E} \sqrt{\frac{K_m}{f}}$$

A turbulens súrlódási erő és a gyorsulás arányát nem használják a meteorológiában. A határréteg elméletben általában kvázistacionárius sebességi mező feltételezésével dolgozunk. D_E a határréteg karakterisztikus mérete: nappal 1–2 km, éjszaka néhány száz méter.

v) A gyorsulás és a molekuláris viszkozitási erő hányadosa a Reynolds-szám (Re).

$$Re = \frac{V^2 / L}{\nu W / L^2} = \frac{VL}{\nu}$$

Jó indikátora a lamináris és a turbulens áramlás szétválasztásának. Kritikus értéke 10^3 nagyságrendű, függ a felszín érdességétől, de attól is hogy „milyen irányba haladunk”: a turbulens áramlás válik laminárisá, vagy fordítva.

Megemlítjük még a Strouhal-számot (St) is, ami a gyorsulást jellemzi: az advekción és a lokális sebességváltozás hányadosa.

I.4.1. Mutassuk meg, hogy szinoptikus skálán külön kezelhetjük a horizontális áramlást és a légkör vertikális szerkezetét leíró sztatika alapegyenletét!

I.4.2. Milyen kapcsolatban van a nyomás (p') és a sűrűség (ρ') perturbáció hidrosztatikus $\left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} = -g\right)$ légkörben?

I.4.3. Mutassuk meg, hogy az átlagértékekre is fennáll az állapotegyenlet $\left(\frac{\bar{p}}{\rho} = R\bar{T}\right)$! A fluktuációkra felírt állapotegyenlet segítségével a nagyságrendi analízis módszerére támaszkodva bizonyítsuk be, hogy $\frac{T'}{T} \approx -\frac{\rho'}{\rho}$.

I.4.4. Becsüljük meg a nyomás perturbációkat a fluktuációkra vonatkozó sztatika alapegyenletéből szinoptikus skálán!

I.4.5. A Descartes-rendszerbeli kontinuitási egyenlet alapján mutassuk meg, hogy szinoptikus skálájú folyamatok esetén a divergencia 10^{-6} s^{-1} nagyságrendű! Mit mondhatunk a divergencia- és az örvénymentes sebességkomponensek arányáról?

I.4.6. Adjuk meg a szférikus koordináta-rendszerben felírt mozgásegyenletek nagyságrendi analízisét mezo- β , γ skálán a 45. szélességi körön!

I.4.7. Végezzük el a z -rendszerben felírt nyomás-tendencia egyenlet nagyságrendi analízisét!

I.4.8. Adjuk meg a Rossby-szám értékét a szinoptikus skálájú folyamatokban, illetve a mezo- β , és mezo- γ skálán!

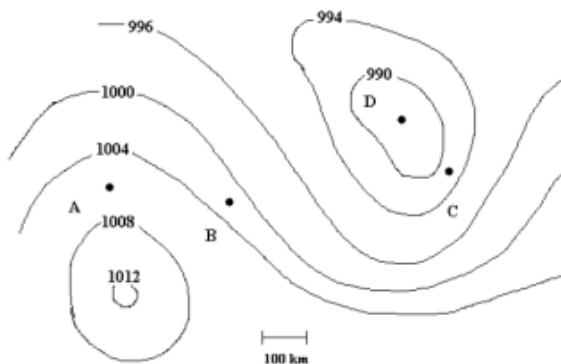
I.4.9. Adjuk meg a Rossby-számot egy tipikus a) hurrikánban a 20° szélességi körön, ahol $V_h = 50 \text{ m s}^{-1}$, $L = 100 \text{ km}$ és b) közép-nyugati tornádóban (USA), ahol $V_h = 100 \text{ m s}^{-1}$, $L = 100 \text{ m}$!

I.4.10. Elemezzük a

$$\frac{d\mathbf{V}_h}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla_h p - \mathbf{k} \times f \mathbf{V}_h$$

horizontális mozgásegyenlet által leírt mozgásformákat a Rossby-szám különböző értékei esetén ($Ro \ll 1$, $Ro \sim 0,1$, $Ro = 1$, $Ro \gg 1$)!

I.4.11. Adjunk becslést a I.4.1. ábrán látható négy pontban a geosztrofikus szél értékére! A 60° szélességi körön vagyunk, $\rho = 1,23 \text{ kg m}^{-3}$.



I.4.1. ábra. Nyomási kép a szinoptikus térképen.

I.4.12. Adjuk meg a Brunt-Vaisala frekvencia nagyságrendi becslését. Hogy függ az alkalmazott skálától (szinoptikus, mezo, vagy mikro)?

I.4.13. Adjuk meg a) a dinamikus meteorológiában gyakran használt dimenzió nélküli horizontális skálaparamétert, mint a metrikus és az inerciális gyorsulás hányadosát,

b) a vertikális skálaparamétert, mint a karakterisztikus vertikális méret (D) és a homogén, vagy a feladattól függően a politróp légkör magasságának (H) hányadosát,

c) a vertikális rétegződés skálaparaméterét az N Brunt-Vaisala (vagy Väisälä) frekvencia felhasználásával, d) a

dinamikus időskálát, ami a karakterisztikus idő $\left(\frac{V}{L}\right)$ és a horizontális gyorsulás becsléséből származó – sebességváltozásra jellemző – lokális időskála (T) idő hányadosa.

I.4.14. Tekintsünk egy szinoptikus skálájú (pl. ciklon) egy mezoskálájú (pl. tengeri parti szél, mint zárt cirkuláció) és egy mikroskálájú folyamatot (cumulus konvekció)! Az állapothatározók és azok változásainak karakterisztikus értékeit az I.4.2. táblázat tartalmazza. A légkör vastagsága legyen $H = 10^4$ m, míg a Brunt-Vaisala frekvencia karakterisztikus értéke mindenskálán $N = 10^{-2} \text{ s}^{-1}$ (**I.4.11. feladat**).

I.4.2. táblázat. Meteorológiai állapothatározók és változásainak karakterisztikus értékei három különböző jelenségben (három különböző skálán). (Horiz. – horizontális)

Jelenség Skála	Lokális időskála $[T], \text{ s}$	Térskala Horiz., Vertikális $[L][D], \text{ m}$	Sebesség Horiz., Vertikális $[V, \Delta V][W, \Delta W], \text{ m s}^{-1}$	Nyomás vált. Horizontális $[\delta p], \text{ Pa}$
Ciklon				
Szinoptikus	$\geq 10^5$	$10^6 \text{ } 10^4$	$10^6 \leq 10^{-2}$	10^3
Parti szél	10^4	$5 \cdot 10^4 \text{ } 2 \cdot 10^3$	$3 \leq 10^{-1}$	10^2
Mezo				
Cumulus	$5 \cdot 10^2$	$2 \cdot 10^3 \text{ } 5 \cdot 10^3$	$1 \text{ } 3$	10^1
Mikro				

Adjuk meg az I.4.3. táblázatban a dimenzió nélküli mennyiségek nagyságrendjét! Hol vannak 1 körüli (~ 1), 1-nél kisebb vagy nagyobb, illetve egynél lényegesen kisebb ($\ll 1$) vagy nagyobb ($\gg 1$) értékek?

I.4.3. táblázat. Dimenzió nélküli mennyiségek karakterisztikus értékei három különböző jelenségben (három különböző skálán). (Horiz. – horizontális)

Skála	Dimenzió nélküli mennyiség				
	$\frac{L}{r_F}$	$Ro = \frac{V}{fL}$	$\frac{D}{H}$	$\frac{UT}{L}$	$\frac{N^2 H}{L}$
Ciklon					
Szinoptikus					
Parti szél					
Mezo					
Cumulis					
Mikro					

I.4.15. Adjuk meg az I.4.2. táblázatban bemutatott 3 folyamatosztályra az Euler-szám, a Rossby-szám a Froude-szám, az Ekman-szám, a Reynolds-szám értékét.

II. fejezet - A légköri kinematika

Weidinger Tamás

Tasnádi Péter

Leelőssy Ádám

II.1. A meteorológiai állapothatározók interpolációja

A folytonosan változó meteorológiai állapotjelzők mezőit térben és időben leíró függvényeket nem ismerjük. A megfigyeléseket térben és időben *diszkrét pontokban* (illetve *adott térrészben*) végezzük, ami a mérés jellegéből fakadóan *általában valamilyen átlagolást* jelent. Numerikus modellszámítások során a meteorológiai mezők értékeit egy rácshálózat pontjaiban adjuk meg, s abból számoljuk ki az adott pontra az előrejelzett értékeket.

Maga a meteorológiai mérőhálózat (felszíni, rádiószondás stb.) nem szabályos rácson helyezkedik el. A keresett értékeket adott irányban (egy dimenzió 1D), adott felületen (2D) vagy adott térrészben (3D), valamint a meteorológiai mezők időbeli fejlődését figyelembe véve (4D) kell meghatározni. Célunk, hogy megadjuk a változók értékeit olyan pontokban is, ahol nincsenek adatok.

Sorfejtéses módszerek esetén konvergens végtelen sor csonkításával kapjuk meg a keresett értéket. Approximációs eljárások esetén a megfigyelési és a modellezett adatok nem esnek egybe szükségszerűen, míg az interpolációs eljárásokban alkalmazott függvények átmennek az alappontokon (megfigyelések). E fejezetben ez utóbbi módszerekkel foglalkozunk.

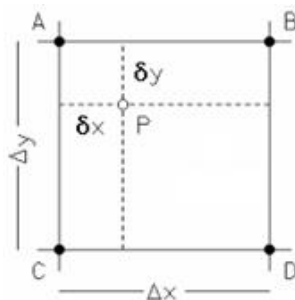
Az interpoláció célja, hogy adott pontsorozathoz $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_m, y_m)$ előállítsuk azt a (folytonos) függvényt (f) amely meghatározott függvényosztályba tartozik és minden megfigyelési ponton átmegy, azaz

$$y_i = f(x_i), i = 1, 2, \dots, m.$$

A megadott függvény típusa határozza meg az interpolációt. Ha pl. a keresett $f(x)$ polinom, akkor polinom-interpolációról van szó. Az interpolációs eljárásoknak gazdag irodalma van (Stoyan et al., 2002; Bozsik és Krebsz, 2010; Mészáros, 2011; Barabás, 2012).

A leggyakrabban használt interpolációs technikák a polinom, a Hermite-, és a spline interpoláció. Az interpolációs módszerek osztályozásáról, a térinformatikai alkalmazásokról Márkus (2010) elektronikus jegyzetéből tájékozódhatnak.

A legegyszerűbb, meteorológiai gyakorlatban is alkalmazott módszer a lineáris interpoláció, míg 2D-s esetben a bilineáris interpoláció (II.1.1. ábra).



II.1.1. ábra. A bilineáris interpoláció szemléletes képe.

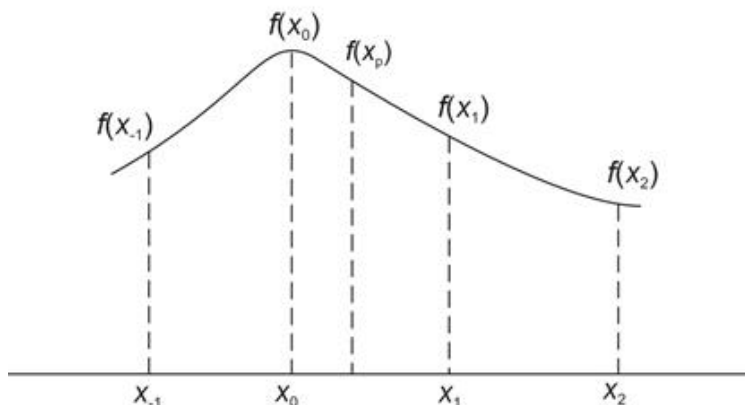
Ha ismert az állapothatározók értéke az $y_A = f(x_A)$, $y_B = f(x_B)$, $y_C = f(x_C)$, $y_D = f(x_D)$ pontokban, akkor könnyen megadható az $y_P = f(x_P)$ interpolált érték a P pontban. Az egyszerűség kedvéért ekvidisztáns rácsávolsággal számolva ($\Delta x = \Delta y = 1$), az interpoláció súlytényezői fordítva arányosak a P pont és a rács x és y irányú távolságával. Kétszer elvégezve a lineáris interpolációt (először az egyik, majd a másik koordináta-irány szerint, az

$$y_P = y_A + \delta x \cdot (y_B - y_A) + \delta y \cdot (y_C - y_A) + \delta x \cdot \delta y \cdot (y_A - y_B - y_C - y_D)$$

munkaformulát kapjuk.

Az interpolációs eljárás súlytényezőit sokféleképpen megválaszthatjuk. A meteorológiai gyakorlatban elterjedten alkalmazzák pl. a távolság reciprokával arányos súlyozást, ami a közelebbi állomások szerepét hangsúlyozza, pl. a csapadékmező számításakor.

Egy-egy rácsnégyzeten belül magasabb fokszámú polinommal is dolgozhatunk. Ehhez a távolabbi rácsponthoz is figyelembe kell venni. Ez a Lagrange-interpoláció, amit egydimenziós esetben szemléltetünk egy harmadfokú polinom alkalmazásával (II.1.2. ábra). Ennél nagyobb fokszámú polinommal a nagy távolság (vagy a feladat számításigénye) miatt általában nem érdemes foglalkozni.



II.1.2. ábra. Egydimenziós köbös Lagrange-interpoláció vázlatos képe.

Legyen ismert az ekvidisztáns rácson ($\Delta x = 1$) az $y_{-1} = f(x_{-1})$, $y_0 = f(x_0)$, $y_1 = f(x_1)$ és $y_2 = f(x_2)$ függvényérték.

Határozzuk meg az (x_0, x_1) intervallumban levő x_P pontban az $y_P = f(x_P)$ függvény értékét! Az egyszerűség kedvéért legyen

$$x_{-1} = -1, x_0 = 0, \dots, x_2 = 2.$$

A harmadfokú polinom egyenlete:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

Az együtthatókat az

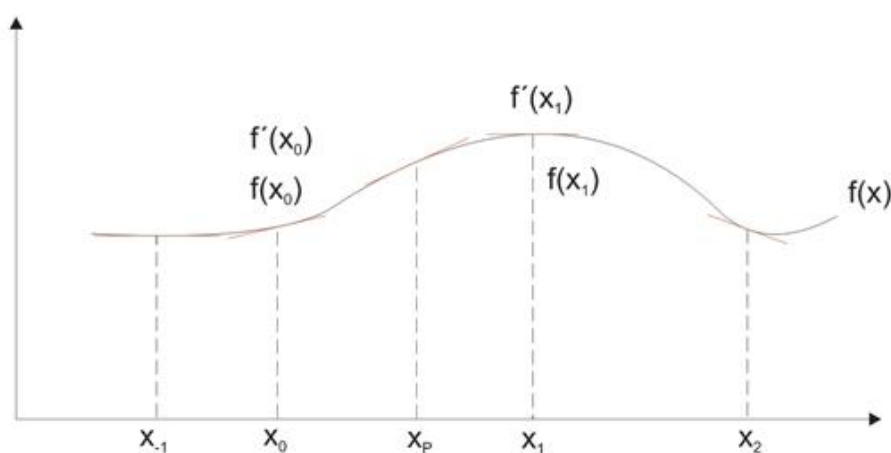
$$y_i = f(x_i), \quad i = -1, 0, \dots, 2$$

lineáris egyenletrendszer adja meg, ami a jelen példánkban:

$$\begin{aligned}y_{-1} &= -a + b - c + d \\y_0 &= d \\y_{+1} &= +a + b + c + d \\y_{+2} &= 8a + 4b + 2c + d\end{aligned}$$

Az egyenletrendszert nem kell megoldanunk. Az együtthatók közvetlenül adódnak a ún. Lagrange-féle formulából (lásd pl. Mészáros, 2011).

Gyakran alkalmazzák az ún. Hermite-interpolációt is. Ennek lényege, hogy $(2n+1)$ -ed rendű polinomot használunk, úgy, hogy ismerjük a függvény és az első derivált értékeit a kiválasztott egymás melletti $(2n+1)$ rácspontban. Az interpolációt a leggyakrabban alkalmazott harmadrendű polinomra ($n=1$) mutatjuk be egydimenziós esetben (lásd pl. Mészáros, 2011).



II.1.3. ábra. A harmadrendű Hermite-interpoláció.

Nézzük a II.1.3. ábrát! Az (x_0, x_1) szakaszon belüli x_p pontban vagyunk kíváncsiak az $f(x_p)$ interpolált értékre.

A feladat megoldható, ha ismerjük a függvényértékeket $f(x_0)$, $f(x_1)$ és az első deriváltakat: $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{x_0} = f'(x_0)$, $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{x_1} = f'(x_1)$ az x_0 és az x_1 pontban, például a rácsponti adatokból számított véges különbséges módszer alapján. A harmadfokú polinom egyenlete:

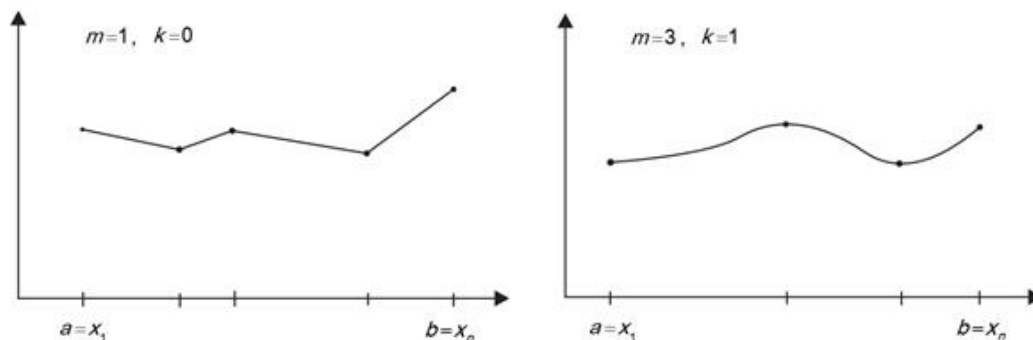
$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d,$$

a megoldásra váró lineáris egyenletrendszer, amelyből a polinom együtthatóit kapjuk :

$$\begin{aligned}f(x_0) &= ax_0^3 + bx_0^2 + cx_0 + d \\f'(x_0) &= 3ax_0^2 + 2bx_0 + c \\f(x_1) &= ax_1^3 + bx_1^2 + cx_1 + d \\f'(x_1) &= 3ax_1^2 + 2bx_1 + c\end{aligned}$$

A Hermite-interpolációnál nem csak a függvényértékek, hanem az első deriváltak illeszkedését is elvártuk.

A spline interpoláció lényege, hogy a csatlakozási helyeken (rácspontokban) a függvényértékek mellett valamilyen rendig a deriváltak illeszkedését is kiköti. Sima átmenetet feltételezünk az egyes szakaszok határpontjaiban: m -ed fokú és k -ad rendű rendű (azaz, a fokszám a szakaszonként illesztett polinomok fokszáma, a k -ad rend pedig a k -adik derivált illeszkedésére vonatkozik). Megjegyezzük, hogy a lineáris interpoláció egy elsőfokú nulladrendű spline interpoláció (II.1.4. ábra).

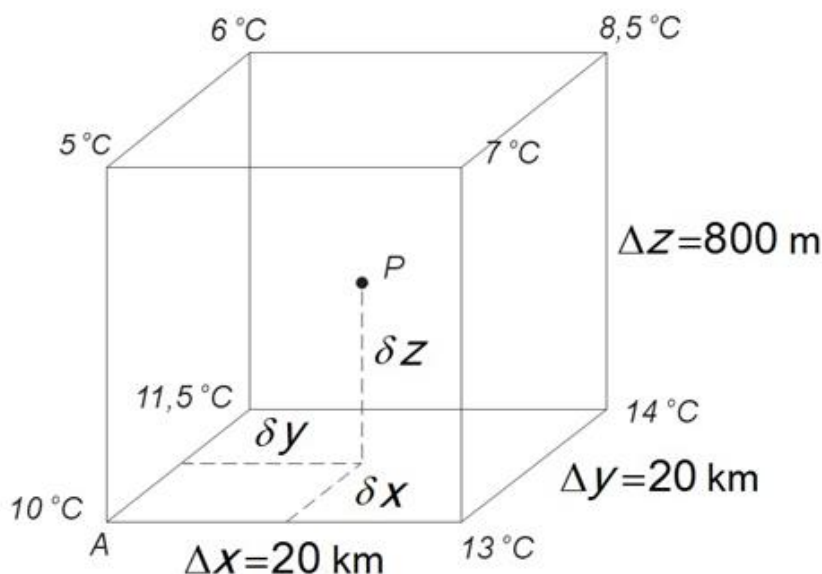


II.1.4. ábra. Lineáris nulladrendű (baloldal) és köbös elsőrendű spline interpoláció (jobboldal).

A meteorológiában általában szakaszonként harmadfokú, s így másodrendű spline interpolációt használnak. Ez már „elég sima” mezőt ad a meteorológiai alkalmazásokhoz, s még egyszerűen (azaz mérsékelt számításigénnyel) megvalósítható.

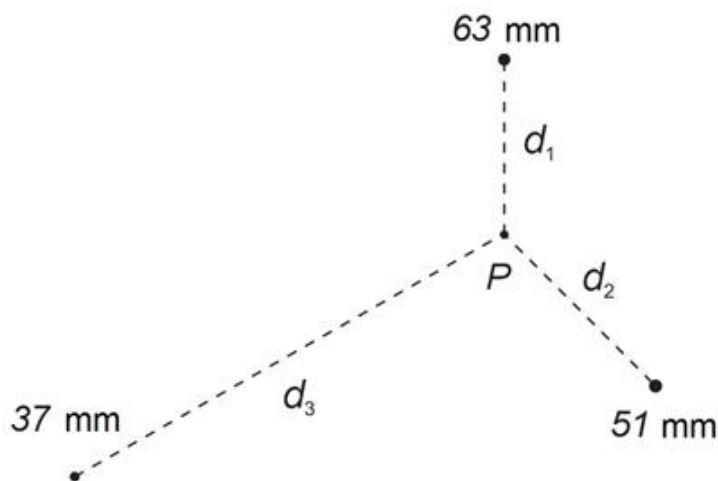
II.1.1. Adjuk meg a bilineáris interpoláció munkaformuláját, ha $\Delta x \neq \Delta y$!

II.1.2. Adjuk meg a hőmérséklet értékét a P pontban a II.1.5. ábra szerinti háromdimenziós rácson háromdimenziós lineáris interpoláció segítségével!



II.1.5. ábra. A hőmérséklet értékei a háromdimenziós rácspontjaiban. A P pont helyzete a rács kezdőpontjához (A) viszonyítva: $\delta x = 6,5 \text{ km}$, $\delta y = 9,5 \text{ km}$, $\delta z = 650 \text{ m}$.

II.1.3. Becsüljük meg a csapadék értékét a P pontban a három szomszédos csapadékmérő állomás (II.1.6. ábra) adataiból a) a távolsággal ($d_i, i=1, 2, 3$) fordítottan arányos b) a távolság reciprokéval arányos, c) a távolság négyzetével fordítottan arányos, d) a távolság négyzetének reciprokéval arányos súlytényezők alkalmazásával! Az eredményeket mm-re kerekítve adjuk meg!



II.1.6. ábra. A három közeli csapadékmérő adatai és távolsága ($d_1 = 12 \text{ km}$, $d_2 = 17,5 \text{ km}$, $d_3 = 29 \text{ km}$) a kiválasztott P ponttól.

II.1.4. Határozzuk meg a 200 m-es szint specifikus nedvességét (q) harmadfokú Lagrange-féle interpoláció alkalmazásával. A specifikus nedvesség magasságszerinti változását a II.1.1. táblázat szemlélteti.

II.1.1. táblázat. A specifikus nedvesség magasságszerinti változása stabil határréteg esetén.

$z \text{ [m]}$	2	50	100	150	200	250	300
$q \text{ [g kg}^{-1}\text{]}$	8,5	8,3	7,9	7,6	?	7,3	5,9

A számításhoz használjuk fel a Lagrange-féle interpoláció munkaformuláját!

A Lagrange-féle interpoláció polinomja menjen át az $x_1, x_2, \dots, x_n$ pontokon, ahol értéke $y_1, y_2, \dots, y_n$. Az interpolációhoz célszerű kiválasztani a 100 m, 150 m, 250 m és a 300 m-es szintet. A harmadfokú polinom helyett a Lagrange-féle interpoláció polinomját használjuk, melynek alakja (Mészáros, 2011; Barabás, 2012):

$$P(x) = \sum_{i=1}^n y_i l_i(x), \quad n=4.$$

A képletben $l_i(x)$ a Lagrange-féle i -edik alap-polinom, amely az $x_1, x_2, \dots, x_n$ pontokon nulla értéket vesz fel, kivéve az x_i helyet, ahol értéke 1.

$$l_i(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x = x_j, \quad j = 1, 2, \dots, (j-1), (j+1), \dots, n \\ 1 & \text{ha } x = x_i \end{cases}$$

Előállítás

$$l_i(x) = \frac{\varpi(x)}{(x-x_i) \cdot \frac{d}{dx_i} \varpi(x_i)},$$

ahol

$$\varpi(x) = (x-x_1) \cdot (x-x_2) \cdot \dots \cdot (x-x_n),$$

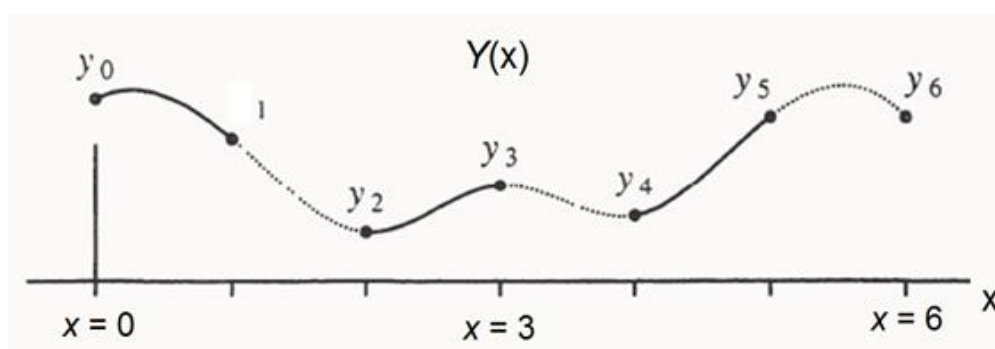
illetve

$$\frac{d\varpi(x_i)}{dx_i} = (x_i-x_1) \cdot (x_i-x_2) \cdot \dots \cdot (x_i-x_{i-1}) \cdot (x_i-x_{i+1}) \cdot \dots \cdot (x_i-x_n)$$

II.1.5. Illesszünk interpolációs polinomot az (x, y) síkon a $P_1(1, 9)$, $P_2(2, 8)$ és a $P_3(4, 12)$ pontokra!

II.1.6. Illesszünk interpolációs polinomot az $A(1, 3)$, $B(2, 8)$, $C(4, 12)$ és $D(3, 7)$ pontokra!

II.1.7. Vezessük le a szakaszonként harmadfokú másodrendű természetes spline együtthatóinak megoldását! (A spline interpolációk esetén a természetes elnevezés arra utal, hogy a második derivált értéke a spline két végpontjában nulla.) Az egyszerűség kedvéért ekvidisztáns, egységnyi távolságokkal dolgozunk (II.1.7. ábra).



II.1.7. ábra. Természetes köbös spline ekvidisztáns távolságokkal ($\Delta x = 1$).

Az egyes szakaszokban az interpolációs polinom alakja:

$$Y_i(x) = A_i + B_i x + C_i x^2 + D_i x^3$$

II.1.8. Illesszünk köbös másodrendű természetes spline-t a II.1.2. táblázatban megadott pontokhoz (a két részintervallumra)!

II.1.2. táblázat. A spline töréspontjai, s az ottani függvényértékek.

x	-1	0	1
$f(x)$	1	0	1

II.2. A légkör skalár- és vektormezői, valamint deriváltjaik és integráljaik

A légkört jellemző állapotjelzők a tér és az idő skalár- és vektorértékű függvényei. Ebből következik, hogy a tér- és időbeli változásait leíró egyenletek a vektoranalízis eszközeit felhasználva állíthatók elő. A következőkben összefoglaljuk a legfontosabb vektoranalízisbeli összefüggéseket. A függvényeket, legyenek azok skalár- vagy vektorfüggvények, normál (times new roman) betűkkel jelöljük, míg a skalár változókat dőlt betűkkel a vektorokat pedig félkövér dőlt betűkkel adjuk meg. A mátrixok leírására a félkövér Ariel betűtípus szolgál. A skalár, a vektor és a diadikus szorzás jelét ($\cdot, \times, \circ$) kiírjuk, míg a skalárok közötti szorzást külön nem jelöljük.

Divergencia, gradiens, rotáció

Nézzük a *divergencia*, a *gradiens* és a *rotáció invariáns definícióját*! Legyen $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ az $\mathbf{r}_0$ pont környezetében folytonos és magán e helyen differenciálható függvény. A vektortér adott pontbeli divergenciáján a vektortér e pont körüli kis felületen (ΔV) vett fluxusa és a körülzárt térrész köbtartalma (ΔV) hányadosának határértékét értjük, miközben e térrész az adott pontra zsugorodik.

$$\text{div } \mathbf{V} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \iiint_{\Delta V} \mathbf{v} \, dF$$

Tekintsünk az $\mathbf{r}_0$ pont környezetében folytonos és e helyen differenciálható $p(\mathbf{r})$ skalár-vektor függvényt! A skalártér adott pontbeli *gradiensén* a skalártér e pont körüli kis felületen vett integrálja és a körülzárt térrész térfogatának a hányadosát értjük, miközben a térrész az adott pontra zsugorodik.

$$\text{grad } p = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \iiint_{\Delta V} p \, dF$$

A gradiens tétel szerint a $\text{grad } p$ vektor ΔV térrészre vonatkozó integrálja megegyezik a $p(\mathbf{r})$ skalárnak a (kifele irányított) ΔF határfelületen vett integráljával.

$$\iiint_{\Delta V} \text{grad } p \, dV = \iint_{\Delta F} p \, dF$$

Az áramlási tér fontos jellemzője a forgás, az örvénylés intenzitása. Ezt adja meg a sebességi mező *rotációja*. A

vektortér adott $\mathbf{r}_0$ pontbeli rotációján a vektortér e pont körüli kis felületen vett $\iint_{\Delta F} d\mathbf{F} \times \mathbf{v}$ alakú integrálja és a körbezárt térfogat hányadosának a határértékét értjük.

$$\text{rot } \mathbf{V} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \iiint_{\Delta V} d\mathbf{F} \times \mathbf{v}$$

A felírásból következik, hogy a $\text{rot } \mathbf{v}$ vektor ΔV térfogatra vonatkozó integrálja egyenlő a (kifele irányított) $\mathbf{n}$ normálvektor ($d\mathbf{F} = \mathbf{n} \, dF$) és a $\mathbf{V}$ sebességvektor vektoriális szorzatának ΔF zárt felületen vett integráljával:

$$\iiint_{\Delta V} \text{rot } \mathbf{v} \, dV = \iint_{\Delta F} d\mathbf{F} \times \mathbf{v} = \iint_{\Delta F} (\mathbf{n} \times \mathbf{v}) \, dF$$

A következő lépésként nézzük meg a szorzatokra vonatkozó deriválási szabályokat, amelyek a következők:

$$A.1. \operatorname{grad}(u_1 u_2) = u_1 \operatorname{grad}(u_2) + u_2 \operatorname{grad}(u_1),$$

$$A.2. \operatorname{grad}(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2) = (\mathbf{v}_1 \cdot \operatorname{grad}) \mathbf{v}_2 + (\mathbf{v}_2 \cdot \operatorname{grad}) \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_1 \times \operatorname{rot}(\mathbf{v}_2) + \mathbf{v}_2 \times \operatorname{rot}(\mathbf{v}_1).$$

$$A.3. \operatorname{div}(u \mathbf{v}) = u \operatorname{div}(\mathbf{v}) + \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad}(u).$$

$$A.4. \operatorname{div}(\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2) = \mathbf{v}_2 \cdot \operatorname{rot}(\mathbf{v}_1) - \mathbf{v}_1 \cdot \operatorname{rot}(\mathbf{v}_2).$$

$$A.5. \operatorname{rot}(u \mathbf{v}) = u \operatorname{rot}(\mathbf{v}) + \operatorname{grad}(u) \times \mathbf{v}.$$

$$A.6. \operatorname{rot}(\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2) = (\mathbf{v}_2 \cdot \operatorname{grad}) \mathbf{v}_1 - (\mathbf{v}_1 \cdot \operatorname{grad}) \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1 \operatorname{div}(\mathbf{v}_2) - \mathbf{v}_2 \operatorname{div}(\mathbf{v}_1).$$

A másodrendű deriváltakra vonatkozó azonosságok: a másodrendű deriváltak előállítására mindig visszavezethető az elsőrendű deriváltak meghatározására a II.2.1. táblázatban közölt szabályok alapján:

II.2.1. táblázat. A másodrendű deriváltak értelmezése.

B.1.	$\operatorname{grad} \operatorname{div}(\mathbf{v})$	értelmezhető
B.2.	$\operatorname{div} \operatorname{grad}(u) = \Delta u$	értelmezhető
B.3.	$\operatorname{div} \operatorname{rot}(\mathbf{v}) = 0$	$\mathbf{v}$ megválasztásától függetlenül teljesül
B.4.	$\operatorname{rot} \operatorname{grad}(u) = 0$	u megválasztásától függetlenül teljesül
B.5.	$\operatorname{rot} \operatorname{rot}(\mathbf{v}) = \operatorname{grad} \operatorname{div}(\mathbf{v}) - \Delta(\mathbf{v})$	
B.6.	$\operatorname{rot} \operatorname{div}(\mathbf{v})$	nem értelmezhető, mert $\operatorname{div}(\mathbf{v})$ skalár, a rot pedig vektorra hat
B.7.	$\operatorname{grad} \operatorname{div}(\mathbf{v})$	értelmezhető
B.8.	$\operatorname{div} \operatorname{div}(\mathbf{v})$	nem értelmezhető, mert $\operatorname{div}(\mathbf{v})$ skalár, a div pedig vektorra hat
B.9.	$\operatorname{grad} \operatorname{grad}(\mathbf{v})$	nem értelmezhető, mert $\operatorname{grad}(u)$ vektor, a grad pedig skalárra hat.

Elsősorban az összetettebb kifejezések kiszámításához célszerű bevezetni a ∇ szimbólummal jelölt nabla- (vagy másképpen Hamilton-operátort, amelyet a következőképpen értelmezhetünk a Descartes-féle koordináta-rendszerben:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k},$$

ahol a Descartes-féle koordináta-rendszer egységvektorai rendre: $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$. A ∇ operátor segítségével a differenciális kifejezések a következőképpen adhatók meg:

$$C.1. \operatorname{grad}(u) = \nabla u.$$

$$C.2. \operatorname{div}(\mathbf{v}) = \nabla \cdot \mathbf{v}.$$

$$C.3. \operatorname{rot}(\mathbf{v}) = \nabla \times \mathbf{v}.$$

$$\text{C.4. } \Delta = \nabla \cdot \nabla = \nabla^2.$$

A fenti formulákban a $\Delta = \nabla^2$ az ún. Laplace-operátort jelöli, amely skalároperátor, s a Descartes-féle koordináta-rendszerben a következőképpen írható:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

A nabla-operátor alkalmazása esetén nem szabad megfeledkezni arról, hogy matematikailag kettős természetű: egyrészt vektor, másrészt differenciáloperátor. Ebből adódnak a következő számítási szabályok:

i) a ∇ operátor lineáris, azaz lineáris kombináció-tartó:

$$\nabla(c_1x + c_2y) = c_1\nabla x + c_2\nabla y,$$

ahol c_1 és c_2 állandók, míg x és y tetszőleges skalár-, vagy vektorértékű függvények.

ii) A ∇ operátort minden egyes mögötte álló mennyiségre alkalmazni kell. Ez azt jelenti, hogy $\nabla(x, y)$ alakú kifejezést formálisan úgy számítjuk ki, mintha a ∇ operátor két tagból állna

$$\nabla = \nabla_x + \nabla_y,$$

ahol a

$$\nabla_x$$

mint differenciáloperátor csupán az x mennyiségre, míg a ∇_y csupán az y mennyiségre hat.

iii) Az előző szabály következménye, hogy a $\nabla_x(x, y)$ alakú mennyiség meghatározását két lépcsőben végezhetjük el. Először a $\nabla_x(x, y)$ alakú kifejezést a vektoralgebra szabályai szerint úgy alakítjuk át, hogy a

$$\nabla_x$$

mögött csupán az x mennyiség álljon. Ezután

$$\nabla_x$$

-szel már úgy számolunk, mint egy közösleges differenciáloperátorral.

iv) A fenti szabályok mindig érvényesek, függetlenül attól, hogy az x és y , valamint a ∇ és (x, y) között milyen típusú szorzat áll.

v) Az iii) pontban említett vektoralgebrai szabályok közül a leggyakrabban a kifejtési- és a felcserélési tételt szokták alkalmazni:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}), \text{ vagy } (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}),$$

valamint

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a} = -(\mathbf{b} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{c} = -(\mathbf{a} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{b} = -(\mathbf{c} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a},$$

hiszen $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = -(\mathbf{b} \times \mathbf{a})$.

Teljesül továbbá, hogy

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos \angle \mathbf{a} \mathbf{b}, \text{ ha } \mathbf{a} \perp \mathbf{b} \rightarrow \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0,$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \sin \angle \mathbf{a} \mathbf{b}, \text{ ha } \mathbf{a} \parallel \mathbf{b} \rightarrow \mathbf{a} \times \mathbf{b} = 0.$$

Ha $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{c}$, akkor $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ vektorok jobbsodrású rendszert alkotnak (mint a jobb kézen a hüvelyk-, a mutató- és a középső ujj).

Fontos megjegyezni, hogy a ∇ és a Δ operátort nemcsak Descartes-féle koordináta-rendszerben értelmezhetjük. Ezek alakja a meteorológiai gyakorlatban legtöbbször alkalmazott szférikus koordináta-rendszerben:

$$\nabla = \frac{1}{r \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \lambda} \mathbf{i}_\lambda + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} \mathbf{j}_\phi + \frac{\partial}{\partial r} \mathbf{k}_r,$$

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2 \cos \phi} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \tan \phi \frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r},$$

ahol a szférikus koordináta-rendszer független változói az r sugár, illetve a ϕ szélességi és a λ hosszúsági kör.

A szférikus rendszerbeli egységvektorok rendre: $\mathbf{i}_\lambda, \mathbf{j}_\phi, \mathbf{k}_r$

Megjegyezzük, hogy a dinamikus meteorológiában gyakran célszerű az egyenletek vektoriális alakjával számolni.

Az így kapott általános egyenletek tartalmazzák a ∇ és a Δ operátorokat, amelyeket az utolsó lépésben kell csak az alkalmazott koordináta-rendszernek megfelelő alakban felírni.

Megadható a ∇ differenciál-operátor integrál előállítás is. Definíció szerint: a nabla (∇) differenciál-operátor adott pontbeli vektorán a pont körüli zárt felület vektora és a körülzárt térfogat hányadosának határértékét értjük, miközben e térrész az adott pontra zsugorodik. A nabla szimbolikus vektor csak valamilyen skalár-, vagy vektormennyiséggel szorozva bír értelemmel

$$\nabla(\dots) = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint_{\Delta F} d\mathbf{F} \dots,$$

ahol V térfogatú ΔF felületű légrést vizsgálunk. Az elemi felület vektora $d\mathbf{F}$.

A vektorok integrálására vonatkozó szabályok

A Gauss–Ostrogradskij-tétel:

$$\oint_{\Delta F} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dF = \iiint_{\Delta V} \nabla \cdot \mathbf{v} dV = \iiint_{\Delta V} \text{div} \mathbf{v} dV,$$

ahol $\mathbf{v}$ tetszőleges vektorértékű függvény, $\mathbf{n}$ pedig az ΔF zárt felület minden egyes pontjában a felület normális vektorát jelöli ($d\mathbf{F} = \mathbf{n} dF$). A divergencia tehát a tér „forrásosságát” jellemzi. Ha $\text{div} \mathbf{v} = 0$, akkor a tér/térrész forrásmentes.

Következmény: abban az esetben, ha a vizsgált térfogatnak nincsenek határai, vagy a határokon keresztül nincs áramlás, akkor

$$\iiint_{\Delta V} \nabla \cdot \mathbf{v} dV = 0$$

Ez az eset áll fenn akkor, amikor a $\mathbf{v}$ mennyiségre vonatkozó parciális differenciál-egyenletben a peremfeltételek ciklikusak, vagy a peremeket áthatolthatatlan falnak tekintjük. A dinamikus meteorológiában az előbbi helyzet akkor lép fel, amikor a légköri mozgásokat a teljes földfelszín felett elhelyezkedő, s a légkör „felső határáig” terjedő tartományban vizsgáljuk. Ez röviden azt jelenti, hogy globális problémák esetén bármely vektormező divergenciájára vonatkozó térfogati integrál nulla.

A Stokes-tétel:

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} = \iiint_{\Delta F} (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} dF$$

ahol ΔF a tetszőleges Γ zárt görbén kifeszített nyílt felület. A rotáció tehát a tér „forgásosságát”, kétdimenziós esetben az örvényességét jellemzi. Ha $\text{rot } \mathbf{v} = 0$, akkor nincs forgás (örvényesség).

Következmény: A $(\nabla \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n}$ mennyiség nem más, mint a $\text{rot}(\mathbf{v}) = \nabla \times \mathbf{v}$ mennyiség z irányú komponense, ha $dF = dx \cdot dy$ (Descartes-féle koordináta-rendszerben). Ezért, ha $\text{rot } \mathbf{v}$ vertikális (z -irányú) komponense állandó, akkor a $\mathbf{v}$ vektormező

$$\delta C = \oint_{\Gamma} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s}$$

integrállal értelmezett cirkulációja is állandó.

Értelmezhetjük a légköri folyamatokat leíró skalár- és vektor változók tér- és időbeli parciális megváltozását, illetve a teljes időbeli változásukat. Tekintsük a $\mathbf{v}(x, y, z, t)$ sebességmezőt (vektor-vektor függvényt). Ennek teljes időbeli megváltozása:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$$

A $T(x, y, z, t)$ skalármező (pl. a hőmérséklet) teljes időbeli változása:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) T$$

A skalár- és a vektorterek leírásában – a feladat jellegétől függően – gyakran alkalmazzák az ún. tenzor jelölést is. Az $i, j, k, \dots$ tetszőleges latin betűs indexek az 1, 2, 3 értékeket vehetik fel a háromdimenziós térben (három lineárisan független egységvektor), melyek rendre megfelelnek a vektorok, illetve a tenzorok egyes koordináta-tengelyek irányába eső összetevőinek. A számítások során nagyon hasznosnak bizonyul két kifejezés a két indexes összegzéseknél használt Kronecker-delta szimbólum (lásd részletesebben a **II.3. fejezetet**):

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{ha } i \neq j \\ 1, & \text{ha } i = j \end{cases}$$

illetve a három indexes összegzéseknél alkalmazott Levi–Civita-szimbólum

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{ha } i, j, k \text{ az } 1, 2, 3 \text{ páros permutációja} \\ -1, & \text{ha } i, j, k \text{ páratlan permutációja} \\ 0, & \text{ha } i, j, k \text{ az } 1, 2, 3\text{-nak nem permutációja} \end{cases}$$

A Levi–Civita-szimbólum egy három indexes, teljesen antiszimmetrikus mátrix, vagyis bármely indexét rögzítve a másik két index felcserélésekor a mátrix elemei előjelet váltanak.

Legyen az $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ vektor alakja:

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^3 \mathbf{u}_i = \mathbf{u}_i \mathbf{e}_i \quad \mathbf{v} = \sum_{i=1}^3 \mathbf{v}_i = \mathbf{v}_i \mathbf{e}_i$$

ahol $\mathbf{e}_i$ jelöli az egységvektorokat. A fenti szimbólumok alkalmazásával egyszerűen felírható pl. két vektor skaláris és vektoriális szorzata:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{v}_i = u_i v_i = \delta_{ij} u_i v_j,$$

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{u}_i \times \mathbf{v}_i = \varepsilon_{ijk} u_j v_k \mathbf{e}_i$$

Két vektor diadikus szorzata tenzor, melynek alakja:

$$\mathbf{T} = (\mathbf{u} \circ \mathbf{v})_{ij} = u_i v_j = [\mathbf{T}_{ij}] = T_{ij},$$

ahol $\mathbf{T}$ a tenzor jele, míg a $[\mathbf{T}_{ij}]$ jelölés a tenzor elemeire utal.

A vektorokat (s természetesen az egységvektorokat is) vastag betűkkel, míg a vektorkomponenseket (a számértékeket) vastagítás nélküli betűkkel jelöljük. Hasonló módon járunk el tenzorok és vektorok bármilyen szorzatának képzésekor is. Adott kifejezésben valamennyi ismétlődő latin indexre 1-től 3-ig összegzünk. Több összegző indexszel számolva, természetesen minden indexpár bármely két, azonos betűvel jelölhető. Az összeg értéke a jelöléstől független, minthogy az indexek mindhárom lehetséges értéket felveszik. (E jelölésmódot használják pl. a turbulencia leírásánál a dinamikus meteorológiában.)

Mind a fizikában, mind a dinamikus meteorológiában nagy jelentőséggel bírnak az invariánsok. Ezek olyan mennyiségek, amelyek függetlenek a koordináta-rendszer választásától. A koordináta-rendszertől való függetlenséget e mennyiségek integrál előállítása biztosítja. Folytonos és differenciálható vektortérben az integrál előállítás miatt végtelen számú és különböző rendű (különböző hatványkitevős) integrál invariáns értelmezhetünk, melynek segítségével leírhatjuk az adott vektormező változásait. Mi a legfontosabb, szemléletes fizikai tartalommal rendelkezőket vizsgáljuk, amelyek jól köthetők egy elmozduló légréz alakváltozásához. Lineáris sebességi (vektor-) mezőt feltételezve ilyen invariáns mennyiség a transzláció (eltolás), a divergencia, a rotáció és a deformáció.

Ismétlő feladatok a vektorszámítás témaköréből

II.2.1. Adjuk meg az $\mathbf{u} = (1, 2, 3)$ és a $\mathbf{v} = (4, 5, 6)$ vektorok skaláris, vektoriális és diadikus szorzatát (ha mást nem mondunk, akkor a derékszögű Descartes-féle koordináta-rendszerben dolgozunk). Megjegyezzük, hogy a sor- és oszlopvektorokat – hacsak nem bír meghatározott jelentéssel – nem jelöljük külön.

II.2.2. Számítsuk ki az $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, a $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ és a $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{pmatrix}$ mátrix determinánsát, a transzponált-, az adjungált- és az inverz mátrixát!

II.2.3. Oldjuk meg $\mathbf{x}$ -re az

$$\mathbf{x} = \mathbf{a} \times (\mathbf{x} + \mathbf{b})$$

egyenletet, ahol $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok adottak.

II.2.4. Oldjuk meg a következő vektoregyenleteket

a) $\mathbf{a} \times \mathbf{x} = \mathbf{b}$,

b) $\mathbf{a} \times \mathbf{x} = \mathbf{b}$ és $\mathbf{x} \cdot \mathbf{a} = \alpha$, ahol α egy előre megadott állandó,

c) $\mathbf{a} \times \mathbf{x} = \mathbf{b}$ és $\mathbf{x} \cdot \mathbf{b} = \alpha$, ahol α egy előre megadott állandó!

II.2.5. Számítsuk ki a következő ún. Vandermonde-determináns értékét, ami pl. a magasabbrendű differenciálegyenletek megoldásánál szerepelhet. (*Vandermonde Alexandre Theophile (1735–1796) francia matematikus volt, aki a determinánsok önálló területének első elemzője volt, bár „nem is hallott a róla elnevezett determinánssról”.*)

$$\det \mathbf{V}_n = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

II.2.6. Számítsuk ki két, $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ alakú mátrix összegét és szorzatát! (*Megjegyezzük, hogy ugyanilyen típusú műveleti szabályok érvényesek az $a+ib$ alakú komplex számokra is.*)

II.2.7. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert!

$$\begin{pmatrix} 6 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

II.2.8. Milyen λ mellett van az egyenletrendszernek triviálistól különböző megoldása?

$$\begin{aligned} 5x + 4y - 3z &= 0 \\ 3x - 2y &= 0 \\ 4x + 2y + \lambda z &= 0 \end{aligned}.$$

II.2.9. Mely pontban metszik egymást a következő egyenletekkel jellemzett síkok?

$$\begin{aligned} 3x + 2y + 6z &= 13 \\ -2x - 3y + 5z &= -3 \\ 5x - 1y + 9z &= 12 \end{aligned}.$$

II.2.10. Adjuk meg a sajátértékeit és a sajátvektorait a következő 3×3 -as mátrixnak! Oldjuk meg az $|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}| = 0$ sajátérték-sajátvektor feladatot!

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

II.2.11. Határozzuk meg az

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$n \times n$ -es mátrix sajátértékeit! Vezessük be a számításnál a $\lambda = 4 \sin^2 \frac{\theta}{2}$ jelölést, s ennek segítségével írjuk fel a főátlóban levő elemeket. A szögfüggvényekre vonatkozó összefüggéseket használjuk!

Megjegyezzük, hogy a fentihez hasonló alakú mátrixokkal találkozunk, amikor a másodrendű parciális deriváltak centrális, másodrendben pontos véges különbséges alakjával dolgozunk.

Vektoranalízis

II.2.12. Számítsuk ki az alábbi skalármezők gradiensét! Oldjuk meg a feladatot a nabla operátor alkalmazásával, illetve az úgynevezett indexes jelölés használatával is! Itt és a továbbiakban $\mathbf{r}$ a helyvektor, míg $\mathbf{a}$ egy vektorállandó. A helyvektor, illetve a vektorállandó nagysága rendre r és a . Descartes-féle koordináta-rendszerben dolgozzunk!

a) $f(\mathbf{r}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{r}$,

b) $f(\mathbf{r}) = g(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})$,

c) $f(\mathbf{r}) = r^k$,

d) $f(\mathbf{r}) = |\mathbf{r} - \mathbf{a}|$,

e) $f(\mathbf{r}) = |\mathbf{r} - \mathbf{a}|^k$,

f) $f(\mathbf{r}) = |\mathbf{a} \times \mathbf{r}|^2$,

g) $f(\mathbf{r}) = |\mathbf{a} \times \mathbf{r}|^k$.

II.2.13. Számítsuk ki az alábbi vektormezők divergenciáját és rotációját!

a) $\mathbf{V}(\mathbf{r}) = r^n \mathbf{r}$,

b) $\mathbf{V}(\mathbf{r}) = r^n \mathbf{a}$,

c) $\mathbf{V}(\mathbf{r}) = \mathbf{a} \times \mathbf{r}$,

d) $\mathbf{V}(\mathbf{r}) = r^n (\mathbf{a} \times \mathbf{r})$,

e) $\mathbf{V}(\mathbf{r}) = r^n (\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{r}$,

f) $\mathbf{V}(\mathbf{r}) = \mathbf{a} \ln r$,

g) $\mathbf{V}(\mathbf{r}) = \mathbf{r} \ln r$,

h) $\mathbf{V}(\mathbf{r}) = \mathbf{a} \sin(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})$,

i) $\mathbf{V}(\mathbf{r}) = \mathbf{a} \sin(\mathbf{r})$,

j) $\mathbf{V}(\mathbf{r}) = \mathbf{r} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{r})$.

Itt is $\mathbf{r}$ a helyvektor, $\mathbf{a}$ pedig vektorállandó. Descartes-féle derékszögű koordináta-rendszerben dolgozzunk!

II.2.14. Melyik kifejezés lesz nulla?

a) $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{V}(\mathbf{r}))$,

b) $(\nabla \times \nabla) \cdot \mathbf{V}(\mathbf{r})$,

c) $\nabla(\nabla \cdot \mathbf{V}(\mathbf{r}))$,

ahol $\mathbf{V}(\mathbf{r})$ vektor-vektor függvény, $\mathbf{r}$ a helyvektor.

II.2.15. Mi legyen a $\mathbf{v}$ vektor harmadik komponense, ha a sebességmező divergenciamentes?

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2x^2 - xy - zx + 3(yz - 1) \\ yz - y^2 + 3z \\ ? \end{pmatrix}?$$

II.2.16. Számítsuk ki az indexes jelölés alkalmazásával az $\boldsymbol{\omega}$ szögsebességgel forgó merev test rotációját!

II.2.17. Legyen $\boldsymbol{\Omega}$ a Föld szögsebesség vektora, $\mathbf{R}$ a légrész helyvektora, $\mathbf{R}_\perp$ a vizsgált légrésznek a Föld forgástengelyétől vett távolság vektora. Mutassuk meg, hogy teljesül a centrifugális-erő számításakor használt

$$\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{R}) = -\Omega^2 \mathbf{R}_\perp$$

összefüggés!

II.2.18. A felszínközeli réteg szélprofiljait gyakran

a) logaritmikus: $u(z) = a \ln z + b$,

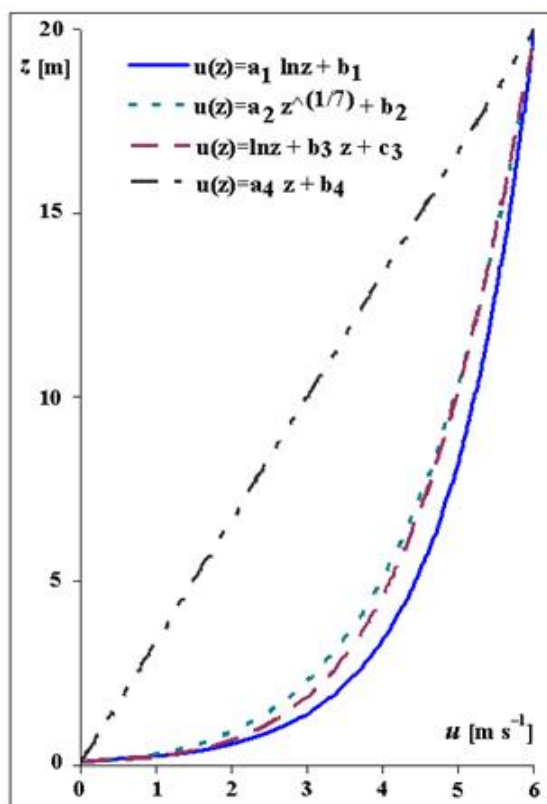
b) hatványkitevős: $u(z) = az^b + c$, illetve

c) logaritmikus-lineáris $u(z) = a \ln z + bz + c$ alakban adjuk meg.

Erősen stabilis rétegződés esetén

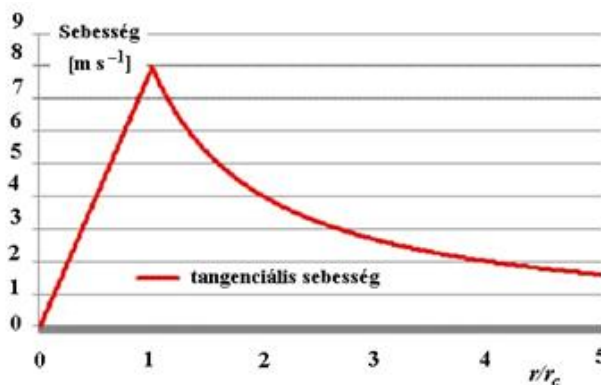
d) lineáris profilközelítést használunk: $u(z) = az + b$.

A horizontális sebesség értéke a z szinten $u(z)$ (a felszínközeli rétegben eltekintünk a szélirány magasság szerinti változásától). Adjuk meg az ilyen – horizontálisan homogén áramlás feltételezésével kapott – áramlási mezők rotációját! A koordináta-rendszer x tengelye az áramlás irányába mutat, a, b, c a szélprofil megadásához szükséges állandók (II.2.1. ábra).



II.2.1. ábra. Felszínközeli réteg szélprofiljai Az állandókat úgy állítottuk be, hogy $u(z = 20 \text{ m}) = 6 \text{ ms}^{-1}$, $u(z = 0,1 \text{ m}) = 0 \text{ ms}^{-1}$, továbbá $1/7$ -es hatványkitevős profilt használunk, illetve a logaritmus-lineáris profilközelítésnél $a=1$ feltétellel éltünk.

II.2.19. Az erősen felmelegedett pusztán, vagy akár a Mars légkörében is megfigyelhető „táncoló porördögöket” az ún. Rankine-örvények segítségével írhatjuk le (II.2.2. ábra). (William John Macquorn Rankine (1820-1872), híres angol fizikus, aki az áramlástan mellett termodinamikával is foglalkozott.)



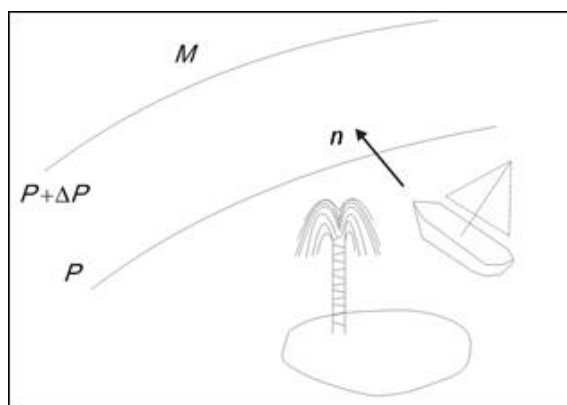
II.2.2. ábra. A Rankine-örvény sebességeloszlása a középponttól való távolság és az örvény sugarának aránya függvényében (r_c az örvény sugara)

Határozzuk meg az R sugarú, $\omega = \frac{v_0}{R} \mathbf{k}$ szögsebességű „porördög” középpontjától r távolságra a rotációt, ha az érintő irányú sebességi mező alakja, a „porördög” középpontjától ($r=0$) számolva:

$$v_\theta(r) = \begin{cases} \frac{v_0 r}{R}, & (r \leq R) \\ \frac{v_0 R}{r}, & (r > R) \end{cases}$$

Hengerkoordináta-rendszerben dolgozzunk! $v_\theta(r)$ az érintő irányú sebességet jelöli, ami a porördög belsejében a középponttól távolodva lineárisan nő, míg az örvényen kívül a távolsággal fordított arányban csökken.

II.2.20. Egy hajó a ciklon előtt „menekül” a maximális nyomásemelkedés irányába (II.2.3. ábra). A hajón a barométer 0,5 hPa-t süllyed egy óra alatt. A nyomási gradiens nagysága 1 hPa / 200 km. A hajó haladási sebessége 15 csomó. Becsüljük meg a hajóhoz közeli szigeten a nyomási tendencia értékét!



II.2.3. ábra. A teljes és a parciális deriváltak szemléltetése. A hajó mozgása „a vihar előtt”. M – magas nyomás.

II.2.21. Egy légréteg adiabatikusan mozog. Kiindulási helyéről három óra alatt északkeleti irányba 150 km-es utat tett meg, miközben a kiindulási szinttől 1000 m-rel magasabbra sodródik. A horizontális hőmérsékleti gradiens észak-déli irányú. A hőmérséklet a magassággal 0,5 °C-ot csökken 100 m-enként. A lokális hőmérsékletváltozás +1 °C / óra. Becsüljük meg a hőmérsékleti gradiens értékét!

II.2.22. A hegyen átkelő légréteg sebessége 8 m s⁻¹, s 26 perc alatt éri el a hegygerincet. A légpálya 4 fokos szöveget zár be a vízszintessel. A szabad légkör hőmérsékleti gradiense 0,5 °C/100 m. Adjuk meg a lokális hőmérsékletváltozást a hegycsúcson! A légréteg száraz adiabatikusan emelkedik. (Feltételezzük, hogy „az emelőmozgás” beindulása előtt a légkör nyugalomban volt.)

II.3. Az Einstein-féle jelölésrendszer alkalmazása

Elméleti alapok

A következőkben a vektor- és a tenzorszámítás alapvető műveleteinek indexes jelölésrendszerben való kifejtését foglaljuk össze. Terjedelmi okokból sem részletes és szisztematikus kifejtésre, sem bizonyításokra nincs módunk, továbbá a tárgyalást háromdimenziós térre korlátozzuk. A tenzorok tulajdonságainak rövid ismertetésekor nem térünk ki a tenzorok transzformációs tulajdonságaira és a kovariáns deriválás szabályrendszerére sem. Célunk mindössze annyi, hogy segítsük az olvasót az Einstein-féle jelölésrendszer használatában és a meteorológiai irodalomban felhasznált különböző jelölésrendszerek összeegyeztetésében. Mind az összefoglaló, mind a feladatok megértéséhez feltételezzük az alapvető tenzorszámítási és lineáris algebrai, valamint többváltozós analízisbeli alapismereteket.

II.3.1. Vektoralgebra

Jelölések, szimbólumok

A vektorműveletek jelölésének egyszerűsítésére Einstein bevezette azt a szabályt, hogy a szorzatokból álló összegek esetén az összegezést jelző szumma jel elhagyandó. Pontosabban, ha egy szorzatban két azonos index szerepel, akkor arra az indexre összegezni kell. Ennek megfelelően két vektor skaláris szorzata ortonormált koordináta-rendszerben:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3 = \sum_{i=1}^3 A_i B_i = A_i B_i \quad (i = 1, 2, 3).$$

A további műveletek egyszerűbb jelölésére bevezetjük még a Kronecker δ szimbólumot:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{ha } i = j \\ 0 & \text{ha } i \neq j \end{cases}$$

és a Levi–Civita-szimbólumot:

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{ha } i, j, k \text{ 1, 2, 3 ciklikus permutációja,} \\ -1 & \text{ha } i, j, k \text{ 1, 2, 3 anticiklikus permutációja,} \\ 0 & \text{ha } i, j, k \text{ nem 1, 2, 3 permutációja.} \end{cases}$$

(Tehát $\varepsilon_{123} = \varepsilon_{312} = \varepsilon_{231} = 1$, $\varepsilon_{213} = \varepsilon_{321} = \varepsilon_{132} = -1$, $\varepsilon_{111} = \varepsilon_{112} \dots \varepsilon_{333} = 0$.)

Vektorszorzatok ferdeszögű koordináta-rendszerben

A Levi–Civita-szimbólum segítségével az $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ vektorok vektoriális szorzata az

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A^i a_i \cdot B^j a_j = A^i g_{ij} B^j \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

alakban írható fel.

Amennyiben a koordináta-rendszer bázisvektorai tetszőleges, nem egy síkba eső $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ vektorok, (se nem merőlegesek egymásra, se nem egységnyi hosszúságúak), akkor ferdeszögű koordináta-rendszerről beszélünk. Ebben a rendszerben az $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ skalárszorzat az

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A^i a_i \cdot B^j a_j = A^i g_{ij} B^j \quad (i, j = 1, 2, 3),$$

alakot ölti, ahol $g_{ij} = \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j$ a $\hat{\mathbf{G}}$ metrikus tenzor ij -edik eleme.

Az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ vektorhármashoz az $\mathbf{a}^k \cdot \mathbf{a}_1 = \delta_1^k$ definícióval hozzárendelhető az $\mathbf{a}^k$ ($k = 1, 2, 3$) reciprok vektorhármashoz. Belátható, hogy

$$\mathbf{a}^1 = \frac{\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3}{(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)}, \quad \mathbf{a}^2 = \frac{\mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_1}{(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)}, \quad \mathbf{a}^3 = \frac{\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2}{(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)},$$

ahol $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) = (\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2) \cdot \mathbf{a}_3 = V$ az $\mathbf{a}_i$ ($i=1, 2, 3$) bázisvektorok által kifeszített paralelepipedon térfogata. Tömörebben írva

$$\mathbf{a}^i = \frac{\mathbf{a}_k \times \mathbf{a}_l}{(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)} \quad \varepsilon_{ikl} = +1 \quad (i=1, 2, 3)$$

Az $\mathbf{a}_i$ ($i=1, 2, 3$) vektorhármast kovariáns az

$$\mathbf{a}^k \quad (k=1, 2, 3)$$

vektorhármast pedig kontravariáns bázisvektor-rendszernek nevezzük. Belátható, hogy a kovariáns-kontravariáns elnevezés felcserélhető, rajtunk múlik, hogy az $\mathbf{a}^k \cdot \mathbf{a}_i = \delta_i^k$ reciprokvektor bázishármasok közül melyiket választjuk kovariánsnak. Szokás a kovariáns vektorokat alul, a kontravariánsokat pedig felül indexesnek is nevezni.

A vektorok ennek megfelelően kétféle koordináta-rendszerben is felírhatók:

$$\mathbf{A} = A^i \mathbf{a}_i = A_j \mathbf{a}^j \quad (i, j=1, 2, 3)$$

Azonnal látható, hogy $\mathbf{A} \cdot \mathbf{a}_k = A_k$ és $\mathbf{A} \cdot \mathbf{a}^j = A^j$.

A vektorok skalár szorzata akkor írható fel legegyszerűbben, ha az egyik tényezőt alul indexes (kovariáns) a másikat pedig felül indexes (kontravariáns) bázisvektorokkal fejezzük ki:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A^i \mathbf{a}_i \cdot B_j \mathbf{a}^j = A^i \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}^j B_j = A^i \delta_i^j B_j = A^i B_i$$

Ebben az esetben a $g_i^j = \delta_i^j$ metrikus tenzor a Kronecker-delta. A szorzat meghatározása formálisan ugyanúgy történhet, mint ortonormált koordináta-rendszerben, csak az egyik tényezőt kovariáns a másikat kontravariáns bázisban kell felírni.

Egyszerűen megmutatható, hogy a kovariáns és kontravariáns koordináták között az

$$A_i = g_{ij} A^j \quad \text{és} \quad A^k = g^{ki} A_i$$

összefüggések teremtenek kapcsolatot. Ezt a két összefüggést index-emelési illetve -lehúzási szabálynak is nevezzük.

Megmutatható, hogy az $\mathbf{A} = A^i \mathbf{a}_i = A_j \mathbf{a}^j$ vektor A^i koordinátái az $\mathbf{a}_i$ tengelyeken $|\mathbf{a}_i|$ egységekben mért hosszúságokat jelentenek, míg az A^i koordináták az $\mathbf{a}_i$ ($i=1, 2, 3$) bázis koordináta-síkjától mért távolságokat jelentik. Ortonormált koordináta-rendszerben ez a két koordináta-értelmezés egybeesik.

Mind az $\mathbf{a}_i$ ($i=1, 2, 3$), mind az $\mathbf{a}^j$ ($j=1, 2, 3$) bázis esetén bevezethetjük az $\mathbf{e}_i = \frac{\mathbf{a}_i}{|\mathbf{a}_i|}$ és $\mathbf{e}^j = \frac{\mathbf{a}^j}{|\mathbf{a}^j|}$ egységvektorokat. (Ezeknek a vektoroknak a definiálásakor nem használjuk az Einstein konvenciót.)

Az $\mathbf{A} = A^i \mathbf{a}_i = A_j \mathbf{a}^j$ ($i, j=1, 2, 3$) vektor az $\mathbf{e}_i$ és $\mathbf{e}^j$ ($i, j=1, 2, 3$) vektorhármassal is felírható:

$$\mathbf{A} = \bar{A}_i \mathbf{e}_i = \bar{A}^j \mathbf{e}_j \quad (i, j=1, 2, 3),$$

ahol $\bar{A}_i = A_i |a^i|$ és $\bar{A}^j = A^j |a_j|$ (az Einstein konvenciót ismét felfüggesztve). Az $\bar{A}_i$ és $\bar{A}^j$ ($i, j = 1, 2, 3$) koordinátákat az A vektor fizikai koordinátáinak nevezzük.

Értelmezzük az A és B vektorok $C = (A \circ B)$ **diadikus szorzatát** úgy, hogy tetszőleges D vektorral szorozva

$$(A \circ B) \cdot D = A(B \cdot D).$$

Értelemszerűen $F \cdot (A \circ B) = B(F \cdot A)$. A diadikus szorzat komponensei ennek megfelelően:

$$\begin{aligned}(A \circ B)_{ij} &= a_i \cdot (A \circ B) \cdot a_j = A_i B_j, \\(A \circ B)^j_i &= a_i \cdot (A \circ B) \cdot a^j = A_i B^j, \\(A \circ B)^i_{\cdot j} &= a^i \cdot (A \circ B) \cdot a_j = A^i B_j, \\(A \circ B)^{\bar{i}} &= a^i \cdot (A \circ B) \cdot a^j = A^i B^j.\end{aligned}$$

A diadikus szorzat komponensei mátrixba rendeződhetők, rájuk a mátrixok műveleti szabályai vonatkoznak. A vektorok diadikus szorzatai tenzorok. Tetszőleges tenzor előállítható az alapvektorokból képzett elemi diádok segítségével:

$$A \circ B = A^i B^j (a_i \circ a_j) = A_i B^j (a^i \circ a_j) = A^i B_j (a_i \circ a^j) = A_i B_j (a^i \circ a^j)$$

Ortonormált koordináta-rendszerben a diadikus szorzat négyféle mátrix-reprezentációja azonossá válik, mert az e_i ($i = 1, 2, 3$) bázisvektor rendszer megegyezik saját reciprok rendszerével. Ebben a rendszerben

$$A \circ B = A^i B^j (e_i \circ e_j).$$

A tenzorok, mint lineáris vektor-vektor transzformációk

A $B = f(A) = f(A^1 a_1 + A^2 a_2 + A^3 a_3)$ vektor-vektor függvény homogén lineáris, ha teljesül a $B = B(A^1 a_1 + A^2 a_2 + A^3 a_3) = A^1 B(a_1) + A^2 B(a_2) + A^3 B(a_3)$ összefüggés. Ez a függvény az A vektort a B vektorba viszi át. Látható, hogy a függvénykapcsolat magadásához azokat a $b_i = B_i(a_i)$ ($i = 1, 2, 3$) vektorokat kell megadni, amelyekbe a transzformáció az a_i bázisvektorokat átviszi, azaz amelyekkel:

$$B = B(A) = A^1 b_1 + A^2 b_2 + A^3 b_3.$$

Nem elfajuló a leképezés, ha a teljes teret a teljes térre képezi le. Ekkor a leképezés megfordítható. (Szokás a tárgyvektorok terét tárgytérnek, a képvektorokét pedig képtérnek nevezni.) Elfajuló a leképezés, ha a teljes teret síkra, egyenesre, vagy egyetlen pontra képezi le.

A komponensekre vonatkozó összefüggések és a diadikus szorzat tulajdonságainak felhasználásával a fenti leképezés a

$$B = B(A) = b_1 a^1 \cdot A + b_2 a^2 \cdot A + b_3 a^3 \cdot A = (b_1 \circ a^1 + b_2 \circ a^2 + b_3 \circ a^3) \cdot A = (b_m \circ a^m) \cdot A$$

alakra hozható. A homogén lineáris vektor-vektor transzformáció tenzora tehát előállítható, ha megadjuk a koordináta-rendszer kovariáns (alul indexes) bázisvektorainak képvektorait és képezzük a képvektoroknak az

eredeti koordináta-rendszer megfelelő kontravariáns (felül indexes) bázisvektoraival vett diadikus szorzatait, majd ezeket a szorzatokat összeadjuk:

$$\mathbf{B} = (b_m \circ a^m).$$

A b_k vektorok két ekvivalens formában reprezentálhatók:

$$b_k = B_k^n a_n = B_{kl} a^l.$$

Ennek megfelelően a $\mathbf{B}$ tenzor mátrixa a b_k vektorokból, mint oszlopvektorokból felépített mátrixszal egyezik meg. Ha $b_k = B_k^i a_i$ akkor

$$\mathbf{B} = (\mathbf{B})_j^i = \begin{pmatrix} B_1^1 & B_2^1 & B_3^1 \\ B_1^2 & B_2^2 & B_3^2 \\ B_1^3 & B_2^3 & B_3^3 \end{pmatrix}.$$

A transzponált-, adjungált- és reciproktenzor

A $\mathbf{T}$ tenzor $\bar{\mathbf{T}}$ transzponáltján azt a tenzort értjük, amelyre tetszőleges $\mathbf{A}$ vektorral szorozva

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \bar{\mathbf{T}}.$$

Indexes jelölésmódban:

$$\bar{T}_{ji} = T_{ji} \text{ vagy } \bar{T}_{ij} = T_{ji}.$$

A $\mathbf{T}$ tenzort szimmetrikusnak nevezzük, ha

$$\mathbf{T} = \bar{\mathbf{T}},$$

antiszimmetrikusnak, ha

$$\mathbf{T} = -\bar{\mathbf{T}}.$$

Az antiszimmetrikus tenzor, a főátlóra tükrözve önmaga -1 szeresébe megy át.

A tenzorok mindig felbonthatók szimmetrikus és antiszimmetrikus részre. A felbontás egyértelmű:

$$\mathbf{T} = \frac{1}{2}(\mathbf{T} + \bar{\mathbf{T}}) + \frac{1}{2}(\mathbf{T} - \bar{\mathbf{T}}).$$

A szimmetrikus tenzorok mátrixa bármely koordináta-rendszerben a mátrix főtengeleire tükrözve önmagába megy át. (Innen ered a szimmetrikus elnevezés).

$$\mathbf{T}_s = \begin{pmatrix} t_{11} & \alpha & \beta \\ \alpha & t_{22} & \gamma \\ \beta & \gamma & t_{33} \end{pmatrix},$$

vagy másként: $(\mathbf{T}_s)_{ij} = (\mathbf{T}_s)_{ji}$.

Az antiszimmetrikus tenzorok mátrixa a főátlóra tükrözve önmaga -1 szeresébe megy át, azaz a főátlóban nullák, a főátló két oldalán pedig ellentétes előjelű elemek vannak.

$$\mathbf{T}_a = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha & -\beta \\ \alpha & 0 & -\gamma \\ \beta & \gamma & 0 \end{pmatrix},$$

vagy másként: $(\mathbf{T}_a)_{ij} = -(\mathbf{T}_a)_{ji}$. Az antiszimmetrikus tenzor egyértelműen előállítható $\mathbf{a} \times \mathbf{E}$ alakban, ahol $\mathbf{a}$ az (α, β, γ) vektor, $\mathbf{E}$ pedig az egységtenzor. Az antiszimmetrikus tenzorokat szokás emiatt **pszeudovektornak** is nevezni.

Definíció szerint a

$$\mathbf{B} = (\mathbf{b}_m \circ \mathbf{a}^m)$$

tenzor **adjungált tenzora**:

$$\mathbf{B}_{adj} = \frac{1}{2} \left[(\mathbf{a}^k \times \mathbf{a}^i) \circ (\mathbf{b}_k \times \mathbf{b}_i) \right].$$

Belátható, hogy az adjungált tenzor mátrixa a $\mathbf{B}$ tenzor elemeihez rendelt almátrixok előjeles determinánsaiból képzett mátrix transzponáltja:

$$(\mathbf{B}_{adj})^i_j = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} B_1^2 & B_3^2 \\ B_2^3 & B_3^3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} B_2^1 & B_3^1 \\ B_2^3 & B_3^3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} B_2^1 & B_3^1 \\ B_2^2 & B_3^2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} B_1^2 & B_3^2 \\ B_1^3 & B_3^3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} B_1^1 & B_3^1 \\ B_1^3 & B_3^3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} B_1^1 & B_3^1 \\ B_1^2 & B_3^2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} B_1^2 & B_2^2 \\ B_1^3 & B_2^3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} B_1^1 & B_2^1 \\ B_1^3 & B_2^3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} B_1^1 & B_2^1 \\ B_1^2 & B_2^2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}.$$

Megmutatható, hogy

$$(\mathbf{B}_{adj})^i_j = \frac{1}{2} \varepsilon^{irs} \varepsilon_{jpt} B_r^p B_s^t.$$

A $\mathbf{B} = (\mathbf{b}_m \circ \mathbf{a}^m)$ **reciprok tenzorán** a $\mathbf{B}^{-1}$ tenzort értjük, amelyre

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}^{-1} = \mathbf{E}.$$

Azonnal látható, hogy

$$\mathbf{B}^{-1} = (\mathbf{a}_n \circ \mathbf{b}^n),$$

hiszen

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}^{-1} = (\mathbf{b}_m \circ \mathbf{a}^m) \cdot (\mathbf{a}_n \circ \mathbf{b}^n) = \mathbf{b}_m \circ (\mathbf{a}^m \cdot \mathbf{a}_n) \mathbf{b}^n = \mathbf{b}_m \circ (\delta_n^m) \mathbf{b}^n = (\mathbf{b}_m \circ \mathbf{b}^m) = \mathbf{E}$$

A reciprok tenzor az adjungált tenzor segítségével a következőképpen írható fel:

$$\mathbf{B}^{-1} = (\mathbf{a}_n \circ \mathbf{b}^n) = \frac{1}{2} \frac{(\mathbf{a}^k \times \mathbf{a}^i) \cdot (\mathbf{b}_k \times \mathbf{b}_i)}{(\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \mathbf{a}^3)(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)} = \frac{(\mathbf{B})_{\alpha\beta}}{(\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \mathbf{a}^3)(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)}.$$

Tenzorinvariánsok

A tenzorok és vektorok fizikai jelentése független attól a koordináta-rendszerrel, amelyben a tenzor mátrix-reprezentációját felírjuk. A vektorok koordinátái, és a tenzorokat reprezentáló mátrixok elemei azonban a koordináta-rendszer választásától függő számok. A vektorokkal végzett műveletek, a skaláris, vektoriális és diadikus szorzás, valamint a tenzorok által reprezentált vektor-vektor függvény is független kell legyen a koordináta-rendszerrel. Ennek megfelelően a tenzorokból képezhetők olyan invariáns mennyiségek, amelyek számértéke bármely koordináta-rendszerben azonos. A tenzoroknak három skalár és egy vektor invariánsát szoktuk használni.

A tenzor spurja (első skalárinvariáns)

Definíció szerint az

$$\mathbf{B} = (\mathbf{b}_m \circ \mathbf{a}^m)$$

tenzor spurja

$$\mathbf{B}_I = \text{sp} \mathbf{B} = (\mathbf{b}_m \cdot \mathbf{a}^m) = B_1^1 + B_2^2 + B_3^3 = B_i^i,$$

azaz a mátrix főátlójában álló elemek összege. A spur nyilván koordináta-rendszerrel független mennyiség, hiszen vektorok skalárszorzatának összege. A tenzorok spurja megegyezik szimmetrikus részük spurjával (az antiszimmetrikus tenzorok spurja zérus)

A tenzor második skalárinvariánsa

A második skalár invariáns definíció szerint az adjungált tenzor spurja:

$$\mathbf{B}_I = \text{sp} \mathbf{B}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} [(\mathbf{a}^k \times \mathbf{a}^i) \cdot (\mathbf{b}_k \times \mathbf{b}_i)] = \begin{vmatrix} B_2^2 & B_3^2 \\ B_2^3 & B_3^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} B_1^1 & B_3^1 \\ B_1^3 & B_3^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} B_1^1 & B_2^1 \\ B_1^2 & B_2^2 \end{vmatrix}.$$

A tenzor harmadik skalárinvariánsa

A harmadik skalár invariáns a tenzor és az adjungált tenzor szorzata spurjának egyharmada:

$$\mathbf{B}_{III} = \frac{1}{3} \text{sp} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}_{\alpha\beta})$$

Az adjungált tenzort a reciprok tenzorral kifejezve

$$(\mathbf{B})_{\alpha\beta} = (\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \mathbf{a}^3)(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3) \mathbf{B}^{-1}$$

és behelyettesítve a harmadik skalár invariáns definíciójába, azt kapjuk, hogy

$$\mathbf{B}_{III} = \frac{1}{3} (\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \mathbf{a}^3)(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3) \text{sp} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}^{-1}) = \frac{1}{3} (\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \mathbf{a}^3)(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3) \text{sp} \mathbf{E} = (\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \mathbf{a}^3)(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3).$$

Mivel

$$(b_1, b_2, b_3) = (a_1, a_2, a_3) \det \mathbf{B}$$

és

$$\mathbf{B}_{III} = (a^1, a^2, a^3) (b_1, b_2, b_3) = \frac{(b_1, b_2, b_3)}{(a_1, a_2, a_3)} = \det \mathbf{B}$$

azaz a harmadik skalár invariáns a $\mathbf{B}$ tenzor mátrixának determinánsa. A tenzorok determinánsa megegyezik szimmetrikus részük determinánsával (az antiszimmetrikus tenzorok determinánsa zérus.) Belátható, hogy a harmadrendű mátrixok determinánsa az

$$\det(B_m^n) = \frac{1}{3!} \varepsilon^{ijk} \varepsilon_{pqr} B_i^p B_j^q B_k^r = \det(B_{mnl}) = \frac{1}{3!} \varepsilon^{ijk} \varepsilon_{pqr} B_{ip} B_{jq} B_{kr} ,$$

$$\det(B_m^n) = \frac{1}{3!} \varepsilon_{ijk} \varepsilon^{pqr} B_p^i B_q^j B_r^k = \det(B^{mnl}) = \frac{1}{3!} \varepsilon_{ijk} \varepsilon^{pqr} B^{ip} B^{jq} B^{kr} .$$

A tenzor vektorinvariánsa

A $\mathbf{B} = (b_m \circ a^m)$ tenzor vektorinvariánsa definíció szerint

$$\mathbf{B}_{(vekt)} = (b_m \times a^m) = B_{mnl} a^n \times a^m = \varepsilon^{lmn} B_{mnl} a_l = (B_{23} - B_{32}) a_1 + (B_{31} - B_{13}) a_2 + (B_{12} - B_{21}) a_3 .$$

Látható, hogy a tenzor vektorinvariánsa megegyezik antiszimmetrikus részének a vektorinvariánsával (a szimmetrikus tenzorok vektorinvariánsa zérus). Minden antiszimmetrikus tenzor előállítható $b \times E$ vektoriális szorzat formájában, ahol b az antiszimmetrikus tenzor vektorinvariánsa.

Sajátértékek, sajátvektorok, főtengeletranszformáció

A $\mathbf{B}$ tenzor sajátvektorai azok az s vektorok, amelyeknek iránya a tenzorral való transzformáció hatására nem változik, azaz

$$\mathbf{B} \cdot s = \lambda s$$

illetve

$$(\mathbf{B} - \lambda \mathbf{E}) \cdot s = 0 ,$$

ahol λ a tenzor sajátértéke. Ennek a homogén lineáris egyenletrendszernek akkor van nem triviális megoldása, ha a bal oldali mátrix determinánsa zérus.

$$\det(\mathbf{B} - \lambda \mathbf{E}) = \lambda^3 - \text{sp} \mathbf{B} \lambda^2 + \text{sp} \mathbf{B}_{\text{aszi}} \lambda - \det \mathbf{B} = 0 .$$

Ez az egyenlet a tenzor **karakterisztikus egyenlete**, amelynek gyökei a tenzor sajátértékei. A sajátértékeket az egyenletrendszerbe visszahelyettesítve, meghatározhatók a sajátvektorok. A sajátvektorokra vonatkozó egyenletrendszer nem független egyenletekből áll, ezért további feltételként kiköthetjük, hogy a sajátvektorok egységvektorok legyenek.

Ha a sajátvektorokból ortonormált bázis választható ki, akkor azt főtengelerendszernek nevezzük. Főtengelerendszerben a tenzor mátrixa diagonális mátrix, melynek főátlójában a sajátértékek állnak.

Főtengelytétel – szimmetrikus tenzornak létezik (valós sajátértékekkel, ortonormált) főtengelyrendszere. Ebben a koordináta-rendszerben a szimmetrikus tenzor mátrixa diagonálmátrix, melynek főátlójában a tenzor sajátértékei állnak.

II.3.2 Vektoranalízis

Görbevonali koordináta-rendszerek

Legyen adott az $\mathbf{r} = x^i \mathbf{e}_i$ vektor az $\mathbf{e}_i$ Descartes-féle koordináta-rendszerben. Vezessünk be új q^i változókat a $x^i = x^i(q^j)$ $i, j = (1, 2, 3)$ függvényhármassal segítségével, amelyről tételezzük fel, hogy a tér egy tartományán folytonos és differenciálható, továbbá tegyük fel, hogy a függvény-transzformáció megfordítható. A tér adott $P(\mathbf{r})$ pontjának környezetében fennáll:

$$dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial q^j} dq^j,$$

illetve kifejtve:

$$\begin{aligned} dx^1 &= \frac{\partial x^1}{\partial q^1} dq^1 + \frac{\partial x^1}{\partial q^2} dq^2 + \frac{\partial x^1}{\partial q^3} dq^3, \\ dx^2 &= \frac{\partial x^2}{\partial q^1} dq^1 + \frac{\partial x^2}{\partial q^2} dq^2 + \frac{\partial x^2}{\partial q^3} dq^3, \\ dx^3 &= \frac{\partial x^3}{\partial q^1} dq^1 + \frac{\partial x^3}{\partial q^2} dq^2 + \frac{\partial x^3}{\partial q^3} dq^3. \end{aligned}$$

A $P(\mathbf{r})$ pont környezetében ez a transzformáció akkor fordítható meg, ha

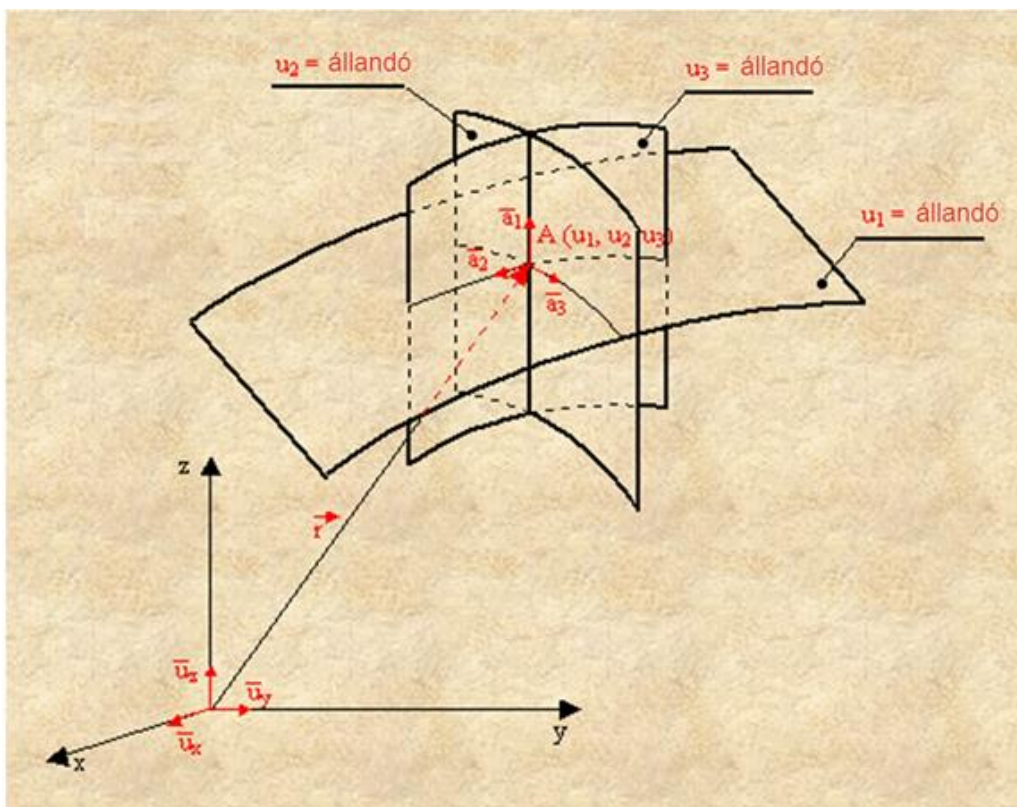
$$J(x^i, q^j) = \det \frac{\partial x^i}{\partial q^j} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial q^1} & \frac{\partial x^1}{\partial q^2} & \frac{\partial x^1}{\partial q^3} \\ \frac{\partial x^2}{\partial q^1} & \frac{\partial x^2}{\partial q^2} & \frac{\partial x^2}{\partial q^3} \\ \frac{\partial x^3}{\partial q^1} & \frac{\partial x^3}{\partial q^2} & \frac{\partial x^3}{\partial q^3} \end{vmatrix}.$$

Jacobi-determináns nem zérus. A teljes tartományban a megfordíthatóság akkor áll fenn, ha létezik a $q^i(x^j)$ inverz függvényhármassal. Ekkor nyilvánvaló, hogy

$$J(q^i, x^j) = \det \frac{\partial q^i}{\partial x^j} = \begin{vmatrix} \frac{\partial q^1}{\partial x^1} & \frac{\partial q^1}{\partial x^2} & \frac{\partial q^1}{\partial x^3} \\ \frac{\partial q^2}{\partial x^1} & \frac{\partial q^2}{\partial x^2} & \frac{\partial q^2}{\partial x^3} \\ \frac{\partial q^3}{\partial x^1} & \frac{\partial q^3}{\partial x^2} & \frac{\partial q^3}{\partial x^3} \end{vmatrix} \neq 0.$$

A $q^i = q^i(x^j)$ egyenletekből adott $P(\mathbf{r})$ pontban kapott q^i számhármast a $P(\mathbf{r})$ pont görbevonali koordinátáinak nevezzük. Ebben az esetben a tér minden pontján átmegy három olyan görbe amelyek mentén rendre csak a q^i

menntiségek egyike változik. Adott pont lokális környezetében minden vektormennyiség kifejezhető ezeknek a görbéknek az érintőjébe eső vektorok (mint bázisvektorok) lineáris kombinációjaként.



II.3.1. ábra. A kiinduló Descartes-féle koordináta-rendszer, valamint a P pont környezetében a görbevonali koordináta-rendszer koordináta-vonalai, koordináta-síkjai és az ott felvett lokális ferdeszögű koordináta-rendszer.

Az adott ponton átmenő q^i görbét koordináta-vonalaknak nevezzük. A koordináta-vonalak $q_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^i}$ érintő vektoraiból álló bázisvektorok, amelyek ferdeszögű koordináta-rendszert feszítenek ki. Ez a koordináta-rendszer azonban a koordináta-vonalak görbültsége miatt a tér minden pontjában más és más alapvektorokkal rendelkezik.

$q_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^i}$ bázisvektorok alkotják a görbevonali koordináta-rendszer kovariáns bázisvektorait. (Vegyük észre, hogy a felül indexes, azaz kontravariáns koordináta szerinti deriválás adja az alul indexes (kovariáns) bázisvektort.)

A lokális koordináta-rendszer koordináta felületeit azok a felületek jelölik ki, amelyek mentén két q^i mennyiség változik, és a harmadik állandó. Ezek a felületek általában görbültek, normálvektorukat az adott pontban az ott átmenő és a felületbe eső koordináta-vonalak érintőinek vektorszorzata, azaz az érintővektorokból álló kovariáns koordináta-rendszer reciprok vektorrendszer határozza meg. A II.3.1. ábra a kiinduló Descartes-féle koordináta-rendszert, valamint a P pont környezetében a görbevonali rendszer koordináta-vonalait, koordináta-síkjait és az ott felvett lokális ferdeszögű koordináta-rendszert mutatja.

Deriváltak a görbevonali koordináta-rendszerben

Az Einstein konvenció és a nabla szimbolika segítségével a vektoranalízisben használatos differenciáloperációk igen tömören adhatók meg, figyelembe kell vennünk azonban, hogy a vektorok deriválásakor most a koordináta-rendszer bázisvektorai is változhatnak.

A gradiens (nabla) operátor

A gradiens operátor definíció szerint

$$\nabla = q^i \frac{\partial}{\partial q^i} = q^i \nabla_i, \text{ ahol } \nabla_i = \frac{\partial}{\partial q^i}$$

A totális időderivált

A ψ skalármennyiség a $q^i = q^i(t)$ hely-koordinátákon keresztül és attól függetlenül, közvetlenül is függhet a t időtől, azaz $\psi = \psi(q^i(t), t)$. A függvény totális vagy hidrodinamikai időderiváltja:

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{\partial\psi}{\partial q^i} \frac{\partial q^i}{\partial t},$$

illetve mivel $v^i = \frac{\partial q^i}{\partial t}$,

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{\partial\psi}{\partial q^i} v^i.$$

Hasonlóképpen az $A = A(r(t), t)$ vektorfüggvény totális deriváltja formálisan

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial q^i} \frac{\partial q^i}{\partial t} = \frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial q^i} v^i.$$

A fenti formulában azonban a $\frac{\partial A}{\partial q^i}$ derivált jelentése az eddiginél bonyolultabb, hiszen a vektor deriválásakor a koordináta alapvektorok változását is figyelembe kell venni:

$$\frac{\partial A}{\partial q^i} = \frac{\partial (A^j q_j)}{\partial q^i} = \frac{\partial A^j}{\partial q^i} q_j + A^j \frac{\partial q_j}{\partial q^i}.$$

A formula értelmezéséhez meg kell adni a bázisvektorok deriváltjait. Belátható, hogy

$$\frac{\partial q_j}{\partial q^i} = \frac{\partial q_i}{\partial q^j} = \Gamma_{ij}^n q^n = \Gamma_{ij}^n q_n,$$

ahol Γ_{ij}^n és Γ_{ij}^n rendre az elsőfajú illetve másodfajú Christoffel-szimbólumok, amelyek definíció szerint:

$$\Gamma_{ij}^n = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial q^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial q^i} \right) \text{ és } \Gamma_{ij}^n = g^{nk} \Gamma_{ijk} = \frac{1}{2} g^{nk} \left(\frac{\partial g_{kj}}{\partial q^i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial q^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k} \right).$$

A deriválttenzor

A deriválttenzort az

$$\left(\frac{dA}{dr} \right) = (A \circ \nabla) = \left(\frac{\partial A^i}{\partial q^j} + A^z \Gamma_{jz}^i \right) (q_i \circ q^j)$$

összefüggéssel adhatjuk meg. Szokásos azonban a deriválttenzor transzponáltját is alkalmazni:

$$\left(\frac{d\mathcal{A}}{dr}\right) = (\nabla \circ \mathcal{A}) = \left(\frac{\partial \mathcal{A}^i}{\partial q^j} + \mathcal{A}^z \Gamma_{jz}^i\right) (q^j \circ q_i).$$

A divergencia

A divergencia a deriválttenzor spurja (megegyezik a deriválttenzor transzponáltjának spurjával):

$$\nabla \cdot \mathcal{A} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial q^j} (\mathcal{A}^j \sqrt{g}) = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial q^j} (q^j \cdot \mathcal{A} \sqrt{g}).$$

A Laplace-operátor

A Laplace-operátor a skalármező gradiensének divergenciája, azaz a gradiensvektor deriválttenzorának első skalárinvariánsa. Helyettesítsük be az előző összefüggésbe a skalármező gradiensét

$$\nabla \cdot \nabla \psi = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial q^j} \left(q^j \cdot \sqrt{g} q^k \frac{\partial \psi}{\partial q^k} \right) = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial q^j} \left(\sqrt{g} g^{jk} \frac{\partial \psi}{\partial q^k} \right).$$

A rotáció

A rotáció a $(\nabla \circ \mathcal{A})$ tenzor antiszimmetrikus részének vektorinvariánsa.

$$\text{rot} \mathcal{A} = \nabla \times \mathcal{A} = \begin{vmatrix} q_1 & q_2 & q_3 \\ \frac{\partial}{\partial q^1} & \frac{\partial}{\partial q^2} & \frac{\partial}{\partial q^3} \\ \mathcal{A}_1 & \mathcal{A}_2 & \mathcal{A}_3 \end{vmatrix}.$$

II.3.1. Vektoralgebra – feladatok

II.3.1.1. Bizonyítsuk be, hogy $\delta_k^k = 3$!

$$\varepsilon^{pqs} \varepsilon_{pqs} = \begin{vmatrix} \delta_1^p & \delta_1^q & \delta_1^s \\ \delta_2^p & \delta_2^q & \delta_2^s \\ \delta_3^p & \delta_3^q & \delta_3^s \end{vmatrix}!$$

II.3.1.2. Bizonyítsuk be, hogy

II.3.1.3. Bizonyítsuk be, hogy $\varepsilon^{pqs} \varepsilon_{pqs} = 2\delta_m^m$!

II.3.1.4. Bizonyítsuk be, hogy $\varepsilon^{pqs} \varepsilon_{pqs} = 6$!

$$\varepsilon^{pqs} = \begin{vmatrix} \delta_1^p & \delta_1^q & \delta_1^s \\ \delta_2^p & \delta_2^q & \delta_2^s \\ \delta_3^p & \delta_3^q & \delta_3^s \end{vmatrix}!$$

II.3.1.5. Bizonyítsuk be, hogy

$$\mathcal{A} \times \mathcal{B} = \sqrt{g} \begin{vmatrix} a^1 & a^2 & a^3 \\ A^1 & A^2 & A^3 \\ B^1 & B^2 & B^3 \end{vmatrix}, \text{ illetve } \mathcal{A} \times \mathcal{B} = \frac{1}{\sqrt{g}} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix}!$$

II.3.1.6. Mutassuk meg, hogy

II.3.1.7. Határozzuk meg az Einstein szimbolika felhasználásával az $A \times (B \times C)$ hármas vektorszorzatot és mutassuk meg, hogy értéke megegyezik $B(A \cdot C) - C(A \cdot B)$ -val!

II.3.1.8. Mutassuk meg, hogy a felső indexes (kontravariáns) bázisvektor rendszer reciprok vektor rendszere megegyezik az alsó indexes (kovariáns) bázis vektor rendszerrel!

II.3.1.9. Bizonyítsuk be, hogy $(a^1, a^2, a^3) = \frac{1}{(a_1, a_2, a_3)} !$

II.3.1.10. Határozzuk meg az Einstein szimbolika felhasználásával az $(A \times D) \cdot (B \times C)$ szorzatot!

II.3.1.11. Fejtsük ki az Einstein-féle szimbolika segítségével a $C \cdot (A \times B) = (C, A, B)$ hármas vegyes szorzatot, és mutassuk meg, hogy értéke megegyezik $\sqrt{g} \det(A, B, C)$ -vel!

II.3.1.12. Határozzuk meg az Einstein szimbolika felhasználásával az $(A \times D) \times (B \times C)$ szorzatot!

II.3.1.13. Bizonyítsuk be, hogy $(A, B, C)(a_1, a_2, a_3) = \begin{vmatrix} A \cdot a_1 & A \cdot a_2 & A \cdot a_3 \\ B \cdot a_1 & B \cdot a_2 & B \cdot a_3 \\ C \cdot a_1 & C \cdot a_2 & C \cdot a_3 \end{vmatrix} !$

II.3.1.14. Bizonyítsuk be, hogy $(A, B, C)(D, E, F) = \begin{vmatrix} A \cdot D & A \cdot E & A \cdot F \\ B \cdot D & B \cdot E & B \cdot F \\ C \cdot D & C \cdot E & C \cdot F \end{vmatrix} !$

II.3.1.15. Bizonyítsuk be, hogy, $(a_1, a_2, a_3) = \sqrt{\det g_{ij}} = \sqrt{g} !$

II.3.2. Vektoranalízis – feladatok

II.3.2.1. Határozzuk meg a q^i kontravariáns helykoordináta gradiensét!

II.3.2.2. Mutassuk meg, hogy a helyvektor deriválttenzora az egységtenzor!

II.3.2.3. Bizonyítsuk be, hogy $\frac{\partial q_i}{\partial q^j} = \frac{\partial q_j}{\partial q^i} !$

II.3.2.4. A metrikus tenzor elemeinek deriválásából kiindulva mutassuk meg, hogy

$$\frac{\partial q_j}{\partial q^i} = \frac{\partial q_i}{\partial q^j} = \Gamma_{ij}^n q^n = \Gamma_{ji}^n q^n !$$

II.3.2.5. Mutassuk meg, hogy $\frac{\partial q_j}{\partial q^k} \cdot q^i = \Gamma_{jk}^i !$

II.3.2.6. Határozzuk meg a kontravariáns (felül indexes) bázisvektorok kontravariáns koordináták szerinti deriváltját! $\frac{\partial q^i}{\partial q^j}$

II.3.2.7. Bizonyítsuk be, hogy $\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial q^j} (A^j \sqrt{g})$!

II.3.2.8. Határozzuk meg az

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi \cos \lambda, \\ y &= r \cos \varphi \sin \lambda, \\ z &= r \sin \varphi \end{aligned}$$

térbeli polárkoordináta-rendszerben a másodfajú Christoffel-szimbólumokat!

II.3.2.9. a) Határozzuk meg a térbeli polárkoordináta-rendszer kovariáns és kontravariáns bázisvektorait, ha a koordináták rendre $q^i(\lambda, \varphi, r)$! b) Határozzuk meg a bázisvektor rendszerek által kifeszített paralelepipedon térfogatát! c) Mutassuk meg, hogy mindkét bázisvektor rendszer ortogonális!

II.3.2.10. Határozzuk meg a térbeli polárkoordináta-rendszer $g_{ij} = \mathbf{q}_i \cdot \mathbf{q}_j$ és $g^{ij} = \mathbf{q}^i \cdot \mathbf{q}^j$, valamint $g_i^j = \mathbf{q}_i \cdot \mathbf{q}^j$ metrikus tenzorát! Ellenőrizzük, hogy fennáll a

$$\det g_{ij} = (\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_j) \text{ és } \det g^{ij} = (q^1, q^2, q^3)$$

összefüggés.

II.3.2.11. Határozzuk meg a tér pontjainak a sebességét, ha a tér együtt forog a Földdel, azaz a szögsebesség $\boldsymbol{\Omega} = \Omega \mathbf{e}_3$! Határozzuk meg a sebesség kovariáns és kontravariáns komponenseit térbeli polárkoordináta-rendszerben!

II.3.2.12. Írjuk fel annak a gömbi polárkoordináta-rendszernek a kovariáns és kontravariáns bázisvektorait, amelyben a $q^3 = r$ koordinátát a nyomásra cseréltük. (Természetesen a rendszer hidrosztatikus.)

II.4. A barotróp és a baroklin légkör

A baroklinitás a légkör sűrűségi (hőmérsékleti) és nyomási rétegződésének kapcsolatát fejezi ki. Ha a levegő sűrűsége kizárólag a nyomás függvénye: $\rho = \rho(p)$, akkor barotróp légkörről beszélünk. Barotróp esetben az izobárok egyben azonos sűrűségű felületeket is jelentenek. Az ideális gáz

$$\rho = \frac{p}{RT}$$

állapotegyenlete alapján ez akkor lehetséges, ha a hőmérséklet kizárólag a nyomás függvénye: $T = T(p)$. Itt R a specifikus gázállandó, ami a feladattól függően (ha külön nem indexezzük) a száraz, vagy a nedves levegőre vonatkozik. Barotróp esetben az izobárok egyben izotermák is.

A baroklin légkörben a sűrűség a nyomástól és a hőmérséklettől is függ, azaz az izobárok és az izotermák szöget zárnak be egymással: $\rho = \rho(p, T)$. A baroklin rétegződés sohasem stabil egyensúlyi állapot, a meginduló mozgások a barotróp egyensúly helyreállítására törekszenek.

A barotróp légkör adott pontban vett összenyomhatóságát a b barotropitási együtthatóval jellemezhetjük:

$$b = \frac{d\rho(x, y, z, t_0)}{dp(x, y, z, t_0)}$$

A barotropitási együttható felírható a hőmérsékleti és nyomási mező közötti kapcsolatként is:

$$b = \frac{1}{RT} \left(1 - \frac{d \ln T}{d \ln p} \right)$$

A meteorológiában gyakran használjuk az α specifikus térfogatot, a sűrűség reciprokát. Az izoszter vonalak az azonos specifikus térfogatú pontokat jelölik ki. A barotropitási együttható felírható a specifikus térfogat függvényeként is:

$$b = - \frac{1}{\alpha^2(x, y, z, t_0)} \frac{d\alpha(x, y, z, t_0)}{dp(x, y, z, t_0)}$$

Míg a barotropitási együttható adott helyhez kötve állapítja meg a nyomási és sűrűségi mező közötti kapcsolatot, a B piezotropitási együttható egy elmozduló légrést követve írja le a légréz nyomás- és sűrűségváltozásának viszonyát:

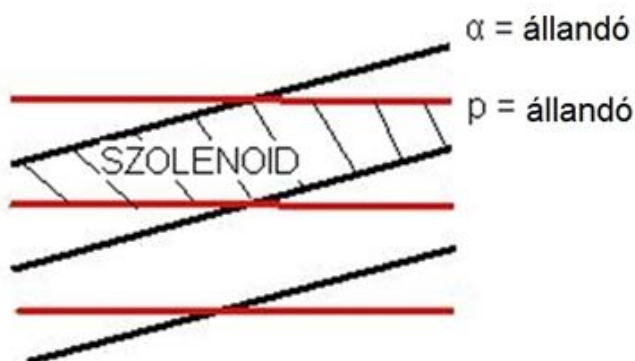
$$B = \frac{d\rho(x, y, z, t)}{dp(x, y, z, t)}$$

A barotropitási és a piezotropitási együttható az áramlási mező szerkezetének ismeretében a láncszabály szerint számítható:

$$b = \frac{\frac{\partial \rho}{\partial x} u + \frac{\partial \rho}{\partial y} v + \frac{\partial \rho}{\partial z} w}{\frac{\partial p}{\partial x} u + \frac{\partial p}{\partial y} v + \frac{\partial p}{\partial z} w}$$

$$B = \frac{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x} u + \frac{\partial \rho}{\partial y} v + \frac{\partial \rho}{\partial z} w}{\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} u + \frac{\partial p}{\partial y} v + \frac{\partial p}{\partial z} w}$$

Feltétlen vagy autobarotróp közegről akkor beszélünk, ha $b \equiv B$, azaz a barotropitási és a piezotropitási együttható minden pontban és pillanatban megegyezik. Ez biztosítja, hogy a légrések mozgása során a rétegződés barotróp marad. Ha a kezdetben barotróp helyzet a légrések elmozdulása során megbomlik, akkor feltételesen barotróp közegről beszélünk. Ebben az esetben a közeget jellemző barotropitási és az elmozduló légrést jellemző piezotropitási együttható nem egyezik meg.



II.4.1. ábra. A baroklin rétegződés.

Baroklin esetben szolenoidoknak nevezzük az izobár és az izoszter vonalak által képezett hurkokat. (II.4.1. ábra). A baroklinitás mértékét az $\mathbf{N}$ baroklin vektorral, más néven szolenoidális vektorral jellemezhetjük:

$$\mathbf{N} = -\nabla \alpha \times \nabla p$$

A baroklin vektor természetesen a sűrűséggel is felírható:

$$\mathbf{N} = \frac{1}{\rho^2} \nabla \rho \times \nabla p$$

Látható, hogy barotróp esetben, amikor az izobárok és az izoszterek egybeesnek, a specifikus térfogat és a nyomás gradiensei is párhuzamosak; ebben az esetben a baroklin vektor nulla.

Az ideális gáz állapotegyenletének felhasználásával a baroklin vektor felírható a nyomás és a hőmérséklet függvényeként:

$$\mathbf{N} = -\nabla T \times \left(\frac{R}{p} \nabla p \right)$$

A baroklin vektor a szolenoid felületre, azaz mind az izobárokra, mind az izoszterekre merőleges. Ha az izobár és izoszter felületek térbeli alakját síknak képzeljük, az általuk határolt szolenoidok egy paralelogramma által határolt „csővé” állnak össze. A baroklin vektor ennek a csőnek a hosszanti irányát jelöli ki. Ennek a későbbiekben nagy jelentősége lesz a baroklinitás által létrehozott örvényesség meghatározásában.

A baroklin vektor nagysága a szolenoidok sűrűségét, azaz az adott felületet metsző szolenoidok számát jellemzi. Ez a későbbiekben a baroklinitásban tárolt energiasűrűség számításában kap nagy jelentőséget. A vektor nagysága arányos az izobárt egységnyi távolságon belül metsző izoszterek számával:

$$|\mathbf{N}| = \frac{g}{\alpha} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial n} \right)_p,$$

ahol g a nehézségi gyorsulás, n az adott izobár menti elmozdulás. A baroklin vektor hossza természetesen a vektoriális szorzat definíciójából is kiszámítható:

$$|\mathbf{N}| = |-\nabla \alpha| \cdot |\nabla p| \cdot \sin \theta,$$

ahol θ az izobárok és izoszterek által bezárt szög.

II.4.1. Autobarotróp vagy feltételesen barotróp az összenyomhatatlan homogén (konstans sűrűségű) légkör?

II.4.2. Autobarotróp vagy feltételesen barotróp az összenyomható homogén légkör?

II.4.3. Autobarotróp vagy feltételesen barotróp az adiabatikus légkör?

II.4.4. Autobarotróp vagy feltételesen barotróp az izoterm légkör?

II.4.5. A légkör adott területén a hőmérséklet észak és kelet felé lineárisan, a magassággal exponenciálisan csökken. A következő függvény írja le ezt a hőmérsékleti eloszlást:

$$T = T_0 (-Ax - Cy) \cdot \exp(-Dz),$$

ahol T_0 , A , C és D ismert állandók. Tegyük fel, hogy az izobárok vízszintesek, azaz a légnyomás csak a magasság függvénye:

$$p = p_0 \exp(-kz),$$

ahol k adott állandó. Milyen szöget zárnak be az izobárok az izotermákkal? Adjuk meg a baroklinitási vektort és annak nagyságát! Milyen szöget zár be a baroklinitási vektor az északi iránnyal?

II.4.6. A légkör adott területén a hőmérséklet északkelet felé és a magassággal is lineárisan csökken.

$$T = T_0(-Ax - Cy - Dz),$$

ahol T_0 , A , C és D ismert állandók. Tegyük fel, hogy a légkör hidrosztatikai egyensúlyban van, azaz az egységnyi magasságra eső légnyomásváltozást a következő egyenlet írja le:

$$dp = -\rho g dz$$

Milyen szöget zárnak be az izobárok az izotermákkal? Írjuk fel a baroklinitási vektort! Milyen szöget zár be a baroklinitási vektor az északi iránnyal?

II.4.7. Adjuk meg a hidrosztatikus egyensúlyban lévő légkörben $dp = -\rho g dz$ a nedves adiabatikusan emelkedő légréteg piezotropitási együtthatóját, ha adott a nedves adiabatikus hőmérsékleti gradiens:

$$\frac{dT}{dz} = -\Gamma_s!$$

II.4.8. Adjuk meg ismert B piezotropitási együttható mellett az emelkedő légréteg $\frac{dT}{dz}$ hőmérsékletváltozását hidrosztatikus légkörben ($dp = -\rho g dz$)!

II.5. Koordináta-rendszer forgatások, a lineáris skalár- és vektormezők felbontása

Adott pont közelében természetes feltételezés a lineárisan változó skalár-, vagy vektormező, ami a Taylor-sorfejtés nulladik és első tagjaként állítható elő. A lineáris vektormező felírható négy invariáns mennyiség, a transláció, a divergencia, a rotáció és a deformáció segítségével.

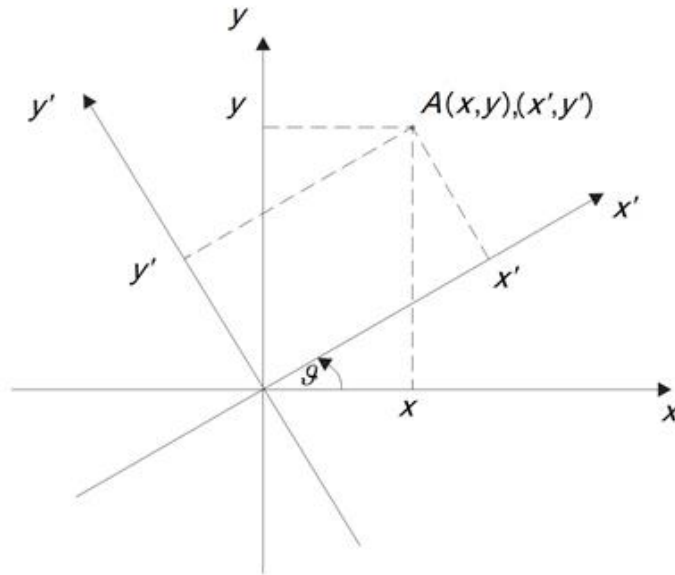
Fontos a meteorológiai feladatok megoldásában a megfelelő koordináta-rendszer alkalmazása, pl. a koordináta-rendszer beforgatása az átlagos sebesség (2 vagy 3 dimenziós) irányába. Háromdimenziós forgatásoknál kihasználjuk azt a lineáris algebrai tételt, miszerint a 3 dimenziós koordináta-rendszer forgatás felírható kétdimenziós forgatások összegeként (lásd pl. Rózsa, 1976.)

Nézzük a kétdimenziós esetet! Legyen az átlagos szélesség $V_k = (u, v)$, a szélvektor x tengellyel bezárt szöge a II.5.1. ábra szerint $\vartheta = \arctan(v/u)$. Jelölje a Descartes-féle koordináta-rendszer tengelyeit x és y , az elforgatott rendszerét pedig x' és y' . Legyen adott az $\mathbf{r} = (x, y)$ helyvektor az eredeti koordináta-rendszerben! Ennek az új rendszerbeli alakja: $\mathbf{r}' = (x', y')$:

$$x' = x \cos \vartheta + y \sin \vartheta, \quad y' = -x \sin \vartheta + y \cos \vartheta.$$

Fordított irányban is megadhatjuk az áttérést:

$$x = x' \cos \vartheta - y' \sin \vartheta, \quad y = x' \sin \vartheta + y' \cos \vartheta.$$



II.5.1. ábra. Az (x, y) és az elforgatott (x', y') koordináta-rendszer.

Általános esetben a transzformációk: $\mathbf{r}' = \mathbf{A} \cdot \mathbf{r}$, illetve $\mathbf{r} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{r}'$, ahol a koordináta-rendszer transzformáció mátrixa, illetve annak inverze rendre:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos \vartheta & \sin \vartheta \\ -\sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix}, \quad \text{illetve} \quad \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix}.$$

Megjegyezzük, hogy nem minden esetben teszik ki a mátrix és a vektor szorzás során a pontot. Egyaránt használatos pl. az $\mathbf{r}' = \mathbf{A} \cdot \mathbf{r}$ és az $\mathbf{r}' = \mathbf{A} \mathbf{r}$ írásmód.

Lineáris sebességi mező

Tekintsük a $\mathbf{V}_k = (u, v)$ sebességmezőt az $\mathbf{A}_0 = (x_0, y_0)$ ponttól $\Delta x, \Delta y$ távolságra. Itt a Taylor-sorfejtés szerint a lineáris sebességi mező alakja:

$$u \approx u_0 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_0 \Delta x + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_0 \Delta y,$$

$$v \approx v_0 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_0 \Delta x + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)_0 \Delta y.$$

Kihasználva az invariáns mennyiségek előállítását, vagyis a D divergencia, a ζ örvényesség, illetve a deformáció ($\text{Def} = A^2 + B^2$) felírását:

$$D = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y},$$

$$A = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}, \quad B = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y},$$

teljesül, hogy:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2}(D+A), \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{2}(D-A), \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{2}(\zeta+B), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2}(-\zeta+B).$$

A lineáris sebességi mező alakja az invariánsokkal kifejezve:

$$u \approx u_0 + \frac{1}{2}(D+A)\Delta x + \frac{1}{2}(B-\zeta)\Delta y,$$

$$v \approx v_0 + \frac{1}{2}(\zeta+B)\Delta x + \frac{1}{2}(D-A)\Delta y.$$

Megjegyezzük, hogy mindig találhatunk olyan elforgatott koordináta-rendszert, ahol a deformáció egyik tagja nulla ($B=0$), továbbá $A \geq 0$. Az ilyen irányítottágú koordináta-tengelyeket nevezzük főtengeleknek.

A deriválttenzor

Legyen $\mathbf{V}(\mathbf{r})$ differenciálható vektor-vektor függvény. $\mathbf{V}(\mathbf{r})$ tetszőleges $\Delta \mathbf{r}$ elmozduláshoz tartozó megváltozása előállítható

$$\Delta \mathbf{V} = \mathbf{V}'(\mathbf{r}) \Delta \mathbf{r} + \mathbf{E}(\mathbf{r}, \Delta \mathbf{r}) \cdot \Delta \mathbf{r}, \quad \lim_{|\Delta \mathbf{r}| \rightarrow 0} |\mathbf{E}(\mathbf{r}, \Delta \mathbf{r})| \cdot \Delta \mathbf{r} \rightarrow 0.$$

alakban, ami egyértelműen meghatározza a sebességmező deriváltját, hiszen az $\mathbf{E}(\mathbf{r}, \Delta \mathbf{r})$ operátor determinánsa nullához tart, ha $|\Delta \mathbf{r}| \rightarrow 0$. Kis $\Delta \mathbf{r} \rightarrow d\mathbf{r} \approx 0$ növekmény mellett

$$\Delta \mathbf{V} \approx d\mathbf{V} = \mathbf{V}'(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r},$$

tehát a változások közötti kapcsolat lineárisnak és homogénnek tekinthető. Elhanyagoljuk a magasabb rendű tagokat és a hozzájuk köthető invariáns mennyiségeket. A fenti egyenlőség alapján felírható a $\mathbf{V}(\mathbf{r})$ vektor-vektor függvény deriváltja, az ún. deriválttenzor, $\mathbf{D}(\mathbf{r})$.

$$\mathbf{V}'(\mathbf{r}) = \frac{d\mathbf{V}}{d\mathbf{r}} = \mathbf{D}(\mathbf{r})$$

A deriválttenzor mátrixát a $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ vektor komponenseinek térváltozók szerinti parciális deriváltjaival adhatjuk meg. E megváltozásokat a mátrix egyes sorai tartalmazzák. Descartes-féle koordináta-rendszerben:

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix}.$$

A $dV = D \cdot r$ kifejezéssel megadott homogén lineáris függvényrendszer kettős értelmezésre ad módot. Egyrészt koordináta-transzformációnak tekinthető, másrészt tér-transzformációnak, más néven mozgásnak foghatjuk fel.

A $D(r)$ deriválttenzor a $V(r)$ leképezés során megadja az r hely tetszőleges kis környezetében bekövetkező, lokális hossz-, értelem- (tükrözés) és szögváltozásokat, illetve a különböző dimenziójú lokális mértéktorzulásokat. (Természetesen ezek a megváltozások nem egymástól függetlenek, mert pl. egy lokális hosszváltozás egyben mértéktorzulás is.)

A deriválttenzor, ahogy bármely más tenzor is felírható egy szimmetrikus (D_s) és egy antiszimmetrikus (D_a) tenzor összegeként (Lásd a II.3. fejezetet is).

$$D = D_s + D_a$$

A főteigél tétele szerint (Lásd a II.3. fejezetet is) minden szimmetrikus A tenzor létesítette $A \cdot r$ affin (összeg és aránytartó) leképezésnél (a 3 dimenziós térben) legalább 3 egymásra merőleges s_i sajátvektor megtartja az irányát és csupán nyújtást-zsugorítást és tükrözést szenvedhet a λ_i sajátérték mértékében

$$A \cdot s_i = \lambda_i s_i$$

Nézzük az antiszimmetrikus tenzorokat! Az A tenzor A vektor invariánsán – megállapodás szerint – antiszimmetrikus részének, az

$$A_a = \frac{1}{2}(A - A^T) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -(A_{21} - A_{12}) & (A_{13} - A_{31}) \\ (A_{21} - A_{12}) & 0 & -(A_{32} - A_{23}) \\ -(A_{13} - A_{31}) & (A_{32} - A_{23}) & 0 \end{pmatrix} = A \times E$$

alakját értjük, ahol A^T az $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$ tenzor transzponáltja, míg $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ az egység tenzor. Az A vektorinvariáns alakja:

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} A_{32} - A_{23} \\ A_{13} - A_{31} \\ A_{21} - A_{12} \end{pmatrix}$$

A vektorinvariáns jelentése szerint:

$$A \cdot r = \frac{1}{2}(A - A^T) \cdot r = A \times r$$

E felírásból következik, hogy a vektorinvariáns az adott r vektortól függetlenül állítható elő.

Megjegyzés: A meteorológiában kiemelkedő fontosságú a sebességmező deriválttenzora. A fenti összefoglalóban a definíciókat lényegében a sebességmező deriválttenzorára vonatkozóan adtuk meg. Természetesen tetszőleges vektormezőnek létezik deriválttenzora.

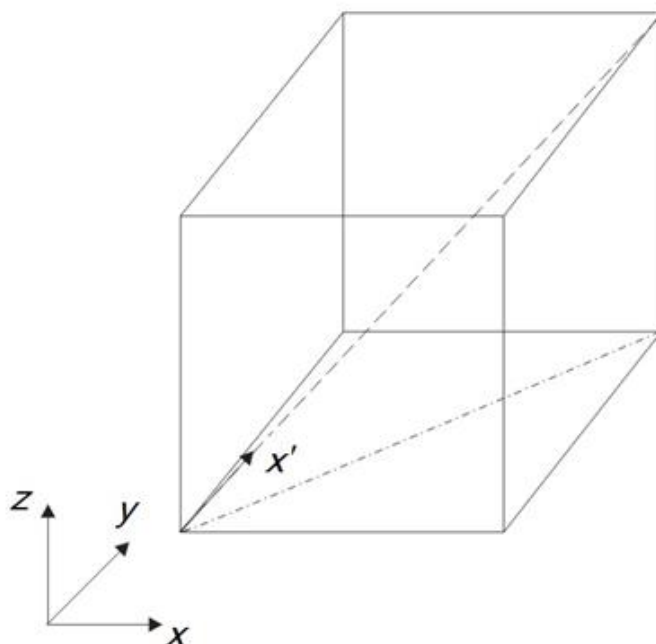
A következőkben, ha külön nem jelöljük, akkor deriválttenzoron mindig a sebességmező deriválttenzorát értjük.

II.5.1. Határozzuk meg a $\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ mátrix sajátértékeit és a hozzájuk tartozó sajátvektorokat (a saját-alterek egy-egy bázisát)!

II.5.2. Adjuk meg $V = (1, 2)$ vektor reprezentánsát olyan koordináta-rendszerben, amit

- az óramutató járásával ellentétesen 30° -kal ($\varphi = 30^\circ$),
- az óramutató járásával megegyezően 120° -kal ($\varphi = -120^\circ$) elforgattunk. (Lásd a II.5.1. ábrát is!)

II.5.3. Adjuk meg a forgatás mátrixát, ha az új koordináta-rendszer x' tengelye az (x, y, z) koordináta-rendszert az origójába rajzolt kocka átlójának az irányába mutat a II.5.2. ábra szerint.



II.5.2. ábra. Az új elforgatott koordináta-rendszer x' tengelye az origóból induló kocka átlója.

II.5.4. Miért nem cserélhető fel az előző feladatban szereplő

$$\mathbf{A}_\varphi = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad \mathbf{A}_\lambda = \begin{pmatrix} \cos \lambda & 0 & \sin \lambda \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \lambda & 0 & \cos \lambda \end{pmatrix}$$

két kétdimenziós forgatás sorrendje?

II.5.5. Adjuk meg az elforgatott koordináta-rendszer egységvektorainak a reprezentációját az eredeti (x, y, z) koordináta-rendszerben, ha az új koordináta-rendszer tengelyei a

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

tenzor sajátvektorainak az irányába esnek. Ez ortogonális koordináta-rendszer lesz? Adjuk meg annak a forgatásnak a mátrixát is, ami az új koordináta-rendszerből forgat vissza az eredetibe!

II.5.6. A szonikus anemométerrel a három dimenziós szélmező (u, v, w) és a hőmérséklet (T) pillanatnyi értékeit mérjük, általában 10 Hz-es frekvenciával. Ebből számítjuk ki a kovariancia mátrixot,

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \overline{u'u'} & \overline{u'v'} & \overline{u'w'} & \overline{u'T'} \\ \overline{v'u'} & \overline{v'v'} & \overline{v'w'} & \overline{v'T'} \\ \overline{w'u'} & \overline{w'v'} & \overline{w'w'} & \overline{w'T'} \\ \overline{T'u'} & \overline{T'v'} & \overline{T'w'} & \overline{T'T'} \end{pmatrix},$$

ami általában félórás átlagolási időre vonatkozik. Ismert félórás átlagos szélesség $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$ és az átlagos hőmérséklet is. A vesszős tagok a fluktuációs mennyiségek, a felülvonás az átlagolást jelöli a kovariancia számításnál.

A mikrometeorológiában az elforgatott koordináta-rendszer x_F tengelyét az átlagos szélesség irányában vesszük fel, vagyis

$$\bar{u}_F = \sqrt{\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + \bar{w}^2}, \quad \bar{v}_F = 0, \quad \bar{w}_F = 0.$$

- Írjuk fel a forgatás mátrixát!
- Adjuk meg a vertikális impulzusáram értékét az elforgatott rendszerben!
- Adjuk meg a vertikális hőmérsékleti áram értékét az új rendszerben!
- Változik-e a transzformáció során a hőmérséklet szórásnégyzete?
- Adjuk meg a sebességkomponensek varianciáját az elforgatott koordináta-rendszerben!

II.5.7. Írjuk fel a lineáris sebességmező alakját, örvényességét és horizontális divergenciáját a szélirányba fordított horizontális koordináta-rendszerben (x', y') ! Hogyan transzformálódnak az egyes deriváltak? Az elforgatás szöge legyen ϑ .

II.5.8. A sebességváltozás alakja:

$$du = 3 \cdot 10^{-6} dx + 1 \cdot 10^{-6} dy, \quad dv = 7 \cdot 10^{-6} dx + 1 \cdot 10^{-6} dy.$$

Adjuk meg a lineáris sebességi mező divergenciáját örvényességét és deformációját!

II.5.9. Adjuk meg a lineáris sebességi mező alakját, ha a szélesség értéke $\mathbf{V} = (8, 8) \text{ [ms}^{-1}\text{]}$, a divergencia értéke $D = -5 \cdot 10^{-6} \text{ s}^{-1}$, az örvényesség $\zeta = 2 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$. A mezőben a deformáció értékét elhanyagoljuk!

II.5.10. Adjuk meg a deriválttenzor szimmetrikus és antiszimmetrikus tenzorra való felbontását. Használjuk fel a transzponált tenzor tulajdonságait. (Lásd a **II.3. fejezetet** is.)

II.5.11. Adjuk meg a deriválttenzor alakját, szimmetrikus és antiszimmetrikus tenzorra történő felbontását a Descartes-rendszerben, ha

$$\mathbf{V} = (ax^2, byz^2, czx^2),$$

ahol a, b, c állandók. Adjuk meg a három mátrix értékét a $P = (1, 1, 1)$ pontban.

II.5.12. Tengelyszimmetrikus feladatok esetén hasznos a henger koordináta-rendszer (r, ϕ, z) . Itt a három egységvektor: $(\mathbf{i}_r, \mathbf{i}_\phi, \mathbf{i}_z)$. Az egységvektorok koordináta-irányok szerinti megváltozásai közül kettő különbözik nullától:

$$\frac{\partial \mathbf{i}_r}{\partial \phi} = \mathbf{i}_\phi, \quad \frac{\partial \mathbf{i}_\phi}{\partial \phi} = -\mathbf{i}_r.$$

Tekintsük a $\mathbf{V} = (v_r(r, z), 0, v_z(r, z))$ alakú vektormezőt. Adjuk meg a deriválttenzor alakját, szimmetrikus és antiszimmetrikus részét!

II.5.13. Mutassuk meg, hogy a tiszta alakváltozás ellipszoiddá torzítja az elemi gömböt!

II.5.14. Adott a deriváltmátrix a Descartes-féle koordináta-rendszer (x, y, z) pontjában:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -50 & -50 & 0 \\ -50 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 100 \end{pmatrix} [\cdot 10^{-6} \text{ s}^{-1}]$$

a) Adjuk meg a deriválttenzor skalár invariánsait!

b) Írjuk fel a karakterisztikus egyenletet!

c) Számítsuk ki a főfeszültségek (a főtengelyek irányába eső nyújtás és zsugorítás) értékeit, vagy más szavakkal a három sajátértéket!

d) Írjuk fel a szimmetrikus és az antiszimmetrikus tenzor mátrixát!

e) Adjuk meg a deriválttenzor vektor invariánsát is!

f) Adjuk meg az izotróp dilatációt és a tiszta alakváltozás tenzorát is!

II.5.15. Adott a deriváltmátrix a Descartes-féle koordináta-rendszer (x, y, z) pontjában:

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} -200 & -200 & 0 \\ -200 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 400 \end{pmatrix} [\cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}]$$

a) Adjuk meg a deriválttenzor skalár invariánsait!

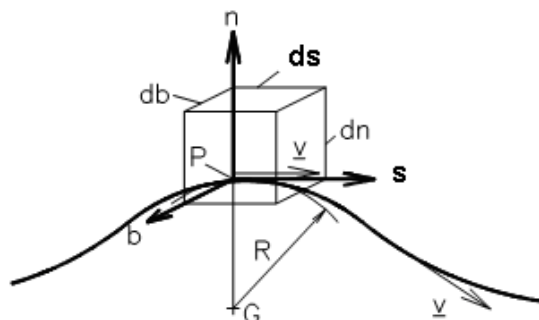
b) Írjuk fel a karakterisztikus egyenletet!

c) Számítsuk ki a főfeszültségek (a főtengelyek irányába eső nyújtás és zsugorítás) értékeit és a főtengelyek egységvektorait!

II.6. Véges különbséges módszerek alkalmazása a deriváltak és az invariánsok meghatározásában

E fejezetben elsősorban a nagyskálájú folyamatok leírásában használt kétdimenziós horizontális áramlási mező sajátosságait vizsgáljuk, de foglalkozunk a skalármezők deriváltjaival is. Descartes-féle, illetve természetes koordináta-rendszerben dolgozunk.

A kétdimenziós lineáris áramlási mező négy invariáns mennyiség segítségével írható le. Ezek a transzláció (egy állandó vektormező), a D divergencia, a ζ örvényesség (a rotáció vektor felületre merőleges összetevője) és a deformáció, ami két tag (A és B) négyzetösszege (lásd a II.5. fejezetet is). Gyakran használjuk ezeket az invariánsokat természetes koordináta-rendszerben (II.6.1. ábra). Itt a két egymásra merőleges egységvektor az adott pontbeli sebesség érintője ($\mathbf{e}_s$), illetve az arra merőleges irány ($\mathbf{e}_n$). Körmozgás esetén az érintő irányú egységvektort gyakran $\mathbf{e}_r$ -rel jelöljük. Azt hogy jobb, vagy balsodrású koordináta-rendszert használunk (*kinek mi a „természetes”?*) az adott feladat dönti el.



II.6.1. ábra. Áramvonalon mozgó elemi folyadékrész. (Lajos Tamás 2004-ben kiadott Áramlástan alapjai című könyvéből.)

Az invariánsok alakja a Descartes-féle koordináta-rendszerben (lásd a II.5. fejezetis):

$$D = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y},$$

$$A = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}, \quad B = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y},$$

és természetes koordináta-rendszerben:

$$D = \frac{\partial v_s}{\partial s} + v_n \frac{\partial \phi_n}{\partial n}, \quad \zeta = -\frac{\partial v_s}{\partial n} + v_n \frac{\partial \phi_s}{\partial s},$$

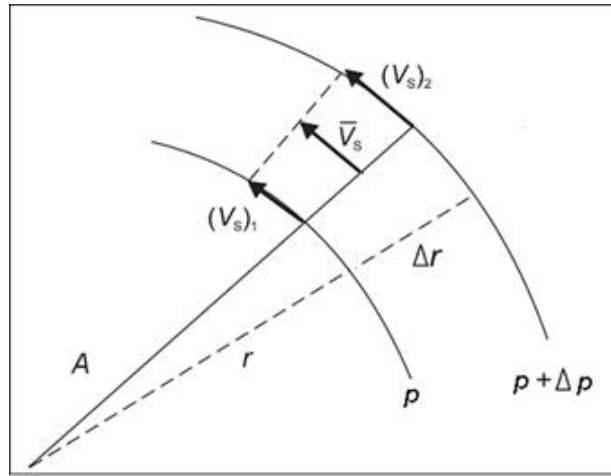
$$A = \frac{\partial v_s}{\partial s} - v_n \frac{\partial \phi_n}{\partial n}, \quad B = \frac{\partial v_s}{\partial n} - v_n \frac{\partial \phi_s}{\partial s},$$

ahol v_s a szélességség nagysága ($\mathbf{v}_s = (v_s, 0) \equiv \mathbf{v}_h$). Az s irány az áramvonal érintője. $\Delta\phi_s$ az áramvonalakra merőleges ív szögváltozása az s irányú elmozdulás esetén, míg $\Delta\phi_n$ az áramvonalak által bezárt szög változása

az áramvonalakra merőleges n irányú elmozdulás esetén. A fenti felírás jobbsodrású (n, s) koordináta-rendszer esetén teljesül. A számításnál figyelni kell az egyes deriváltak (szögváltozások) előjelére. Megjegyezzük, hogy $\Delta\phi_z$ és $\Delta\phi_n$ egyenlők, mert merőleges szárú szögek.

Ciklon örvényessége pozitív, anticikloné negatív. Az egyszerűség kedvéért tekintsünk kör alakú izobárokat, olyan (r, s) koordináta-rendszert, ahol a szélesebbesség ciklonális esetben pozitív ($v_s > 0$), anticiklonális esetben pedig negatív ($v_s < 0$), a sugárirányú változás, dr pozitív, ha a középponttól távolodunk (II.6.2. ábra). Itt az örvényesség alakja:

$$\zeta = \frac{v_s}{r} + \frac{\partial v_s}{\partial r}$$



II.6.2. ábra. Az örvényesség meghatározása ciklonban. Figyeljük meg a görbületi hatást és a szélnyírást leíró tagot!

Mind a Descartes-féle, mind a természetes koordináta-rendszerben értelmezhetjük az $f(x, y) \equiv f(n, s)$ skalár gradiensét is:

$$\text{grad } f(x, y) = \nabla f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} \quad \text{grad } f(n, s) = \nabla f(n, s) = \frac{\partial f}{\partial n} \mathbf{e}_n + \frac{\partial f}{\partial s} \mathbf{e}_s$$

A dinamikus és szinoptikus meteorológiai feladatokban általában szabályos, vagy szabálytalan rácshálózaton végezzük a számításokat, a deriváltak meghatározását. A deriváltak kiszámítására használatos – talán legelterjedtebb, de mindenképpen a legszemléletesebb módszer – a véges különbségek alkalmazása.

Tekintsük a térbeli deriváltakat az (x_0, y_0) pontban. Ez legyen a koordináta-rendszer középpontja a deriválásra vonatkozó véges különbséges munkaformulák kidolgozásánál ($x_0 = 0, y_0 = 0$). Tengelyesen szimmetrikus rácshálózatot és centrális – a számítási terület közepén levő (x_0, y_0) pontra vonatkozó – véges különbséges sémát alkalmazva az első deriváltakra teljesül, hogy:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_0 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i f_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2}, \quad \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_0 = \frac{\sum_{i=1}^n y_i f_i}{\sum_{i=1}^n y_i^2},$$

ahol $(n+1)$ a vizsgált rácspontok száma az adott területen, a 0 -dik rácspontban határozzuk meg a derivált értékét, ezért használunk további n rácspontot; $f(x, y)$ a vizsgált függvény, aminek az adott térbeli deriváltját keressük, míg $f_i = f(x_i, y_i)$ a függvény i -edik rácspontbeli értéke. A fenti formula analógiájára adhatjuk meg a vegyes második deriváltak alakját:

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)_0 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i f_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2 y_i^2},$$

de a fenti formula mintájára előállíthatjuk a második deriváltakat is.

Abban az esetben, ha az x és y irányú ráctávolság nem egyezik meg, a második deriváltak előállítása bonyolultabbá válik. Ekkor az $f_0 = f(x_0, y_0)$ rácspontbeli interpolált érték, valamint az $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0$ és az $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_0$ deriváltak együttes meghatározására a következő egyenletrendszer kell megoldani:

$$\begin{aligned} f_0 2n + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0 \sum_{i=1}^n x_i^2 + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_0 \sum_{i=1}^n y_i^2 &= 2 \sum_{i=1}^n f_i, \\ f_0 2 \sum_{i=1}^n x_i^2 + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0 \sum_{i=1}^n x_i^4 + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_0 \sum_{i=1}^n x_i^2 y_i^2 &= 2 \sum_{i=1}^n f_i x_i^2, \\ f_0 2 \sum_{i=1}^n y_i^2 + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0 \sum_{i=1}^n x_i^2 y_i^2 + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_0 \sum_{i=1}^n y_i^4 &= 2 \sum_{i=1}^n f_i y_i^2. \end{aligned}$$

Az előrejelzési tartomány szélén már nem alkalmazhatók a centrális sémák, gyakran használnak első rendben pontos féloldalas sémákat. Legyen a két rácspont távolsága $r = x_1 - x_0$. Ekkor az első rendben pontos féloldalas séma:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 = \frac{f_1 - f_0}{r}.$$

II.6.1. A horizontális divergencia természetes koordináta-rendszerbeli integrál előállítása

$$D = \lim_{F \rightarrow 0} \frac{1}{F} \oint_F \mathbf{v} \cdot d\mathbf{n}$$

alapján mutassuk meg, hogy a divergencia itteni alakja:

$$D = \frac{\partial v_s}{\partial s} + v_s \frac{\partial \phi_n}{\partial n},$$

ahol Γ az F nyílt felületet körülfogó zárt görbe, $d\mathbf{n}$ a görbe menti elmozduláshoz tartozó normálvektor.

II.6.2. Az örvényesség természetes koordináta-rendszerbeli integrál előállítása

$$\zeta = \lim_{F \rightarrow 0} \frac{1}{F} \oint_F \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s}$$

Az integrál előállításának alapján mutassuk meg, hogy az örvényesség itteni alakja:

$$\zeta = -\frac{\partial v_z}{\partial n} + v_z \frac{\partial \phi_z}{\partial s},$$

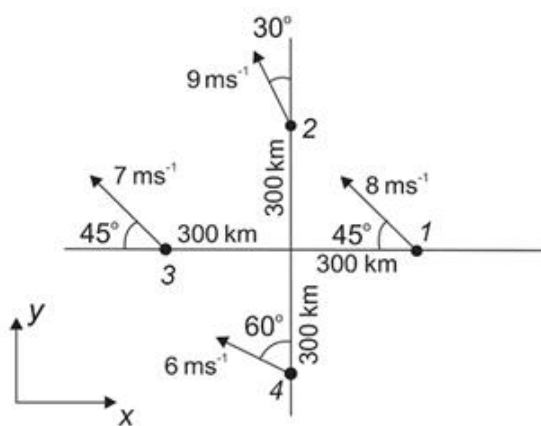
ahol Γ az F nyílt felületet körülfogó zárt görbe, $d\mathbf{s}$ a görbe érintő vektora!

II.6.3. A kör alakú izobárokkal jellemzett ciklon középpontjától 800 km-re a szélesség 10 m s⁻¹, 900 km-re 12 m s⁻¹. Adjuk meg az örvényességet a középponttól 850 km-re!

II.6.4. Az anticiklon centrumától 1000 km-re a szélesség 5 m s⁻¹. Mekkora és milyen irányú a szélesség gradiens, ha a vizsgált állomás felett nulla az örvényesség?

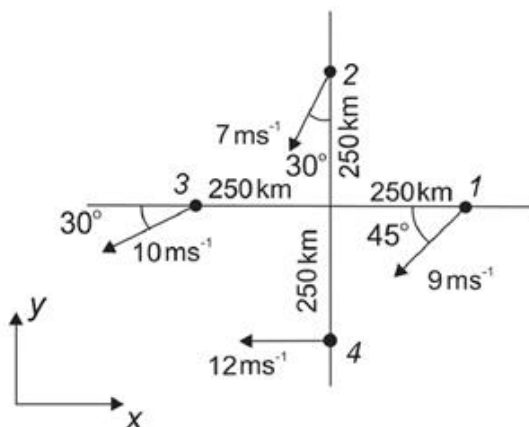
II.6.5. Határozzuk meg a divergenciát párhuzamosan futó áramvonalak esetén, ha a szélesség növekedése az áramvonalak mentén 500 km-en 3 m s⁻¹.

II.6.6. Határozzuk meg a divergenciát, az örvényességet és a deformációt a II.6.3. ábrán bemutatott $r = 300$ km-es felbontású ekvidisztáns rács középpontjában!



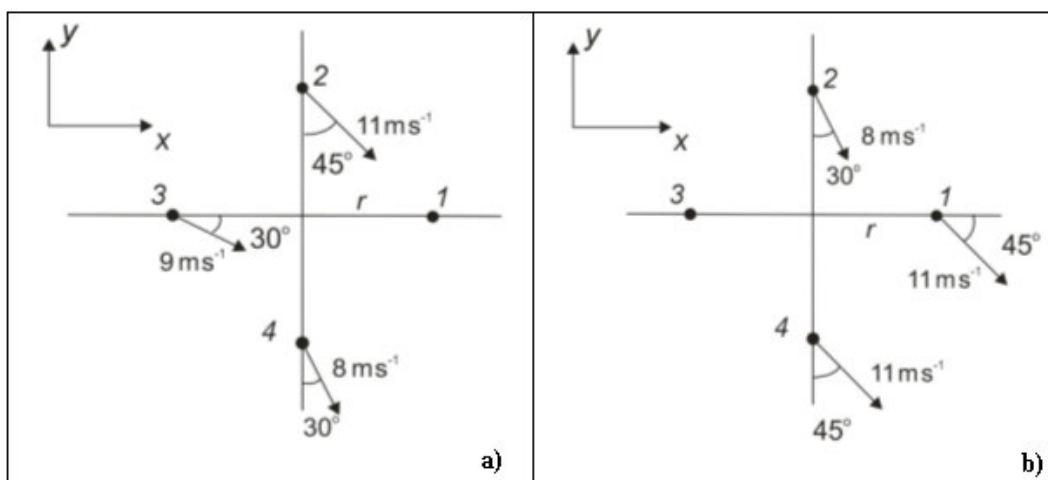
II.6.3. ábra. Szélesség értékek ekvidisztáns rácpontokban, $r = 300$ km.

II.6.7. Határozzuk meg a divergenciát, az abszolút örvényességet (a relatív és a planetáris örvényesség összege) a II.6.4. ábrán bemutatott $r = 250$ km-es felbontású ekvidisztáns rács középpontjában a 45° szélességi körön!



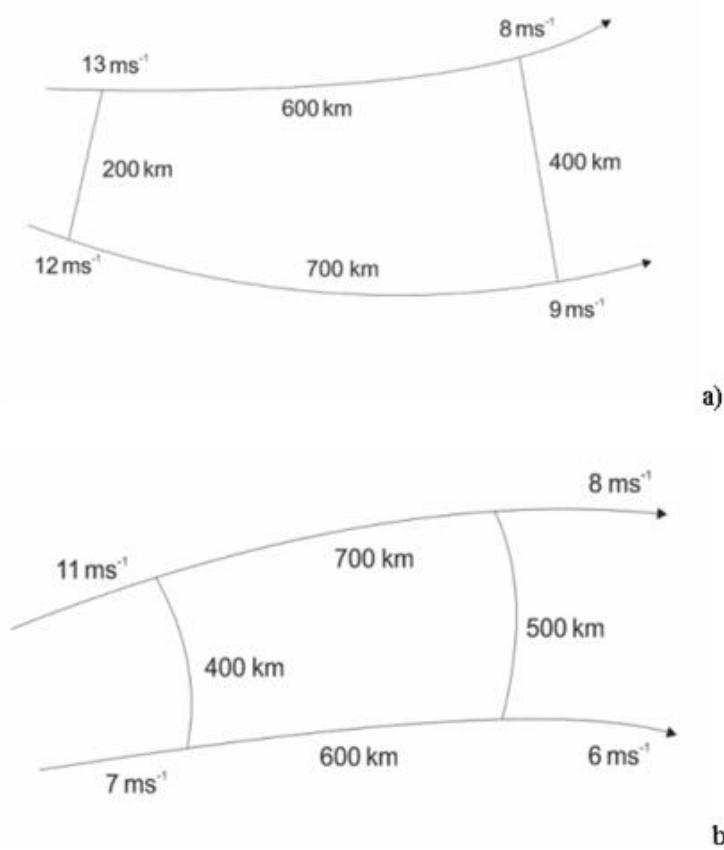
II.6.4. ábra. Szélesség értékek ekvidisztáns rácpontokban, $r = 250$ km.

II.6.8. a) Adjuk meg a szélesség értékét az 1. rácspontban, ha tudjuk, hogy mind a divergencia mind az örvényesség becsült értéke nulla a II.6.5a. ábrán bemutatott $r = 300 \text{ km}$ -es felbontású ekvidisztáns rácspontjában. b) Oldjuk meg a feladatot a II.6.5b. ábra adataival is. Mekkora lesz a sebesség a 3. rácspontban? Számítsuk ki mindkét esetben a deformációt is!



II.6.5. ábra. Szélesség értékek ekvidisztáns rácspontokban, $r = 300 \text{ km}$. A rácshálózat középpontjában nincs sem örvényesség, sem divergencia.

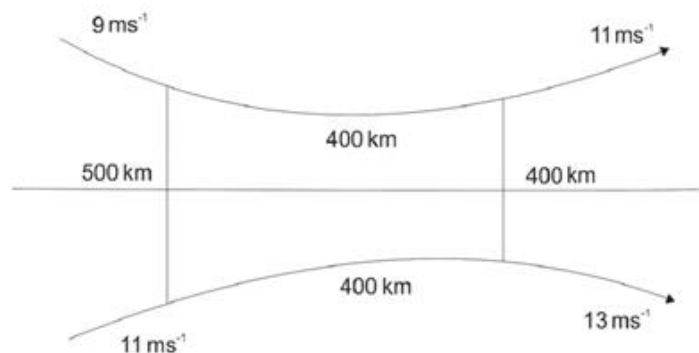
II.6.9. Adjuk meg a II.6.6a-b. ábrán látható, két-két áramvonal futása alapján kijelölt területre jellemző divergencia, a relatív és abszolút örvényesség, valamint a deformáció értékét! A 60° szélességi kör térségében dolgozzunk!



II.6.6. ábra. Szélességi értékek az áramvonalak mentén.

II.6.10. Számítsuk ki a divergencia és az örvényesség értékét a II.6.6. ábrán bemutatott áramlási mezőben az invariáns definíciójuk (integrál alak) segítségével! (Lásd a II.6.1. és II.6.2. feladatot is!)

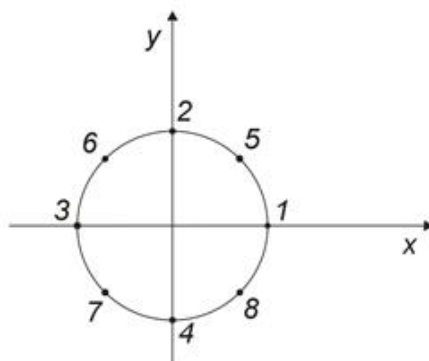
II.6.11. Adjuk meg a II.6.7. ábrán látható, két tengelyszimmetrikusan futó áramvonal alapján kijelölt területre jellemző divergencia, örvényesség és deformáció értékét!



II.6.7. ábra. Szélességi értékek két szimmetrikus áramvonal mentén.

II.6.12. Hány százalékkal és hogyan kell változnia a szélességnek az áramvonal mentén 600 km-es távolságban, ha az áramvonalak 20°-os szögben tartanak szét és a mező divergenciamentes? A két áramvonal közötti átlagos távolság 400 km volt.

II.6.13. Adjunk számítási formulát az örvényesség, a divergencia és a deformáció meghatározására, ha egy r sugarú körön nyolc egymástól azonos távolságban levő pontban ismerjük a sebességi mezőt! A rácpontok elhelyezkedését a II.6.8. ábra szemlélteti.



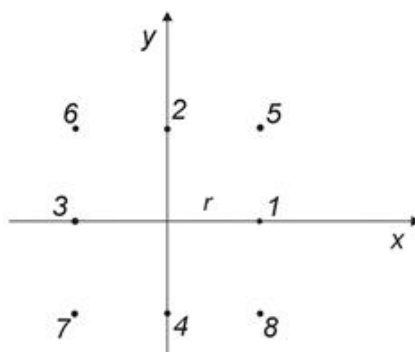
II.6.8. ábra. Egy r sugarú körön elhelyezkedő 8 ekvidisztáns távolságra levő rácpont.

II.6.14. Számítsuk ki a hőmérsékleti gradiens nagyságát az $r = 500$ km sugarú körön elhelyezkedő 8 pontos egymástól ekvidisztáns távolságra lévő rácponti adatok ismeretében II.6.1. táblázat és a II.6.8. ábra! (Egy klasszikus feladat 60 évvel ezelőtről.)

II.6.1. táblázat. A nyolc pontos séma hőmérsékleti adatai.

t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7	t_8
16,7 °C	11,1 °C	14,9 °C	21,0 °C	12,8 °C	10,2 °C	19,3 °C	22,4 °C

Íjuk fel a hőmérsékleti gradienst a II.6.9. ábrán bemutatott 8 pontos négyzetrács alkalmazásával, ami az 5, 6, 7, 8 pont kivételével egybeesik az r sugarú 8 pontos sémával.



II.6.9. ábra. 8 pontos ekvidisztáns négyzetes rács.

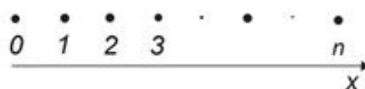
II.6.15. Mutassuk meg, hogy a II.6.10. ábra szerinti

$$\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)_1 = \frac{g_2 - g_0}{2\Delta x}$$

centrális séma másodrendben pontos, míg a

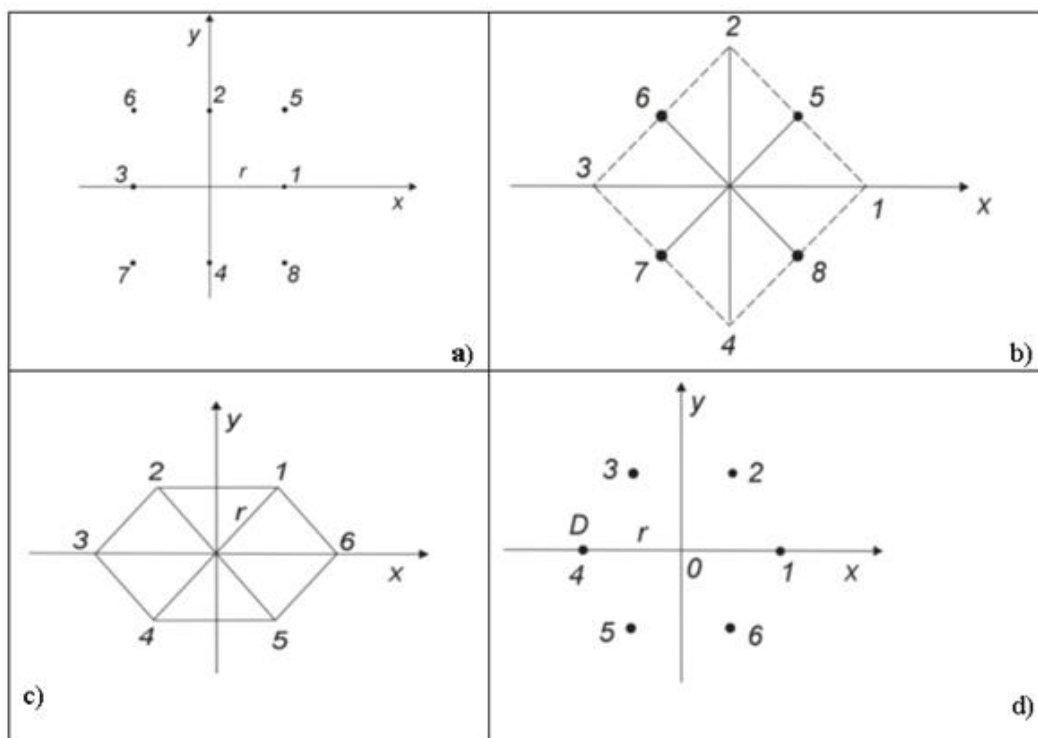
$$\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)_0 = \frac{g_1 - g_0}{\Delta x}$$

féloldalas séma első rendben pontos.



II.6.10. ábra. Az x-irányú rács.

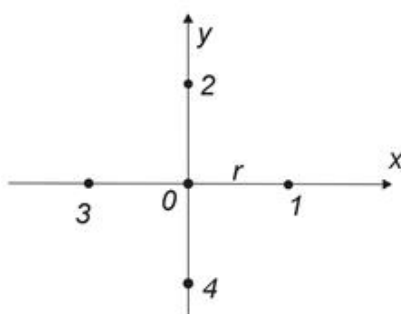
II.6.16. Adjuk meg négy gyakran használt klasszikus rácshálózaton az elsőrendű parciális derivált alakját (II.6.11. ábra).



II.6.11. ábra. Különböző típusú (a–d) horizontális rácsok a deriváltak véges különbséges meghatározásához.

II.6.17. Mi az elemi feltétele annak, hogy három mérési pont segítségével meghatározzuk a horizontális divergencia, örvényesség és a deformáció értékét?

II.6.18. Adjuk meg a második deriváltak és a Laplace-operátor $\nabla^2 g = \Delta g$ véges különbséges alakját a) centrált másodrendű séma (II.6.12. ábra), b) hatpontos háromszög rácsra, amely 45° -os szögben elforgatott négyzetekből van felépítve, c.) Szabályos hatszög rácsra (lásd a II.6.16. feladat c és d részét is).



II.6.12. ábra. A legáltalánosabb centrált véges különbséges séma rácsponthai (a négyzetes rácshálózat).

II.6.19. Adjuk meg az 500 hPa-os szinten a geosztrófikus örvényességet $\zeta_g = \frac{1}{f} \nabla^2 \Phi$ négyzetes rácshálózat (II.6.12. ábra) segítségével a 45° szélességi körön, ha a geopotenciál értékek gpm egységben megadva ($\Phi = g_0 H$, ahol H a geopotenciális magasság, $g_0 = 9.81 \text{ m s}^{-2}$ a nehézségi gyorsulás referencia értéke): $H_1 = 5620 \text{ gpm}$, $H_2 = 5600 \text{ gpm}$, $H_3 = 5610 \text{ gpm}$, $H_4 = 5630 \text{ gpm}$, $H_0 = 5540 \text{ gpm}$! Az ekvidisztáns ráctávolság $r = \Delta x = \Delta y = 350 \text{ km}$.

II.6.20. Becsüljük meg a nyomás Laplace operátorát, ha a szinoptikus térképen egy négyzetes rácshálózat (II.6.12 ábra) pontjaiban a következő értékeket olvashatjuk le: $p_1 = 991 \text{ hPa}$, $p_2 = 993 \text{ hPa}$, $p_3 = 995 \text{ hPa}$, $p_4 = 994 \text{ hPa}$, $p_0 = 1001 \text{ hPa}$! Az ekvidisztáns rácstávolság 500 km.

II.6.21. Becsüljük meg a ciklon geosztrófikus örvényességét a 40° szélességi körön, ha kör alakú izobárokkal rendelkezik, s a középpontjától (980 hPa) 350 km-re távolodva a tengerszintre redukált légnyomás átlagosan 5 hPa-

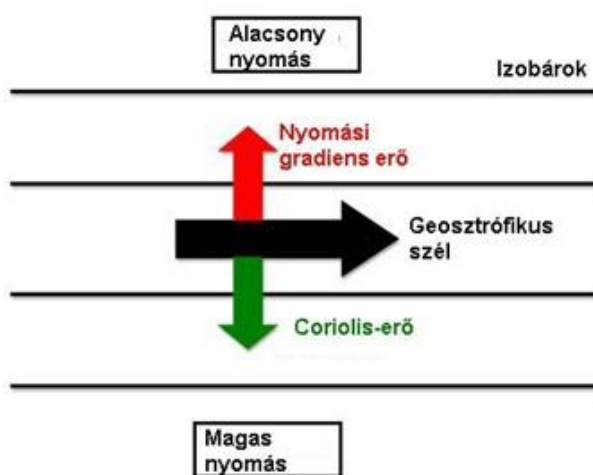
t emelkedik. $\zeta_\varepsilon = \frac{1}{\rho f} \nabla^2 p$. A levegő sűrűsége legyen $1,2 \text{ kg m}^{-3}$.

III. fejezet - Egyensúlyi és nem-egyensúlyi mozgások a légkörben

Leelőssy Ádám
Mészáros Róbert
Weidinger Tamás

III.1. A geosztrófikus és a gradiens szél

A mérsékelt és a magas szélességek jellegzetes egyensúlyi mozgása a geosztrófikus szél, ami akkor jön létre, ha a horizontális síkban az izobárok jó közelítéssel egyenesek és a horizontális nyomási gradiens erő egyenlő a Coriolis-erővel. Az északi féltekén a Coriolis-erő az áramláshoz képest mindig jobbra mutat, ezért egyensúlyi áramlás esetén a nyomási gradiens erőnek balra kell mutatnia (III.1.1. ábra). A geosztrófikus szél mindig a nyomási gradiensre merőlegesen, azaz az izobárok mentén fúj. A déli féltekén az irányok természetesen fordítottak.



III.1.1. ábra. Geosztrófikus szél az északi féltekén.

A nyomási gradiens erő és a Coriolis-erő egyensúlyát a következőképpen fejezhetjük ki:

$$-\frac{1}{\rho} \nabla_h p - 2 \mathbf{f} \times \mathbf{V}_\varepsilon = 0$$

ahol $\mathbf{V}_\varepsilon = \begin{pmatrix} u_\varepsilon \\ v_\varepsilon \end{pmatrix}$ a geosztrófikus szél vektora. Itt jegyezzük meg, hogy a geosztrófikus szél mindig kétdimenziós vektorként írható fel, csak horizontális komponensei vannak. Az $\boldsymbol{\Omega}$ szögsebesség vektor alakja komponensenként kiírva:

$$\boldsymbol{\Omega} = \begin{pmatrix} \Omega_x \\ \Omega_y \\ \Omega_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \Omega \cos \varphi \\ \Omega \sin \varphi \end{pmatrix},$$

ahol φ a földrajzi szélesség. Az összefüggés jól mutatja, hogy adott nyomási gradiens mellett a geosztrófikus szél nagyságát az szabja meg, hogy mekkora sebesség képes a nyomási gradiens erővel azonos nagyságú Coriolis-erő létrehozására.

Szigorúan véve a geosztrófikus egyensúly a légkörben szinte sosem teljesül. A geosztrófikus szélegyenletet

megadhatjuk a különböző koordináta-rendszerekben. Így a Descartes-féle (x, y, z, t) rendszerben: $\mathbf{V}_g = \begin{pmatrix} u_g \\ v_g \end{pmatrix}$, vagy más jelöléssel: $\mathbf{V}_g = (u_g, v_g)$, ahol u_g az x -, v_g az y -irányú komponenszt jelenti.

$$u_g = -\frac{\alpha}{f} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad v_g = \frac{\alpha}{f} \frac{\partial p}{\partial x}.$$

Ha az izobárokra merőleges (normális) irányt választjuk koordináta-tengelynek, akkor

$$V_g = \frac{\alpha}{f} \frac{\partial p}{\partial n},$$

ahol $f = 2\Omega \sin \varphi$ a Coriolis-paraméter, melynek az értéke a 45° szélességi körön megközelítőleg $f = 10^{-4} \text{ s}^{-1}$. Itt V_g a geosztrófikus szél nagysága.

A geosztrófikus szél divergenciája és rotációja

$$\text{div} \mathbf{V}_g = \frac{\partial u_g}{\partial x} + \frac{\partial v_g}{\partial y} = -\frac{\beta}{f} v_g + \left(u_g \frac{\partial \ln \alpha}{\partial x} + v_g \frac{\partial \ln \alpha}{\partial y} \right) \approx -\frac{\beta}{f} v_g,$$

A geosztrófikus szél az (x, y) síkban „fúj”, így a geosztrófikus szél rotációja vertikális irányú. A rotáció vertikális komponensét nevezzük örvényességnek. Ezt a komponenszt írjuk fel, ami skalár mennyiség.

$$\mathbf{k} \cdot \text{rot} \mathbf{V}_g = \frac{\partial v_g}{\partial x} - \frac{\partial u_g}{\partial y} = \zeta_g = \frac{\beta}{f} u_g + \left(v_g \frac{\partial \ln \alpha}{\partial x} - u_g \frac{\partial \ln \alpha}{\partial y} \right) + \frac{\alpha}{f} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \right) \approx \frac{\alpha}{f} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \right).$$

A geosztrófikus szélegyenlet nyomási rendszerben (x, y, p, t) :

$$V_g = \frac{1}{f} \frac{\partial \Phi}{\partial n},$$

illetve

$$u_g = -\frac{1}{f} \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad v_g = \frac{1}{f} \frac{\partial \Phi}{\partial x}.$$

A geosztrófikus szél divergenciája és rotációja:

$$\text{div} \mathbf{V}_g = -\frac{\beta}{f} v_g,$$

$$\mathbf{k} \cdot \text{rot} \mathbf{V}_g = \zeta_g = \frac{\beta}{f} u_g + \frac{1}{f} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right) \approx \frac{1}{f} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right) = \frac{1}{f} \nabla^2 \Phi.$$

A **gradiens szél** a görbült izobárok mentén, azaz a ciklonokban, anticiklonokban kialakuló egyensúlyi áramlást írja le. Ebben az esetben a Coriolis-erő és a nyomási gradiens erő nagysága nem egyezik meg. A mozgást a ciklonnal együtt forgó rendszerből szemlélve a két erő eredője a centripetális erő. Ha a Földhöz rögzített koordináta-rendszerben szemléljük a mozgást, akkor a forgó mozgást végző ciklon, illetve anticiklon esetén a két erő (nyomási gradiens és a Coriolis-erő) összege a centripetális erő, ami rendszer középpontja felé mutat. Ez tartja körpályán a légrést. Az, hogy centrifugális, vagy centripetális erőről beszélünk, a koordináta-rendszer választás kérdése. A centrifugális erő kényszererő, vagyis forgórendszerben értelmezhető.

Természetes koordináta-rendszerben (s, r, z, t) (az s tengely a mozgás irányába esik, az r tengely sugárirányú és a középpontból kifelé mutat) a szélegenlet alakja:

$$-\alpha \frac{\partial p}{\partial n} + f v_z + \frac{v_z^2}{r} = 0,$$

Megjegyezzük, hogy ebben a természetes koordináta-rendszerben a $V_{\mathcal{E}'} = v_z$ gradiens szél pozitív. (Amikor természetes koordináta-rendszerről beszélünk, minden esetben tisztázni kell a tengelyek irányát, s így a sebességvektor előjelét is.)

Ciklonális mozgásnál a nyomási gradiens erő a ciklon belseje felé, a Coriolis-erő pedig kifelé mutat:

$$-\alpha \frac{\partial p}{\partial r} < 0,$$

így az erőegyensúly:

$$-\alpha \frac{\partial p}{\partial r} + f V_{\mathcal{E}'} + \frac{V_{\mathcal{E}'}^2}{r} = 0.$$

A másodfokú egyenlet megoldása után:

$$V_{\mathcal{E}'} = -\frac{fr}{2} + \sqrt{\frac{f^2 r^2}{4} + r\alpha \frac{\partial p}{\partial r}}.$$

Anticiklonban a nyomási gradiens erő kifelé, a Coriolis-erő befelé mutat:

$$-\alpha \frac{\partial p}{\partial r} > 0,$$

így az erőegyensúly:

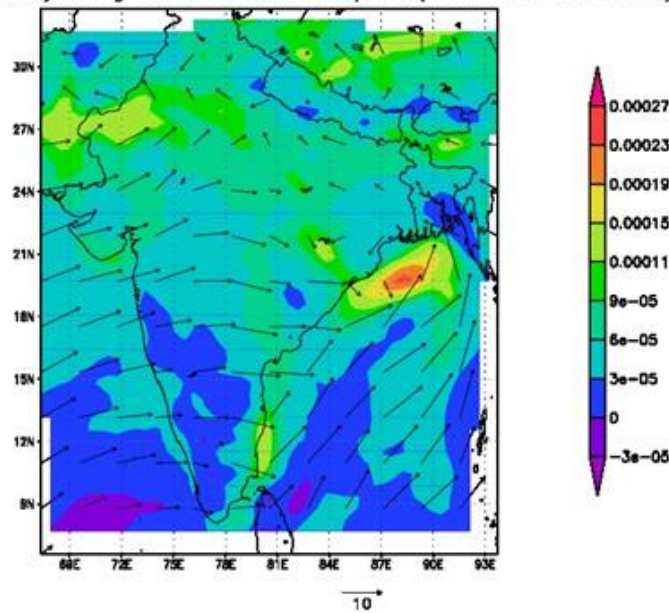
$$f V_{\mathcal{E}'} - \alpha \left| \frac{\partial p}{\partial r} \right| - \frac{V_{\mathcal{E}'}^2}{r} = 0.$$

A másodfokú egyenlet megoldása után:

$$V_{\mathcal{E}'} = -\frac{fr}{2} + \sqrt{\frac{f^2 r^2}{4} - r\alpha \left| \frac{\partial p}{\partial r} \right|}.$$

Az itt bemutatott egyszerű számítási módszerek a mindennapi meteorológiai gyakorlat részei. A numerikus modellszámítások eredményeiből meghatározott meteorológiai mezők feldolgozása és ábrázolása a napi gyakorlat része. Példaként és „kedvcsinálóként” egy szakdolgozathoz kapcsolódó videót mutatunk be (III.1.1. videó). Indiába „kirándulunk” és egy 2006. augusztus elején kipattant monszundepresszió mozgását és örvényességi mezejét mutatjuk be. A számítások az ELTE Meteorológiai Tanszéken futó WRF modellel készültek (Bájhóber, 2011).

Abszolút orvenyesség es a felszíni szelprofil(2006.08.01.18 UTC)



III.1.1. videó. A felszíni (1000 hPa) szél (V) és örvényességi (ζ) mező egy Indián áthaladó monszun depresszió során 2006. augusztus elején. (A videót Bájhóber Eszter meteorológus hallgató készítette az általa futtatott WRF modell alapján).

III.1.1. Mekkora az a legnagyobb nyomási gradiens, amely mellett az 1000 km sugarú anticiklonban még kialakulhat gradiens áramlás? Mekkora ez az érték ciklonban? A Coriolis-paraméter értéke 10^{-4} s^{-1} .

III.1.2. Adjunk alsó és felső határt az adott nyomási gradiens erő mellett ciklonban, illetve anticiklonban kialakuló gradiens szélre! A mozgásrendszerek mérete és a levegő sűrűsége rögzített, a Coriolis-paraméter értéke 10^{-4} s^{-1} .

III.1.3. Mekkora a geosztrófikus szél nagysága az É.sz. 45° -on, 5 600 m magasan, ha az 500 hPa-os és az 504 hPa-os izobárok egymástól való távolsága 200 km? A hőmérséklet -25°C . A száraz levegő specifikus gázállandója $287 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$, a Coriolis-paraméter 10^{-4} s^{-1} .

III.1.4. Mekkora a gradiens szél nagysága egy 10 szélességi fok átmérőjű ciklonban az É.sz. 45° -on, ha a nyomási gradiens $1,5 \text{ hPa} / 100 \text{ km}$, a levegő sűrűsége pedig $1,2 \text{ kg m}^{-3}$? Hogyan változna az eredmény anticiklonban ugyanakkora abszolút értékű nyomási gradiens esetén? A száraz levegő specifikus gázállandója $287 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$, a Coriolis-paraméter 10^{-4} s^{-1} .

III.1.5. Az előző feladathoz hasonlóan számítsuk ki, hogy mekkora lenne a gradiens szél különbsége ciklon és anticiklon esetében az É.sz. 45° -on? A légnyomás a ciklon belsejében 990 hPa, az anticiklonéban 1030 hPa, a határukon egyaránt 1010 hPa. A száraz levegő specifikus gázállandója $287 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$, a levegő sűrűsége $1,2 \text{ kg m}^{-3}$, a mozgásrendszer átmérője 20 szélességi fok.

III.1.6. Egy ciklon helyezkedik el az északi szélesség 35. és 55. foka között. A légnyomás a középpontban 995 hPa, a széleken 1015 hPa. A hőmérséklet a 35° -on 25°C , az 55° -on 15°C . Mekkora a gradiens szél különbsége a 35. és 55. szélességek között? A száraz levegő specifikus gázállandója $287 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$, a Föld sugara 6 370 km, szögsebessége $\Omega = 7,292 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$.

III.1.7. Mekkora a gradiens és a geosztrófikus szél maximális aránya anticiklonban?

III.1.8. Számítsuk ki a geosztrófikus szél divergenciáját (x, y, p) koordináta-rendszerben! Mekkora az egyes tagok nagyságrendje nagyskalájú folyamatok esetén?

III.1.9. Számítsuk ki a geosztrófikus szél divergenciáját (x, y, z) koordináta-rendszerben! Mekkora az egyes tagok nagyságrendje nagyskálájú folyamatok esetén?

III.1.10. Számítsuk ki a geosztrófikus szél örvényességét (x, y, p) koordináta-rendszerben! Mekkora az egyes tagok nagyságrendje nagyskálájú folyamatok esetén?

III.1.11. Számítsuk ki a geosztrófikus szél örvényességét (x, y, z) koordináta-rendszerben! Mekkora az egyes tagok nagyságrendje nagyskálájú folyamatok esetén?

III.2. A termikus szél

A geosztrófikus szél nagysága és iránya a nyomási gradiens függvénye. Ha a nyomási gradiens nagysága vagy iránya változik a magassággal, akkor ez maga után vonja a geosztrófikus szél magasság szerinti változását. A horizontális nyomási gradiens magasság szerinti változása a horizontális hőmérsékletkülönbség, pontosabban a baroklinitás következménye.

Adott légréteg felső (z_2) és alsó (z_1) határán lévő $\mathbf{v}_g$ geosztrófikus szél különbsége az adott rétegre jellemző $\mathbf{v}_T$ termikus szél:

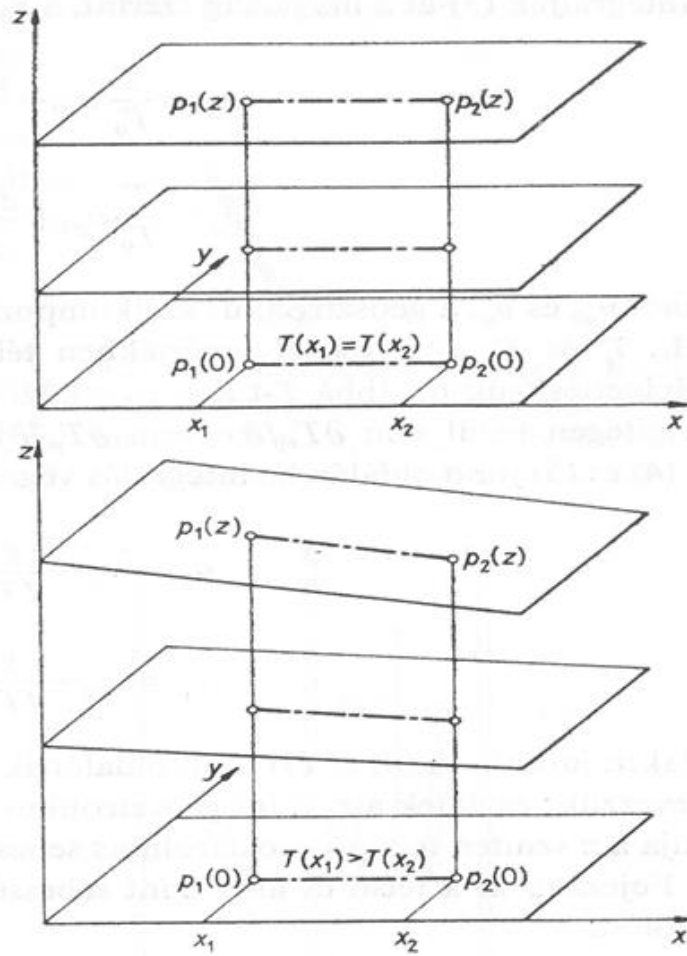
$$\mathbf{v}_T(z_1, z_2) = \mathbf{v}_g(z_2) - \mathbf{v}_g(z_1)$$

A termikus szél a baroklin légkörben kialakuló szélnyírás jellemzésére szolgál, elnevezése megtévesztő (a dimenziójából adódik), mert a termikus szél „nem fű”, azaz nem a horizontális szél egy komponense. A termikus

szél értelmezésekor feltételezzük, hogy a $z_2 - z_1$ réteg minden szintjében teljesül a geosztrófikus szélegyenlet, az áramlás horizontális.

A horizontális hőmérsékletkülönbség hatására kialakuló vertikális nyomáskülönbséget a *III.2.1. ábra* szemlélteti. Az x_1 helyen magasabb a 0 és z szint közötti réteg átlagos hőmérséklete, mint az x_2 helyen. A melegebb levegő kisebb sűrűségének köszönhetően a melegebb x_1 helyen nagyobb lesz valamely p nyomási szint geopotenciálja, mint a hidegebb x_2 helyen, azaz a p izobár felület megdől. A *III.2.1. ábrán* látható, hogy a hőmérsékletkülönbségből származó nyomási gradiens iránya megegyezik a hőmérsékleti gradiensével. A geosztrófikus szél változása (a termikus szél) ennek megfelelően párhuzamos lesz az izotermákkal úgy, hogy az alacsony hőmérsékletű terület a termikus szélvektor irányától az északi féltekén balra esik.

A termikus szél szoros összefüggésben van a hőmérsékleti advekcióval. Ha a megfigyelési ponttól a széllal szemben haladva a légkör melegszik (melegadvekciónak), akkor a termikus szélvektor a geosztrófikus szélhez képest jobbra mutat, azaz a magassággal a szél jobbra fordul. Hasonlóan hidegadvekciónak esetén a geosztrófikus szél a magassággal balra fordul. (Természetesen a déli féltekén az irányok fordítottak).



III.2.1. ábra. A nyomási gradiens megváltozása a magassággal. (Götz G., Rákóczi F., 1981: *A dinamikus meteorológia alapjai*. Tankönyvkiadó, Budapest, 247. oldal.)

A geosztrófikus szél magasság szerinti változását, azaz a termikus szelet a következő egyenletek írják le:

$$\frac{\partial u_g}{\partial z} = -\frac{g}{fT} \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{u_g}{T} \frac{\partial T}{\partial z},$$

$$\frac{\partial v_g}{\partial z} = \frac{g}{fT} \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{v_g}{T} \frac{\partial T}{\partial z},$$

ahol u_g és v_g a geosztrófikus szél komponensei, g a gravitációs gyorsulás, f a Coriolis-paraméter, T pedig a hőmérséklet. Látható, hogy a termikus szél a horizontális és vertikális hőmérsékleti gradiensből is függ. Nagyságrendi analízis alapján az esetek többségében a vertikális hőmérsékleti gradiens tartalmazó tag elhanyagolható. Az

elhanyagolás után egy véges $\Delta z = z_2 - z_1$ vastagságú rétegben a szélkomponensek megváltozására a következő egyenletek adódnak:

$$\Delta u \approx -\frac{g}{f\bar{T}} \frac{\Delta \bar{T}}{\Delta y} \Delta z,$$

$$\Delta v \approx \frac{g}{f\bar{T}} \frac{\Delta \bar{T}}{\Delta x} \Delta z,$$

ahol $\bar{T}$ a réteg átlagos hőmérséklete.

A termikus szélegeyenlet nyomási rendszerben is felírható:

$$p \frac{\partial u_{\varepsilon}}{\partial p} = + \frac{R}{f} \frac{\partial T}{\partial y},$$

$$p \frac{\partial v_{\varepsilon}}{\partial p} = - \frac{R}{f} \frac{\partial T}{\partial x},$$

vagy vektori alakban:

$$\frac{\partial \mathbf{v}_{\varepsilon}}{\partial p} = - \frac{R}{fp} \mathbf{k} \times \nabla_p T,$$

ahol ∇_p az izobár felületeken vett horizontális gradiens operátor. A nyomási rendszerben felírt termikus szél egyenletei alapján a hőmérsékleti gradienseket jellemző relatív topográfia térképekből számítható a vertikális szélnyírás. A nyomási rendszerben felírt egyenletek is közelíthetők egy véges rétegre vonatkozó szélnyírásként:

$$\Delta u \approx \frac{R}{f} \frac{\Delta \bar{T}}{\Delta y} \frac{\Delta p}{p},$$

$$\Delta v \approx - \frac{R}{f} \frac{\Delta \bar{T}}{\Delta x} \frac{\Delta p}{p},$$

ahol $\bar{T}$ a réteg átlagos hőmérséklete.

III.2.1. Mutassuk meg, hogy barotróp légkörben nincs termikus szél!

III.2.2. Végezzük el a termikus szél nagyságrendi analízisét! Hány nagyságrend különbség van a horizontális és a vertikális hőmérsékleti gradiens hatása között?

III.2.3. Írjuk fel a P_0 és P_1 szintek közötti termikus szélvektort a relatív topográfiájuk ismeretében! A réteg átlagos hőmérséklete legyen $\bar{T}$. Emlékeztetül a relatív topográfia kiszámítására szolgáló kifejezés:

$$ReTop = \Phi_1 - \Phi_0 = R\bar{T} \ln \left(\frac{P_0}{P_1} \right).$$

III.2.4. A 850 hPa-os szinten 20 m s^{-1} erősségű délkeleti szél fúj. A 850–500 hPa közötti réteg átlagos hőmérséklete nyugat felé 100 km-enként $3 \text{ }^{\circ}\text{C}$ -ot emelkedik. Milyen irányú és nagyságú szél fúj az 500 hPa-os szinten? A Coriolis-paraméter 10^{-4} s^{-1} , a száraz levegő specifikus gázállandója $287 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$.

III.2.5. Az 500 hPa-os szinten 20 m s^{-1} erősségű északnyugati szél fúj. A 700–500 hPa közötti réteg átlagos hőmérséklete nyugat felé 100 km-enként $2 \text{ }^{\circ}\text{C}$ -ot emelkedik. Milyen irányú és nagyságú szél fúj a 700 hPa-os szinten? A Coriolis-paraméter 10^{-4} s^{-1} , a száraz levegő specifikus gázállandója $287 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$.

III.2.6. Az 500 hPa-os szinten 20 m s^{-1} erősségű nyugati szél, a 700 hPa-os szinten 15 m s^{-1} erősségű délnyugati szél fúj. Mekkora a 700–500 hPa-os szintek között zajló átlagos hőmérsékleti advekcio értéke? A Coriolis-paraméter 10^{-4} s^{-1} , a száraz levegő specifikus gázállandója $287 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$.

III.2.7. A III.2.1. táblázat egy rádiószondás felszállás adatait mutatja:

III.2.1. táblázat. Rádiószondás felszállás adatai a 925 hPa és a 400 hPa-os szint között.

Nyomás (hPa)	Magasság (m)	Hőmérséklet (°C)	Szélirány (fok)	Szélesség (m s ⁻¹)
925	678	16,8	275	7
850	1393	11,4	250	2
700	2984	-0,5	155	10
500	5600	-15,9	180	10
400	7240	-28,9	160	19

Feltéve, hogy 850 hPa felett minden szinten geosztrófikus szél fúj, mekkora az átlagos hőmérsékleti advekcio a 700–400 hPa közötti rétegben? Ennek alapján adjunk becslést az 500 hPa-os szint 1 óra múlva várható hőmérsékletére! Mennyire jó becslés a kapott átlagos érték az 700–400 hPa közötti réteg egészére? A Coriolis-paraméter 10^{-4} s^{-1} , a száraz levegő specifikus gázállandója $287 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$.

III.2.8. Egy meteorológiai előrejelző modell adott A pontra, az 500 hPa-os szintre vonatkozóan a következő adatokat jelezte előre: $u = -15 \text{ m s}^{-1}$, $v = 8 \text{ m s}^{-1}$, $T = 250 \text{ K}$. Az A ponttól 50 km-re északra fekvő rácspontban a hőmérséklet 250,2 K, az 50 km-re délre fekvő rácspontban 249,8 K, a 25 km-re keletre fekvő rácspontban 249,8 K, a 25 km-re nyugatra fekvő rácspontban 250,2 K. Adjunk becslést az A pontban 450 hPa-on fújó szél komponenseire! A Coriolis-paraméter 10^{-4} s^{-1} , a száraz levegő specifikus gázállandója $287 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$.

III.3. Ageosztrófikus áramlás

Az ageosztrófikus áramlás nem egyensúlyi áramlás, a szél eltér a geosztrófikustól. A gyakorlatban az eltérés legtöbb esetben kisebb, mint 1 m s^{-1} .

Ha a légkörben ageosztrófikus áramlás jelenik meg, akkor olyan gyorsulások lépnek fel, amelyek a geosztrófia visszaállítására törekszenek. Legyen az ageosztrófikus szél

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v}_h - \mathbf{v}_g,$$

vagyis

$$\mathbf{v}' = \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u - u_g \\ v - v_g \end{pmatrix}.$$

Az ageosztrófikus áramlás leírásánál a horizontális mozgásegyenletekből indulunk ki. Felhasználva a geosztrófikus

szél $u_g = -\frac{1}{f\rho} \frac{\partial p}{\partial y}$, $v_g = \frac{1}{f\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$ definícióját, a mozgásegyenlet a:

$$\frac{du}{dt} = f(v - v_g) \equiv f v',$$

$$\frac{dv}{dt} = -f(u - u_g) \equiv -fu'$$

alakra hozható.

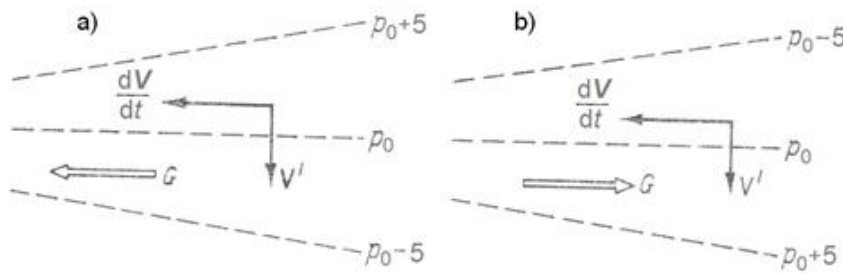
A felírásból következik, hogy az ageosztrofikus áramlás merőleges a horizontális gyorsulásra, hiszen

$$\mathbf{v}' \cdot \frac{d\mathbf{v}_h}{dt} = u' \frac{du}{dt} + v' \frac{dv}{dt} = 0$$

Az északi féltekén a gyorsulás 90° -kal jobbra mutat az ageosztrofikus szélhez képest. A déli féltekén az irány fordított. A fenti egyenletből következik, hogy az ageosztrofikus sebesség nagysága arányos a horizontális gyorsulással:

$$|\mathbf{v}'| = \frac{1}{f} \left| \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right|$$

Mindebből látható, hogy ha az áramlásnak az izobárokra merőleges komponense is van, akkor a magasabb nyomás (geopotenciál) irányába mutató szélkomponens csökkenni, az alacsonyabb nyomás (geopotenciál) irányába mutató szélkomponens növekedni fog.



III.3.1. ábra. Az ageosztrofikus szélvektor iránya. Lajthman, D. L., 1976: *Dinamikus meteorológia*. 245. oldal.

Az egyik legfontosabb ageosztrofikus hatást az izallobárikus szél képviseli, amely a nyomási mező időbeli átrendeződésekor alakul ki. Ha az izobárok elmozdulnak, a geosztrofikus egyensúly megbomlik, mert a szélmező tehetetlensége révén nem képes azonnal igazodni az új izobárokhoz. Izallobárnak az azonos nyomástendenciájú helyeket összekötő vonalakat nevezzük, azaz egy izallobár mentén:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \text{állandó}$$

Nyomási koordináta-rendszerben természetesen nem értelmezhető a nyomás időbeli megváltozása, helyét a geopotenciál tendenciája veszi át.

A mozgásegyenletből kifejezve a sebességkomponenseket, megvizsgálható, hogy az ageosztrofikus szélnek milyen része származik a nyomás időbeli megváltozásából. A szelet geosztrofikus és ageosztrofikus részre bontva belátható, hogy a szélsébség nyomási mező időbeli változása esetén a következőképpen adható meg:

$$u = -\frac{1}{\rho f} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{1}{\rho f^2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial p}{\partial t} \right) - \frac{1}{f} \left(u \frac{\partial v_g}{\partial x} + v \frac{\partial v_g}{\partial y} \right)$$

$$v = \frac{1}{\rho f} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{1}{\rho f^2} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial p}{\partial t} \right) + \frac{1}{f} \left(u \frac{\partial v_{\xi}}{\partial x} + v \frac{\partial v_{\xi}}{\partial y} \right),$$

ahol az egyenletek első tagja megfelel a geosztrófikus szélnek, a második tag pedig az izallobárikus szél. Az izallobárikus szélösszetevőnek a déli félgömbön sem változik meg az előjele. Mindkét félgömbön ugyanolyan irányba fúj. A harmadik tag az izobárok összetartásából kialakuló konfluenciát fejezi ki. Az izallobárikus szél a fenti egyenlet szerint gradiens irányú, azaz merőleges az izallobárokra, és mindig a nyomáscsökkenés irányába fúj. A tapasztalat azt mutatja, hogy ezt az elméleti eredményt a megfigyelések nem igazolják teljes mértékben. Ennek oka, hogy a szélmező nem adaptálódik azonnal a nyomásmezőhöz, így adott pillanatban a szelet egy korábbi időpontbeli nyomásmező szabja meg.

III.3.1. A mozgásegyenletekből kiindulva bizonyítsuk be, hogy

$$u = -\frac{1}{\rho f} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{1}{\rho f^2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial p}{\partial t} \right) - \frac{1}{f} \left(u \frac{\partial v_{\xi}}{\partial x} + v \frac{\partial v_{\xi}}{\partial y} \right),$$

$$v = \frac{1}{\rho f} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{1}{\rho f^2} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial p}{\partial t} \right) + \frac{1}{f} \left(u \frac{\partial v_{\xi}}{\partial x} + v \frac{\partial v_{\xi}}{\partial y} \right).$$

A szélmező deriváltjának megadásakor közelítsük a szelet a geosztrófikus szélllel!

III.3.2. Milyen irányba mutat az ageosztrófikus szél ciklonban?

III.3.3. Milyen irányba mutat az ageosztrófikus szél anticiklonban?

III.3.4. A jet-mag olyan terület, ahol lokálisan, közel egyenes vonalú, nagy sebességű áramlás van jelen. A jet-mag belépő ágán („hátulján”) a szél egyenes vonalú, gyorsuló mozgást végez. Merre mutat az ageosztrófikus szél? Milyen viszonyban van az ageosztrófikus szél iránya a nyomási gradienssel?

III.3.5. A jet-mag kilépő ágán („elején”) a szél egyenes vonalú, lassuló mozgást végez. Merre mutat az ageosztrófikus szél? Milyen viszonyban van az ageosztrófikus szél iránya a nyomási gradienssel?

III.3.6. Hogyan változik a **III.3.4.** és a **III.3.5. kérdésre** adott válasz abban az esetben, ha a jet-mag nagyobb sebességgel halad előre, mint benne az áramlás?

III.3.7. A jet-magban az áramlásra merőleges irányba haladva gyorsan csökken a szélesebesség. A **III.3.4.** és a **III.3.5. kérdésre** kapott eredmények felhasználásával állapítsuk meg, hogy az északi féltekén a jet bal kilépő, bal belépő, jobb kilépő és jobb belépő oldalán divergencia vagy konvergencia lép fel! A geosztrófikus szél divergenciáját elhanyagoljuk.

III.3.8. A szélirány 30°-kal jobbra tér el a geosztrófikus széltől. Mekkora és milyen irányú a gyorsulás, ha a geosztrófikus szélesebesség 20 ms^{-1} ? A Coriolis-paraméter 10^{-4} s^{-1} .

III.3.9. A 10 ms^{-1} erősségű, délnyugati irányú szél másodpercenként 10^{-3} ms^{-1} -mal gyorsul. Mekkora szöget zár be a geosztrófikus szélhez képest? A Coriolis-paraméter 10^{-4} s^{-1} .

III.3.10. Egy északnyugat felől érkező hidegfront előtt a nyomás $0,5 \text{ hPa}$ -al süllyed óránként. 100 km-rel délnyugatra a légnyomás $0,3 \text{ hPa}$ -al süllyed óránként. Mekkora és milyen irányú az izallobárikus szél? A Coriolis-paraméter 10^{-4} s^{-1} (a 45. szélességi körön vagyunk), a levegő sűrűsége $1,2 \text{ kg m}^{-3}$.

III.4. Az áramvonal és a trajektória

A geosztrofikus egyensúly tárgyalásakor megállapítottuk, hogy a szél az izobárok mentén fúj. Bár ez egy adott pillanatban igaz, a mozgásrendszer áthelyeződése miatt az egyes részecskék pályája nem fog egybeesni a pillanatnyi izobárokkal. Fontos tehát különbséget tenni az áramlás pillanatnyi képe, valamint egy kiválasztott levegőrész által leírt pálya között. Előbbit az áramvonalak, utóbbit a trajektóriák jellemzik.

Az **áramvonal** az a görbe, amelyet minden pontjában érint az ott érvényes sebességvektor. Az áramvonal ennek megfelelően euleri szemléletű fogalom: adott pillanatban érvényes áramlási mezőt jellemez. Kiszámítása geometriai úton történik (nincs időbeli változás):

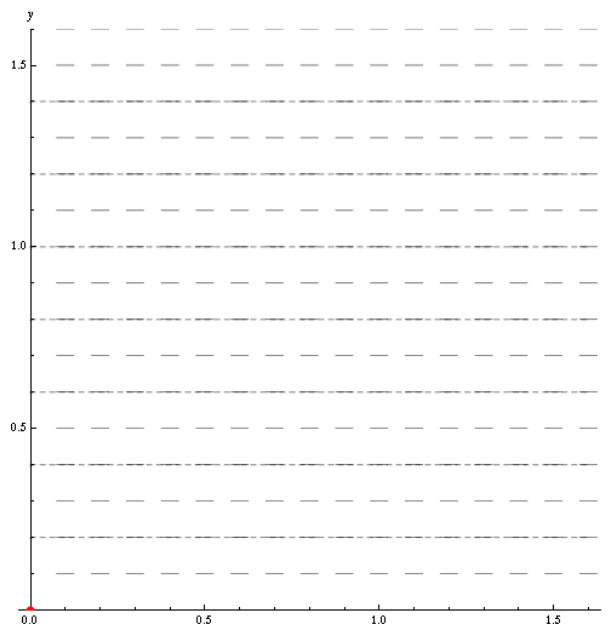
$$\frac{dy}{dx} = \frac{v(x, y, t_0)}{u(x, y, t_0)}$$

A **trajektória** az a görbe, amin egy levegőelem mozgása során végighalad. Lagrange-szemléletű fogalom, ezért kiszámítása időfüggő vektor-differenciálegyenlet megoldásával történik:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}(x, y, t)$$

ahol $\mathbf{r}$ a hely-, $\mathbf{v}$ pedig a sebességvektor.

Geosztrofikus egyensúly esetén a szél mindig az izobárok mentén fúj, azaz az izobárok (izohipszák) az áramvonalakat jelölik ki. A mozgásrendszer áthelyeződése során azonban az izobárok elmozdulnak, így bár a szél mindig a pillanatnyi áramvonalak mentén fúj, a trajektóriák jelentősen eltérhetnek azoktól (III.4.1. videó).



III.4.1. videó. Áramvonalak (szaggatott vonal) és egy légrész trajektóriája (pirossal) időfüggő áramlásban az (x, y) síkban.

Görbült áramlás esetén a mozgásrendszer elmozdulása befolyásolja a görbület sugarát, mert a szél nem az izobárok által meghatározott áramvonalak, hanem a trajektóriák mentén fúj. Ha a mozgásrendszer C sebességgel halad, benne pedig V sebességű szél fúj, az áramvonalak és a trajektóriák görbületi sugara között az alábbi összefüggés írható fel:

$$R_{\text{áramvonal}} = R_{\text{trajektória}} \cdot \left(1 - \frac{C \cdot \cos \gamma}{V} \right),$$

ahol γ a mozgásrendszer haladási iránya és az áramvonalak által bezárt szög.

III.4.1. Milyen feltétel mellett egyeznek meg az áramvonalak a trajektóriákkal?

III.4.2. Ha egy ciklon 10 ms^{-1} sebességgel kelet felé helyeződik át, hány százalékkal változik a görbületi sugár a ciklon

- a) keleti,
- b) nyugati,
- c) északi,
- d) déli peremén?

A geosztrófikus szélesebbség legyen 20 ms^{-1} .

III.4.3. Oldjuk meg a **III.4.2. feladat**ot abban az esetben, ha a geosztrófikus szélesebbség megegyezik az áthelyeződés sebességével!

III.4.4. Adott V geosztrófikus szélesebbség mellett állapítsunk meg olyan kritériumot a ciklon áthelyeződési sebességére vonatkozóan, hogy az áramvonalak és trajektóriák közötti eltérés legfeljebb 5% hibát eredményezzen a centrifugális erő értékében! Tegyük fel, hogy az áramlás sebessége meghaladja a ciklon áthelyeződési sebességét.

III.4.5. Mi a feltétele annak, hogy egy ciklon adott pontján a trajektóriák és az áramvonalak görbületi sugara ellenkező előjelű legyen, azaz a görbület iránya megváltozzon?

III.4.6. Adott helyen és környezetében 12 UTC-kor 8 ms^{-1} erősségű délnyugati szél fúj. Egy óra alatt a szél egyenletesen 20° -ot balra fordul, és 10 ms^{-1} -ra erősödik. Mekkora hibát okoz egy légrésnek az egy óras időtartam alatt vett elmozdulásában, ha a trajektóriát a 12 UTC-kor érvényes áramvonallal helyettesítjük? A szélmezőt tekintsük homogénnek!

III.4.7. Szennyezőanyag kibocsátásakor a forrás helyén és környezetében 5 ms^{-1} erősségű keleti szél fúj. Három óra alatt a szél egyenletesen 50° -ot jobbra fordul, és 10 ms^{-1} -ra erősödik. Hol lesz a kibocsátás kezdetekor a forrástól induló szennyezőanyag három óra elteltével? A szélmezőt tekintsük homogénnek!

IV. fejezet - A cirkuláció és az örvényesség

Weidinger Tamás

IV.1. A cirkuláció, az örvényesség és a Bjerknes-féle örvényességi tétel

Tekintsünk egy S zárt görbét, amely egy F nyílt felületet határol! A görbe mentén a cirkuláció definíció szerint:

$$C = \oint_S \mathbf{V} \cdot d\mathbf{s}$$

ahol $\mathbf{V}$ az S zárt görbe adott pontjában a sebesség, míg $d\mathbf{s}$ a görbe érintője menti elemi elmozdulás (tehát vektormennyiség). A görbe menti cirkuláció a Stokes-tétellel átalakítható a görbe által határolt F felületen vett rotáció felületi integráljává:

$$C = \oint_S \mathbf{V} \cdot d\mathbf{s} = \iint_F \text{rot } \mathbf{V} \cdot d\mathbf{F}$$

ahol $d\mathbf{F}$ az elemi felület vektor.

Ha az S görbét az (x, y) síkban „összehúzzuk” egy pont köré, akkor a

$$\lim_{F \rightarrow 0} \frac{C}{F} = \zeta$$

A $\frac{C}{F}$ hányados határértéke az örvényesség értékét adja, ami a rotáció invariáns definíciója szerint nem más, mint a sebesség adott pontbeli rotáció vektorának z komponense. A cirkuláció az áramlás makroszkópikus tulajdonsága, az örvényesség pedig mikroszkópikus – pontbeli – tulajdonsága.

A ciklonok örvényessége pozitív, az anticiklonoké negatív. Idealizált kör alakú izobárokkal rendelkező ciklon illetve anticiklon örvényessége a középponttól r távolságra:

$$\zeta = \frac{V_z}{r} + \frac{\partial V_z}{\partial r}$$

ahol V_z a pálya menti sebesség, ami ciklonban (az óramutató járásával ellentétes irányú mozgás az északi féltekén), pozitív, míg anticiklonban negatív (lásd a **II. fejezetet** is).

Ha egy légrést, mint makroszkópikus objektumot vizsgálunk, akkor a cirkuláció természetesen függ attól, hogy milyen zárt görbe mentén haladunk a felületen, pl. milyen kétdimenziós metszetet készítünk. A cirkuláció, mint mérőszám jól jellemzi pl. egy tornádó forgását (a forgástengelyre merőleges metszetben), vagy a parti-tengeri, illetve a hegy-völgyi szél fejlődését, de alkalmas a ciklonális, anticiklonális rendszerek egyszerű leírására is.

A *Bjerknes-féle cirkulációs tétel* (Bjerknes, 1898; Götz és Rákóczi, 1981; Thorpe et al., 2003) a cirkuláció teljes időbeli változását három hatás,

□ A szolenoidális,

- a Föld forgásából adódó és
- a súrlódási erőből származó

hatás összegeként írja le. A cirkuláció tétel a ϕ földrajzi szélességen Descartes-féle koordináta-rendszerben, a

$$\frac{dC}{dt} = - \oint_S \frac{dp}{\rho} - 2\Omega \frac{dF}{dt} + \oint_S \mathbf{F}_s \cdot d\mathbf{s},$$

alakban mondható ki, ahol $\mathbf{F}_s$ a súrlódási erő, Ω a Föld forgás szögsebessége, $\frac{dF}{dt}$ az S görbe által bezárt területnek az Egyenlítő síkjára eső vetülete.

IV.1.1. Adjuk meg a z -rendszerben felírt örvényességet és divergenciát tetszőleges η vertikális koordináta-rendszerben, illetve speciálisan nyomási és potenciális hőmérsékleti rendszerben!

IV.1.2. Adjuk meg potenciális hőmérsékleti koordináta-rendszerben a geosztrófikus örvényességet, ha a figyelembe vesszük a Coriolis-paraméter szélességi körök szerinti megváltozását. Mekkora az egyes tagok nagyságrendje nagyskálájú folyamatokban az 500 hPa-os szinten a mérsékelt övben?

IV.1.3. Számítsuk ki az örvényességet a $P(1, 2)$ pontban Descartes-féle rendszerben.

- a) $u = u_0 xy, v = v_0 y$, ahol $u_0 = 2 \text{ m}^{-1} \text{ s}^{-1}, v_0 = 1 \text{ s}^{-1}$,
- b) $u = u_0 y, v = v_0 x$, ahol $u_0 = 2 \text{ s}^{-1}, v_0 = 1 \text{ s}^{-1}$,
- c) $u = u_0, v = v_0 \cos kx \cdot \sin ly$, ahol $u_0 = 2 \text{ m s}^{-1}, v_0 = 1 \text{ m s}^{-1} k = 2,1 \text{ m}^{-1}, l = 0,9 \text{ m}^{-1}$.

IV.1.4. A ciklon középpontjától 500 km-re a szélesség 15 m s^{-1} . Itt a sebesség sugárirányban kifelé haladva 100 km-en 2 m s^{-1} értékkel nő. Adjuk meg a ciklon örvényességét a vizsgált területen!

IV.1.5. Mutassuk meg, hogy henger koordináta-rendszerben (r, ϕ, z) , ahol a sugár-, az érintő irányú, (tangenciális) és a vertikális sebesség rendre v_r, v_ϕ, v_z , a sebességmező rotációja a következő alakban adható meg:

$$\text{rot}\mathbf{V} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{\partial v_\phi}{\partial z} \\ \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \left[\frac{\partial r v_\phi}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial \phi} \right] \end{pmatrix}.$$

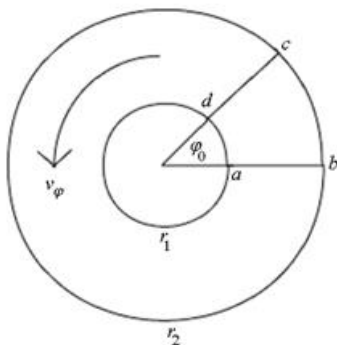
A bizonyításnál használjuk ki az ortogonális görbevonalú koordináta-endszerben (x_*, y_*, z_*) felírt rotáció általános alakját (lásd az **1.4. fejezetet** is)!

IV.1.6. Számítsuk ki az állandó Ω szögsebességgel forgó koordináta-rendszerben a $\mathbf{V}$ sebességgel elmozduló légréteg rotációját!

IV.1.7. Határozzuk meg az úgynevezett $\mathbf{v}^*$ örvény rotációját! Ennek az elméleti szempontból érdekes örvénymozgásnak sajátossága, hogy a forgástengelytől mért távolság (r) és a tangenciális sebesség ($v = v_\phi$) szorzata

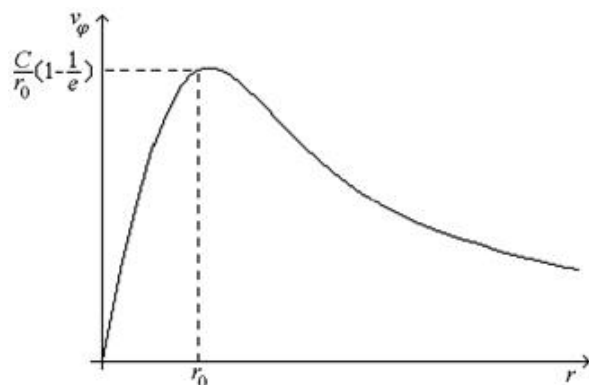
állandó (IV.1.1. ábra). Az örvény sebességmezeje henger-koordináta-rendszerben: $v = v_\phi = \frac{K}{r}$, $v_r = 0$, $v_z = 0$, ahol a K állandó az örvény erősségére utal.

IV.1.8. Mutassuk meg, hogy a $\mathcal{V}$ örvény cirkulációja tetszőleges a-b-c-d-a görbe mentén nulla, így a forgástengelyen kívül nincs örvényessége sem (IV.1.1. ábra).



IV.1.1. ábra. A $\mathcal{V}$ örvény cirkulációjának meghatározása az a-b-c-d-a görbe mentén.

IV.1.9. Adjuk meg a Burgers-örvény (IV.1.2. ábra) divergenciáját és rotációját! Sűrűdásos áramlás esetén a Rankine-örvény nem stabil. A kinetikus energia disszipálódik. (A Rankine-örvényben az örvényesség állandó, az örvényen kívül nulla, lásd a **II.2.19. feladatot** is). Az energiapótlás egy módja, ha a tengely irányában folyamatos befelé áramlást biztosítunk (Halász, 2006; Lautrup, 2011).



IV.1.2. ábra. A tangenciális sebesség (v_ϕ) a Burgers-örvényben – C az örvényerősség, r_0 az örvénymag sugara (Halász, 2006 alapján).

A kontinuitás miatt az axiális sebesség sem lehet mindenhol zérus. Az így definiált örvényes áramlás (Burgers-örvény) a kontinuitási feltétel teljesítése mellett a Navier–Stokes-egyenleteket is kielégíti:

$$v_z = \frac{4s}{r_0^2} z, \quad v_r = -\frac{2s}{r_0^2} r, \quad v_t = -\frac{C}{r} \left[1 - \exp\left(-\frac{r^2}{r_0^2}\right) \right],$$

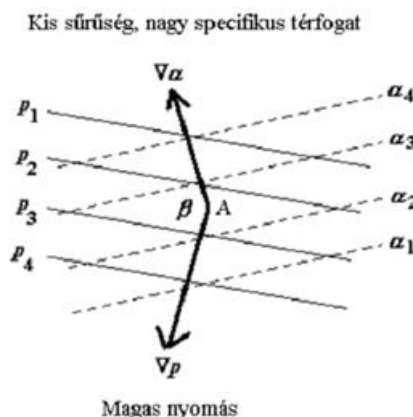
ahol s állandó (laboratóriumi folyadék kísérletekben $s \equiv \nu$ a közeg kinematikai viszkozitása). Az axiális sebesség a távolságtól, a radiális sebesség viszont a magasságtól független. A tangenciális sebesség nagy távolságban ideális örvényhez, kis távolságban viszont merev forgáshoz tart; a képlet által definiált függvény egy „lekerekített” változata a Rankine-örvénynél megadottnak. C az örvényerősség értéke elég nagy távolságban, r_0 az örvénymag sugara, mely a külső részt a belsőtől elválasztja.

A IV.1.2. ábrán látható tangenciális sebesség értéke körülbelül c távolságban a legnagyobb, ami szintén összhangban van a Rankine-örvénnyel. Természetesen a Burgers-örvény is egy idealizált, a tengelytől távolodva például a radiális sebesség végtelenhez tart.

IV.1.10. Mutassuk meg, hogy a Bjerknes-féle cirkulációs tételben a szolenoidális tag hatását az állapotegyenlet ($p\alpha = RT$), illetve a Stokes-tétel alkalmazásával a következőképpen is felírhatjuk:

$$\frac{dC}{dt} = -R \oint_S T d(\ln p), \quad \text{illetve} \quad \frac{dC}{dt} = -R \iint_F \nabla T \times \nabla (\ln p) \cdot d\mathbf{A} !$$

IV.1.11. Milyen irányú cirkulációt generál a szolenoidális tag a következő esetben (IV.1.3. ábra)?



IV.1.3. ábra. A nyomási (∇p) és a sűrűségi ($\nabla \rho$) gradiens iránya az A pontban. β a két gradiens által bezárt szög. (A légkör baroklin.)

IV.1.12. A 10^6 km^2 kiterjedésű ciklon (1013 hPa-os izobár vonalnál kisebb nyomású terület) 45° szélességi körrel az 50° szélességi körre sodródik 18 óra alatt. Hogyan változik a cirkuláció, ha a) a ciklon területe nem változik, b) 10%-kal nő, illetve csökken az 1013 hPa-os izobár által határolt terület?

IV.1.13. Tekintsük a következő gondolat kísérletet! Vegyünk egy 100 km-es sugarú légrészt az Egyenlítőnél, amely nyugalomban van. Hogyan változna a légtömeg cirkulációja, ha az északi-pólusra sodródna? Mekkora lenne az örvényessége, s mennyi lenne a középponttól 100 km-re a légtömeg sebessége, ha a mozgást merev test forgásával közelítenénk?

IV.1.14. Határozzuk meg a cirkuláció időbeli változását egy anticiklonban ha az 500 km sugarú zárt izobár mentén az izobár érintőjébe eső (egységnyi tömegre jutó) súrlódási erőkomponens $4 \cdot 10^{-4} \text{ m s}^{-2}$! Becsüljük meg az örvényesség változását is!

IV.1.15. Becsüljük meg a cirkuláció időbeli megváltozását, ha a vertikális sebesség és a Coriolis-paraméter vertikális komponense elhanyagolható és a rendszer hidrosztatikus! (Az (x, y) síkban levő F felületű S zárt görbére vonatkozó cirkuláció (C_z) időbeli változását kell meghatározni. Induljunk ki a

$$\frac{d\mathbf{V}_h}{dt} = -\alpha \nabla p - 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V}_h + \mathbf{g}$$

egyenletből! Másképpen fogalmazva: vezessük le a

$$\frac{dC_z}{dt} = - \iint_F \mathbf{k} \cdot (\nabla_h \alpha \times \nabla_h p) dF - \iint_F f \nabla_h \mathbf{V}_h dF - \iint_F \beta v dF$$

egyenletet, ahol $\mathbf{V}_k = (u, v)$, és $\beta = \frac{\partial f}{\partial y}$. Adjuk meg az egyes tagok jelentését is!

IV.1.16. Tekintsünk egy 300 km-es sugarú légrészt a 30° szélességi körön, amelynek kezdetben cirkulációja nulla. A légtömeg 5 m s^{-1} sebességgel északi irányba advectálódik.

a) Becsüljük meg a cirkuláció időbeli változását!

b) Feltételezve, hogy az elmozdulás során β változása elhanyagolható, adjuk meg a cirkuláció értékét 24 óra múlva! A görbe változásától (divergencia-hatás) eltekintünk. c) Becsüljük meg a tangenciális sebességet is!

(A IV.1.14. feladatban levezetett formulát alkalmazzuk!)

IV.2. Az örvényességi és a divergencia-egyenlet, a potenciális örvényesség és szerepe a légköri folyamatok leírásában

Az örvényességi egyenlet

Abban az egyszerű esetben, amikor a cirkulációt síkgörbe mentén vizsgáljuk, és felületként a görbe által körülzárt síkfelületet tekintjük, akkor a cirkuláció egyúttal a sebességmező rotációjának a felület normális irányába eső komponenséről is tájékoztat. Ha a vizsgált görbe és a közrezárt felület a Descartes-féle koordináta-rendszer (x, y) síkjába esik akkor az F felület határgörbéje körüli C cirkulációból, illetve cirkuláció és a felület $[dC, dF]$ megváltozásából az örvényességre, és annak teljes időbeli megváltozására következtethetünk:

$$\zeta = \frac{C}{F}, \text{ pontosabban } \zeta = \lim_{F \rightarrow 0} \frac{C}{F}, \quad \frac{d\zeta}{dt} = \frac{d\left(\lim_{F \rightarrow 0} \frac{C}{F}\right)}{dt}.$$

A meteorológiai gyakorlatban legtöbbször, például előrejelzés készítésekor vagy időjárás-analízisnél az Euler-féle szemléletmódot használjuk, ezért a gyakorló meteorológust a lokális időbeli változások érdeklik. Ez az oka annak, hogy a cirkuláció időbeli megváltozására felírt egyenlet helyett (ami kimondatlanul is egy zárt görbe helyzetének és cirkulációjának időbeli teljes megváltozását adja meg, tehát a Lagrange-szemléletmód szerint értelmezhető könnyebben) az örvényesség, illetve a rotáció – mint pontbeli tulajdonság – lokális változását tanulmányozzuk.

Az örvényességi egyenlet levezetésekor a Descartes-rendszerben felírt horizontális mozgásegyenletekből indulunk ki. Az x -irányú mozgásegyenletet y szerint, az y -irányú mozgásegyenletet pedig x szerint deriváljuk, majd az

$$\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

utóbbi egyenletből kivonjuk az előbbit, hiszen $\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$. Számítások után az abszolút örvényesség időbeli változására kapott egyenlet:

$$\begin{aligned} \frac{d(\zeta + f)}{dt} &= \frac{\partial(\zeta + f)}{\partial t} + u \frac{\partial(\zeta + f)}{\partial x} + v \frac{\partial(\zeta + f)}{\partial y} + w \frac{\partial(\zeta + f)}{\partial z} = \\ &= -(f + \zeta)D - \left[\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} \right] - \left[\frac{\partial \alpha}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial \alpha}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial x} \right] + \left[\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right] \end{aligned}$$

I Ia Ib Ic Id

II III IV V

Az I. tag az abszolút örvényesség teljes időbeli változása, ami négy tag összegeként áll elő: a lokális változásból (Ia) az advekcióból (Ib + Ic) és a konvekcióból (Id). A jobb oldal első tagja a divergencia és az abszolút örvényesség hatását adja meg (II). A következő (III) a nyírási-csavarási tag, majd ezt követi (IV) a szolenoidális hatás és a súrlódás (V) (F_x, F_y a súrlódási erő x és y komponense.)

A divergencia-egyenlet

A légrések mozgásuk során változtatják térfogatukat. A sebességmező divergenciája definíció szerint lokálisan adja meg az adott pontban a légrések relatív térfogatának változási sebességét. Fontos tudni, hogy hol számíthatunk összeáramlásra, illetve szétáramlásra, ismernünk kell a divergencia-mező fejlődését, időbeli változásait. Nagyskálájú folyamatokban a horizontális divergencia változása az örvényesség változásához képest másodlagos, így az időbeli változást leíró egyenletet a nagyságrendi analízis módszerével különböző bonyolultságú diagnosztikai egyenletekké egyszerűsíthetjük.

A horizontális divergencia $\left(D = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)$ időbeli változását leíró egyenletet az örvényességi egyenlet mintájára vezethetjük le. Itt is a Descartes-rendszerben felírt mozgásegyenletekből kell kiindulni, ahol elhanyagoljuk a Coriolis-erő vertikális sebességtől függő részét. Az x -irányú mozgásegyenletet x , az y -irányú mozgásegyenletet y szerint deriváljuk, majd a két egyenlet összeadjuk. A tagok rendezése után:

$$\begin{aligned} \frac{dD}{dt} = & \frac{\partial D}{\partial t} + u \frac{\partial D}{\partial x} + v \frac{\partial D}{\partial y} + w \frac{\partial D}{\partial z} = -u \frac{\partial f}{\partial y} + (f_z - D^2) - \left(\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} \right) - \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \alpha}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial y} \right) + \\ & + \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} \right) - \alpha \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \right) + 2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \right) \end{aligned}$$

I Ia Ib Ic Id II III IV V VI VII VIII

Az egyenlet bal oldala (I) megadja a horizontális divergencia teljes időbeli megváltozását, ami a lokális változásból (Ia), a horizontális divergencia advekciójából (Ib és Ic), valamint a konvekciós tagból (Id) áll. A jobb oldal első tagja (II) a Coriolis-paraméter szélességi körök szerinti megváltozásának (β) hatását adja meg. A következő tag (III) a horizontális divergencia, valamint a relatív és a planetáris örvényesség hatását mutatja be a divergencia mező fejlődésében. Ezt követi (IV) a forgatási-csavarási tag, ami a vertikális szélnyírástól (a termikus szél hatása) és a vertikális sebességi mező horizontális inhomogenitásától függ; ezek skaláris szorzata. Megtalálható a szolenoidális tag (V), amit itt egy skaláris szorzat alakjában tudunk felírni. A VI. tag a súrlódási erő hatását mutatja. A jobb oldal utolsó két tagja – aminek nincs analógiája az örvényességi egyenletben – a geosztrófikus örvényesség (VII) és a horizontális szélnyírás (VIII) hatását tükrözi.

A potenciális örvényesség

A (PV – potential vorticity) potenciális örvényesség integrált dinamikus meteorológiai paraméter, olyan skalár, ami magába foglalja a kontinuitási egyenlet (egy adott légrést vizsgálunk) az abszolút rendszerbeli rotáció ($\text{rot} \mathbf{V}_a$) időbeli változására felírt egyenlet (hogyan forog a légrések) és valamilyen skalármennyiségre (λ) vonatkozó megmaradási egyenlet (milyen felületek kötött halad a légrések) hatását. Általános alakja:

$$PV = \frac{\text{rot} \mathbf{V}_a}{\rho} \cdot \nabla \lambda$$

Ha megmaradó skalárváltozóként a potenciális hőmérsékletet (Θ) választjuk, $\left(\frac{d\Theta}{dt} = 0\right)$ (pl. száraz adiabatikus folyamatokat vizsgálunk, ahol nincs fázisátalakulás), akkor a vizsgált légrések két rögzített potenciális hőmérsékleti

felület között halad. Ilyenkor a folyamatok potenciális hőmérsékleti koordináta-rendszer alkalmazásával egyszerűen leírhatók. Ha egy elmozduló nagyskálájú örvénytestet vizsgálunk, akkor első közelítésként alkalmazhatjuk az abszolút örvényesség megmaradási tételét, vagyis az elmozduló légtest abszolút örvényességének az állandóságával

számolhatunk $\left(\frac{d(\zeta + f)}{dt} = 0\right)$. A potenciális örvényesség három megmaradó mennyiséget (potenciális örvényesség, potenciális hőmérséklet, tömeg) ötvöz egyetlen skalárinvariánssá. Ez a Θ -rendszerbeli Ertel-féle potenciális örvényesség

$$PV = \frac{\zeta_\theta + f}{\left(\frac{\partial p}{\partial \Theta}\right)_{t,x,y}}$$

Egysége a PVU (Potential Vorticity Unit) $1 \text{ PVU} = 10^{-6} \text{ K m}^2 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-1}$. (Hans Ertel, 1904-1971, német meteorológus, aki 1942-ben publikálta a potenciális örvényesség meghatározásáról szóló cikkét. A témakörrel Carl-Gustav Rossby, Ertel barátja is foglalkozott.)

Nagyskálájú folyamatok során az izentróp potenciális örvényesség általában megmaradó mennyiség és így a légkör folyamatai megfelelő egyensúlyi feltételek (balance equations) és peremfeltételek mellett egyetlen skalár egyenlettel írhatók le, amelyből a többi mezőváltozó visszanyerhető. A potenciális örvényesség egyebek mellett jó segédeszköz a ciklonok keletkezésének és fejlődésének megértéséhez, illetve az óceáni áramlatok vizsgálatához. A tapasztalat szerint például a sztratoszférikus nagy potenciális örvényességű levegő betüremkedése a troposzférába ciklogenezisre, a troposzférikus levegő behatolása a sztratoszférába, anticiklon keletkezésére utal (Tasnádi, 2012).

IV.2.1. Adjuk meg a $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{dv}{dt}\right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{du}{dt}\right)$ derivált értékét! Milyen kapcsolatban van ez a mennyiség az örvényesség teljes időbeli megváltozásával $\left(\frac{d\zeta}{dt}\right)$?

IV.2.2. Vezessük le az örvényességi egyenletet nyomási rendszerben! Miért nincs szolenoidális tag az egyenletben? A nyomási rendszer analógiájára adjuk meg az örvényességi egyenlet általános alakját potenciális hőmérsékleti rendszerben is!

IV.2.3. A Descartes-rendszerben vektoriális alakban a felírt mozgásegyenletből,

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nabla \Phi + \frac{\mathbf{F}_z}{\rho}$$

kiindulva, a nabla-operátor tulajdonságainak felhasználásával vezessük le a rotáció teljes időbeli változására

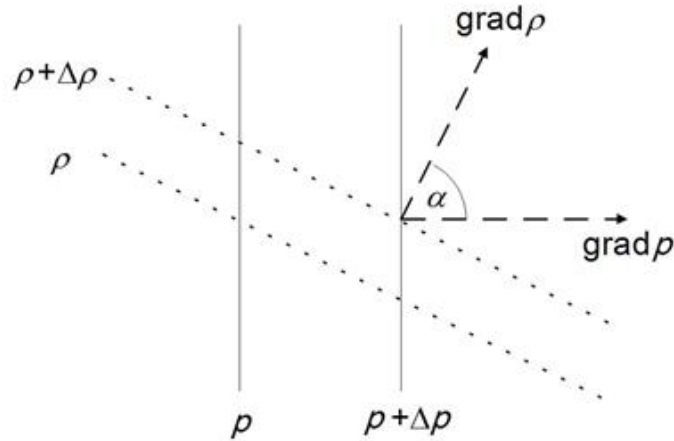
$$\left(\frac{d(\nabla \times \mathbf{V})}{dt} = \frac{d \text{rot} \mathbf{V}}{dt}\right) \text{ vonatkozó egyenletet!}$$

IV.2.4. Írjuk fel az előző (IV.2.3 feladat) mintájára a divergencia teljes időbeli változására $\left(\frac{d \nabla \cdot \mathbf{V}}{dt} = \frac{d \text{div} \mathbf{V}}{dt}\right)$ vonatkozó egyenletet!

IV.2.5. Adjuk meg nagyskálájú folyamatok esetén a divergencia-egyenletből levezethető balansz-egyenletet,

amikor is elhanyagoljuk a $\frac{\partial D}{\partial t}$ -vel megegyező (10^{-11} s^{-2}) nagyságrendű tagokat! Írjuk fel a diagnosztikai egyenlet alakját akkor is, ha a 10^{-10} s^{-2} nagyságrendű tagokat is elhagyjuk! Ez milyen közelítés?

IV.2.6. A nyomási gradiens és a sűrűségi gradiens egymással 60° -os szöget zár be a IV.2.1. ábra szerint.



IV.2.1. ábra. A horizontális nyomási és sűrűségi gradiens egymáshoz viszonyított helyzete.

Adjuk meg a divergencia és az örvényesség generálódásának az arányát! Melyik a nagyobb?

IV.2.7. Hogyan hat a nyírási csavarási tag az örvényességi és a divergencia egyenletben? Milyen helyzetű a vertikális sebesség horizontális gradiense és a horizontális sebesség vertikális változását (szélnyírást) leíró vektor egymáshoz képest, ha a) a divergencia, b) az örvényesség generálódása maximális, c) az örvényesség és a divergencia generálódása megegyezik?

IV.2.8. A divergencia pozitív, az örvényesség negatív értékű. Mit mondhatunk az örvényesség és a divergencia generálódásáról?

IV.2.9. Hogy működik a β -hatást leíró tag? Jellemezzük az örvényesség és a divergencia változását nyugatias és északias áramlás esetén!

IV.2.10. A súrlódási erő nyugatias irányú és észak felé haladva csökken a nagysága. Mit mondhatunk az örvényesség és a divergencia keletkezéséről?

IV.2.11. Írjuk fel az örvényességi egyenletet az (x, z) síkban! Az egyszerűség kedvéért hanyagoljuk el a súrlódási erőt és a Coriolis-erő vertikális komponensét! Adjuk meg az egyenlet kvázi-geosztrófikus közelítését is!

IV.2.12. Vezessük le a potenciális örvényesség időbeli változását leíró általános egyenletet! A 3 kiindulási egyenlet: i) a rotáció időbeli változása (lásd a **IV.2.3. feladat**ot), ii) a kontinuitási egyenlet és iii) a λ skalár megmaradását

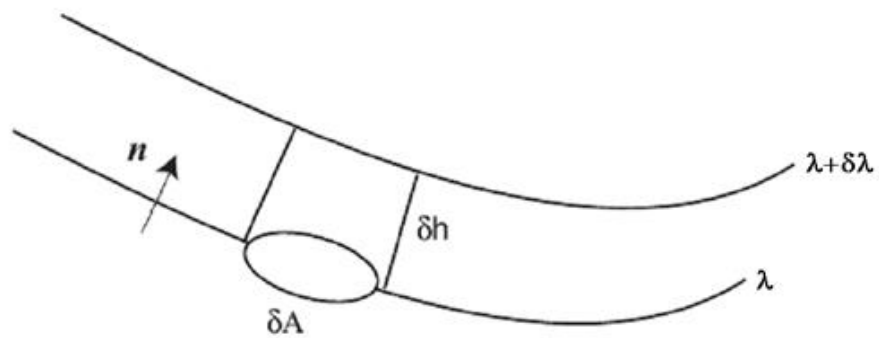
$\frac{d\lambda}{dt} = \Psi$ összefüggés, ahol Ψ a vizsgált λ mennyiségre vonatkozó forrás- és nyelő tagok összege. E három egyenletből kombináljunk össze egy skalárinvariánst!

IV.2.13. Milyen egyszerűsítések után kapjuk a potenciális örvényesség $\left(PV = \frac{\text{rot } V_a}{\rho} \cdot \nabla \lambda \right)$ időbeli megváltozását leíró egyenlet általános alakjából (lásd a **IV.2.12. feladat** megoldását is)

$$\frac{dPV}{dt} = \frac{\text{rot } V_a}{\rho} \cdot \nabla \Psi + \nabla \lambda \cdot \left(\frac{\nabla \rho \times \nabla p}{\rho^3} \right) + \frac{\nabla \lambda}{\rho} \cdot \left(\nabla \times \frac{\mathbf{F}}{\rho} \right)$$

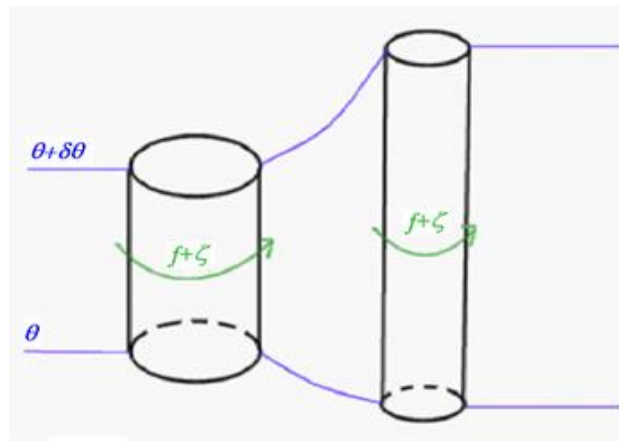
a potenciális örvényesség, mint konzervatív tulajdonság megmaradási tételét $\left(\frac{dPV}{dt} = 0 \right)$?

IV.2.14. Hogyan értelmezzük a **IV.2.2. ábrát** a potenciális örvényesség megmaradása alapján?



IV.2.2. ábra. Egy légtest mozgása két koordináta-felület között.

IV.2.15. Milyen kapcsolat van a statikus stabilitás és az abszolút örvényesség között, ha a légtest száraz adiabatikusan (két izentróp felület között) mozog (IV.2.3. ábra)?

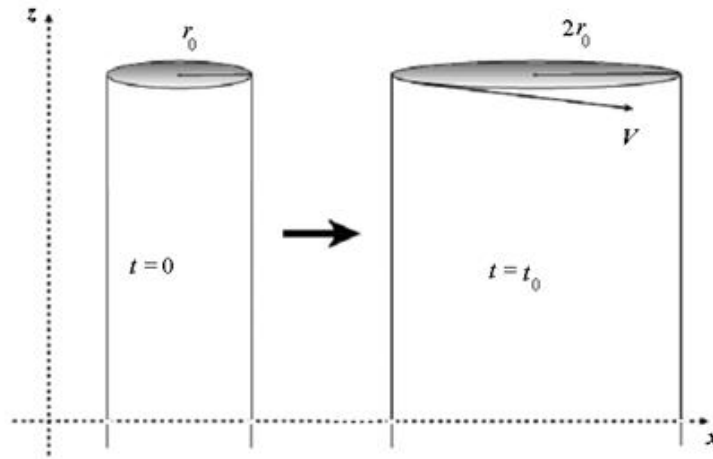


IV.2.3. ábra. Száraz adiabatikusan elmozduló légtest két izentróp felület között.

IV.2.16. Adiabatikus sekély víz közegben forgó örvénytestre vonatkozóan a potenciális örvényesség megmaradási tétele:

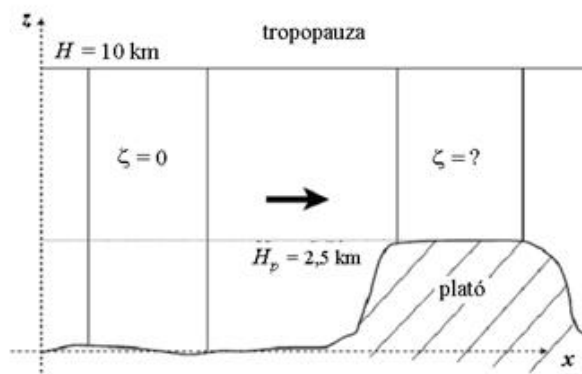
$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\zeta + f}{h - h_0} \right) = 0,$$

ahol h és h_0 a folyadék teteje és alja egy adott referencia szinttől számolva.



IV.2.4. ábra. A kezdetben nyugalomban levő örvénytést a 30° szélességi körön. Az elmozdulás során sugara kétszeresére nő.

- a) A 30° szélességi körön levő 100 km-es sugarú δh_0 vastagságú örvénytést sugara kétszeresére nő. Hogy változik a légtest sebessége, ha kezdetben nem végzett forgó mozgást? Mi a helyzet a déli féltekén?
- b) A felszín és a 10 km-es tropopauza közötti légtest az északi félteke 60° -os szélességi körén mozog. Kezdetben nincs relatív örvényessége ($\zeta = 0$). A zonálisan mozgó légtest egy 2,5 km-es platón kel át (IV.2.5. ábra). Hogy változik a relatív örvényessége?



IV.2.5. ábra. Egy plató felé mozgó légtest a 60° szélességi körön.

- c) A kezdetben a 60° szélességi körön levő légtest dél felé mozog, s a 45° szélességig jut el. Az egyszerűség kedvéért ne változzék a vastagsága. Mit mondhatunk a relatív örvényességéről? Tekintsünk el a sűrűség változásától!

IV.2.17.

- a) A Kárpát-medence térségébe kelet felől hideg levegőtömeg hatol be. A hegykoszorún áthaladva milyen irányba térül el? Ciklonális vagy anticiklonális görbületre számíthatunk?
- b) A déli féltekén az Andokon átkelő nyugatias áramlással mozgó ciklonális örvény milyen irányban térül ki? Ciklonális, vagy anticiklonális fejlődést tapasztalunk?

V. fejezet - A légkördinamikai egyenletek felállítása, vizsgálata és megoldása

Weidinger Tamás
Bordás Árpád
Gyuró György
Tasnádi Péter

V.1. Kétdimenziós folyadékáramlás

A kétdimenziós folyadékáramlás leírására a sűrűséget, $\rho(x, y, t)$ és az áramlási mezőt, $\mathbf{v} = (v_x, v_y) = (u, v)$ használjuk. Az alap-összefüggések a Navier–Stokes-egyenlet:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \text{grad})\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p - 2\Omega \times \mathbf{v} + \nu \nabla^2 \mathbf{v} + \nu \text{grad div } \mathbf{v}$$

és a kontinuitási egyenlet:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{v}) = 0,$$

ahol p a nyomás, ν kinematikai viszkozitási tényező, ami a viszkozitási tényező (μ) sűrűséggel normált alakja $\nu = \mu / \rho$.

Gyakran alkalmazható közelítés, hogy az áramló közeg homogén és összenyomhatatlan (inkompresszibilis), továbbá többnyire elegendő a stacionárius (időben állandó) áramlási kép vizsgálata. Ekkor a mozgásegyenletek lényegesen egyszerűsödnek, hiszen nem szerepelnek lokális időbeli deriváltak, s a sűrűség térben és időben állandó. Megjegyezzük, hogy inhomogén, összenyomhatatlan közegben (pl. két különböző sűrűségű folyadék) a sűrűség térben és időben is változik, de az egyes folyadékelemek összenyomhatatlanok. Ilyen feltételek mellett a kontinuitási egyenlet a

$$\text{div } \mathbf{v} = 0, \text{ illetve } \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0,$$

míg a Navier–Stokes-egyenlet a:

$$(\mathbf{v} \cdot \text{grad})\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p - 2\Omega \times \mathbf{v} + \nu \nabla^2 \mathbf{v}$$

alakra egyszerűsödik.

Lokális áramlási folyamatok leírásában a Coriolis-erőt is elhanyagolhatjuk. Ekkor a mozgásegyenlet tovább egyszerűsödik:

$$(\mathbf{v} \cdot \text{grad})\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p + \nu \nabla^2 \mathbf{v},$$

ami komponensenként felírva:

$$\left(v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} \right) v_x = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) v_x,$$

$$\left(v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} \right) v_y = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) v_y.$$

Divergenciamentes áramlás esetén a sebességmező megadható a $\Psi(x, y)$ kétdimenziós áramfüggvénnyel, ami automatikusan teljesíti a divergenciamentesesség feltételét:

$$v_x = \frac{\partial \Psi(x, y)}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{\partial \Psi(x, y)}{\partial x}.$$

A sebességvektor mindenütt érinti az áramvonalakat, hiszen $\mathbf{v} \cdot \text{grad} \Psi = 0$. Az áramlási mező meghatározó jellemzője

az örvényesség:

$$\zeta = \frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x}.$$

Az összenyomhatatlan közegre felírt kétdimenziós kontinuitási egyenlet és a Coriolis-erő elhanyagolásával megadott mozgásegyenlet (lásd fentebb) azonos átalakítása után az áramfüggvény, az örvényesség és a nyomás Laplace-operátorára a következő egyenleteket kapjuk:

$$\nabla^2 \Psi = \zeta, \quad \nabla^2 \zeta = \frac{1}{\nu} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial \Psi}{\partial y} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right), \quad \nabla^2 p = 2\rho \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} \right)^2 \right).$$

A kezdeti és peremfeltételek ismeretében ezek megoldásával megadható az áramlási tér szerkezete. A nyomás

Laplace-operátorára kapott egyenlet jobb oldala nem más, mint a $\Im \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}, \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right)$ Jacobi-mátrix determinánsa.

A légköri folyamatok matematikai tárgyalása során gyakran szükséges különböző skalárszorzatok illetve normák bevezetése. Gondoljunk csak az energetikai vizsgálatokra, a kinetikus energia kiszámítására. A skalárszorzat típusa elsősorban a megoldandó feladattól függ és gyakran szükségünk van a skalárszorzatok egymásba történő transzformációjára is. Ezt könnyíti meg a következő matematikai tétel.

Legyen $\langle \cdot, \cdot \rangle$ és $(\cdot, \cdot)$ két skalárszorzat a V vektortérben. Ekkor létezik egy

$$\mathbf{M}: V \rightarrow V,$$

leképezés, ahol $\mathbf{M}$ lineáris operátor és teljesül, hogy

a) $(x, y) = \langle x, \mathbf{M}y \rangle$ minden $x, y \in V$, továbbá

b.) létezik az $\mathbf{M}^{-1}$ inverz operátor.

Az áramlási mező leírásánál gyakran alkalmazott mennyiség az ensztrófia (Z), ami nem más mint az örvényesség négyzetének integrálja. Integrál előállítás miatt invariáns mennyiség.

$$Z = \frac{1}{2} \iint_{\bar{F}} \zeta^2 dx' dy',$$

ahol $\mathbf{F}$ az (x, y) síkban vizsgált nyílt felület. Az ensztrófia a kinetikus energia disszipációjával kapcsolatos, így a súrlódási erő (a turbulens diffúzió) erősségére utal.

V.1.1. A legegyszerűbb, már meteorológiai jelentéssel bíró egyenlet a

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p \equiv -\frac{1}{\rho} \nabla p, \quad \mathbf{v} = (v_x, v_y) = (u, v)$$

kétdimenziós, folyadékra vonatkozó mozgásegyenlet. Írjuk fel a fenti egyenletet a) Descartes-féle és b) gömbi koordináta-rendszerben a horizontális síkban!

V.1.2. Mutassuk meg, hogy a sebességi mező tetszőleges Γ zárt görbére vonatkozó cirkulációja állandó, ha eltekintünk a sűrűség horizontális változásától, és feltételezzük, hogy a sebességi mezőt leíró $\mathbf{v} = (x, y, t)$ függvény sima abban az értelemben, hogy a rá vonatkozó térbeli és időbeli parciális deriváltak felcserélhetők!

V.1.3. A dinamikus meteorológiában használatos konvencionális jelöléseknek megfelelően az örvényesség definíciója:

$$\zeta = \mathbf{k} \cdot (\nabla \times \mathbf{v})$$

Írjuk fel a ζ lokális időbeli megváltozására vonatkozó egyenletet!

V.1.4. Az **V.1.2. feladat** részletszámításai során megmutattuk, hogy

$$\frac{d\zeta}{dt} = 0$$

Ezt az eredményt a lokális időbeli megváltozásra alkalmazva:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\mathbf{v} \cdot \nabla \zeta,$$

ami nyilván nem azonos az előző feladatban előállított

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\nabla(\zeta \cdot \mathbf{v})$$

eredménnyel. Ez azt jelenti, hogy a két feladat megoldása látszólag ellentmondásban áll egymással. Mi a látszólagos ellentmondás oka?

V.1.5. Tegyük fel, hogy a vizsgált áramlásra teljesül a hidrosztatikai egyenlet, azaz

$$\mathbf{g} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}$$

Ekkor a függőleges koordináta szerepét a P nyomás is betöltheti, s a kétdimenziós feltételezés azt jelenti, hogy a folyamatok adott nyomási szinten zajlanak. Mutassuk meg az **V.1.3. feladat** eredményeit felhasználva, hogy ebben az esetben a kétdimenziós mozgásegyenlet a

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\zeta \mathbf{k} \times \mathbf{v} - \nabla \left(\Phi + \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{2} \right)$$

alakban is felírható!

V.1.6. Hogyan módosul az **V.1.3. feladat**ban felírt mozgásegyenlet és az **V.1.5. feladat** megoldásaként kapott mozgásegyenlet, ha a Coriolis-erő hatását is figyelembe vesszük?

V.1.7. Hogyan módosul az **V.1.4. feladat** megoldása, ha figyelembe vesszük a Coriolis-erőt?

V.1.8. Mutassuk meg, hogy az **V.1.6. feladat**ban szereplő mozgásegyenlet felhasználásával a D kétdimenziós divergencia időderiváltjára

$$\frac{\partial D}{\partial t} = \mathbf{k} \cdot \nabla \times [\mathbf{v}(\zeta + f)] - \nabla^2 \left(\Phi + \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{2} \right)$$

adódik!

V.1.9. Értelmezzük a **V.1.7. feladat** eredményét az abszolút örvényesség megmaradása szempontjából!

V.1.10. Mutassuk meg, hogy az összenyomhatatlan folyadék kétdimenziós áramlására az örvényességi egyenlet a

$$\frac{d\zeta}{dt} = -\mathfrak{A}[(\zeta + f), \Psi]$$

alakban írható fel, ahol $\mathbf{v} = \mathbf{k} \times \nabla \Psi$ és $\Psi(x, y, t)$ a kétdimenziós áramfüggvény, továbbá $\mathfrak{A}[(\zeta + f), \Psi]$ a két horizontális koordinátával felírt Jacobi-determináns!

V.1.11. Írjuk fel a horizontális koordináták részletes kiírásával a sebességvektort az áramfüggvény segítségével a következő koordináták alkalmazásával: a) Descartes-féle koordináta-rendszer, b) szférikus koordináta-rendszer.

V.1.12. Mutassuk meg, hogy geosztrofikus egyensúly esetén az áramfüggvény és az adott nyomási szint geopotenciálja között fennáll a következő összefüggés:

$$\Psi(x, y) = \frac{1}{f} \Phi(x, y) + \text{állandó}$$

V.1.13. Mutassuk meg, hogy a kétdimenziós divergenciamentes áramlás kinetikus energiája, ha a sűrűséget a koordinátákhoz igazított mértékrendszerben egységnyinek választjuk:

$$E = \frac{1}{2} \iint_F (\nabla \Psi)^2 dx' dy'$$

ahol x' és y' a tetszőleges horizontális koordinátákat jelöli, míg F a vizsgált felület nagyságát!

V.1.14. Mutassuk meg, hogy a kétdimenziós rotációmentes áramlás kinetikus energiája, ha a sűrűséget a koordinátákhoz igazított mértékrendszerben egységnyinek választjuk:

$$E = \frac{1}{2} \iint_F (\nabla \chi)^2 dx' dy'$$

ahol χ a $\mathbf{v}_x = \nabla \chi$ összefüggéssel értelmezett sebességpotenciál (A sebességpotenciál használatával automatikusan teljesül az áramlás rotációmentessége) !

V.1.15. Mutassuk meg, hogy a kétdimenziós áramlás kinetikus energiája:

$$E = \frac{1}{2} \iint_F [(\nabla \Psi)^2 + (\nabla \chi)^2] dx' dy' !$$

V.1.16. Mutassuk meg, hogy ha a

$$\iint_F \mathfrak{S}(\zeta, \Psi) dx' dy' = 0$$

feltétel teljesül, akkor az összenyomhatatlan kétdimenziós áramlási mező örvényessége állandó!

V.1.17. Mutassuk meg, hogy ha a

$$\iint_F \zeta \cdot \mathfrak{S}(\zeta, \Psi) dx' dy' = 0$$

feltétel teljesül, akkor az összenyomhatatlan kétdimenziós áramlási mező ensztrófiája állandó!

V.1.18. Mutassuk meg, hogy ha az

$$\iint_F \Psi \cdot \mathfrak{S}(\zeta, \Psi) dx' dy' = 0$$

feltétel teljesül, és a peremfeltételek konzervatívak (periodikusak), akkor az összenyomhatatlan kétdimenziós áramlási mező kinetikus energiája állandó!

V.1.19. A Jacobi-determináns véges differencia közelítésének általános alakja:

$$\mathfrak{S}_{i,j}(\zeta, \Psi) = \sum_{k,l} \sum_{m,n} C_{i,j,k,l,m,n} \zeta_{i+k,j+l} \Psi_{i+m,j+n},$$

ahol az alsó indexek az x' és y' irányban adott rácpontok sorszámát jelölik. Hogyan kell megválasztani a $C_{i,j,k,l,m,n}$ együtthatókat, hogy a közelítés biztosítsa az ensztrófia megmaradását? Megjegyezzük, hogy az áttekinthetőség miatt az indexek közé vesszőt írtunk.

V.1.20. Hogyan kell meghatározni az előző **V.1.19. feladatban** szereplő együtthatókat ahhoz, hogy a közelítés biztosítsa az energia megmaradását?

V.1.21. Mutassuk meg, hogy az Arakawa-féle kilenc pontú séma mind az energia, mind az ensztrófia megmaradását biztosítja!

V.1.22. Írjuk fel a kétdimenziós folyadékáramlásra vonatkozó lokális mozgásegyenletet, az áramlási mező jellemzőit a meteorológiai gyakorlatnak megfelelően átlagos értékekre és kicsiny perturbációkra bontva!! (Vegyük figyelembe, hogy a sűrűségperturbáció elhanyagolható!)

V.1.23. Mutassuk meg, hogy inkompresszibilis esetben a $\zeta' = \mathbf{k} \cdot (\nabla \times \mathbf{v}')$ mennyiség időbeli változását leíró egyenlet azonos az **V.1.3. feladat** megoldásaként kapott örvényességi egyenlet linearizált alakjával! (A vessző a fluktuáció jelölésére szolgál.)

V.1.24. Mutassuk meg, hogy kvázisztatikus közelítést alkalmazva a $D' = \nabla \cdot \mathbf{v}'$ (a horizontális divergencia fluktuációja) időbeli változását leíró egyenlet azonos az **V.1.8. feladat** megoldásaként kapott divergencia-egyenlet linearizált alakjával!

V.1.25. Tegyük fel, hogy egy divergencia mentes kétdimenziós áramlás vizsgálata egy norma bevezetését teszi szükségessé. Az úgynevezett ensztrófia normát a

$$\|\zeta\|_E^2 = (\zeta, \zeta) = \iint_F \zeta^2 dx' dy'$$

kifejezéssel definiáljuk. Határozzuk meg azt az **M** lineáris operátort, amely a fenti normát a

$$\|\zeta\|_K^2 = \langle \zeta, \zeta \rangle = \iint_F (\nabla \Psi)^2 dx' dy'$$

örvényes kinetikus energiává transzformálja. A feladat megoldásához tanulmányozzuk a feladatgyűjtemény **II.2. fejezetében** összefoglalt elméleti ismereteket is.

V.1.26. Tegyük fel, hogy az áramlás rotációmentes. Határozzuk meg azt az **M** lineáris operátort, amely a

$$\|D\|_E^2 = (\chi, \chi) = \iint_F \chi^2 dx' dy'$$

euklideszi normát a

$$\|D\|_K^2 = \langle \chi, \chi \rangle = \iint_F (\nabla \chi)^2 dx' dy'$$

divergens kinetikus energia normává transzformálja.

V.1.27. Vizsgáljunk egy kétdimenziós áramlást! Határozzuk meg azt az **M** lineáris operátort, amely az euklideszi normát az

$$\|\mathbf{x}\|_K^2 = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle_K = \iint_F [(\nabla \Psi)^2 + (\nabla \chi)^2] dx' dy'$$

kinetikus energianormává transzformálja, ha $\mathbf{x} = (\Psi, \chi)!$

V.1.28. Ha feltesszük, hogy a kétdimenziós egységnyi sűrűségű közeg áramlása összenyomhatatlan, de figyelembe vesszük a súrlódás hatását, akkor a kétdimenziós Navier–Stokes-egyenlet inkompresszibilis alakjához jutunk:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} - \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{v}, \quad (\nabla \cdot \mathbf{v} = 0).$$

Ha a fenti parciális differenciálegyenletet a

$$\mathbf{v}(\mathbf{x} + 2\pi \mathbf{e}_j, t) = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t), \quad j = 1, 2$$

mindkét irányban ciklikus peremfeltétel mellett oldjuk meg (ahol $\mathbf{e}_j$ a j -edik irányba mutató egységvektor, $\mathbf{x}$ a helyvektor – távolság), akkor a legcélszerűbb az ún. Galerkin-féle spektrális technikát alkalmazni. Más szóval a megoldást a következő helyettesítéssel állíthatjuk elő:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{u}_{\mathbf{k}}(t) \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})],$$

$$p(\mathbf{x}, t) = \sum_{\mathbf{k}} p_{\mathbf{k}}(t) \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})],$$

ahol $|k|$ a hullámszám, i az imaginárius egység. Mutassuk meg, hogy ilyen feltételek mellett a spektrális együtthatókra vonatkozó egyenlet a következő:

$$\left(\frac{d}{dt} + \nu |k|^2\right) v_k = f_k - k \frac{(k \cdot f_k)}{|k|^2},$$

ahol

$$f_{ik} = -\sum_{j=1}^2 i e_j \sum_{m+n=k} u_{j,m} u_{i,n}.$$

V.1.29. Az előző **V.1.28. feladat** megoldása alapján írjuk fel az energia spektrális eloszlásának a változását megadó egyenletet!

V.1.30. Amint a Navier–Stokes-egyenlet spektrális reprezentációjából látható, a két nemlineáris tag a nyomási gradiens erőből és az advekciónak tagból származik. Mi az energetikai szerepe ennek a két tagnak? A rövid – egy mondatos – válaszadáshoz használjuk fel az előző **V.1.30. feladat** megoldását!

V.1.31. Mi a súrlódási erő (általában nem a molekuláris viszkozitás) szerepe az energia spektrális viselkedésében?

V.1.32. Az előző, **V.1.31. feladat** megoldása alapján látható, hogy a $|k|=0$ hullámszámmal jellemezhető mozgásformák esetén nem hat a súrlódás. Mi a jelentése az u_0 Fourier-együtthatónak? Mit jelent az előző **V.1.31. feladat** megoldása ebben az esetben?

V.1.33. A Navier–Stokes-egyenletben a súrlódást leíró tag (ti. a molekuláris viszkozitás) alakja: $\nu \nabla^2 \mathbf{v}$. A numerikus prognosztikában a különböző frekvenciájú zavarok kontrolálására különböző disszipatív tagokat vezetnek be. Ezek általános alakja:

$$F_z = \nu (-1)^{n+1} \nabla^{2n} \mathbf{v}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Mi lehet az oka a súrlódás ilyen speciális alakú megválasztásának?

V.2. A sekély víz típusú áramlások

A „sekély víz” áramlást leíró egyenletek vékony rétegű, állandó sűrűségű (összenyomhatatlan) és hidrosztatikai egyensúlyban lévő közeg áramlását írják le. A sekélység (vékony réteg) azt jelenti, hogy az áramló közeg horizontális mérete sokkal nagyobb mint a vertikális. A mozgás egyértelműen leírható a mozgásegyenletekkel és a kontinuitási egyenlettel. Termodinamikai egyenletre nincsen szükség. Az egyenletekben a következő jelöléseket használjuk.

A közeg állandó sűrűsége ρ . A réteg alsó határát az egyszerűség kedvéért síknak tekintjük, amelynek egyenlete $z=0$, a felső szabad felszín magassága a $h(x, y, t)$ függvény szerint változik. A felső határon a nyomás állandó $p=p_0$.

A „sekély” összenyomhatatlan közegben a sztatika alapegyenlete:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g.$$

Az alapegyenletet a z és a h szint között integrálva azt kapjuk, hogy:

$$p_0 - p(x, y, z) = -\rho g (h(x, y) - z),$$

vagyis

$$p(x, y, z) = \rho g (h(x, y) - z) + p_0.$$

Ebből azonnal következik, hogy a nyomás horizontális gradiense független a magasságtól:

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial p}{\partial s} \right) = -\frac{\partial(\rho g)}{\partial s} = 0, \quad (s = x, y).$$

és

$$\nabla_h p = \rho g \nabla_h h, \text{ ahol } \nabla_h = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y}.$$

Ennek megfelelően a horizontális mozgásegyenlet:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -g \nabla_h h - f\mathbf{k} \times \mathbf{v}.$$

A kontinuitási egyenlet pedig a

$$\frac{dh}{dt} + h \nabla_h \cdot \mathbf{v} = 0$$

alakot ölti. Természetesen érvényben marad az összenyomhatatlanságot három dimenzióban kifejező

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0$$

egyenlet is.

Az összenyomhatatlan (ti. barotróp) közegben a geosztrófikus szél (u_g, v_g) nem változik a magassággal, vagyis:

$$\frac{\partial u_g}{\partial z} = \frac{\partial v_g}{\partial z} = 0.$$

Kvázigeosztrófikus áramlás esetén a szélesebségekre (a szél a geosztrófikushoz közeli) fennáll, hogy:

$$\frac{\partial u}{\partial z} \approx \frac{\partial v}{\partial z} \approx 0.$$

A mozgásegyenletek a geopotenciál segítségével p -rendszerben a

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} + f v,$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial \Phi}{\partial y} - f u,$$

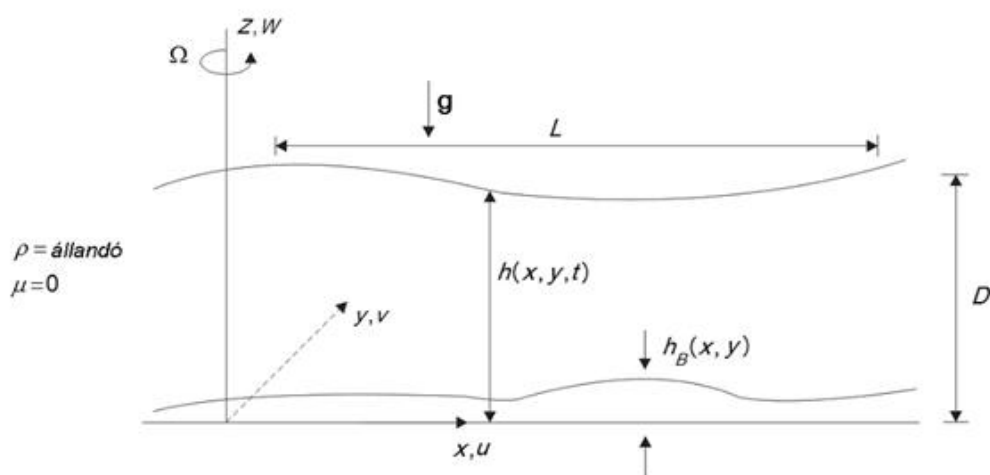
alakban írhatók fel, ahol $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$ és $\frac{\partial \Phi}{\partial y}$ deriváltak függetlenek a z magasságtól.

A kontinuitási egyenlet $z=0$ és h közötti integrálásával a „sekély víz” felső határára vonatkozó vertikális szélességre (w) kapunk diagnosztikai egyenletet. Természetesen a folyadék alján a vertikális szélesség nulla $(w(z=0)=0)$.

$$w_{z=h} = -h \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)$$

Összevetve ezt a vertikális sebességnek a felső határon a $h \equiv h(x, y, t)$ függvény segítségével felírt értékével:

$$w_{z=h} = \frac{dh}{dt} = \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y}$$



V.2.1. ábra. A „sekély víz” modell általános alakja. $h(x, y, t)$ a folyadékoszlop magassága, $h_b(x, y)$ a felszín egyenlete, (u, v, w) az x , y és z irányú sebesség, g nehézségi gyorsulás, D és L a karakterisztikus horizontális és vertikális méret ($D \ll L$). A molekuláris viszkozitás hatását elhanyagoljuk ($\mu=0$)

A geopotenciálnak ($\Phi = gh$) a közeg felső határán vett megváltozására a

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + u \frac{\partial \Phi}{\partial x} + v \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \Phi \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0$$

egyenletet kapjuk, ami a következő formára hozható:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\partial u \Phi}{\partial x} + \frac{\partial v \Phi}{\partial y} = 0$$

V.2.1. Egy légköri réteget, mind alul, mind felül áthatolhatatlan határfelület választ el környezetétől. Tegyük fel, hogy a vizsgált réteg a következő értelemben homogén:

$$\rho = \text{állandó}, \quad \mathbf{v}(x, y, z, t) = \mathbf{v}(x, y, t)$$

A két határfelület távolságát jellemezzük a $h(x, y, t)$ függvénnyel! Az így előállított légköri modell a „sekély víz” típusú áramlások leírására szolgál. Az ezt leíró mozgásegyenletet az **V.1.6. feladat**ban vezettük le:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -(\zeta + f)\mathbf{k} \times \mathbf{v} - \nabla \left(\Phi + \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{2} \right),$$

a $h(x, y, t)$ paraméter időbeli fejlődését pedig a

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\nabla \cdot (h\mathbf{v})$$

kontinuitási egyenlet adja meg. Igazoljuk ez utóbbi egyenlet helyességét!

V.2.2. A geopotenciált bontsuk fel a következő módon:

$$\Phi(x, y, t) = \bar{\Phi} + \Phi'(x, y, t),$$

ahol $\bar{\Phi}$ a geopotenciál idő-független térbeli átlaga! Mutassuk meg, hogy $g = \text{állandó}$ feltétel mellett a kontinuitási egyenlet a

$$\frac{\partial \Phi'}{\partial t} = -\nabla \cdot (\Phi' \mathbf{v}) - \bar{\Phi} D$$

alakot ölti, ahol D a horizontális divergencia ($D = \nabla_h \cdot \mathbf{v}$)!

V.2.3. Írjuk fel azt a „sekély víz” típusú egyenletrendszer, amelyben a mozgásegyenletet a divergencia és az örvényességi egyenlet helyettesíti, míg a kontinuitási egyenlet szerepét az előző **V.2.2. feladat** megoldása tölti be!

V.2.4. Milyen kifejezés definiálja az egységnyi alapú légoszlop kinetikus energiáját?

V.2.5. Írjuk fel az egységnyi alapú légoszlop kinetikus energiaváltozását leíró egyenletet!

V.2.6. Milyen kifejezés definiálja az egységnyi alapú légoszlop potenciális energiáját?

V.2.7. Írjuk fel az egységnyi alapú légoszlop potenciális energiaváltozását leíró egyenletet!

V.2.8. Mutassuk meg, hogy az egységnyi alapú légoszlop teljes energiájának megváltozása:

$$\frac{\partial (K + \Phi_p)}{\partial t} = -\nabla \cdot \left(\frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 \mathbf{v} h \right) - \nabla \cdot (\Phi \mathbf{v} h)$$

V.2.9. Mutassuk meg, hogy konzervatív peremfeltételek mellett a „sekély víz” folyadék energiája állandó!

V.2.10. Mutassuk meg, hogy a „sekély víz”, típusú áramlások esetén az örvényességi egyenlet:

$$\frac{\partial (h q)}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{v} h q) = 0,$$

ahol

$$q = \frac{f + \zeta}{h}$$

az abszolút potenciális örvényesség (általában egyszerűen potenciális örvényesség).

V.2.11. Döntsük el, hogy a „sekély víz”, típusú áramlások esetén konzervatív peremfeltételek mellett invariáns mennyiség-e az $(f + \zeta)$ abszolút örvényesség!

V.2.12. Mutassuk meg, hogy a potenciális örvényesség időbeli megváltozását a

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla q = 0$$

egyenlet írja le!

V.2.13. Értelmezzük az előző feladat megoldását!

V.2.14. Mutassuk meg, hogy az **V.2.1. feladat**ban definiált „sekély víz” típusú áramlás esetén az F felületre vonatkozó

$$Q = \frac{1}{2} \iint_F h q^2 dA$$

kifejezéssel definiált teljes potenciális enstrofia integrál invariáns mennyiség, vagyis a koordináta-rendszer választásától függetlenül, integrál alakban is megadható!

V.3. Előrejelzési légkörmodellek

Időjárási előrejelzés készítésére a tragikus sorsú Robert FitzRoy admirális, a brit meteorológiai szolgálat (mai nevén UK MetOffice) alapítója vállalkozott először 1854-ben, empirikus módszerekkel. A modellezés gondolatát a geofizikai folyadékdinamika, azazaz elméleti meteorológia atyja, a norvég Vilhelm Bjerknes fogalmazta meg 1904-ben:

„A légköri folyamatok egyszerre mechanikai és fizikai természetűek. A mechanika és a fizika alapelvei segítségével minden egyes folyamat leírható egy vagy több matematikai egyenlet felhasználásával ... A légkör állapota akkor nevezhető ismertnek egy tetszőleges időpontban, ha ebben az időpontban minden pontra ki tudjuk számolni a sebesség, a sűrűség, a nyomás, a hőmérséklet és a nedvesség értékét. A sebességvektort három skaláris mennyiség, a három sebességkomponens segítségével adjuk meg, ezért a számítások során 7 ismeretlen mennyiség értékét kell meghatározni ... A felsorolt mennyiségek kiszámításához a következő egyenleteket írhatjuk fel:

1. *A három hidrodinamikai mozgásegyenlet.*
2. *A kontinuitási egyenlet, ami a tömegmegmaradás elvét fejezi ki a mozgás során.*
3. *A légkör állapotegyenlete, ami egy tetszőleges légtömeg sűrűsége, nyomása, hőmérséklete és nedvessége közötti kapcsolatot leíró egyenlet.*
4. *A mechanikus hőelmélet két főtétele, amelyek segítségével megadhatjuk, hogyan változik egy tetszőleges légtömeg energiája és entrópiája az esetleges állapotváltozások során.”*

Bjerknes professzor megállapításai mind a mai napig érvényesek, valamennyi időjárási előrejelző modell a Bjerknes-féle alapelveken nyugszik. A Lipcsei Egyetem Meteorológiai Tanszékének alapítójaként 1913-ban elmondott székfoglaló beszédének szavait ma is sokszor emlegetjük:

„Feladatunk a jövő időjárás kiszámítása ... A számítások elvégzéséhez rengeteg időre van szükség. Tudósok megfelelő körülmények között nagyjából három hónap alatt számolják ki az időjárás háromórnyi változását ... Határtalanul boldog lennék, ha munkánk nyomán sikerülne megadni a másnapi időjárás kiszámításának módszerét ... Ezzel válhatna a meteorológia egzakt tudománnyá, és válhatna a légkör fizikájává ... Évekbe telhet, amíg alagutat fúrunk a hegyen át. Egyes munkatársaink nem fogják megérni az áttörés napját. Ez viszont senkit nem gátol munkájában, mert az alagúton majd gyorsvonati sebességgel utazhatunk.”

Bjerknes 1904-es gondolatainak gyakorlati megvalósítására Lewis Richardson brit meteorológus vállalkozott először 1910 és 1914 között. Addigi munkássága predesztinálta a feladatra, mivel olyan differenciálegyenletek megoldására dolgozott ki véges különbséges sémákat, amelyeknek bizonyíthatóan létezik egyértelmű megoldása (matematikai szakkifejezéssel élve bizonyították az egzisztencia- és unicitás-tételek), de a megoldás nem írható fel zárt alakban az elemi függvények segítségével. Hivatali munkája mellett Richardson évekig számolta a Bjerknes által leírt hét egyenlet megoldását, de számításai sem matematikai, sem fizikai szempontból nem vezettek sikerre. Sir William Napier Shaw, a UK MetOffice akkori igazgatójának ösztönzésére 1922-ben könyv formájában számolt be munkájáról (Richardson, 1922). Gyakran idézzük Richardson következő gondolatát:

„Egyszer, talán, a távoli kódos jövőben képesek leszünk gyorsabban számolni, mint amilyen gyorsan az időjárás változik, és az emberiség által befektetett költségeknél magasabb lesz az a haszon, amit a kapott információkból nyerünk. De ez csak álom.”

Az elmúlt évtizedekben többen elemezték, vajon mi vezetett Richardson sziszifuszi munkájának sikertelenségéhez. A válasz ma már világos: hiányoztak olyan ismeretek, amiket a matematika, a fizika és az elméleti meteorológia az 1920-as, '30-as és '40-es években mutatott fel és hiányzott egy olyan eszköz is, ami a numerikus számításokat sokkal gyorsabban képes elvégezni, mint az ember, azaz hiányzott az elektronikus számítógép.

A matematikusok 1928-ban ismerték fel, hogy a folytonos differenciálegyenletekre kimondott egzisztencia- és unicitás-tételek nem alkalmazhatók változatlan formában a véges különbséges egyenletekre. A Richard Courant, Kurt Friedrichs és Hans Lewy által publikált eredményeket azóta is a három szerző nevének rövidítésével CFL-kritériumként emlegetik a légkörmodellezéssel foglalkozók. A kritérium szerint a légkörmódel rácsfelbontásának rács távolsága (Δs) és az alkalmazott időlépcső (Δt) hányadosa nem lehet kisebb, mint a módelben leírt légköri hullámok terjedési sebességének maximuma (v). Matematikai formulákkal: $(\Delta s / \Delta t) > v$. A szerzők tiszteletére bevezetett Courant-szám alkalmazásával $C = (v \Delta t / \Delta s) < 1$.

Az elméleti meteorológia legfontosabb eredménye ebből a korból az volt, hogy a svéd Carl-Gustav Rossby és az amerikai Jule Charney a Reynolds-féle hasonlósági elmélet és a kis perturbációk módszerének alkalmazásával linearizálta a légköri mozgások kormányzó egyenletrendszerét, és megadta az egyenletrendszer egyszerűsítésének módszertanát.

Az elméleti eredmények első gyakorlati alkalmazására akkor került sor, amikor Neumann János 1946-ban javaslatot tett az akkor megépített első elektronikus számítógép, az ENIAC (Electronic Numerical Integrator and Computer) meteorológiai alkalmazására. A Jule Charney, a norvég Ragnar Fjørtoft és Neumann János vezetésével megalakult 40 fős kutatócsoport 1950-ben publikálta eredményeit, azaz ekkor valósult meg Richardson álma, és láthatóvá vált – az akkor 88 éves – Bjerknes számára, hogyan lehet „gyorsvonati sebességgel utazni” a tudósok által évtizedek munkájával készített alagúton át. Charney, Fjørtoft és Neumann munkája nem egyszerűen azért mérföldkő a meteorológia történetében, mert az ő vezetésükkel készült az első sikeres számítógépes meteorológiai előrejelzés, hanem azért is, mert verifikálták munkájukat, és ezzel kijelölték a numerikus időjárás-előrejelzés további fejlődésének útját, amit napjainkban is követnek a modellezők. A kutatócsoport a számítógépes kapacitások szűkössége miatt a lehető legegyszerűbb mozgásegyenlettel, a barotróp örvényességi egyenlettel dolgozott, és vertikális integrálátlagok bevezetésével ekvivalenciát hozott létre a légkör háromdimenziós áramlása, és a kvázi-nemdivergens légköri középszint, azaz az 500 hPa-os főizobárszint síkáramlása között. Az utókor ezért emlegeti módeljüket *ekvivalens barotróp módel* néven. Verifikációjuk eredménye és a javításra tett javaslatuk négy pontban foglalható össze:

1. a barotróp közelítés hibája (javítási lehetőség: baroklin modellek alkalmazása, majd a hidrosztatikai közelítés helyett nem-hidrosztatikus modellek használata);
2. az egyenlet véges különbséges közelítésének pontossága (javítási lehetőség: magasabbrendű numerikus sémákat, vagy más közelítő módszereket, például az úgynevezett Galjorkin-módszereket kell alkalmazni);

3. a rács felbontásának korlátozó tényezője (javítási lehetőség: a rácsávolság, azaz Δs értékének csökkentése;
4. a közepes szint és az integrálátlagok inkonzisztenciája (javítási lehetőség: többszintes légkörmodelleket kell építeni).

A következő években sorra alakultak Svédországban, az Egyesült Államokban és Japánban operatív számítógépes előrejelzéssel foglalkozó részlegek a nemzeti meteorológiai szolgálatoknál. A Svéd Meteorológiai és Hidrológiai Intézet 1954 decembere, az amerikai központ 1955 májusa, a japán szolgálat 1959 óta ad ki napi rendszerességgel számítógépes előrejelzéseket. A modellek fejlődése pontosan a Charney, Fjortoft és Neumann által 1950-ben kijelölt úton történt. Az egyszerű barotróp modelleket követték a baroklin modellek, majd az örvényességi egyenlet helyett áttértek a teljes (alapvető, angolul primitive) egyenletrendszeren nyugvó modellezésre. A számítógépes kapacitás növekedtével folyamatosan fejlődtek az alkalmazott matematikai módszerek és paraméterezési eljárások, míg végül eljutottunk a nem-hidrosztatikus operatív modellekig.

Egyes tudománytörténészek szerint a XX. században három nagy felfedezés történt a fizika területén: a relativitáselmélet Einstein munkássága nyomán, a kvantumfizika Heisenbergnek és Schrödingernek köszönhetően, és a kaoszelmélet. Edward Lorenz, a Massachusetts-i Műszaki Egyetem (MIT) Meteorológiai Tanszékének matematikus és fizikus végzettségű professzora 1963-ban publikálta gondolatait és számítási eredményeit egy determinisztikus nem-periodikus áramlással kapcsolatban (Lorenz, 1963). Később egy újságíró a következő néven emlegette Lorenz eredményeit: kaoszelmélet. Ez vezetett a napjainkban oly népszerű sokasági előrejelzési rendszerek (angolul: ensemble prediction system, EPS) kifejlődéséhez.

FELADATOK

- V.3.1.** Vezesse le az örvényességi egyenletet (az áramlás horizontális és a sűrűdés elhanyagolható)!
- V.3.2.** Mutasson rá az örvényességi egyenlet barotróp és baroklin légállapotot leíró tagjaira!
- V.3.3.** Írja fel a divergenciamentes síkáramlás barotróp örvényességi egyenletét!
- V.3.4.** Milyen lépései vannak a számítógépes időjárás-előrejelzésnek?
- V.3.5.** Mutassa be a számítógépes időjárás-előrejelzés szakaszait az ekvivalens barotróp modell példáján!
- V.3.6.** Mekkora időlépcsőt engedélyez a CFL-kritérium az ekvivalens barotróp modellben, ha a mérési adatok 750 km-es felbontású rácson állnak rendelkezésre?
- V.3.7.** A Taylor-sor alkalmazásával dolgozzon ki elsőrendben pontos véges különbséges közelítő sémát egy tetszőleges $f(x)$ függvény deriváltjának meghatározására az x_0 helyen!
- V.3.8.** Mi a különbség a hidrosztatikus és a nem-hidrosztatikus légkörmodellek között?
- V.3.9.** Differenciálegyenletek megoldására Borisz Galjorkin orosz matematikus 1915-ben azt javasolta, hogy a megoldást függvénytör alakjában keressük. Véges elem módszerről beszélünk, ha a függvénytör alapfüggvényei (bázisfüggvényei) a trianguláris függvényekből állnak. Amennyiben az alapfüggvény-rendszert periodikus függvényekből áll, spektrális módszerről beszélünk. Ha az alapfüggvény-rendszert a megoldandó differenciálegyenletben szereplő operátor sajátfüggvényei képezik, akkor a feladat a függvényegyütthatók meghatározása. A spektrális függvénytörök trianguláris csontkítása során a globális, azaz a teljes földi légkörre kiterjedő modellben a hullámszám mind észak-déli, mind kelet-nyugati irányban M . Mekkora lesz M értéke, ha a modell rácsfelbontása $\Delta s = 10$ km?
- V.3.10.** Soroljon fel minél többet az EPS rendszer megjelenítési lehetőségei közül!

VI. fejezet - Diszkontinuitási felületek a légkörben

Leelőssy Ádám
Gyuró György
Mészáros Róbert
Weidinger Tamás
Tasnádi Péter

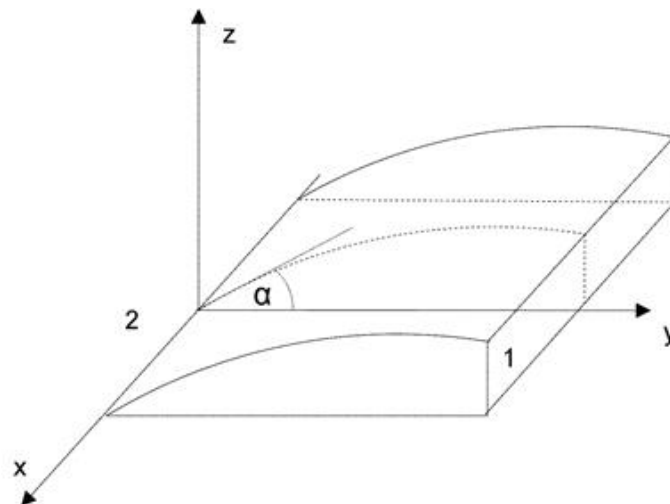
VI.1. Légköri frontok

A légkörben kialakulhatnak olyan felületek, amelyek mentén a levegő valamely állapotjelzője szakadást szenved, pontosabban nagy gradienssel rendelkezik. Az ilyen felületeket *frontfelületek*nek, valamely más felülettel (pl. a talajjal, vagy az AT-térképen egy adott izobár felülettel) képzett metszésvonalát *front*nak nevezzük. Frontokat csak a szinoptikus talajtérképeken rajzolunk be, a magassági térképeken nem jelöljük a meleg és a hideg levegőtömegek választófelületeit.

A légkörben matematikai szigorúsággal vett szakadási (illetve határfelületek) nincsenek, nagy gradiensek azonban fellépnek, s helyénvaló ezek *szakadási felületek*kel történő modellezése.

A határfelületekkel kapcsolatban általánosan is igaz, hogy két egymással nem keveredő közeg választófelületének két oldalán egyrészt a nyomások megegyeznek, másrészt az egyes közegek áramlási sebességének a közös határfelület normálisa irányába eső komponensei egyenlők (e sebességek megegyeznek a határfelület haladásának normális irányú összetevőjével). Más szavakkal azt is mondhatjuk, hogy a felület „két oldala” nem távolodik el egymástól, nem alakulhat ki vákuum.

Két különböző tulajdonságú (1 – hideg; 2 – meleg) légtömeget elválasztó frontfelületet vizsgálunk (VI.1.1. ábra).



VI.1.1. ábra. Az x tengellyel párhuzamos front. 1 –hideg levegő, 2 – meleg levegő.

A frontfelület két oldalán, a frontfelületen együtt mozgó, egymás melletti (egymással összekötött) két idealizált pont nyomásváltozására vonatkozó

$$p_1(x, y, z, t) - p_2(x, y, z, t) = 0$$

feltételt nevezzük dinamikai határfeltételnek, ami tetszőleges időpontban teljesül.

$$\frac{d(p_1(x, y, z, t) - p_2(x, y, z, t))}{dt} = 0$$

Frontfelület hajlata. Tekintsünk, az egyszerűség kedvéért, egy x tengellyel párhuzamos, stacionárius frontfelületet! A frontfelület α hajlásszögét a dinamikus határfeltétel tulajdonságai alapján határozzuk meg. Teljesül, hogy:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\partial \zeta}{\partial y} = - \frac{\left[\left(\frac{\partial p}{\partial y} \right)_1 - \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right)_2 \right]}{\left[\left(\frac{\partial p}{\partial z} \right)_1 - \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right)_2 \right]},$$

illetve

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x} = 0,$$

ahol $\zeta(x, y, t)$ a frontfelület. A z -rendszerben a $\zeta(x, y, t)$ nem más mint a frontfelület magassága.

Geosztrófikus szél ($V_g = (u_g, v_g)$) közelítéssel – s hidrosztatikus légkör $\left(\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \right)$ feltételezésével – kapjuk az y irányú (nyugat-keleti) frontfelület Margules-féle egyensúlyi hajlatát:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\partial \zeta}{\partial y} = \frac{f}{g} \frac{T_1 u_{g2} - T_2 u_{g1}}{T_2 - T_1}.$$

Bevezetve a frontálzóna $\bar{T} = \frac{1}{2}(T_2 + T_1)$ átlaghőmérsékletét és kihasználva, hogy $(\bar{T} \gg (T_2 - T_1))$ a következő munkaformula adódik:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\partial \zeta}{\partial y} = \frac{f}{g} \bar{T} \frac{u_{g2} - u_{g1}}{T_2 - T_1} - \frac{f}{g} \frac{u_{g2} + u_{g1}}{2} \approx \frac{f}{g} \bar{T} \frac{u_{g2} - u_{g1}}{T_2 - T_1}.$$

A nyomás természetesen változhat a front vonala mentén. A front vonalára merőleges irányú sebességek aránya, – geosztrófikus szél közelítéssel:

$$v_{g1} = \frac{T_1}{T_2} v_{g2} \approx v_{g2}.$$

A front vonalával párhuzamos sebességek természetesen különböznek a frontfelület két oldalán. A front felületén a dinamikai határfeltételen túl a kinematikai határfeltételnek is teljesülnie kell. A vertikális sebesség ennek ismeretében számítható:

$$w_j = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + v_j \frac{\partial \zeta}{\partial y}, \quad j = 1, 2,$$

ahol a j index jelzi a hideg, illetve a meleg levegőt, míg v_j a front vonalára merőleges sebességet a hideg, illetve a meleg levegőben. Geosztrófikus szél feltételezésével $v_j \equiv v_{gj}$, s a Margules-féle egyensúlyi hajlat alkalmazásával:

$$w_2 - w_1 = (v_{\varepsilon 2} - v_{\varepsilon 1}) \frac{\partial \zeta}{\partial y} = v_{\varepsilon 2} \frac{f}{g} \left(\frac{T_2}{T_1} u_{\varepsilon 2} - u_{\varepsilon 1} \right) \approx v_{\varepsilon 2} \frac{f}{g} (u_{\varepsilon 2} - u_{\varepsilon 1})$$

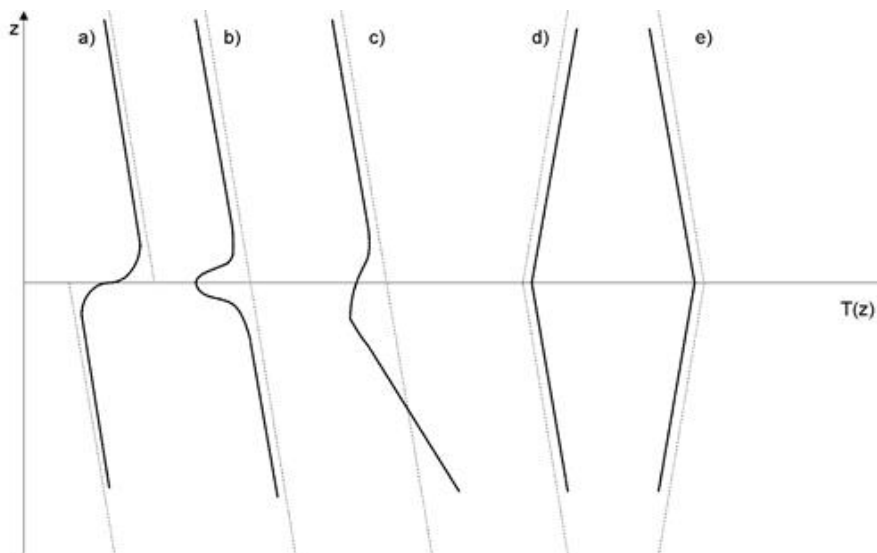
Felírhatjuk a frontfelület hajlatát gradiens szél, illetve ageosztrofikus áramlás feltételezésével is a nyomási gradiens alakjának kifejezésével. A Navier–Stokes-egyenletek felhasználásával pedig a kvázistacionárius határfelületen kialakuló fel- és leszálló mozgások is tanulmányozhatók.

A frontfelület dinamikai határfeltételéből meghatározhatjuk a front horizontális haladási sebességét (v_F):

$$v_F = - \frac{\left(\frac{\partial p}{\partial t} \right)_1 - \left(\frac{\partial p}{\partial t} \right)_2}{\left(\frac{\partial p}{\partial n} \right)_1 - \left(\frac{\partial p}{\partial n} \right)_2},$$

ahol $\frac{\partial p}{\partial n}$ a front haladási irányába eső parciális nyomásváltozás.

VI.1.1. A VI.1.2. ábra öt különböző típusú szakadási felületet ábrázol. Melyik szimbolizálja a tropopauzát, a sztratopauzát, a mezopauzát, a hőmérsékleti inverziós rétegződést, a felhőtető közeli inverziót, a konvektív határréteg felső határán megjelenő hőmérsékleti ugrást, illetve a tipikus hideg- vagy melegfronti hőmérsékleti rétegződést?



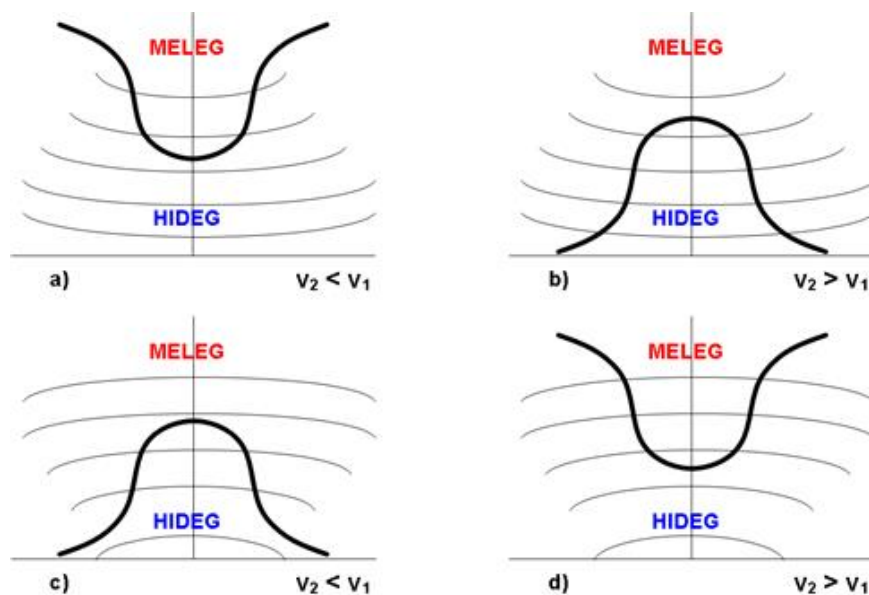
VI.1.2. ábra. Különböző típusú légköri szakadási felületek.

VI.1.2. Mutassuk meg, hogy frontok mindig nyomási teknőben helyezkednek el! Rajzoljuk fel ezek lehetséges alakját!

VI.1.3. Írjuk fel az y tengellyel párhuzamos front hajlatát, adjuk meg ebben az esetben a Margules-féle egyensúlyi hajlatot! Írjuk fel a front hajlatát az ageosztrofikus szél feltételezésével is!

VI.1.4. Írjuk fel a front egyensúlyi hajlatát gradiens szél esetén! A front párhuzamos az izobárokkal. A meleg és a hideg légtömeg közötti hőmérsékletkülönbség 10°C , a szélességkülönbség 6 m s^{-1} . Az átlagos hőmérséklet 20°C , az átlagos szél 6 m s^{-1} . A 45° szélességi körön vagyunk.

Adjuk meg a frontfelület hajlatát a ciklonális rendszer centrumától 800 km -re, abban az esetben, ha a) a hideg levegő rendelkezik a nagyobb, míg a meleg levegő a kisebb forgási sebességgel, b) a meleg levegő a nagyobb, a hideg levegő a kisebb forgási sebességű. (Egy kétszer rétegzett közeg áramlási rendszerét vizsgáljuk, VI.1.3. ábra.) Melyik részára írja le a két frontfelületet?



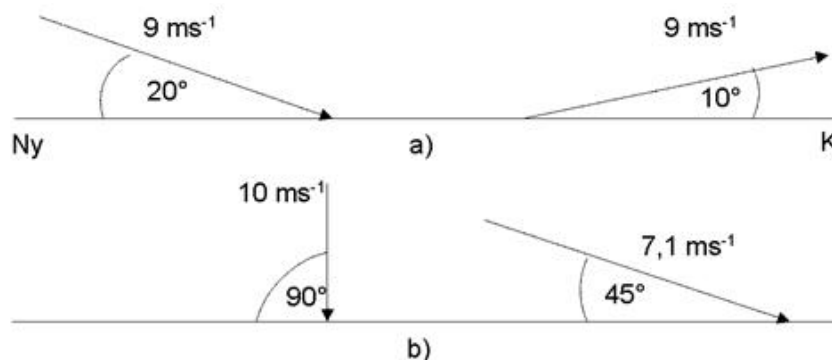
VI.1.3. ábra. A ciklonális és az anticiklonális örvényszerűség négy fő típusa kétszer rétegzett közegben. Hol lesz ciklonális és anticiklonális forgás? Az ábrán 1 – hideg; 2 – meleg levegő.

VI.1.5. Adjuk meg a frontfelületek elhelyezkedését a VI.1.4. feladat szerinti meteorológiai állapotjelzők ismeretében, ha anticiklonális rendszert vizsgálunk. (Egy kétszer rétegzett közeg áramlási rendszerét vizsgáljuk, lásd a VI.1.3. ábrát.) A centrumtól 800 km-re vagyunk. Tekintsük ismét azt a két esetet, amikor a) a hideg levegő rendelkezik a nagyobb, míg a meleg levegő a kisebb forgási sebességgel, b) a meleg levegő a nagyobb, a hideg levegő a kisebb forgási sebességgel!

VI.1.6. Határozzuk meg a 45. szélességi fokon a stacionárius front hajlásszögét, ha a meleg és a hideg levegőtömeg közötti hőmérsékletkülönbség $12\text{ }^{\circ}\text{C}$, a hideg levegőtömeg hőmérséklete $-8\text{ }^{\circ}\text{C}$ és a fronttal párhuzamosan a hideg levegőben 8 m s^{-1} , míg a meleg levegőben 3 m s^{-1} déli szél fúj.

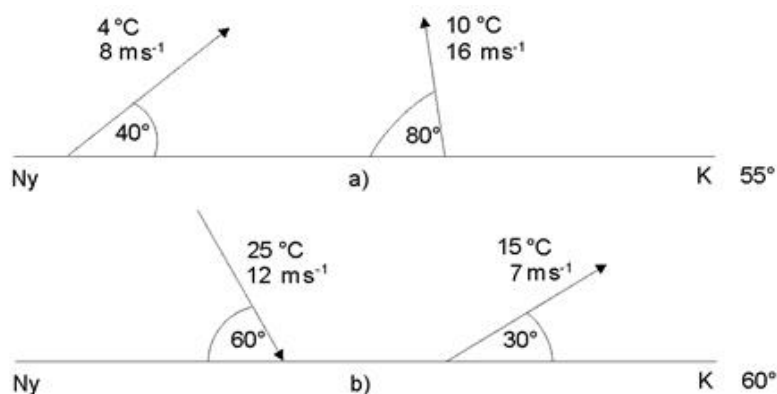
VI.1.7. Határozzuk meg a 48. szélességi fokon a stacionárius front hajlásszögét, ha a meleg és a hideg levegőtömeg közötti hőmérsékletkülönbség $8\text{ }^{\circ}\text{C}$, a hideg levegőtömeg hőmérséklete $20\text{ }^{\circ}\text{C}$, s fronttal párhuzamosan a hideg levegőben 5 m s^{-1} keleti szél, míg a meleg levegőben 3 m s^{-1} nyugati szél fúj.

VI.1.8. Határozzuk meg a frontok elhelyezkedését és haladási sebességét a front két oldalán levő geosztrófikus szél ismeretében a VI.1.4a–b. ábra alapján.



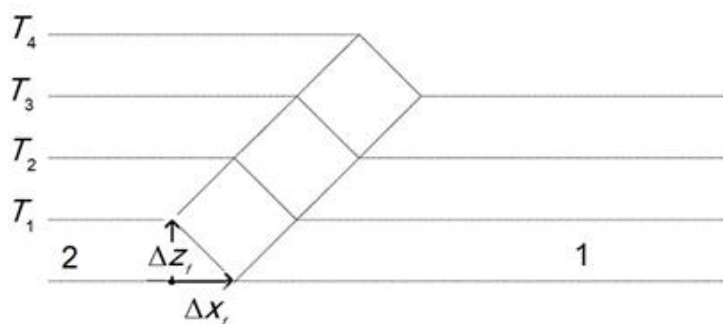
VI.1.4a–b. ábra. Geosztrófikus szél a front két oldalán.

VI.1.9. Határozzuk meg a frontok elhelyezkedését, hajlásszögét és haladási sebességét geosztrófikus szél feltételezésével a VI.1.5a–b. ábra alapján.



VI.1.5. ábra. A szél és a hőmérséklet a front két oldalán.

VI.1.10. Ismert a frontálzónában a termikus szél (VI.1.5. ábra). Hogy változik a frontfelület egyensúlyi hajlata a termikus szél változásával?



VI.1.6. ábra. Hőmérsékleti rétegződés a frontálzónában. A horizontális hőmérsékleti gradiens szélnyírást generál.

$$\alpha = \frac{\Delta z_f}{\Delta x_f}$$

α a frontfelület hajlata.

VI.1.11. A frontok, amennyiben ideális geometriai felületeknek képzeljük őket, a fizikai mennyiségek szakadási helyei. A tömeg-, energia- és impulzusmegmaradás törvényének azonban ilyen szakadási felületeket tartalmazó áramlás esetén is teljesülni kell. Irányítsuk a koordináta-rendszer $x = x_1$ tengelyét a geometriai síknak tekinthető frontfelület normálisának irányába, és írjuk fel a tömeg-, energia- és impulzusáramra vonatkozó szakadási feltételeket.

VI.1.12. A szakadási felületek két csoportba sorolhatók aszerint, hogy van-e tömegáram a felületén keresztül, vagy nincsen. A meteorológiai frontok az utóbbi osztályba, az úgynevezett gyenge szakadások közé tartoznak. Mutassuk meg, hogy a VI.1.11. feladatban tárgyalt tömeg- és impulzusáramra vonatkozó feltételekből ebben az esetben adódik, hogy a nyomás nem szenved ugrást a felületen!

VI.1.13. Bizonyítsuk be, hogy ha a VI.1.12. feladat terminológiája szerint a front nem gyenge szakadás, akkor a front menti sebességkomponenseknek nem lehet ugrása!

VI.2. A tropopauza

A légkör vertikális szondázásának fejlődésével fokozatosan sikerült felismerni, hogyan változik az egyes állapothatározók értéke a magassággal. Az első ilyen megállapítás a francia Blaise Pascal nevéhez fűződik, aki sógora, Florin Périer mérései alapján 1648-ban kimutatta, hogy a légnyomás a magassággal csökken. A Mont Blanc meghódítására indított harmadik sikeres expedíció tagjaként, saját méréseire támaszkodva Horace Saussure genfi természettudós 1787-ben megmérte, hogy a levegő hőmérséklete 100 méterenként átlagosan 0,64 °C-kal

csökken a magassággal. Saját fejlesztésű cianométerével kimutatta, hogy nagyobb magasságokban az ég a kék egyre sötétebb árnyalatait mutatja. Higrométerével azt is kimérte, hogy a légkör telítettsége a magassággal növekszik.

A légkör függőleges irányú tanulmányozásához és emellett a hőtan alaptörvényeinek felismeréséhez a repülés eredményei is hozzájárultak, így például a francia fivérek, Joseph-Michel és Jacques-Étienne Montgolfier által 1782 épített első hőlégballon, a szintén francia Jacques Charles által 1783-ban konstruált első gázballon (hidrogénballon), valamint az ausztrál feltaláló, Lawrence Hargrave dobozos sárkányrepülője 1882-ből.

A WMO elődje, az International Meteorological Organization (IMO) már alapításának 1873-as évében javasolta aerológiai obszervatóriumok létesítését. Apja anyagi támogatásával az amerikai Abbott Rotch hozta létre az első ilyet 1885-ben a Boston melletti Blue Hill csúcson. Ezt követte 1886-ban a francia hasonló intézet alapítása Léon Teisserenc de Bort vezetésével Trappes-ban, a Párizs környéki Île-de-France megyében. A Király Porosz Aeronautikai Obszervatórium 1905-ben jött létre Lindenbergben. Első vezetője a szellőztetett aspirációs pszichrométer feltalálója, Richard Assmann volt. (Az obszervatórium alapításának 100. évfordulóján a német köztársasági elnök jelenlétében vette fel az obszervatórium az alapítója nevét.) Mindhárom intézmény az alapítás óta folyamatosan működik. A korai magaslégköri mérések és az egyes obszervatóriumokban felhalmozott megfigyelési adatok elemzése alapján megszületett a meteorológia egyik önálló ága, az *aerológia*.

A természettudományok már az ókori csillagászok tanulmányai óta a következő lépcsőfokokon fejlődnek: megfigyelés → adatok rendszerezése → összefüggések felismerése → új tudományos eredmények. Ezen az úton haladva ismerte fel 1902-ben Teisserenc de Bort, és tőle függetlenül, saját mérései alapján Assmann azt a tényt, hogy a hőmérséklet növekedése nem monoton a földfelszíntől távolodva, hanem adott szinten izotermia lép fel, amit inverz függőleges hőmérsékleti menet követ. Ezt a réteget nevezzük termikus tropopauzának, vagy röviden tropopauzának. A tropopauza helyének definíciója valójában mérési utasítás, amit a WMO Aerológiai Bizottsága adott meg 1957-ben. A definíció három pontból áll:

- 1) tropopauza az a legalacsonyabb szint az 500 hPa-os főizobárszint fölött, ahol a függőleges hőmérsékleti gradiens (γ) értéke kisebb, vagy egyenlő, mint $2^\circ\text{C}/\text{km}$;
- 2) a $\gamma \leq 2^\circ\text{C}/\text{km}$ feltétel egy legalább 2 km vastag rétegben teljesül;
- 3) a hőmérsékletmérés (rádiószondás felszállás) a tropopauza felső szintje fölött is folytatódik legalább 2 km-en keresztül.

Érdekes jelenség a másodlagos trópusi tropopauza kialakulása, ami az első tropopauza fölött jön létre a trópusi és a szubtrópusi légtömegek egymásra rétegződése miatt a 100 hPa-os nyomási szint térségében.

Az elmúlt évtizedekben a hőmérsékleten kívül a légkör nedvesség- és ózon-tartalmának, valamint kinetikus energiájának is sikerült azonosítani a választófelületeit. Ennek megfelelően a termikus tropopauza mellett beszélhetünk higo- és ózonopauzáról, valamint dinamikus tropopauzáról is.

A vízgőz vertikális eloszlásának markáns választófelületét nevezzük higropauzának. Definícióját az indokolja, hogy a troposzférában a vízgőz koncentrációja (keverési aránya) a felszín közelében eléri az 1000 ppmv értéket, míg a sztratoszférában 5 ppmv-nél is kisebb.

A termikus tropopauza természetes határa a troposzférikus és a sztratoszférikus ózonnak is. A mérések szerint a troposzférikus ózonkoncentráció alacsonyabb, mint 10^{18} m^{-3} , és nem figyelhető meg jelentős függőleges gradiens. Ezzel szemben – ahogyan ez várható –, a sztratoszférikus ózonkoncentráció a termikus tropopauza fölött folyamatosan emelkedik, amíg a nagyjából 22 km-es magasságban eléri az $5 \cdot 10^{18} \text{ m}^{-3}$ értéket.

A higropauza és az ózonopauza jó közelítéssel egybeesik a termikus tropopauzával. A dinamikus tropopauza esetén más a helyzet.

A tropopauzán áthaladva sem a légnyomás, sem a nyomási gradiens nem szenved ugrást, hiszen a sűrűségi mező folytonosan változik. A tropopauzát átszelve viszont a hőmérsékleti gradiens ugrást szenved.

A tropopauza egyensúlyi hajlata a troposzférikus T_1 hőmérséklet, valamint a tropopauzában mérhető T_2 hőmérséklet alapján a következőképpen írható fel:

$$\operatorname{tg} \theta_y = -\frac{\frac{\partial T_1}{\partial y} - \frac{\partial T_2}{\partial y}}{\frac{\partial T_1}{\partial z} - \frac{\partial T_2}{\partial z}} = \frac{\frac{\partial T_1}{\partial y} - \frac{\partial T_2}{\partial y}}{\gamma_1 - \gamma_2},$$

ahol $\gamma_1 = -\frac{\partial T_1}{\partial z}$ a troposzféra hőmérsékleti gradiense, míg $\gamma_2 = -\frac{\partial T_2}{\partial z}$ a tropopauza hőmérsékleti gradiense. Tudjuk, hogy $\gamma_1 > \gamma_2$ és $\gamma_2 \approx 0$. A hőmérséklet-eloszlás a tropopauza közelében analóg a frontközeli nyomáseloszlással. A tropopauza a magassággal egyre hidegebb troposzférát választja el a magassággal egyre melegebb sztratoszférától. A fenti felírásból következik az is, hogy a tropopauzán áthaladva a geosztrófikus szélnyírás, vagyis a termikus szél is ugrást szenved. Nyomási rendszerben a tropopauza egyensúlyi hajlata:

$$\operatorname{tg} \theta_y = \frac{\left(\frac{\partial T_1}{\partial y}\right)_p - \left(\frac{\partial T_2}{\partial y}\right)_p}{\gamma_1 - \gamma_2} + \operatorname{tg} \theta_{yp}$$

Adott nyomási szinten a troposzférában kicsi, míg a tropopauza felett jelentős a horizontális hőmérsékleti gradiens. Ha horizontálisan elmozdulva növekvő tropopauza magasságot tapasztalunk, akkor a tropopauza felett (horizontálisan elmozdulva) csökken a hőmérséklet. Ez azt jelenti, hogy a tropopauza hajlata a z -rendszerben nagyobb, mint a P -rendszerben.

$$\operatorname{tg} \theta_{yp} < \operatorname{tg} \theta_y,$$

vagyis a nyomási vonalak a tropopauzához hajlanak.

VI.2.1. Mi okozza a termikus tropopauza kialakulását?

VI.2.2. Miért egyenetlen a termikus tropopauza magassága?

VI.2.3. A közepes földrajzi szélességeken hol figyelhető meg a legalacsonyabb tropopauza?

VI.2.4. Mi a termikus tropopauza szerepe a légköri függőleges mozgások szempontjából?

VI.2.5. Milyen körülmények fennállása esetén figyelhető meg a termikus tropopauza szakadása?

VI.2.6. Milyen következményekkel jár, ha a termikus tropopauza átszakad?

VI.2.7. Milyen jelenségeket okoz a termikus tropopauza szakadása?

VI.2.8. Létezik-e a termikus tropopauzához hasonló képződmény más bolygók légkörében?

VI.2.9. A VI.2.1. táblázat adatai alapján elemezze, milyen különbség van a tropopauza tulajdonságaiban a három alapvető légtömeg fölött! Hasonlítsa össze a téli és a nyári félévet!

VI.2.10. Ritkán megfigyelhető időjárási helyzet uralkodott Európában 2013. május 31-én. Lappföld finnországi részén a napi maximum megközelítette, Kevo településen meg is haladta a 30 °C-ot. Ugyanakkor az Alpokban 60–80 cm hó esett, és június 1-jén ismét kinyitottak a sípályák. Az Alpoktól nyugatra a napi maximum mindenütt 20 °C alatt maradt. A VI.2.2. táblázat adatai alapján hasonlítsa össze egy lappföldi, egy közép-franciaországi és egy korzikai állomás hőmérsékleti adatait a 850 hPa-os főizobárszinten! Vizsgálja meg, hogyan viszonyulnak a tropopauza mért adatai a sokévi átlaghoz! A TEMP-távírat számcsoportjainak jelentését – többek között – A szinoptikus időjárási analízis eszközei című munkafüzetben (Gyuró, 2007), vagy pl. a Meteorológiai Világszervezet (WMO) honlapján lehet megtalálni a következő címen: www.wmo.int/pages/prog/www/WMOCodes.html.

VI.2.1. táblázat. A tropopauza átlagos légnyomása (p), magassága, hőmérséklete és hőmérsékletingása a poláris légtömeg (PA), a közepes földrajzi szélességek légtömege (MLA) és a trópusi légtömeg fölött a sokévi átlag alapján (TA1. az első, TA2. a másodlagos tropopauza)

		Tél			Nyár		
		p (hPa)	z (km)	t (°C)	p (hPa)	z (km)	t (°C)
PA		320	8,7	$-56,0 \pm 5,0$	280	9,7	$-48,0 \pm 3,1$
MLA		230	11,0	$-58,0 \pm 5,1$	225	11,1	$-53,0 \pm 4,5$
TA	1.	160	13,3	$-63,0 \pm 3,9$	160	13,3	$-60,0 \pm 3,9$
	2.	92	16,8	$-80,5 \pm 4,7$	105	15,9	$-66,5 \pm 4,3$

VI.2.2. táblázat. Néhány állomás földrajzi adatai, valamint TEMP-távirata „A” részének 2. és 3. szakasza 2013. május 31-én

Sodankyla	Finnország	Lappföld	É. sz. 67° 22'	K. h. 8° 48'
00 UTC	99998 08226 13502 00161 // // // // 92829 18070 18011 85543 11467 15006 70123 00985 15007 50573 17573 16010 40735 31362 15011 30933 46565 19008 25052 54162 17009 20194 53179 17505 15382 49388 27001 10648 50388 04510 88224 56365 12504			
12 UTC	99997 26680 08003 00151 // // // // 92826 18272 11007 85540 11667 04004 70123 00081 17505 50573 17964 14013 40736 31165 16017 30933 46564 16021 25052 53563 16512 20195 53779 13007 15383 48988 18003 10649 51387 04006 88237 55763 17511			
Trappes	Franciaország	Île-de-France	É. sz. 48° 46'	K. h. 2° 1'
00 UTC	99992 10408 33005 00102 // // // // 92749 07415 00519 85441 04025 01519 70993 05158 04020 50555 22366 09019 40716 33558 12042 30912 479// 12059 25030 475// 05519 20179 469// 03030 15370 461// 03522 10636 501// 03508 88276 521// 10545			
12 UTC	99996 13028 33008 00135 // // // // 92784 07619 35019 85480 05015 01028 70045 01956 02024 50565 16542 02033 40729 29349 02530 30927 463// 05530 25046 539// 07526 20186 555// 05021 15373 495// 01519 10637 505// 33507 88219 595// 02527			
Ajaccio	Franciaország	Korzika	É. sz. 41° 55'	K. h. 26° 39'
00 UTC	99009 15440 26017 00077 14836 26017 92730 08817 27521 85425 04435 28521 70971 07150 28530 50552 23958 31535 40710 36725 30043 30904 437// 27536 25026 441// 29050 20177 395// 26543 15371 485// 25533 10639 513// 20015 88327 477// 28543			
12 UTC	99008 18858 24015 00068 15657 24015 92722 09442 25512 85417 04021 27009 70973 03961 28026 50555 22370 26015 40714 34767 00000 30910 455// 30510 25031 449// 28027 20181 441// 26035 15372 467// 28024 10638 519// 30019 88309 455// 32507			

VI.2.11. A troposzféra felső határán a hőmérséklet -55 °C, a vertikális hőmérsékleti gradiens

$$\gamma = -\frac{\partial T}{\partial z} = 0,65 \text{ °C} / 100 \text{ m}$$

. A hőmérséklet észak felé haladva 100 km-enként 1 °C-ot hűl. Feltéve, hogy a tropopauza hőmérséklete -50 °C, horizontális és vertikális hőmérsékleti gradiense pedig egyaránt nulla, mekkora a tropopauza hajlata?

VI.2.12. A troposzféra felső határán a hőmérséklet -60 °C, a vertikális hőmérsékleti gradiens

$$\gamma = -\frac{\partial T}{\partial z} = 0,3 \text{ °C} / 100 \text{ m}$$

. A hőmérséklet észak felé haladva 100 km-enként 3 °C-ot hűl. A tropopauza magassága 11 800 m. Feltéve, hogy a tropopauza hőmérséklete -50 °C, horizontális és vertikális hőmérsékleti gradiense pedig egyaránt nulla, mekkora a tropopauza magassága 100 km-rel északabbra?

VI.2.13. A troposzféra magassága az É.sz. 47°-án 10 500 m, az É.sz. 50°-án 9 800 m. A troposzféra felső részén a hőmérséklet a 47. szélességen -55 °C, az 50. szélességen -59 °C. A vertikális hőmérsékleti gradiens

$$\gamma = -\frac{\partial T}{\partial z} = 1^\circ\text{C}/100\text{m}$$

. Feltéve, hogy a tropopauza vertikális hőmérsékleti gradiense nulla, mekkora a hőmérsékletkülönbség a tropopauzában a két szélességi kör között?

VI.2.14. A tropopauza megközelítőleg a 130 hPa-os nyomási szinten helyezkedik el. A 150 hPa-os nyomási szint hőmérséklete adott pontban -58°C , 500 km-rel északabbra -65°C . A vertikális hőmérsékleti gradiens

$$\gamma = -\frac{\partial T}{\partial z} = 1^\circ\text{C}/100\text{m}$$

. A tropopauzában a hőmérséklet izobár felületek mentén vett horizontális, illetve vertikális gradiense egyaránt nulla. Mekkora a z - és p -rendszerben felírt tropopauza-merevedésség közötti különbség?

VI.2.15. Egy ciklon középpontjában a tropopauza magassága 8 500 m, a ciklon peremén 10 000 m. A ciklon sugara 1 000 km. Feltéve, hogy a tropopauzában a vertikális hőmérsékleti gradiens nulla, a troposzféra mentén pedig a potenciális hőmérséklet állandó, mekkora a troposzféra tetején mérhető hőmérsékletkülönbség a ciklon középpontja és pereme között? A troposzféra vertikális hőmérsékletváltozását közelítsük a száraz adiabatikus hőmérsékleti gradienssel.

VI.3. A sugáráram (jet stream)

A sugáráram definíciója – a tropopauza definíciójához hasonlóan – mérési utasítás, és szintén a WMO Aerológiai Bizottsága adta meg 1957-ben: *erős, keskeny áramlás egy közel horizontális tengely mentén a felső troposzférában, vagy az alsó sztratoszférában, amit a szélsősebesség erős vertikális és horizontális nyíródája jellemez, és egy vagy több szél-maximumot mutat.* A definíció egyes szavainak értelmezése a következő:

- *erős áramlás*, azaz a szélsősebesség 25 ms^{-1} , vagy annál nagyobb;
- *keskeny áramlás*, azaz legfeljebb néhány száz kilométer széles;
- *a vertikális szélnyírás* legalább 5 ms^{-1} 1 kilométeren belül ($5\text{ ms}^{-1}\text{km}^{-1}$);
- *a horizontális szélnyírás* legalább 5 ms^{-1} 100 kilométeren belül.

A definícióból következik, hogy ott figyelhető meg a sugáráram, ahol erős a vertikális szélnyírás. Az állandósult frontok, azaz a polárfont és a szubtrópusi front közelében mindig megfigyelhető a sugáráram. Ennek megfelelően a sugáráram két fajtáját különböztetjük meg: polárfonti sugáráram (polar front jet, PFJ) és szubtrópusi sugáráram (subtropical jet, STJ).

A sugáráram felfedezésének története a XIX. század végén kezdődött, amikor többször is nagy szélsősebességeket mértek a légkör magasabb rétegeiben. Az 1920-as években Wasaburo Ooishi japán meteorológus kimutatta, hogy az erős nyugati áramlás minden évszakban jelen van az alsó sztratoszférában. Szintén ebben az időben Wiley Post amerikai pilóta széles levegőfolyamról számolt be sztratoszféra-repülései alkalmával. Az 1930-as években német meteorológusok a ciklonok és az időjárási frontok tulajdonságait vizsgálták magaslégköri mérések alapján, és magas szélsősebességi értékeket mértek frontok közelében. Ekkor javasolta Heinrich Seilkopf a sugáráram (németül Strahlströmung) kifejezés használatát. A US Army Air Force B-29-es bombázóinak pilótái 1944-ben 140 csomó erősségű szélről számoltak be a 10 km fölötti légrétegekben végzett repüléseik alkalmával. Az abban az időben az Egyesült Államokban dolgozó svéd meteorológus, Carl-Gustav Rossby „jet stream”-nek nevezte el a jelenséget.

A Jakob Bjerknes és munkatársai által megalkotott polárfont-elmélet alapján tudjuk, hogy kifejlett, progresszív (nyugat-keleti irányban mozgó) időjárási frontok okklúziós pontja fölött minden esetben megtalálható a polárfonti jet.

A Kitaibel Pál utcában végzett magaslégköri mérések során 1933-ban a legendás magyar aerológus és szomorú sorsú igazgató, Tóth Géza is mért „szokatlanul magas szélsősebességeket Budapest fölött”.

Az éjszakai határréteg felett, illetve hidegfrontok előterében az alacsony légrétegekben is kialakulhatnak a környezetüknél nagyobb sebességű, jól körülhatárolható sugáráramlások. Ezeket nevezzük alacsonyszintű sugáráramnak (low level jet, LLJ).

VI.3.1. A sugáráramnak a definícióban megállapított sebességét az abszolút vagy a lokális koordináta-rendszerben értelmezzük?

VI.3.2. A szilárd Föld átlagos forgási sebessége 465 ms^{-1} az abszolút koordináta-rendszerben. Mennyi a sugáráram minimális sebessége ebben a koordináta-rendszerben?

VI.3.3. A Világúrból szemlélve mi forog gyorsabban? A szilárd Föld, vagy a légköre?

VI.3.4. Mi a sugáráram kialakulásának oka?

VI.3.5. Az izlandi *Eyjafjallajökull* vulkán kitörése 2010 tavaszán jelentős fennakadásokat okozott Európa légkiközlekedésében Norvégiától egészen Spanyolországig és Írországtól Romániáig. Vajon miért csak Európát érintette az esemény? Izlandon igen erős a szeizmikus aktivitás. Miért éppen az *Eyjafjallajökull* okozott gondokat?

VI.3.6. Máig sokat emlegetett atomerőmű-baleset történt 1986. április 26-án Csernobilban. Miért gondolhatták a politikai vezetők, hogy a katasztrófa hírére el lehet titkolni?

VI.3.7. A sugáráram felfedezése nyomán a japán hadvezetés arra a döntésre jutott, hogy a II. világháború alatt gázballonokra rögzített bombákat juttat át Amerikába. Számolja ki, mennyi időbe telhetett egy ballon útja!

VI.3.8. A XII.3.1. és a XII.3.2. táblázat a polárfronti és a szubtrópusi jet átlagos helyzetét mutatja a nyár és a tél közepén. Elemezze a két sugáráram egymáshoz viszonyított helyzete közötti és a két hónap közötti különbséget! Mit lehet megállapítani az egyes meridiánok alapján?

XII.3.1. táblázat. A polárfronti jet (PFJ) és a szubtrópusi jet (STJ) átlagos elhelyezkedése januárban az északi félgömbön.

	EURÓPA				ÁZSIA CSENDES-ÓCEÁN										AMERIKA ATLANTI-ÓCEÁN			
λ (°)	0	20	40	60	80	100	120	140	160	180	160	140	120	100	80	60	40	20
	KELETI HOSSZÚSÁG										NYUGATI HOSSZÚSÁG							
φ (°) (PFJ)	54	51	51	52	50	45	40	39	42	48	51	52	51	46	45	46	53	56
φ (°) (STJ)	26	27	28	27	26	27	27	29	30	29	28	29	30	31	31	31	30	27

XII.3.2. táblázat. A polárfronti jet (PFJ) és a szubtrópusi jet (STJ) átlagos elhelyezkedése júliusban az északi félgömbön.

	EURÓPA				ÁZSIA CSENDES-ÓCEÁN										AMERIKA ATLANTI-ÓCEÁN			
$\lambda (^{\circ})$	0	20	40	60	80	100	120	140	160	180	160	140	120	100	80	60	40	20
	KELETI HOSSZÚSÁG										NYUGATI HOSSZÚSÁG							
$\varphi (^{\circ})$ (PFJ)	62	71	76	78	77	75	73	74	74	71	68	69	69	65	59	58	62	61
$\varphi (^{\circ})$ (STJ)	42	41	45	46	46	45	46	47	44	40	35	40	45	46	42	44	46	45

VII. fejezet - A légköri turbulencia

Tasnádi Péter

Bordás Árpád

Weidinger Tamás

VII.1. Térbeli és időbeli átlagok

A Reynolds-féle átlagolás

A turbulenciát, mint az átlagos mozgástól, pontosabban, mint a várható értéktől vett eltérést értelmezhetjük. Az X állapotjelző tetszőleges $P(x, y, z)$ pontban és t időpillanatban két mennyiség az átlagérték ($\bar{X}$) és az ettől vett eltérés az ún. fluktuáció (X') összegeként írható fel:

$$X = \bar{X} + X'.$$

A különböző állapotjelzők fluktuációinak az idősorait, azok kapcsolatát vizsgáljuk (lásd az I.5 fejezetet is a Reynolds-féle átlagolás 4 posztulátumáról).

Súlyozott átlagok

Vannak olyan esetek, amikor nem alkalmazhatunk egyszerű átlagolást (pl. az impulzusátlag). Legyen $\tilde{X}$ az X állapotjelző súlyozott átlaga a D négydimenziós térrészben (térbeli és időbeli átlagolás), míg a súlyfüggvény alakja $f(s_i)$, ahol $i = 1, 2, 3, 4$ és $s_1 = x$, $s_2 = y$, $s_3 = z$, $s_4 = t$.

$$\tilde{X} = \int_D X(s_i) f(s_i) ds_i.$$

A súlyfüggvényre teljesül, hogy

$$\int_D f(s_i) ds_i = 1.$$

Definíció szerint:

$$\tilde{X} = \frac{\overline{\rho X}}{\bar{\rho}}.$$

A korábban megadott súlyfüggvény ebben az esetben: $f = \rho' / \bar{\rho}$. A pillanatnyi érték most a súlyozott átlag és a súlyozott átlagtól vett eltérés (a fluktuáció) összege

$$X = \tilde{X} + X'' \text{ és } \overline{X''} = 0.$$

A Boussinesq-féle közelítés

A meteorológiai gyakorlatban a sűrűség fluktuációt nem hanyagolhatjuk el a felhajtóerő $\left(g \frac{\rho'}{\bar{\rho}} \neq 0\right)$ leírásában – ez az ún. Boussinesq-féle közelítés.

VII.1.1. Legyen X és Y állapotváltozók. Mutassuk meg, hogy

$$a) \overline{X'Y'} = \overline{X'}\overline{Y'} = \overline{XY'},$$

$$b) \overline{X''Y''} = \overline{X''}\overline{Y''} = \overline{XY''},$$

$$c) \overline{\rho X''} = \overline{\rho}\overline{X''} = 0,$$

$$d) \overline{\rho X''Y''} = \overline{\rho X''}\overline{Y''} = \overline{\rho XY''}.$$

VII.1.2. Mutassuk meg, hogy

$$a) \overline{\rho'X''} = \overline{\rho'}\overline{X''},$$

$$b) \overline{\rho XY} = \overline{\rho}\overline{X}\overline{Y} + \overline{\rho X''Y''},$$

c) a Reynolds-féle átlagolás alkalmazásával – a súlyozott átlagolással összevetve – alábecsüljük a varianciát, vagyis $\overline{X''X''} \geq \overline{X'}\overline{X'} > 0$.

VII.1.3. Mutassuk meg a fluktuációk definíciós egyenlete alapján, hogy

$$(\rho X)' \approx \overline{\rho}X'' + \rho'X'.$$

VII.1.4. Mutassuk meg, hogy a harmadik momentumra teljesül, hogy

$$\overline{\rho XYZ} = \overline{\rho}\overline{X}\overline{Y}\overline{Z} + \overline{\rho X''Y''Z''} + \overline{\rho X''Z''Y''} + \overline{\rho Y''Z''X''} + \overline{\rho X''Y''Z''}.$$

VII.1.5.

a) Mutassuk meg, hogy a súlyozott átlagolás alkalmazásával a kontinuitási egyenlet a következő alakba írható:

$$\frac{\partial \overline{\rho}}{\partial t} + \text{div} \overline{\rho \tilde{V}} = 0.$$

b) Mutassuk meg, hogy a kinetikus energia tér és időbeli átlagértéke a következő alakba hozható a súlyozott átlagolás alkalmazásával:

$$\frac{1}{2} \overline{\rho V^2} = \frac{1}{2} \overline{\rho (\tilde{V})^2} + \frac{1}{2} \overline{\rho (V'')^2},$$

ahol V a sebesség nagysága.

VII.1.6. Mutassuk meg, hogy

$$(\rho X)' \approx \overline{\rho}X'' + \rho'X'.$$

Mi a feltétele a sűrűségfluktuációk elhanyagolásának, s mikor kell azt figyelembe venni? Mikor alkalmazzuk a Boussinesq-féle közelítést?

VII.1.7. Adjuk meg a hőmérséklet, a horizontális sebesség és a nyomanyag koncentráció (illetve a specifikus nedvesség súlyozott átlagát (Lásd Kowalski (2002) cikkét is). A hőmérséklet súlyozott átlagánál az entalpia definícióját használjuk! Milyen kapcsolatban van egymással az átlag és a súlyozott átlag?

VII.1.8. Legyen a következő egyszerű hőmérsékleti adatsor: $t_1=10^\circ\text{C}$, $t_2=11^\circ\text{C}$, $t_3=10^\circ\text{C}$, ... A légnyomás 1000 hPa. Határozzuk meg az átlaghőmérsékletet és a hőmérséklet súlyozott átlagát. Mekkora különbség van a két érték között? Mi a fizikai jelentése a súlyozott átlagnak?

VII.1.9. Legyen a nyomás 1000 hPa, adott a hőmérséklet és a vertikális sebesség idősor (VII.1.1. táblázat).

VII.1.1. táblázat. Hőmérséklet és vertikális sebesség idősor. (A mérések között eltelt idő kisebb mint 1 s.)

Időpont	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$T [^\circ\text{C}]$	10	10,2	10,4	10,2	10	9,8	9,6	9,5	9,7	10
$w [\text{m s}^{-1}]$	0,02	0,07	0,12	0,05	-0,03	-0,09	-0,11	-0,15	-0,07	-0,01

Határozzuk meg a hőmérséklet és a vertikális sebesség átlagát és súlyozott átlagát. A nyomás legyen 980 hPa. Számítsuk ki $\overline{w'T'}$ és $\overline{w''T''}$ hőmérséklet áramot is.

A kovariancia számításnál – a kis elemszám miatt – a torzítatlan becslés formuláját használjuk:

$$\overline{w'T'} \approx \frac{N}{N-1} \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N w_i' T_i' \right)$$

VII.1.10. A horizontális és a vertikális sebesség pillanatnyi értékeinek ismeretében (VII.1.2. táblázat) számítsuk ki a kovariancia mátrix egyes elemeit.

VII.1.2. táblázat. A sebesség komponensek mért értékei. (A mérések között eltelt idő kisebb mint 1 s.)

Időpont	1	2	3	4	5	6	7	8
$u [\text{m s}^{-1}]$	1,34	1,43	1,65	1,55	1,43	1,35	1,42	1,58
$v [\text{m s}^{-1}]$	2,31	2,37	2,48	2,49	2,31	2,23	2,29	2,37
$w [\text{m s}^{-1}]$	0,15	0,05	-0,11	-0,17	-0,03	0,04	0,09	0,05

A kovariancia számításnál – a kis elemszám miatt – a torzítatlan becslés formuláját használjuk.

VII.2 Átlagolt egyenletek, főbb egyszerűsítések, lezárási hipotézisek

A légkörben lejátszódó turbulens folyamatok leírása a fluidumok (folyadékok és gázok) mechanikájából és a termodinamikából ismert egyenletek, a kormányzóegyenletek segítségével történik. A turbulencia alapvetően nemlineáris jelenség. Statisztikus leírását alkalmazva, a szemlélt fizikai mennyiségeket átlagértékekre és fluktuációkra bontva, a felírható egyenletek száma mindig kisebb lesz az ismeretlenek számánál. Az egyenletrendszer „le kell zárni”, vagyis az ismeretlenek számának meg kell egyeznie a megoldásra váró egyenletek számával. Ehhez parametrizációs eljárások szükségesek. Az ismeretlen mennyiségeket ismert mennyiségek segítségével adjuk meg.

A Boussinesq-féle közelítést alkalmazva (lásd a VII.1. fejezetet is) a Navier–Stokes-egyenletek a következő alakban írhatóak fel:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla u &= f v - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \Delta u, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla v &= -f u - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \Delta v, \\ \frac{\partial w}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla w &= -g \left(1 - \frac{\theta'}{\bar{\theta}} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \Delta w.\end{aligned}$$

Itt és a továbbiakban a felülvonás az átlagolás, a vesszős jelölés a fluktuációkat adja meg. Boussinesq-féle közelítés szerint a sűrűség fluktuációk hatását csak a felhajtó erő számításánál vesszük figyelembe a mozgásegyenleteknél, ahol ν a molekuláris diffúziós együttható.

A mozgásegyenletek átlagértékekre és fluktuációkra történő felbontását, valamint az átlagolás elvégzését az x -irányú mozgásegyenlet példáján mutatjuk be. Nézzük az átlagokra felírt egyenletet:

$$\begin{aligned}\overline{\frac{\partial}{\partial t}(\bar{u} + u')} + \overline{(\bar{u} + u') \frac{\partial}{\partial x}(\bar{u} + u')} + \overline{(\bar{v} + v') \frac{\partial}{\partial y}(\bar{u} + u')} + \overline{(\bar{w} + w') \frac{\partial}{\partial z}(\bar{u} + u')} &= \\ = -\overline{\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x}(\bar{p} + p')} + \overline{f(\bar{u} + u')} + \overline{\nu(\Delta \bar{u} + \Delta u')}.\end{aligned}$$

Az átlagokra vonatkozó egyenletek felírásakor kihasználjuk a Reynolds-féle átlagolás szabályait pl. (az átlag átlaga maga az átlag, továbbá, a fluktuációk átlaga nulla, illetve az átlagolás és a deriválás sorrendje felcserélhető egymással), továbbá alkalmazzuk a

$$\begin{aligned}\overline{u' \frac{\partial u'}{\partial x}} + \overline{v' \frac{\partial u'}{\partial y}} + \overline{w' \frac{\partial u'}{\partial z}} &= \overline{\frac{\partial}{\partial x} u' u'} - \overline{u' \frac{\partial u'}{\partial x}} + \overline{\frac{\partial}{\partial y} u' v'} - \overline{u' \frac{\partial v'}{\partial y}} + \overline{\frac{\partial}{\partial z} u' w'} - \overline{u' \frac{\partial w'}{\partial z}} = \\ = -\overline{u' \left(\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} \right)} + \overline{\frac{\partial}{\partial x} u' u'} + \overline{\frac{\partial}{\partial y} u' v'} + \overline{\frac{\partial}{\partial z} u' w'} &= \overline{\frac{\partial}{\partial x} u' u'} + \overline{\frac{\partial}{\partial y} u' v'} + \overline{\frac{\partial}{\partial z} u' w'}.\end{aligned}$$

összefüggést, ahol kihasználtuk a fluktuációs sebességkomponensekre felírt kontinuitási egyenletet

$$\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} + \frac{\partial w'}{\partial z'} = 0$$

Ezek felhasználásával az x -irányú átlagos sebesség időbeli változását leíró egyenlet:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} \overline{u' u'} + \frac{\partial}{\partial y} \overline{u' v'} + \frac{\partial}{\partial z} \overline{u' w'} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + f \bar{v} + \nu \Delta \bar{u}$$

A fenti egyenlet az alábbi alakban is felírható:

$$\frac{d\bar{u}}{dt} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla \bar{u} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + f \bar{v} - \left(\frac{\partial}{\partial x} \overline{u' u'} + \frac{\partial}{\partial y} \overline{u' v'} + \frac{\partial}{\partial z} \overline{u' w'} \right) + \nu \Delta \bar{u}$$

ahol $\overline{u' u'}$, $\overline{u' v'}$ és $\overline{u' w'}$ másodrendű momentumok az x -irányú sebesség turbulens fluxusai – az egységnyi felületen időegységenként áthaladó turbulens impulzusáramok. Az y és z irányra vonatkozó egyenleteket a következő alakban kapjuk:

$$\begin{aligned}\frac{d\bar{v}}{dt} &= \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla \bar{v} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} - f\bar{u} - \left(\frac{\partial}{\partial x} \overline{v'u'} + \frac{\partial}{\partial y} \overline{v'v'} + \frac{\partial}{\partial z} \overline{v'w'} \right) + \nu \Delta \bar{v}, \\ \frac{d\bar{w}}{dt} &= \frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + \bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla \bar{w} = -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} - \left(\frac{\partial}{\partial x} \overline{w'u'} + \frac{\partial}{\partial y} \overline{w'v'} + \frac{\partial}{\partial z} \overline{w'w'} \right) + \nu \Delta \bar{w}.\end{aligned}$$

Itt elhanyagoltuk a Coriolis-erő vertikális sebességtől függő komponenseit. A turbulens feszültség mátrixa szimmetrikus, így a fluxusokra érvényes, hogy

$$\overline{u'v'} = \overline{v'u'}, \quad \overline{u'w'} = \overline{w'u'}, \quad \text{és} \quad \overline{v'w'} = \overline{w'v'}.$$

A fenti egyenletek az átlagértékekre vonatkoznak. A *fluktuációkra vonatkozó egyenleteket* úgy kapjuk meg, hogy a pillanatnyi értékekre vonatkozó egyenletekből kivonjuk a középértékekre vonatkozó egyenleteket:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u'}{\partial t} + \bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla u' + \mathbf{v}' \cdot \nabla \bar{u} + \mathbf{v}' \cdot \nabla u' &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x} + f v' + \left(\frac{\partial}{\partial x} \overline{u'u'} + \frac{\partial}{\partial y} \overline{u'v'} + \frac{\partial}{\partial z} \overline{u'w'} \right) + \nu \Delta u', \\ \frac{\partial v'}{\partial t} + \bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla v' + \mathbf{v}' \cdot \nabla \bar{v} + \mathbf{v}' \cdot \nabla v' &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial y} - f \bar{u} + \left(\frac{\partial}{\partial x} \overline{v'u'} + \frac{\partial}{\partial y} \overline{v'v'} + \frac{\partial}{\partial z} \overline{v'w'} \right) + \nu \Delta v', \\ \frac{\partial w'}{\partial t} + \bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla w' + \mathbf{v}' \cdot \nabla \bar{w} + \mathbf{v}' \cdot \nabla w' &= g \frac{\theta'}{\theta} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial z} + \left(\frac{\partial}{\partial x} \overline{w'u'} + \frac{\partial}{\partial y} \overline{w'v'} + \frac{\partial}{\partial z} \overline{w'w'} \right) + \nu \Delta w' .\end{aligned}$$

A Boussinesq-féle közelítés alkalmazásával a *kontinuitási egyenlet* a következő alakban írható fel:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Az átlagértékekre és fluktuációkra történő felbontás, valamint az átlagolás elvégzése után:

$$\frac{\partial}{\partial x} (\overline{u + u'}) + \frac{\partial}{\partial y} (\overline{v + v'}) + \frac{\partial}{\partial z} (\overline{w + w'}) = 0,$$

Az átlagértékekre vonatkozó egyenlet a következő alakban írható fel:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = 0,$$

míg a fluktuációkra vonatkozó kontinuitás egyenlet:

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0.$$

A *termodinamika egyenlet*

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \Theta = \nu_s \Delta \Theta + Q,$$

ahol ν_s a hőre vonatkozó molekuláris diffúziós együttható, míg Q jelöli a nem-adiabatikus hőközlést, mint pl. a sugárzási folyamatok, vagy a fázisátalakulást. Az átlagértékekre és fluktuációkra való felbontása és az átlagolás elvégzése után:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\overline{\theta + \theta'}) + (\overline{\mathbf{v} + \mathbf{v}'} \cdot \nabla)(\overline{\theta + \theta'}) = \overline{\nu_\theta \Delta(\theta + \theta')} + \overline{Q} + \overline{Q'}$$

Az átlagértékekre és a fluktuációkra rendre a következő egyenletek adódnak:

$$\frac{d\overline{\theta}}{dt} = \frac{\partial \overline{\theta}}{\partial t} + \overline{\mathbf{v}} \cdot \nabla \overline{\theta} = - \left(\frac{\partial}{\partial x} \overline{u' \theta'} + \frac{\partial}{\partial y} \overline{v' \theta'} + \frac{\partial}{\partial z} \overline{w' \theta'} \right) + \nu_\theta \Delta \overline{\theta} + \overline{Q}$$

$$\frac{\partial \theta'}{\partial t} + \overline{\mathbf{v}} \cdot \nabla \theta' + \mathbf{v}' \cdot \nabla \overline{\theta} + \mathbf{v}' \cdot \nabla \theta' = + \left(\frac{\partial}{\partial x} \overline{u' \theta'} + \frac{\partial}{\partial y} \overline{v' \theta'} + \frac{\partial}{\partial z} \overline{w' \theta'} \right) + \nu_\theta \Delta \theta' + Q'$$

Az egyenletekben megjelenő $\overline{u' \theta'}$, $\overline{v' \theta'}$ és $\overline{w' \theta'}$ másodrendű momentumok a turbulens hőáramot jelölik.

Passzív nyomanyag (ide tartozik a vízgőz is) esetében a *kontinuitási egyenlet* alakja:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla c = \nu_c \Delta c + F_c$$

ahol F_c jelöli a források és a nyelők együttes intenzitását, ν_c az adott nyomanyagra vonatkozó molekuláris diffúziós együttható. Levegőkémiai modellekben természetesen ezt a tagok részletesen kifejtik, gondoljunk csak a különböző kémiai átalakulásokra.

$$\frac{\partial}{\partial t}(\overline{c + c'}) + (\overline{\mathbf{v} + \mathbf{v}'} \cdot \nabla)(\overline{c + c'}) = \overline{\nu_c \Delta(c + c')} + \overline{F} + \overline{F'}$$

Az átlagértékekre és a fluktuációkra vonatkozó egyenletek a következő alakban írhatóak fel:

$$\frac{\partial \overline{c}}{\partial t} + \overline{\mathbf{v}} \cdot \nabla \overline{c} = - \left(\frac{\partial}{\partial x} \overline{u' c'} + \frac{\partial}{\partial y} \overline{v' c'} + \frac{\partial}{\partial z} \overline{w' c'} \right) + \nu_c \Delta \overline{c} + \overline{F_c}$$

$$\frac{\partial c'}{\partial t} + \overline{\mathbf{v}} \cdot \nabla c' + \mathbf{v}' \cdot \nabla \overline{c} + \mathbf{v}' \cdot \nabla c' = + \left(\frac{\partial}{\partial x} \overline{u' c'} + \frac{\partial}{\partial y} \overline{v' c'} + \frac{\partial}{\partial z} \overline{w' c'} \right) + \nu_c \Delta c' + F_c'$$

Az eddigiek alapján itt is igaz, hogy $\overline{u' c'}$, $\overline{v' c'}$ és $\overline{w' c'}$ másodrendű momentumok a passzív nyomanyag turbulens áramainak felelnek meg.

A most felírt egyenleteket az Einstein-féle indexes jelöléssel is megadhatjuk. (Lásd a **II.3. fejezetet** is). Ezt a felírási módot elterjedten alkalmazzák a turbulencia-elméletben, ezért itt is bemutatjuk. Nézzük az átlagokra és a fluktuációkra vonatkozó egyenleteket!

$$\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial t} + \overline{u_j} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} + f \varepsilon_{ij3} \overline{u_j} - \delta_{i3} g - \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{u_i' u_j'} + \nu \frac{\partial^2 \overline{u_i}}{\partial x_j^2},$$

$$\frac{\partial u_i'}{\partial t} + \overline{u_j} \frac{\partial u_i'}{\partial x_j} + u_j' \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + u_j' \frac{\partial u_i'}{\partial x_j} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x_i} + f \varepsilon_{ij3} u_j' + \delta_{i3} g \frac{\theta'}{\theta} + \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{u_i' u_j'} + \nu \frac{\partial^2 u_i'}{\partial x_j^2},$$

$$\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_i} = 0$$

$$\frac{\partial u_i'}{\partial x_i} = 0,$$

$$\frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial x_j} = -\frac{\partial}{\partial x_j} \overline{u_j' \Theta'} + \nu_s \frac{\partial^2 \bar{\Theta}}{\partial x_j^2} + \bar{Q},$$

$$\frac{\partial \Theta'}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \Theta'}{\partial x_j} + u_j' \frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial x_j} + u_j' \frac{\partial \Theta'}{\partial x_j} = +\frac{\partial}{\partial x_j} \overline{u_j' \Theta'} + \nu_s \frac{\partial^2 \Theta'}{\partial x_j^2} + Q',$$

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{c}}{\partial x_j} = -\frac{\partial}{\partial x_j} \overline{u_j' c'} + \nu_c \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial x_j^2} + \bar{F}_c,$$

$$\frac{\partial c'}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial c'}{\partial x_j} + u_j' \frac{\partial \bar{c}}{\partial x_j} + u_j' \frac{\partial c'}{\partial x_j} = +\frac{\partial}{\partial x_j} \overline{u_j' c'} + \nu_c \frac{\partial^2 c'}{\partial x_j^2} + F_c',$$

ahol

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

a Kronecker-delta,

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{ha } i, j, k \text{ az } 1, 2, 3 \text{ permutációi} \\ -1 & \text{ha } i, j, k \text{ az } 1, 2, 3 \text{ fordított sorrendű permutációi} \\ 0 & \text{ha legalább két index értéke azonos} \end{cases}$$

a Levi–Civita-szimbólum.

A *turbulencia nemlineáris jellegének* köszönhetően az átlagértékekre vonatkozó hidro-termodinamikai egyenletrendszer több ismeretlent tartalmaz, mint ahány egyenletből áll. Az egyenletrendszer „nincs lezárva”.

Horizontálisan homogén és izotróp turbulenciát feltételezve, elhanyagolva a rendezett feláramlást ($\bar{w}=0$), a molekuláris diffúzió hatását, a nem-adiabatikus hőfelvételt és hőleadást, s nem törődve a passzív nyomanyagokkal (szennyezőanyag szállítási egyenlet elhagyásával) a következő egyenletrendszert kapjuk:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} &= f(\bar{v} - \bar{v}_g) - \frac{\partial}{\partial z} \overline{u' w'}, \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} &= -f(\bar{u} - \bar{u}_g) - \frac{\partial}{\partial z} \overline{v' w'}, \\ \frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial z} \overline{w' \Theta'}, \end{aligned}$$

ahol

$$\bar{u}_g = \frac{1}{\rho f} \frac{\partial p}{\partial x} \quad \text{és} \quad \bar{v}_g = -\frac{1}{\rho f} \frac{\partial p}{\partial y}$$

rendre az x és y irányú geosztrófikus szélösszetevő. A fenti egyenletrendszerben a turbulens áramok $(\overline{u'w'}, \overline{v'w'} \text{ és } \overline{\theta'w'})$ ismeretlenek. Első rendű lezárást alkalmazva ezeket a turbulens áramokat a meteorológiai állapothatározók átlagértékeivel, illetve gradienseivel közelítjük. Ez az elsőrendű lezárás. Az első momentumokat (átlagok) alkalmazzuk a parametrizációkban:

$$\overline{u_j' \phi'} = -K_\phi \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x_j},$$

ahol $\overline{u_j' \phi'}$ a ϕ meteorológiai állapothatározó vertikális turbulens árama, K_ϕ a turbulens diffúziós együtthatója. A turbulens diffúziós együttható értékét különböző parametrizációs eljárások segítségével tudjuk meghatározni (Stull, 1988). Az egyik leggyakrabban alkalmazott módszer a keveredési úthossz elmélete, amely szerint az impulzusszállításra vonatkozó turbulens diffúziós együttható (K_m) jól közelíthető pl. a következő egyenlettel:

$$K_m = \kappa^2 z^2 \left[\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right)^2 \right]^{1/2}$$

A képletben κ a Kármán-féle állandó $\kappa = 0,4$. A mérések azt mutatják, hogy a momentumra (K_m) és a hőre (K_H) vonatkozó turbulens diffúziós együttható értéke eltérő. Neutrális rétegződés esetén például $K_H \approx 1,35 \cdot K_m$.

1,5-es (másfeles) rendű lezárás esetén a turbulens áramokat (második momentumok) részben parametrizáljuk, részben modellezzük (megoldjuk a második momentumok időbeli változását leíró egyenletet). Leggyakrabban a turbulens kinetikus energia időbeli változására, illetve a potenciális hőmérsékleti fluktuációk varianciájára (szórásnégyzet) felírt egyenleteket oldjuk meg (Yamada és Mellor, 1975). Az egyszerűsített kormányzó egyenletek:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} &= f(\bar{v} - \bar{v}_g) - \frac{\partial}{\partial z} \overline{u'w'}, \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} &= -f(\bar{u} - \bar{u}_g) - \frac{\partial}{\partial z} \overline{v'w'}, \\ \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial z} \overline{w'\theta'}, \\ \frac{\partial \bar{e}}{\partial t} &= -\overline{u'w'} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} - \overline{v'w'} \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} + \frac{g}{\bar{\theta}} \overline{w'\theta'} - \frac{\partial}{\partial z} \left[\overline{w' \left(\frac{p'}{\rho} + e \right)} \right] - \varepsilon, \\ \frac{\partial}{\partial t} \overline{\theta'^2} &= -2 \overline{w'\theta'} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} \overline{w'\theta'^2} - 2\varepsilon_\theta, \end{aligned}$$

ahol $e = \frac{1}{2} [(u')^2 + (v')^2 + (w')^2]$ a turbulens kinetikus energia pillanatnyi értéke, míg $\bar{e} = \frac{1}{2} (\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2}) = \frac{1}{2} \overline{(u_i')^2} \equiv \frac{1}{2} \overline{u_i'^2}$ a turbulens kinetikus energia átlagértéke, $\overline{\theta'^2}$ a potenciális hőmérséklet varianciája (szórásnégyzete, vagy második momentuma), ε és ε_θ disszipációs tagok. A fenti egyenletrendszerben a másodrendű momentumokon $(\overline{u'w'}, \overline{v'w'}, \overline{e}, \overline{\theta'w'}, \overline{p'w'}/\bar{\rho})$ kívül a harmadrendű momentumokat $(\overline{w'e} \equiv \overline{w'(u_i')^2}, \overline{w'\theta'^2})$ és a disszipációs tagok (ε és ε_θ) is ismeretlenek.

Az egyik lehetséges parametrizációs eljárás, amely segítségével meghatározhatóak az ismeretlenek az ún. K - e hipotézis, ahol a turbulens diffúziós együtthatót a turbulens kinetikus energia $\bar{e}$ és a keveredési út l (lásd a VIII.2.

és **VIII.3. fejezet**) ismeretében valamilyen módszerrel parametrizáljuk $\left(K \propto l \cdot (\bar{\epsilon})^{\frac{1}{2}} \text{ vagy } K \propto (\bar{\epsilon})^{\frac{1}{2}} \right)$, míg a turbulens kinetikus energia időbeli megváltozását számítjuk. A következőkben egy lehetséges parametrizációs eljárást mutatunk be. Nézzük meg az ismeretlen mennyiségek meghatározását ismert változókkal.

$$\begin{aligned}\overline{u'w'} &= -K_m \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}, \\ \overline{v'w'} &= -K_m \frac{\partial \bar{v}}{\partial z}, \\ \overline{w'\theta'} &= -K_h \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} - \gamma_\epsilon, \\ \overline{w' \left(\frac{p'}{\rho} + \epsilon \right)} &= A_1 e^{-1/2} \frac{\partial \bar{\epsilon}}{\partial z}, \\ \overline{w'\theta'^2} &= A_2 e^{-1/2} \frac{\partial \bar{\theta'^2}}{\partial z}, \\ \epsilon &= \frac{e^{-3/2}}{A_3}, \\ \epsilon_\theta &= \frac{e^{-1/2} \bar{\theta'^2}}{A_4},\end{aligned}$$

ahol γ_ϵ a potenciális hőmérséklet vertikális áramának parametrizációs eljárásában használt adaléktag, ami megadja

neutrális rétegződés, $\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} = 0$ esetén jellemző áramot. A turbulens diffúziós együtthatót a turbulens kinetikus energia

négyzetgyökével parametrizáljuk $K_m = A_m (\bar{\epsilon})^{\frac{1}{2}}$, $K_h = A_H (\bar{\epsilon})^{\frac{1}{2}}$. A fenti egyenletekben $A_m, A_H, A_1, A_2, A_3, A_4$ a stabilitástól függő konstansok.

Használhatunk ennél bonyolultabb parametrizációkat is. Sok esetben a kinetikus energia disszipációjára vonatkozó egyenletet is megoldják. Végezetül ennek az alakját mutatjuk be. A levezetést lásd pl. Stull (1988) könyvében.

ϵ definíciós egyenlete:

$$\epsilon = \nu \left[\left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right)^2 \right] + \nu \frac{\partial^2 \bar{\epsilon}}{\partial x_j^2}.$$

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} = B_1 \frac{\epsilon}{\bar{\epsilon}} \left(-\overline{u'w'} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} - \overline{v'w'} \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right) + B_2 \frac{\epsilon}{\bar{\epsilon}} \frac{g}{\bar{\theta}} \overline{w'\theta'} + B_4 \frac{\partial}{\partial z} \left[K \frac{\partial \epsilon}{\partial z} \right] - B_3 \frac{\epsilon^2}{\bar{\epsilon}},$$

ahol B_1, B_2, B_3, B_4 a stabilitástól függő állandók. A turbulens kinetikus energia $(\bar{\epsilon})$ és a turbulens kinetikus energia disszipáció (ϵ) ismeretében módosul a turbulens diffúziós együttható parametrizálása is:

$$K_m = B_{5m} \frac{(\bar{\epsilon})^2}{\epsilon}, \quad K_H = B_{5H} \frac{(\bar{\epsilon})^2}{\epsilon}.$$

ahol B_{sm} , B_{sh} a stabilitástól függő állandók. Minél magasabb rendű lezárást alkalmazunk, annál több egyenlettel és magasabb rendű momentumokkal számolhatunk. A másod- és annál magasabb rendű lezárásokkal itt nem foglalkozunk. A meteorológiai modellezésben az elsőrendű, illetve az 1,5-es rendű lezárási hipotézisek terjedtek el.

VII.2.1. A potenciális hőmérséklet vertikális fluxusa lineárisan csökken a magassággal.

$$\overline{\theta'w'} = a - bz,$$

ahol $a = 0,3 \text{ K ms}^{-1}$, $b = 3 \cdot 10^{-4} \text{ K s}^{-1}$. a) Horizontálisan homogén és izotróp turbulencia feltételezésével, az advekciónak, a konvekciónak és a sugárzási folyamatoknak elhanyagolásával adjuk meg a potenciális hőmérséklet lokális megváltozását 1 órára. b) Ha feltételezzük, hogy a potenciális hőmérséklet időben nem változik, s a fluxus divergenciát a horizontális advekciónak okozza, akkor 5 ms^{-1} -os szélesség esetén mekkora az 1 km-re eső potenciális hőmérsékletkülönbség? Hogyan jutunk el az alkalmazott egyenletekhez? (Stull (1988) 95. oldal 3.5.4.2. feladat alapján)

VII.2.2. Erős szélben $v = 10 \text{ ms}^{-1}$ nedves levegő advektálódik az alsó 500 m-es rétegben. mintaterületre $\frac{\partial q}{\partial n} = 5 \text{ g kg} / 100 \text{ km}$. Az átlagos specifikus nedvesség nem változik. Adjuk meg a specifikus nedvesség áram divergenciát! Tekintsünk egy $1 \text{ km} \cdot 1 \text{ km} \cdot 0,5 \text{ km}$ -es légrést. Mennyi vízgőz áramlott be az advekciónak révén, illetve mennyi távozott a magasabb légrétegbe 1 óra alatt? A nedves levegő sűrűsége az egyszerűség kedvéért legyen 1 kg m^{-3} . ((Stull (1988) 95. oldal 3.5.4.3. feladat alapján)

VII.2.3. Vezessük le az átlagértékekre vonatkozó kinetikus energia egyenletet! Legyen

$$E_k = \frac{u_i^2}{2}$$

VII.2.4. Vezessük le a turbulens kinetikus energia egyenletét!

VII.2.5. Vezessük le a potenciális hőmérséklet második momentumára vonatkozó egyenletet!

VII.3. A turbulencia Kolmogorov-féle spektrális elmélete

A Kolmogorov-féle spektrális elmélet az áramlás energiaspektrumát „jósolja meg” néhány egyszerű, kézenfekvő feltevés alapján. Az egyszerűség kedvéért foglalkozunk összenyomhatatlan folyadék sűrűdéses áramlásával, a folyadék sűrűségét vegyük egységnyinek és a Reynolds-szám legyen nagy ($Re > 10^4$). A Reynolds-szám alakja:

$$Re = \frac{V \cdot L}{\nu},$$

ahol V a karakterisztikus áramlási sebesség ms^{-1} -ban, ami a sebesség nagyságrendjét jellemzi, L a karakterisztikus méret méterben, ami a folyadékban keletkező mozgás kiterjedésének nagyságrendjét, pl. a létrejövő hullámok hullámhosszát, vagy az örvények átmérőjét jellemzi, ν pedig a kinematikai viszkozitás, $\text{m}^2 \text{s}^{-1}$ -ban.) A folyadékot F külső erővel kényszerítjük mozgásra, amellyel jellegzetes nagyságrendű mozgást keltünk. Az áramlás mozgásegyenlete:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p + \mathbf{F} + \nu \nabla^2 \mathbf{v}$$

A kontinuitási egyenlet:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

A mozgásegyenletet $\mathbf{v}$ -vel beszorozva és a teljes térre integrálva a mozgási energia tendenciájára a

$$\frac{dE_K}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 dV = \int_V (\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} - \nu \omega^2) dV$$

összefüggés adódik, ahol $\omega = \nabla \times \mathbf{v}$, az örvényvektor, és a teljes tér (a tartomány) határán a sebesség zérus. Mivel a Reynolds-szám a mozgásegyenlet baloldali inerciális tagjának és a jobboldali viszkozus erő hányadosának nagyságrendjét is kifejezi, megállapítható, hogy nagy Reynolds-számok ($Re > 10^4$) esetén a viszkozus erő elhanyagolható. Ekkor a külső kényszer folyamatosan növelné a folyadék kinetikus energiáját, hiszen a disszipáló hatás nem játszana szerepet. A tapasztalat azonban azt mutatja, hogy a mozgás ilyen feltételek mellett is stacionáriussá válik, azaz a kinetikus energia állandó marad. A folyadékba bevitt energiának tehát disszipálnia kell. A paradoxont azzal oldhatjuk fel, ha figyelembe vesszük, hogy a kényszer hatására létrejövő mozgásformán kisebb skálájú (nagyságrendű) instabilitások jönnek létre, az instabilitások megerősödnek, majd rajtuk is kisebb skálájú instabilitások keletkeznek és így tovább, amíg a megjelenő egyre kisebb karakterisztikus méretű örvények olyan kicsinnyé válnak, hogy a hozzájuk rendelhető Reynolds-szám egységnyi nagyságrendű lesz. Ekkor azonban a viszkozus erő már nem hanyagolható el, így a bevitt energia disszipálódik. A folyamatot energia kaszkádnak nevezzük. Megjegyezzük, hogy az egyre kisebb és kisebb nagyságrendű mozgásokat azért képzelhetjük egyre kisebb és kisebb átmérőjű örvényeknek, mert a kinetikus energia tendencia egyenlete mutatja, hogy az összenyomhatatlan folyadékban csak akkor léphet fel viszkozus erő, ha a mozgás örvényes.

Kolmogorov a fenti kép alapján adott eljárást az energia spektrális eloszlásának meghatározására. Az energia spektrális eloszlását a sebesség Fourier-sorral történő előállításának segítségével definiálhatjuk.

Legyen a v_i sebesség összetevők Fourier-sora:

$$v_i(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}_i} \tilde{v}_i e^{i \mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}},$$

ahol $\mathbf{r}$ a helyvektor, $\mathbf{v} = v_i = (u, v, w)$ a sebességvektor $\mathbf{k}_i$ pedig a sebesség Fourier-sorában fellépő hullámszám vektorokon fut végig. Belátható, hogy az átlagos kinetikus energia sűrűség a Fourier-sorok segítségével az alábbi alakban állítható elő:

$$\bar{E} = \frac{1}{V} \int_V E dV = \frac{1}{2V} \int_V \mathbf{v}^2 dV = \frac{1}{2V} \int_V (u^2 + v^2 + w^2) dV = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} (|\tilde{u}_{\mathbf{k}}|^2 + |\tilde{v}_{\mathbf{k}}|^2 + |\tilde{w}_{\mathbf{k}}|^2).$$

Homogén és izotróp turbulencia, valamint elegendően nagy áramlási tartomány esetén (ahol a sebességek a tartomány határán eltűnnek, vagy periodikus határfeltétel érvényes) a hullámszám-térbeli összegezés a hullámszám

$k = |\mathbf{k}| = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}$ abszolút értéke szerinti integrállal helyettesíthető, azaz

$$\bar{E} = \frac{1}{V} \int_V E dV = \frac{1}{2V} \int_V \mathbf{v}^2 dV = \int_{\mathbf{k}} \mathfrak{Z}(k) dk,$$

ahol a $\mathfrak{Z}(k)$ spektrális energiasűrűség, a kicsiny (k és $k + \delta k$ közötti) δk hullámszám tartományba eső, egységnyi térfogatra jutó energiát jelenti.

Legyen a folyadékot a k_0 hullámszám nagyságrendjének megfelelő mozgásra kényszerítő F erő által az egységnyi térfogatba bevitt teljesítmény ε (mértékegysége: $\text{m}^2 \text{s}^{-3}$). Ennek a teljesítménynek a stacionárius állapot fennmaradása esetén a kisebb skálák felé kell átfolytania egészen addig, míg a mozgás nagyságrendje eléri a k_v nagyságrendet, amelynek megfelelő Reynolds-szám már egységnyi, s ahol bekapcsolódik a viszkózus erő. A viszkózus erő a nagy skálán bevitt és az energia kaszkáddal a kisebb skálákig lejutó teljesítményt disszipálja. (A Navier–Stokes-egyenletnek a megoldása a viszkozitással zérushoz tartó határesetben nem adja vissza az Euler-egyenlet megoldását.)

A fentiek alapján kézenfekvőnek látszik, hogy a k_0 és k_v hullámszám között, ahol a mozgást közvetlenül nem befolyásolja sem a kényszerítő, sem a viszkózus erő, az energiaspektrumot az

$$\mathfrak{Z}(k) = f(\varepsilon, k, k_0, k_v)$$

függvénnyel írhatjuk le, azaz az energiaspektrum a bevitt teljesítmény és az adott hullámszám mellett, további két karakterisztikus hullámszámtól függ, az energiabevitel valamint a disszipáció skáláját jellemző hullámszámtól.

Kolmogorov lokalitási tétele további egyszerűsítést mond ki. A tétel szerint a folyadék az energiakaszkád folyamat során „elfelejti” az energiabevitelt jellemző mozgásforma nagyságrendjét és nem érzékeli a viszkozitás belépésére jellemző nagyságrendet sem. Ennek megfelelően az energiaspektrum k_0 és k_v között csak ε és k függvénye.

$$\mathfrak{Z}(k) = f(\varepsilon, k).$$

A lokalitási tétel alapján Kolmogorov egyszerű dimenzióanalízissel meghatározta az energiaspektrumot:

$$\mathfrak{Z}(k) = K \varepsilon^{\frac{2}{3}} k^{-\frac{5}{3}},$$

ahol K dimenzió nélküli állandó, amelynek nagyságára az elmélet nem ad becslést, a mérések szerint $K = 1,5$. A Kolmogorov-féle „mínusz ötharmados spektrum” a tapasztalat szerint a homogén izotróp turbulencia esetén teljesen általánosan érvényes.

A kétdimenziós turbulencia. A kétdimenziós turbulencia tulajdonságai gyökeresen eltérnek a fentiekben tárgyalt háromdimenziós turbulenciáétól. Az eltérés oka döntően az, hogy a kétdimenziós áramlásban, ha a viszkozitás elhanyagolható, akkor a kinetikus energia mellett az örvényesség négyzetének teljes térre vett integrálja, az ensztrófia is megmaradó mennyiség. (Háromdimenziós esetben az ensztrófia megmaradás nem érvényes. Két dimenzióban az ensztrófia azért marad meg, mert az örvényességi egyenlet nemlineáris tagjából hiányzik az örvény-nyújtás (vortex stretching)). Kétdimenziós áramlás esetén megmutatható, hogy a tehetetlenségi tartományban az ensztrófia kisebb mérettartományok (a nagyobb hullámszámok) felé, míg az energia a kisebb hullámszámok felé áramlik.

Dimenzióanalízissel igazolható, hogy ha folyadékot a k_0 hullámszám nagyságrendjének megfelelő mozgásra kényszerítő F erő az egységnyi térfogatba η ensztrófiát visz be egységnyi időtartamonként (itt az ensztrófia-bevitel dimenziója s^{-3}), akkor a stacionárius energia spektrum:

$$\mathfrak{R} = K_\eta \eta^{\frac{2}{3}} k^{-3}.$$

VII.3.1. Bizonyítsuk be, hogy összenyomhatatlan folyadék áramlására vonatkozóan

$$\int_V \mathbf{v} \cdot \nabla^2 \mathbf{v} \, dV = - \int_V \omega^2 \, dV,$$

ahol $\omega = \nabla \times \mathbf{v}$ az örvényvektor, és az integrálást a teljes térre kell kiterjeszteni, amelynek határán a sebesség zérussá válik.

VII.3.2. A tengerek jellegzetes áramlási sebessége 10 cm s^{-1} , a mozgás térbeli nagyságrendje 1000 km , a víz kinematikai viszkozitása $10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$. Mekkora a Reynolds-szám? Elhanyagolhatóak-e ezen a skálán a viszkózus erők? Mekkora méretek esetén kell a viszkózus hatásokat is figyelembe venni?

VII.3.3. Vezessük le a Kolmogorov-féle „mínusz ötharmados” spektrumot dimenzióanalízissel. Tételezzük fel Kolmogorov-nyomán, hogy az energiaspektrum csak az ε energiaáram és a k hullámszám hatványának szorzata.

VII.3.4. Definiáljuk a τ_k átfordulási időt, azzal az idővel, amellyel az k^{-1} távolság v_k sebességgel megtehető!

Tegyük fel, hogy a v_k sebesség csak a hullámszám és az energiaspektrum függvénye. Vezessük le ez alapján a stacionárius energiaspektrumot megadó összefüggést!

VII.3.5. Az áramlás energiaspektrumát jól jellemzi, hogy adott viszkozitás és hullámszám mellett mennyi idő (τ_k^v) alatt csökkentené zérusra a viszkózus erő a sebességet. Ezt az időt disszipációs időnek nevezzük. Határozzuk meg, hogy milyen hullámszám, illetve hullámhossz esetén egyezik meg az átfordulási idő és a disszipációs idő. Az átfordulási időt fejezzük ki ε és k függvényeként! (Az úgynevezett Kolmogorov-féle skálát a hullámhossz és a hullámszám definiálja.)

VII.3.6. Bizonyítsuk be, hogy amennyiben a viszkozitás elhanyagolható, akkor a

$$Z = \frac{1}{2} \int_A \zeta^2 \, dA$$

ensztrófia megmaradó mennyiség!

VII.3.7. Mutassuk meg, hogy háromdimenziós esetben az örvényvektor ($\omega(0, 0, \zeta)$ és $\mathbf{v}(x, y)$) elhanyagolható viszkozitású és összenyomhatatlannak tekinthető áramlás esetén sem megmaradó mennyiség! Miért különbözik a háromdimenziós eset a kétdimenzióstól?

VII.3.8. Bizonyítsuk be, hogy

$$Z = \frac{1}{A} \frac{1}{2} \int_A \zeta^2 \, dA = \int_k \Re \, dk,$$

k térbeli előállítása és az energia egységnyi térfogatra jutó részének

$$E = \frac{1}{A} \frac{1}{2} \int_A v^2 \, dA = \int_k \Im \, dk,$$

k térbeli kifejezése között fennáll az

$$Z = \frac{1}{A} \frac{1}{2} \int_A \zeta^2 \, dA = \int_k \Re \, dk = \int_k k^2 \Im \, dk$$

összefüggés!

VII.3.9. Fjortoft egyszerű példát konstruált a kétdimenziós turbulencia vizsgálatára. Feltételezte, hogy az áramlási függvény a k térben mindössze három módból áll, amelyek hullámszáma rendre $k_1, k_2 = 2k_1, k_3 = 3k_1$. Vizsgáljuk meg, hogy amennyiben az áramló folyadék összenyomhatatlan, és a viszkozitás elhanyagolható, akkor amennyiben a $k_2 = 2k_1$ hullámszámnak megfelelő energia csökken, akkor mi történik a többi hullámszámokhoz tartozó energiával és ensztrófiával!

VII.3.10. Tételezzük fel, hogy a kétdimenziós áramlásban az ensztrófiára vonatkozóan a három-dimenziós áramlásban tapasztalt energia kaszkádhoz hasonló folyamat megy végbe. Az ensztrófia spektrum stacionáriussá válik, és ennek megfelelően a külső hatás miatt a k_0 hullámszámon időegység alatt betáplált η ensztrófia (mértékegysége s^{-3}) a kisebb hullámszámok felé áramlik mindaddig, míg valamilyen kicsiny hullámhosszon a viszkozitás fel nem emészti. A közbülső hullámhosszakon, ahol sem a külső kényszer, sem a viszkozitás hatása nem játszik szerepet (ez a tehetetlenségi tartomány), az ensztrófia-áramra teljesül a Kolmogorov-féle lokálitási tétel, azaz

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{R}(\eta, k)$$

Határozzuk meg dimenzióanalízissel az ensztrófia-spektrum alakját!

VIII. fejezet - A felszínközei réteg és a planetáris határréteg

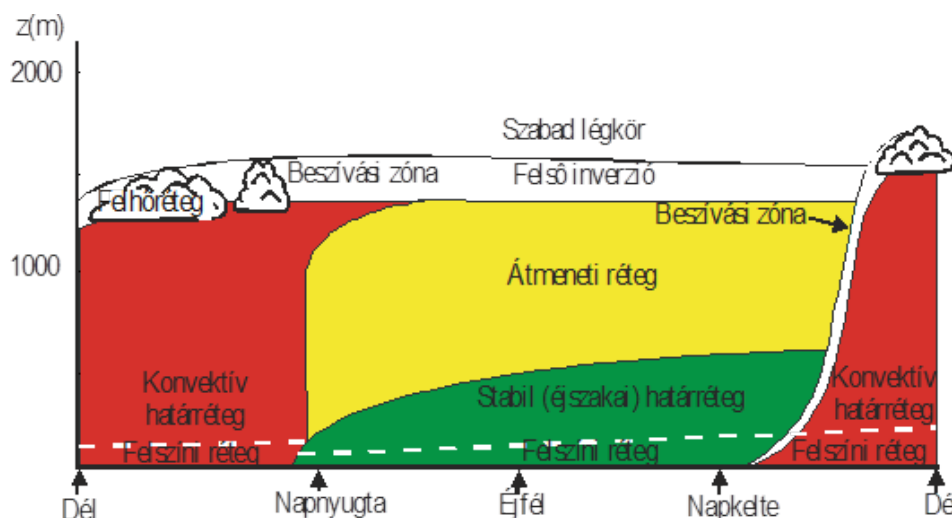
Weidinger Tamás
Baranka Györgyi
Bordás Árpád
Leelőssy Ádám

A planetáris határréteg (PHR) a légkör alsó 0,1–3 km-es rétege, ahol a felszín, mint termikus és mechanikus kényszer fejt ki hatását. A PHR folyamatai különböző tér- és időskálán vesznek részt a szabad légkör áramlási rendszerének alakításában.

A határréteg két részre bontható, a felszínközei vagy állandó fluxusú rétegre, ahol eltekintünk a turbulens áramok (vagy fluxusok) magasság szerinti változásától. A felszín közelében ez az egyszerűsítés megkönnyíti a turbulens áramok kiszámítását (lásd pl. a Monin–Obukhov-féle hasonlósági elméletet).

A felszínközei réteg a teljes határréteg alsó 5–10%-a. Itt a szélsébség közel logaritmikusan nő a magassággal. A Coriolis-erő hatása elhanyagolható a kis szélsébség, valamint az örvények rövid élettartalma miatt. A nyomási gradiens erő mellett a viszkózus és a turbulens nyíró erők határozzák meg az áramlás képét. A felszín feletti néhány cm vastag rétegben a molekuláris viszkózitási erő, míg e felett a turbulens nyíróerők dominálnak. Az előbbi lamináris alrétegnek, az utóbbit állandó fluxusú rétegnek nevezzük.

A felszínközei réteg felett helyezkedik el a szélfordulási réteg (vagy Ekman-réteg), ahol három erő – a nyomási gradiens erő, a Coriolis-erő és a vertikális szélnyírás magasság szerinti változásával arányos turbulens sűrűlási erő – alakítja az áramlást. A nappali konvektív PHR-ben a termikus és a mechanikus kényszer, míg az éjszakai határrétegben a mechanikus turbulencia alakítja a meteorológiai állapotjelzők profiljait (VIII.1. ábra).



VIII.1. ábra. A planetáris határréteg szerkezete és napi menete (Stull, 1988 alapján).

A felszíni energiamérleg komponensek, turbulens áramok

A felszín-bioszféra-légkör közötti nyomanyag, impulzus, szenzibilis és látens hő szállítását a turbulens örvények végzik. Horizontálisan homogén és izotróp turbulencia feltételezésével élünk. A felszín energiaháztartása:

$$R_n = H + LE + G + \Delta,$$

ahol R_n a sugárzásegyenleg, H a szenzibilis, LE a látens hőáram, G a talajba jutó hőáram, Δ az egyéb mérleg komponensek (pl. a fotoszintézis hatása, az advekcio, vagy a tárolási tag, ha a vizsgált felszín nem a talaj) amit gyakran elhanyagolnak. További fontos tényező a rendelkezésre álló energia (A), valamint a szenzibilis hőáram és a látens hőáram hányadosa, az ún. Bowen-arány (B):

$$A = R_n - G, \quad B = \frac{H}{LE}.$$

A turbulens áram (F_z) az adott tulajdonság (s) felületegységen időegység alatt átáramló mennyisége. Matematikailag a vertikális sebesség (w) és az s tulajdonság kovarianciája:

$$F_z = \overline{w's'}.$$

A felülvonás a Reynolds-féle átlagolás jele ($s = \bar{s} + s'$), ahogy az **I.5.** és a **VII.1. fejezet**ben láttuk. Számításaink során – első közelítésként – feltételezzük, hogy az átlagos vertikális sebesség nulla ($\bar{w} = 0$). Az általánosan alkalmazott jelölések szerint az impulzus (τ), a szenzibilis (H) és a látens hőáram (LE), valamint a nyomanyagáram (F_c) alakja:

$$\tau = -\rho_m \overline{w'u'} = \rho_m u_*^2 = \rho_m K_M \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}, \quad \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = \frac{u_*}{\kappa z} \phi_M(\zeta), \quad K_M = \frac{\kappa u_* z}{\phi_M(\zeta)},$$

$$H = c_{pm} \rho_m \overline{w'\Theta'} = -\rho_m c_{pm} u_* T_* = -\rho_m c_{pm} K_H \frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial z}, \quad \frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial z} = \frac{T_*}{\kappa z} \phi_H(\zeta), \quad K_H = \frac{\kappa u_* z}{\phi_H(\zeta)},$$

$$LE = L \rho_m \overline{w'q'} = -L \rho_m u_* q_* = -L \rho_m K_E \frac{\partial \bar{q}}{\partial z}, \quad \frac{\partial \bar{q}}{\partial z} = \frac{q_*}{\kappa z} \phi_E(\zeta), \quad K_E = \frac{\kappa u_* z}{\phi_E(\zeta)},$$

$$F_c = \rho_m \overline{w'c'} = -\rho_m u_* c_* = -\rho_m K_c \frac{\partial \bar{c}}{\partial z}, \quad \frac{\partial \bar{c}}{\partial z} = \frac{c_*}{\kappa z} \phi_c(\zeta), \quad K_c = \frac{\kappa u_* z}{\phi_c(\zeta)},$$

ahol $\rho_m \equiv \rho$ a nedves levegő átlagos sűrűsége, c_{pm} az állandó nyomáson vett fajhője, L a fázisátalakulási hő, κ a Kármán-féle konstans, z a magasság (a kiszorítási rétegvastagság (d) felett), Θ, q, c, u és w rendre a potenciális hőmérséklet, a specifikus nedvesség (a vízgőz-sűrűség és a nedves levegő sűrűségének a hányadosa), a nyomanyag-koncentráció, illetve a a sebesség vektor horizontális és a vertikális összetevője. u_*, T_*, q_*, c_* a dinamikus sebesség, hőmérséklet, specifikus nedvesség és koncentráció. Az egyes $s \in (M, H, E, c)$ tulajdonságokra (impulzus, szenzibilis és látens hő, nyomanyag) vonatkozó turbulens diffúziós együtthatók és a stabilitástól függő univerzális függvények rendre: K_z és $\phi_s(\zeta)$, ahol $\zeta = z/L_{Mon}$ a dimenzió nélküli magasság, ahol a Monin–Obukhov-féle hossz alakja:

$$L_{Mon} = \frac{u_*^2}{\kappa \beta T_*}.$$

Az adott (s) tulajdonság átlagos profiljának az ismeretében, a hasonlósági elmélet alapján:

$$\Delta \bar{s} = \bar{s}(\zeta_2) - \bar{s}(\zeta_1) = \frac{s_*}{\kappa} \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \varphi_s(\zeta) d \ln \zeta = \frac{s_*}{\kappa} [\Phi_s(\zeta_2) - \Phi_s(\zeta_1)]$$

ahol $\Phi_s(\zeta)$ az univerzális függvények integrál alakja. Gyakorlati számításokban a szélsébség és a potenciális hőmérséklet különbség ismeretében a gradiens Richardson-szám felhasználásával határozzuk meg a Monin–Obukhov-féle hossz értékét iterációs eljárással

$$Ri = \frac{\beta \Delta \bar{\Theta}}{(\Delta u)^2} \Delta z = \Delta \zeta \frac{\Phi_H(\zeta_2) - \Phi_H(\zeta_1)}{[\Phi_M(\zeta_2) - \Phi_M(\zeta_1)]^2},$$

majd az univerzális függvények integrált alakjának ismeretében a fenti összefüggések felhasználásával számítjuk

ki az egyes turbulens áramokat. Itt $\beta = g / \bar{\Theta}$ a stabilitási paraméter, g a nehézségi gyorsulás. Több szinten végzett mérések alapján profil illesztés segítségével, illetve az egyes alrétegekből kapott áramok átlagolásával számíthatjuk a fluxusokat.

VIII.1. A felszínközeli réteg szélprofiljai

A felszínközeli réteg profiljai között kiemelt szerepe van a szél magasságszerinti változásának, s „a mögötte levő” impulzus szállításnak, gondoljunk csak a szennyezőanyag terjedés modellezésére, vagy a szélenergetikai vizsgálatokra. A szélprofil alakja a stabilitás függvénye, amit a hőmérséklet magasságszerinti változása

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial z} \rightarrow \frac{\Delta \bar{T}}{\Delta z}, \text{ illetve } \frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial z} \rightarrow \frac{\Delta \bar{\Theta}}{\Delta z},$$

a Richardson-szám

$$Ri = \beta \frac{\partial \bar{T} / \partial z}{(\partial u / \partial z)^2} \rightarrow \beta \frac{\Delta \bar{T}}{(\Delta u)^2} \Delta z,$$

vagy a dimenzió nélküli magasság $\zeta = \frac{z}{L}$, határoz meg.

Indifferens rétegződés esetén $\left(\frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial z} \rightarrow 0, Ri \rightarrow 0, \zeta \rightarrow 0 \right)$ a szélprofil alakját a felszín feletti magasság és az impulzusáram határozza meg. A dimenzióanalízis alapján:

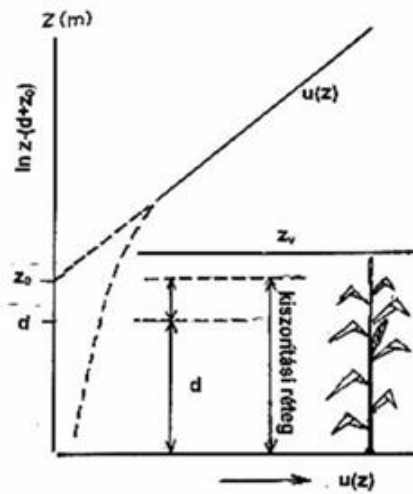
$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \sim \frac{u_*}{z}.$$

Az arányossági tényező a Kármán-konstans (κ), amelynek az értéke 0,4 körüli. A turbulens áramok állandóságával

($\tau = \text{állandó}$, $u_* = \text{állandó}$) számolva a felszín felett z_0 érdességi magasságban válik nullává az elméleti sebességprofil. Magas vegetációk (erdők, gyümölcsösök, gabona földek), illetve beépített területek (városok) esetén az áramlás „nem lát el” a felszínig. Ekkor az ideális szélsébségi profil a kiszorítási rétegvastagság (emelt felszín – d) feletti z_0 szintben lesz nulla

$$\bar{u}(z) = \frac{u_*}{\kappa} \frac{\ln(z - d)}{\ln z_0}.$$

A kiszorítási rétegvastagság a vegetáció, illetve az épületek átlagos magasságának (h) hozzávetőlegesen 60–80%-a (VIII.1.1. ábra). Az érdességi magasság függ a felszínboritottságtól (pl. vegetáció, és az épületek szerkezete) és a szélesebségtől is. Vízfelszín felett tízed mm-es nagyságrendű, alacsony vegetációk (pl. gabona) felett 1–10 cm-es míg nagyvárosi területek felett 1,5–2 m körüli.



VIII.1.1. ábra. A növényállomány feletti mért és logaritmikus szélprofil. A két görbe a $(z-d) \gg z_0$ szinten lesz közel azonos. d a kiszorítási rétegvastagság, z_0 az érdességi magasság (Huzsvai et al., 2005).

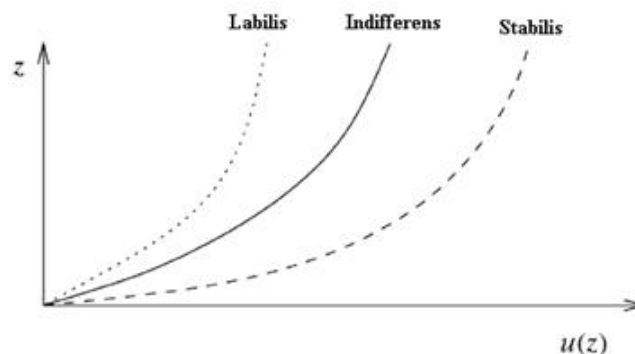
Stabilis légrétegződés esetén ($\partial \bar{\Theta} / \partial z > 0$, $Ri > 0$, $\zeta > 0$) az indifferens rétegződéshez képesti kisebb turbulens diffúziós együttható miatt a szélesebség jobban nő a magassággal. Ezt jellemzi a logaritmikus lineáris profil.

Erősen stabilis egyensúlyi helyzetben ($Ri > 0,25$) a turbulens diffúzió már elhanyagolható, a magassággal közel lineárisan növekvő szélprofilokkal találkozunk. A logaritmikus-lineáris profil alakja:

$$\bar{u}(z) = \frac{u_*}{\kappa} \frac{\ln(z-d)}{\ln z_0} + b_u [(z-d)/z_0]$$

ahol b_u értékét az alkalmazott univerzális függvény adja meg.

Labilis légrétegződés esetén ($\partial \bar{\Theta} / \partial z < 0$, $Ri < 0$, $\zeta < 0$) az indifferens rétegződéshez képest nagyobb turbulens diffúziós együttható miatt a szélesebség kevésbé nő a magassággal (VIII.1.2. ábra). Hasonló módon az érdesség növekedésével csökken a szélesebség magasságszerinti növekedése, vagyis vastagabb lesz a felszínközeli réteg.



VIII.1.2. ábra. A felszínközeli szélprofil eltérése a logaritmikustól. Stabilis légrétegződés esetén a szél gyorsabban növekszik a magassággal, kisebb a felszínközeli réteg vastagsága.

Szélenergetikai vizsgálatokban legtöbbször hatványkitevős profilokkal dolgozunk:

$$\bar{u}(z) = \bar{u}(z_{ref}) \left(\frac{z}{z_{ref}} \right)^\beta,$$

ahol z_{ref} a referencia szint magassága, ami általában 10 m, 30 m, vagy a szélgenerátor szintje, ahol a szélmérés folyik, β a hatványkitevő. Indifferens rétegződés esetén a hatványkitevő értéke 1/7 körüli. Stabilis rétegződés esetén ennél nagyobb, akár 0,4–0,45-ös értékkel számolhatunk, míg labilis rétegződés esetén 1/7-es értéknél kisebb 0,07–0,1 körüli kitevőkkel számolhatunk. A hatványkitevő és az érdesség közötti kapcsolat attól függ, hogy milyen vastag a felszínközeli réteg, s hol van a referencia szint, s milyen magasságra kívánjuk megadni a szélesebességet. Vízfelszín felett (közel indifferens rétegződés, s a felszín közelében gyorsan növekvő szélesebesség) általában egy hatványkitevőt alkalmaznak.

Indifferens rétegződés esetén a potenciális hőmérséklet nem változik a magassággal, míg a specifikus nedvesség és a nyomanyag koncentráció első közelítésként szintén logaritmikusan változik a magassággal. Stabilis és labilis rétegződés esetén a szélprofilhoz hasonló alakú profilokkal számolhatunk mind a potenciális hőmérséklet, mind a specifikus nedvesség, mind a különböző nyomanyagok esetén.

VIII.1.1. Mikor számíthatunk nagyobb szélre egy vízparti mérőhelyen (10 m-es szinten), ha a víz felől, vagy a víz felé fúj a szél?

VIII.1.2. Az impulzusáram megadható a turbulens diffúziós együttható K_M alapján: $\tau = \rho K_M \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}$. Adjuk meg a turbulens diffúziós együttható magasságszerinti változását indifferens rétegződés esetén! Adjuk meg a keveredési

út (l_M) magasságszerinti változását is! Tudjuk, hogy $\tau = \rho_m l_M^2 \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right)^2$.

VIII.1.3. Kármán Tódor feltételezése szerint nagy Reynolds-számok esetén a turbulens keveredés geometriailag mindenütt azonos módon zajlik le, úgy, hogy csupán a hossz- és időléptékben lépnek fel különbségek. Mutassuk meg, hogy a geometriai hasonlósági elv alapján az

$$l_M = -K \frac{\partial \bar{u} / \partial z}{\partial^2 \bar{u} / \partial z^2}$$

alakú keveredési úthossz ($l_M > 0$) feltételezésével is a logaritmikussal egyenlethez jutunk!

VIII.1.4. Adjuk meg az érdességi magasság értékét, indifferens rétegződés feltételezésével, ha két szintben ismert a szélesebesség, s a kiszorítási rétegvastagság elhanyagolható (alacsony vegetáció)!

Adjuk meg az érdességi magasság meghatározásának a hibáját is, ha a felszín felett 0,5 m-es magasságban a szélesebesség $\bar{u}(0,5 \text{ m}) = 1 \text{ m s}^{-1}$, s 2 m-es magasságban $\bar{u}(2 \text{ m}) = 1,6 \text{ m s}^{-1}$, a szélesebesség mérés pontossága mindkét szinten $\pm 0,1 \text{ m s}^{-1}$! Milyen határok között lehet az érdességi magasság? Hogy csökkenthetjük a bizonytalanságot?

VIII.1.5. Egy 8 m-es mérőtornyban, alacsony vegetáció felett logaritmikusan azonos távolságokban mérünk szélesebességet. Indifferens rétegződés esetén a 20 perces átlagértékeket a VIII.1.1. táblázat szemlélteti.

VIII.1.1. táblázat. Szélesebesség profil alacsony vegetáció felett indifferens rétegződés mellett.

z [m]	0,5	1	2	4	8

$\bar{u} [\text{m s}^{-1}]$	1,5	1,9	2,4	2,8	3,4

Adjuk meg az érdességi magasság, a dinamikus sebesség és a 4 m-es szintre vonatkozó turbulens diffúziós együttható értékét logaritmikus profilközelítés alkalmazásával!

VIII.1.6. Adott a dinamikus sebesség (u_*) a szonikus anemométer méréseiből, s k szintben az átlagos szélesebbesség értékei ($\bar{u}_i = \bar{u}(z_i)$, $i = 1, 2, \dots, k$). Adjunk módszert indifferens rétegződés esetén a kiszorítási rétegvastagság becslésére!

VIII.1.7. Adjuk meg hatványkitevős szélprofil esetén a keveredési út és a turbulens diffúziós együttható magasságszerinti változását!

VIII.1.8. Hogyan függ indifferens rétegződés esetén a hatványkitevő a magassággal? Hogy jött ki hatványkitevőre az 1/7-es becslés? Általánosítsuk eredményünket a Monin–Obukhov-féle elméleti szélprofil alapján:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = \frac{u_*}{\kappa} \phi_M(\zeta),$$

illetve

$$\Delta \bar{u} = \bar{u}_2 - \bar{u}_1 = \bar{u}(\zeta_2) - \bar{u}(\zeta_1) = \frac{u_*}{\kappa} \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \phi_M(\zeta) d \ln \zeta = \frac{u_*}{\kappa} [\Phi_M(\zeta_2) - \Phi_M(\zeta_1)]$$

VIII.1.9. 10 m-es szinten a szélesebbesség 4 m s^{-1} . Adjuk meg a szélesebbesség értékét 30 m, 50 m és 100 m-es magasságban a) logaritmikus profil közelítéssel, ha az érdességi magasság 10 cm, illetve 50 cm; b) az érdességi magasság 50 cm, a kiszorítási rétegvastagság 3 m, c) a hatványkitevős szélprofil közelítéssel, ha az egyenlet kitevője rendre 0,08; 1/7; 0,2 és 0,4; d) 1/7-es profilkitevővel és $d = 3 \text{ m}$ kiszorítási rétegvastagsággal!

VIII.1.10. A hatványkitevős profil alakja függ a felszín típusától, (pl. városi (beépített), vagy beépítetlen természetes, vagy mezőgazdasági környezet), illetve függ a légköri stabilitástól (besugárzás, szélesebbesség stb.) (VIII.1.2. táblázat). A stabilitási viszonyokat gyakran a Pasquill–Gifford-féle stabilitási kategóriák alapján adjuk meg (VIII.1.3. táblázat). Ez a közel fél évszázados kategorizálás egyszerűségével és könnyű alkalmazhatóságával máig használatos.

VIII.1.2. táblázat. A β hatványkitevő karakterisztikus értékei városi és vidéki területeken a Pasquill–Gifford-féle stabilitási osztályok szerint. Az A osztály az erősen labilis rétegződést jelöli D osztály az indifferens rétegződést, míg az F osztály az erősen stabilis légrétegződést jelenti.

Stabilitási osztály	Városi terület	Vidéki terület
A	0,15	0,07
B	0,15	0,07
C	0,20	0,10
D	0,25	0,15
E	0,30	0,35
F	0,30	0,45

VIII.1.3. táblázat. A a Pasquill–Gifford stabilitási osztály meghatározása a szélesebbesség, a besugárzás (nappal) és a felhőzet (éjszaka) alapján.

Szélesebbesség	Nappali besugárzás ($G > 0$)	Felhőzet - éjszaka ($G = 0$)

$\bar{u}(10\text{ m})$ [m s ⁻¹]	Erős	Mérsékelt	Gyenge	$N \geq 4/8$	$N < 4/8$
$\bar{u} < 2$	A	A-B	B	-	-
$2 \leq \bar{u} < 3$	A-B	B	C	E	F
$3 \leq \bar{u} < 5$	B	B-C	C	D	E
$5 \leq \bar{u} < 6$	C	C-D	D	D	D
$6 \leq \bar{u}$	C	D	D	D	D

A szélesebbesség 10 m-es szinten 4 m s⁻¹. Határozzuk meg a szélesebbességet nappal közepes besugárzás esetén 30 m, 50 m, 100 m és 150 m-es szinten városi és vidéki területek felett! Adjuk meg a két sebességprofil az éjszakai órákban is! A felhőzet 5 okta.

VIII.1.11. A modell rácsnégyzetében különböző felszíntípusok vannak. A vízfelület aránya 20% ($z_0 = 10^{-3}$ m), mezőgazdasági terület 40% ($z_0 = 4 \cdot 10^{-2}$ m, $d = 6 \cdot 10^{-1}$ m), erdő 30% ($z_0 = 1,2 \cdot 10^0$ m, $d = 10 \cdot 10^1$ m), település 10% ($z_0 = 0,6 \cdot 10^0$ m, $d = 3 \cdot 10^1$ m). Dolgozzunk ki módszert az átlagos kiszorítási rétegvastagság és az átlagos érdességi magasság meghatározására! A logaritmikus profilegyenlethez induljunk ki, ahol a sebesség logaritmikus skálán lineárisan változik. Megjegyezzük, hogy másképpen kell átlagolni az érdességi magasságot (z_0) és a kiszorítási rétegvastagságot (d). Gondoljunk csak a logaritmikus szélprofil-egyenletre.

VIII.2. Monin–Obukhov-féle hasonlósági elmélet és alkalmazásai

A felszínközeli réteg turbulens áramainak meghatározásában máig a legelterjedtebb elmélet a Monin–Obukhov-féle hasonlósági elmélet, ami a fluxusok és a profilok közötti kapcsolat leírásán alapul a stabilitástól függő univerzális függvényeket felhasználva (Foken, 2006). Az elmélet horizontálisan homogén turbulencia feltételezésével él.

A terepi mérések eredményeként számos különböző univerzális függvényt alkalmaznak. Mód van érzékenységi vizsgálatok elvégzésére is (Weidinger et al., 2000, Foken, 2008). E fejezetben Högström (1988) által javasolt univerzális függvényeket alkalmazzuk, aki a klasszikus Businger et al. (1971) függvények állandóit igazította az újabb mérési eredményekhez. Kiindulási egyenleteink:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = \frac{u_*}{\kappa z} \phi_M(\zeta), \quad \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} = \frac{T_*}{\kappa z} \phi_H(\zeta).$$

Az univerzális függvények alakja:

$$\phi_M(\zeta) = (1 - 19,3\zeta)^{-1/4}, \quad -2 \leq \zeta \leq 0,$$

$$\phi_M(\zeta) = 1 + 6\zeta, \quad 0 \leq \zeta \leq 1,$$

$$\phi_H(\zeta) = 0,95(1 - 11,6\zeta)^{-1/2}, \quad -2 \leq \zeta \leq 0,$$

$$\phi_H(\zeta) = 0,95(1 + 8,2\zeta), \quad 0 \leq \zeta \leq 1.$$

A κ Kármán-konstans értéke 0,4. (Gyakran a potenciális hőmérsékleti gradiens helyett a hőmérsékleti gradienst alkalmazzák.)

Erősen labilis helyzetben ($\zeta < -2$) nem követünk el nagy hibát, ha továbbra is a hatványkitevős univerzális függvényeket használjuk. Erősen stabilis rétegződés esetén ($\zeta > 1$) gyakran egy állandó értékkel helyettesítik az univerzális függvényeket. A mi esetünkben:

$$\phi_M(\zeta) = 7, \quad \zeta > 1,$$

$$\phi_H(\zeta) = 0,95 \cdot 9,2 \cong 8,75, \quad \zeta > 1.$$

A specifikus nedvesség és a nyomanyag gradiensekre felírt egyenletekben a hőszállításhoz alkalmazott univerzális függvényeket használjuk. Ezek a turbulencia passzív karakterisztikái, s a hőszállításhoz hasonlóan viselkednek, ugyanazok az örvények szállítják őket. (Természetesen a részletesebb vizsgálatoknál a kémiai reakciókról sem szabad megfeledkezni – ezzel a kérdéskörrel itt már nem foglalkozunk.)

A gradiensekre felírt egyenletek integrálásával kapjuk a szélsébség és a potenciális hőmérsékleti profilt:

$$\bar{u} = \frac{u_*}{\kappa} [\ln z - \ln z_0 - (\psi_M(\zeta) - \psi_M(\zeta_0))],$$

$$\bar{\Theta} = \bar{\Theta}(z_0) + \frac{T_*}{\kappa} [0,95(\ln z - \ln z_0) - (\psi_H(\zeta) - \psi_H(\zeta_0))],$$

ahol $\zeta_0 = z/z_0$. Az univerzális függvények integrálásával $\psi_M(\zeta)$ és $\psi_H(\zeta)$ alakja labilis rétegződés esetén:

$$\psi_M(\zeta) = -2 \arctan(X) + 2 \ln \left(\frac{1+X}{2} \right) + \ln \left(\frac{1+X^2}{2} \right) + \frac{\pi}{2}, \quad \text{ahol } X = (1 - 19,3\zeta)^{1/4},$$

$$\psi_H(\zeta) = 2 \ln \left(\frac{1+X}{2} \right), \quad \text{ahol } X = (1 - 11,6\zeta)^{1/2}.$$

Stabilis rétegződés esetén (logaritmikus-lineáris profilközelítés):

$$\psi_M(\zeta) = -6\zeta, \quad \psi_H(\zeta) = -8,2\zeta.$$

Erősen stabilis ($\zeta > 1$) rétegződés esetén: $\psi_M(\zeta) = -6 \cdot (1 + \ln \zeta)$, $\psi_H(\zeta) = -8,2 \cdot (1 + \ln \zeta)$.

Megjegyezzük, hogy részletesebb vizsgálatoknál más-más érdességi magasságot használhatunk a szélsébség és a hőmérsékleti (s így a nedvesség és a nyomanyag) profiloknál (z_{0u}, z_{0T}).

VIII.2.1. A felszínközeli réteg profiljai a következő mennyiségektől függenek: a felszín (illetve a kiszorítási rétegvastagság) feletti magasságtól (z), az impulzusáramtól ($\tau = \rho_m u_*^2$), a szenzibilis hőáramtól ($H = \rho_m c_{pm} u_* T_*$) és a stabilitási paramétertől ($\beta = g/\bar{T}$). Adjuk meg a stabilitástól függő magasság dimenziójú mennyiség (a Monin–Obukhov-féle hossz L_{Mon}) alakját! A dimenzió nélküli univerzális függvényeket a $\zeta = z/L_{Mon}$ ismeretében számoljuk.

VIII.2.2. Milyen pontossággal adható meg a Monin–Obukhov-féle hossz, ha a momentum áram meghatározásának a pontossága 5%, a szenzibilis hőáramé 15%?

VIII.2.3. Adjuk meg az univerzális függvények értékét erősen stabilis egyensúlyi helyzetben, amikor a hőmérsékleti rétegződés (inverzió) akadályozza a turbulens mozgások kifejlődését! Ilyenkor a turbulencia mechanikus eredetű és fejletlen.

VIII.2.4. Értelmezzük a stabilis rétegződést jellemző logaritmikus lineáris profilokat! Hogyan kapjuk őket?

VIII.2.5. Adjuk meg a dimenzióanalízis alkalmazásával a jól fejlett labilis rétegződésre jellemző univerzális függvények alakját! Adjuk meg a dimenzió nélküli magasság és a Richardson-szám közötti kapcsolatot is! Mennyiben különbözik az általánosan használt Högstöm (1988) alakú univerzális függvényekkel kapott összefüggéstől?

VIII.2.6. Milyen megfontolásokkal kapjuk az

$$\bar{u} = \frac{u_*}{\kappa} [\ln z - \ln z_0 - (\psi_M(\zeta) - \Psi_M(\zeta_0))]$$

profil egyenletet a $\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = \frac{u_*}{\kappa z} \phi_M(\zeta)$ kiindulási egyenletből?

VIII.2.7. A meteorológiai állapotjelzők ($\bar{s}$) különbségét leíró egyenletet megadhatjuk a

$$\Delta \bar{s} = \bar{s}(\zeta_2) - \bar{s}(\zeta_1) = \frac{s_*}{\kappa} \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \phi_s(\zeta) d \ln \zeta = \frac{s_*}{\kappa} [\Phi_s(\zeta_2) - \Phi_s(\zeta_1)]$$

alakban is. Adjuk meg $\Phi_s(\zeta)$ alakját a leggyakrabban használt univerzális függvényekre, amelyeket a VIII.2.1. táblázat szemléltet!

VIII.2.1. táblázat. A hasonlósági elméletben alkalmazott főbb univerzális függvények paraméteres alakja (a , b és c állandók).

Stabilis rétegződés ($\zeta > 0$), $\phi_M(\zeta)$, $\phi_T(\zeta)$	Labilis rétegződés ($\zeta < 0$), $\phi_M(\zeta)$, $\phi_T(\zeta)$
$a\zeta + b$	$a\zeta + b$
$c\zeta^2 + a\zeta + b$	$a(-\zeta)^{-c}$, ahol $c > 0$
$1 + \zeta X^{-1}$, ahol $X = a\zeta + b$ és $X > 0$	$X^{-1/2}$, ahol $X = a\zeta + b$ és $X > 0$
$X^{3/2}$	$X^{-1/3}$
$X^{3/4}$	$X^{-1/4}$

VIII.2.8. Milyen kapcsolat van a $\frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial z}$ és a $\frac{\partial \bar{T}}{\partial z}$ derivált között?

VIII.2.9. Adjuk meg a Högstöm-féle univerzális függvények alkalmazásával a Richardson-szám, illetve a momentumra és a hőre vonatkozó turbulens diffúziós együttható magasságszerinti változását stabilis, indifferens és labilis rétegződés esetén!

VIII.2.10. Adjuk meg a Högström-féle univerzális függvények ($\phi_M(\zeta)$ és $\phi_H(\zeta)$) menetét a $-2 \leq \zeta \leq 1$ tartományban!

Egy kukoricatábla felett a mért dinamikus sebesség $u_* = 0,3 \text{ m s}^{-1}$, a kiszorítási rétegvastagság $d = 1,0 \text{ m}$, az érdességi magasság $z_0 = 0,05 \text{ m}$. A referencia szint potenciális hőmérséklete $\bar{\Theta}(z_0 + d) = 295 \text{ K}$. Rajzoljuk fel az állomány ($\bar{h} = 1,3 \text{ m}$) felett a 2–10 m-es rétegben a szélesebbesség és a potenciális hőmérséklet profilját a) indifferens esetben; b) stabilis esetben, ha $L_{Mon} = 50 \text{ m}$, $L_{Mon} = 200 \text{ m}$; c) labilis esetben, ha $L_{Mon} = -50 \text{ m}$, $L_{Mon} = -200 \text{ m}$! Adjuk meg a szenzibilis hőáram becsült értékeit is! A levegő sűrűsége legyen $\rho_m = 1,2 \text{ kg m}^{-3}$, a nedves levegő fajhője pedig $c_{pm} = 1010 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$.

VIII.2.11. Számítsuk ki u_* és T_* értékét, ha fűfelszín felett $z = 0,5 \text{ m}$ -es szinten $\bar{T} = 10,02 \text{ °C}$, $\bar{u} = 1,22 \text{ m s}^{-1}$, míg $z = 2 \text{ m}$ -es szinten $\bar{T} = 10,63 \text{ °C}$, $\bar{u} = 2,05 \text{ m s}^{-1}$!

VIII.2.12. Számítsuk ki u_* és T_* értékét, ha $z = 1 \text{ m}$ -es szinten $\bar{T} = 27,11 \text{ °C}$, $\bar{u} = 2,04 \text{ m s}^{-1}$, míg $z = 4 \text{ m}$ -es szinten $\bar{T} = 26,43 \text{ °C}$, $\bar{u} = 2,57 \text{ m s}^{-1}$!

VIII.2.13. Egy vidéki területen 2 m-es és a 8 m-es szinten a szélesebbesség és a hőmérséklet értékei a VIII.2.2. táblázat mutatja.

VIII.2.2. táblázat. A szélesebbesség és a hőmérséklet értékei alacsony vegetáció felett.

$z [\text{m}]$	2	8
$\bar{T} [\text{°C}]$	29,05	28,21
$\bar{u} [\text{m s}^{-1}]$	3,31	4,04

Adjuk meg a hőmérséklet és a sebesség gradiens értékét a 4 m-es szintre! Számítsuk ki a gradiens Richardson-szám és a Monin–Obukhov-féle hossz értékét is erre a szintre! Adjuk meg u_* és T_* értékét is! Becsüljük meg az impulzus áramot és a szenzibilis hőáramot is, ha a nyomás 1010 hPa és a levegő relatív nedvessége (ez a sűrűség és a nedves levegő állandó nyomáson vett fajhőjének meghatározásához kell) 65%! (Arya (2001) nyomán.)

VIII.2.14. A következő átlagos szélesebbesség ($\bar{u}$) és potenciális hőmérsékleti adatokat ($\bar{\Theta}$) az 1968-as legendás Kansas (USA) mérési expedíció során rögzítették. A VIII.2.3. táblázat adatai egy dél körüli labilis rétegződést jellemeznek (Arya (2001) nyomán).

VIII.2.3. táblázat. Déli szélesebbesség és hőmérsékleti profil az 1968-as Kansas (USA) mérési expedíció adataiból alacsony vegetáció felett (préri).

$z [\text{m}]$	2	4	8	16	32
$\bar{u} [\text{m s}^{-1}]$	5,81	6,70	7,49	8,14	8,66
$\bar{\Theta} [\text{K}]$	307,20	306,65	306,28	305,88	305,62

a) Határozzuk meg a Richardson-szám magasságszerinti változását! b) Becsüljük meg a Monin–Obukhov-féle hosszat a $\phi_H = \phi_M^2 = (1 - 15\zeta)^{-1/2}$ Businger et al. (1971) és Högström (1988) univerzális függvényei alapján!

c) Számítsuk ki a 2 m-es és a 4 m-es szint mérései alapján (gradiens módszerrel) az impulzus és a szenzibilis hőáram értékét! A levegő sűrűsége legyen $\rho = 1,2 \text{ kg m}^{-3}$, $c_{pm} = 1015 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$.

VIII.2.15. A Kansas mérési expedíció (1968 USA) egyik esti profilmérését a VIII.2.4. táblázat mutatja (Arya, 2001). A nyomás 1000 hPa.

VIII.2.4. táblázat. Esti szélsőbesség és hőmérsékleti profil az 1968-as Kansas (USA) mérési expedíció adataiból alacsony vegetáció felett (préri).

$z \text{ [m]}$	2	4	8	16
$\bar{u} \text{ [m s}^{-1}\text{]}$	2,84	3,39	4,01	4,85
$\bar{T} \text{ [}^\circ\text{C]}$	33,09	33,31	33,57	33,82

a) Számítsuk ki a profil módszer segítségével u_* és T_* értékét! b) Határozzuk meg ezeket a paramétereket a gradiens módszer alapján is a 2 m-es és a 4 m-es szint mérései alapján! c) Hasonlítsuk össze az eredményeket a direkt árammérésekkel ($\overline{u'w'} = 0,044 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}$, $\overline{\Theta'w'} = -0,023 \text{ m s}^{-1} \text{ K}^{-1}$)!

A profil módszer alkalmazásakor az egyes alrétegek adataiból számított Monin–Obukhov-féle hosszak közötti eltérést minimalizáljuk. Számolhatunk az összes lehetséges alréteggel ($(\Delta z)_{ij} = z_i - z_j, z_i > z_j$), vagy csak az egymás felett elhelyezkedőkkel ($(\Delta z)_i = z_{i+1} - z_i, z_{i+1} > z_i$).

Első lépésként meghatározzuk az egyes alrétegekre jellemző Richardson-számot, majd az Ri és a ζ közötti kapcsolat ismeretében (adott univerzális függvényrendszer esetén) meghatározzuk az egyes alrétegekre jellemző Monin–Obukhov-féle hosszat.

A következő lépésben elkészítjük az $\bar{u} - (\ln z - \Psi_M(\zeta))$ grafikonokat, majd a lineáris görbeillesztés paramétereiből

meghatározzuk a $\frac{\kappa}{u_*}$ és az $\ln z_0$ paramétert, hiszen

$$(\ln z_i - \Psi_M(\zeta_i)) = \frac{\kappa}{u_*} \bar{u}_i + \ln z_0$$

Ezt követően elkészítjük a $\bar{\Theta} - (\ln z - \Psi_H(\zeta))$ grafikonokat, majd a lineáris görbeillesztés paramétereiből

meghatározzuk a $\frac{\kappa}{T_*}$ és a $\left(-\frac{\kappa}{T_*} \Theta_{ref} + \ln z_0 \right)$ mennyiségeket, hiszen:

$$(\ln z_i - \Psi_H(\zeta_i)) = \frac{\kappa}{u_*} \bar{\Theta}_i - \frac{\kappa}{u_*} \bar{\Theta}_{ref} + \ln z_0$$

A feladat megoldásánál Högström (1988) univerzális függvényeit alkalmazzuk!

VIII.2.16. Bugacpusztán eddy kovarianciás mérések alapján a szenzibilis hőáram és az impulzusáram félórás átlaga $H = 125 \text{ W m}^{-2}$, $\tau = 0,1875 \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-2}$. A nyomás 997 hPa, a hőmérséklet 31°C , a relatív nedvesség 35%. Az ózon koncentráció értéke a 0,4 m-es szinten 37,2 ppb; a 3,6 m-es szinten 38,4 ppb. Adjuk meg az ózon fluxust (F_{O_3}) [$\mu\text{g m}^{-2} \text{ s}^{-1}$] egységben!

VIII.3. A felszínközeli réteg turbulencia karakterisztikáinak számítása

A felszínközeli réteg turbulens folyamatait (i) az energiamérleg komponensek [a sugárzásegyenleg (R_n), a szenzibilis- (H) és a latens hőáram (LE), valamint a talajba jutó hőáram (G)], (ii) a felszíni karakterisztikák [az érdességi magasság (z_0) és a kiszorítási rétegvastagság (d)], (iii) az impulzus áram (τ), (iv) a különböző nyomanyag áramok (F_i) határozzák meg.

A felszínközeli réteg leírásában fontos szerepet kapnak a turbulens lezármaztatott mennyiségek, mint:

- a Monin–Obukhov-féle hossz (L_{Mo}),
- a dinamikus- sebesség, hőmérséklet, specifikus nedvesség és koncentráció (u_*, T_*, q_*, c_*),
- az egyes tulajdonságokra (impulzus, szenzibilis és latens hő (illetve vízgőz) és a nyomanyagok) vonatkozó turbulens diffúziós együtthatók (K_M, K_H, K_E, K_c),
- a turbulens diszperziós együtthatók (pl.: $\sigma_u = (\overline{u'u'})^{1/2}$, $\sigma_v = (\overline{v'v'})^{1/2}$, $\sigma_w = (\overline{w'w'})^{1/2}$, $\sigma_T = (\overline{T'T'})^{1/2}$),
- a konvektív felszínközeli réteget és a határréteget jellemző konvektív sebesség, vagy Deardoff-sebesség: $w^* = (\beta h u_* T_*)^{1/3}$, ahol h a PHR magasság. (Első közelítésként teljesül, hogy $\sigma_w / w^* \cong 0,6$.)

A turbulens áramok meghatározására számos módszer kínálkozik. Foglalkoztunk a direkt árammérésekkel (kovariancia számítás) a Monin–Obukhov-féle hasonlósági elmélettel, a gradiens és a profil módszer alkalmazásával (VIII.2. fejezet).

Elterjedten alkalmazzák az ellenállás módszert is. Itt a referencia szint illetve a felszíni adatok közötti különbség ismeretében az ún. ellenállási tag segítségével adjuk meg a turbulens áramokat, amit az impulzus és a szenzibilis hőáram meghatározásán keresztül mutatunk be:

$$\tau = \bar{\rho}_m u_*^2 = \bar{\rho}_m C_D \bar{u}_r^2, \quad H = -\bar{\rho}_m c_{pm} u_* T_* = \bar{\rho}_m c_{pm} C_H \bar{u}_r (\bar{\Theta}_r - \bar{\Theta}_0).$$

Hasonló egyenleteket írhatunk fel más tulajdonságszállításra is, pl. a latens hőre. A módszert alkalmazzák nagy vízfelszín felett, de egyszerűsége miatt használják más felszín feletti modellszámításokban is. Vízfelszín felett C_D és C_H tipikus értéke $1-2 \cdot 10^{-3}$. Az $\bar{u}_r$, $\bar{\Theta}_r$ a referencia szint (z_r általában 10 m) szélesség és potenciális hőmérsékleti értéke, míg $\bar{\Theta}_0$ a potenciális hőmérséklet a felszínen ($z_r \gg z_0$).

Kiemelt szerepet kap a mikrometeorológiában a párolgásszámítás. Erre is több módszer ismert. Alkalmazhatjuk a Monin–Obukhov-féle hasonlósági elméletet (gradiens, vagy profil módszer).

A legegyszerűbb a logaritmikus szél és specifikus nedvesség profil feltételezésével történő számítás. Nagy vízfelszín felett a légrétegződés első közelítésben kvázi-indifferensnek tekinthető. A $z_2 > z_1$ szintek között:

$$\bar{u}_2 - \bar{u}_1 = \frac{u_*}{\kappa} (\ln z_2 - \ln z_1) \quad \text{és} \quad \bar{q}_2 - \bar{q}_1 = \frac{q_*}{\kappa} (\ln z_2 - \ln z_1).$$

Használhatjuk az ellenállás módszert is:

$$LE = -L\bar{\rho}_m u_* q_* = -\bar{\rho}_m C_E \bar{u}_r (\bar{q}_r - \bar{q}_0)$$

Általában a $C_M = C_H = C_E$ feltételezéssel élünk. Nem követünk el nagy hibát, ha a felszínen (ez lehet vízfelszín, vagy növényzet) telített levegővel számolunk.

Gyakran alkalmazzák a számításokban a Bowen-arány módszert is. A Bowen-arány a szenzibilis és a latens hőáram hányadosa:

$$B = \frac{H}{LE} = \frac{c_{pm}}{L} \frac{K_H \partial \bar{\Theta} / \partial z}{K_E \partial \bar{q} / \partial z} \cong \frac{c_{pm}}{L} \frac{\Delta \bar{\Theta}}{\Delta \bar{q}} = \frac{c_{pm}}{L} \frac{\bar{\Theta}_2 - \bar{\Theta}_1}{\bar{q}_2 - \bar{q}_1}$$

Azzal a feltételezéssel élünk, hogy a hőre és a nedvességre vonatkozó turbulens diffúziós együttható megegyezik, ugyanaz az örvény szállítja mindkét skalár tulajdonságot.

Ha ismert a rendelkezésre álló energia (a sugárzási egyenleg és a talajba jutó hőáram különbsége)

$A = Rn - G = H + LE$ és a Bowen-arány $B = \frac{H}{LE}$, vagyis a két hőáram összege és hányadosa, akkor speciális eseteket leszámítva H és LE kiszámítható.

Az energiaháztartási módszer és a gradiens módszer ötvözése a Penman-módszer.

A szenzibilis hőáram alakja:

$$LE = \frac{\Delta}{\Delta + \gamma} (Rn - G) + \frac{\gamma}{\Delta + \gamma} LE_a,$$

ahol

$$LE_a = -L\bar{\rho}_m C_E(z_r) \cdot \bar{u}_r (\bar{q}_r - \bar{q}_{rz}),$$

$\bar{q}_s$ telítési keverési arány a légnyomás és a vízhőmérséklet (illetve a felszín hőmérséklet) függvénye, $\bar{q}_{rz}$ a referencia szint telítési specifikus nedvessége, ami a referencia hőmérséklet és a nyomás függvénye.

$$\gamma = \frac{c_{pm}(p - 0,378e)}{0,622L} \cong \frac{c_{pm}p}{0,622L} \cong 0,66 \text{ hPa K}^{-1}$$

a pszichrométeres állandó. A telítési gőznyomás hőmérséklet szerinti változását leíró Δ kifejezés a Clausius–Clapeyron-egyenletből számítható:

$$\Delta = \frac{e_{rz} - e_0}{\bar{\Theta}_r - \bar{\Theta}_0} \cong \frac{\bar{e}_{rz} - \bar{e}_0}{\bar{T}_r - \bar{T}_0} \cong \frac{d\bar{e}_z}{d\bar{T}} = \frac{L}{R_v} \frac{\bar{e}_z}{\bar{T}^2}$$

A számításokban a $C_M = C_E$ feltételezéssel élünk. Vízfelszín felett néhány méteres magasságban – ahol a Bowen-

arány módszert is alkalmazzuk, a levegő közel van a telítettséghez, teljesül, hogy $\frac{\Delta}{\Delta + \gamma} (Rn - G) \gg \frac{\gamma}{\Delta + \gamma} LE_a$. Ennek alkalmazásával:

$$LE \cong \frac{\Delta}{\Delta + \gamma} (Rn - G)$$

Ebben az esetben teljesül, hogy

$$B \cong \frac{\gamma}{\Delta}, \quad H \cong \frac{\gamma}{\Delta + \gamma} (Rn - G)$$

Másképpen fogalmazva: ekkor $\frac{LE - LE_a}{LE} \cong 1$.

A Penman-módszerből kiindulva az ún. ellenállások bevezetésével kapjuk a Penman–Monteith-egyenletet, a Bowen-arány állományfüggő parametrizációjával pedig a Priestley–Taylor-egyenletet. E módszerekkel itt már nem foglalkozunk.

VIII.3.1. A magyarországi gyakorlatban a sugárzási egyenletet a G_r [W m^{-2}] globálsugárzás (nappali órákban), az N [nyolcad] felhőzet és a $\bar{T}$ [K] állomási hőmérséklet alapján a következő egyszerű (Holtslag és Van Ulden, 1983, Mészáros, 2002) parametrizációs eljárással modellezzük:

$$Rn = \frac{(1 - \alpha) \cdot G_r + c_1 \bar{T}^6 - \sigma \bar{T}^4 + c_2 N}{1 + c_3},$$

ahol $c_1 = 5,31 \cdot 10^{-13} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-6}$, $c_2 = 60 \text{ W m}^{-2}$, $c_3 = 0,12$, a Stefan–Boltzmann állandó pedig $\sigma = 5,367 \cdot 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$. Egy gyengén felhős (2 okta) júliusi napon 12 UTC-kor a globálsugárzás értéke $G_r = 880 \text{ W m}^{-2}$. A vízfelszín albedója $\alpha = 0,08$, a vízhőmérséklet 23°C . Becsüljük meg a sugárzásegyenleget! Mennyit változna a sugárzási egyenleg, ha a hőmérséklet 1, 2, vagy 4°C -kal alacsonyabb, vagy magasabb lenne?

VIII.3.2. A szenzibilis hőáram értéke 100 W m^{-2} , A Monin–Obukhov-féle hossz -50 m . Rajzoljuk fel a K_M és K_H turbulens diffúziós együttható profilját az alsó 20 m-es rétegben. Az érdeességi magasság 1 cm . Businger et al. (1971) univerzális függvényeit használjuk!

$$\phi_H = \phi_M^2 = (1 - 15 \zeta)^{-1/2}, \quad L_{Mon} \leq 0,$$

$$\phi_H = \phi_M = 1 + 5 \zeta, \quad L_{Mon} \geq 0.$$

Határozzuk meg az átlagos turbulens diffúziós együtthatót az 1–4 m-es rétegben a következő véges különbséges formula alkalmazásával:

$$u_*^2 = \bar{K}_m \frac{\Delta \bar{u}}{\Delta z}, \quad T_* u_* = \bar{K}_H \frac{\Delta \bar{\theta}}{\Delta z} !$$

A levegő sűrűsége $\rho_m = 1,2 \text{ kg m}^{-3}$, állandó nyomáson vett fajhője $c_{pm} = 1015 \text{ J K}^{-1} \text{ K}^{-1}$, a hőmérséklet 17°C .

Mutassuk meg, hogy:

$$r_M = \frac{1}{\bar{K}_M} = \int_{z_1}^{z_2} \frac{1}{\bar{K}_M(z)} dz, \quad r_H = \frac{1}{\bar{K}_H} = \int_{z_1}^{z_2} \frac{1}{\bar{K}_H(z)} dz,$$

ahol r_M és r_H az impulzusra és a szenzibilis hőre vonatkozó aerodinamikai ellenállás az adott (z_1, z_2) rétegben.

VIII.3.3. A sebességkomponensek, illetve a hőmérséklet normalizált szórása *indifferens rétegződés* esetén a felszínközeli rétegben jó közelítéssel:

$$\frac{\sigma_u}{u_*} = 2,45, \quad \frac{\sigma_v}{u_*} = 1,9, \quad \frac{\sigma_w}{u_*} = 1,45, \quad \frac{\sigma_T}{T_*} = 1,6$$

ahol $\bar{u}$ az átlagos szélirányba eső sebességkomponens. (Megjegyezzük, hogy több hasonló közelítés van a szakirodalomban, az eltérés az egyes módszerekben alkalmazott szorzótényezők között 10–25% is lehet.)

Stabilis és labilis esetben a fenti hányadosok változnak. Több közelítő formula ismert. Ezek közül az egyik az

univerzális függvények (felszín feletti magasság és stabilitás) alapján adja meg $\frac{\sigma_w}{u_*}$ és $\frac{\sigma_T}{T_*}$ hányados értékét:

$$\frac{\sigma_w}{u_*} = 1,45 \cdot [\phi_M(\zeta)]^{-1/2}, \quad \frac{\sigma_T}{T_*} = 1,6 \cdot [\phi_H(\zeta)]^{-1/2}$$

Adjuk meg σ_u , σ_v , σ_w , σ_T értékét indifferens egyensúlyi helyzetben, ha a dinamikus sebesség $u_* = 0,35 \text{ m s}^{-1}$! Határozzuk meg ezeket a mennyiségeket stabilis és labilis egyensúlyi helyzetben is ($H = -40 \text{ W m}^{-2}$ és $H = 120 \text{ W m}^{-2}$)! Businger et al. (1971) univerzális függvényeit használjuk ($\kappa = 0,4$, $\bar{\rho}_m = 1,19 \text{ kg m}^{-3}$, $\beta = 0,033 \text{ m s}^{-2} \text{ K}^{-1}$, $c_{pm} = 1010 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$, $z = 10 \text{ m}$). A dinamikus sebesség most is $u_* = 0,35 \text{ m s}^{-1}$.

VIII.3.4. Becsüljük meg a határréteg vastagságot a konvektív sebességen keresztül, ha $\tau = 0,150 \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^2$, $H = 90 \text{ W m}^{-2}$, $\rho = 1,155 \text{ kg m}^{-3}$ és $\beta = 0,033 \text{ m s}^{-2} \text{ K}^{-1}$! A konvektív felszínközeli rétegben a vertikális szélesebbesség szórásánál az 50 m-es referencia szintet használjuk. (Első közelítésként a száraz levegő fajhőjével számoljunk – ezt az elhanyagolást gyakran alkalmazzák).

VIII.3.5. Adjuk meg C_M és C_E ellenállási paraméterek alakját az univerzális függvények és az érdességi magasság függvényében!

Mekkora C_M és C_E indifferens esetben, ha az érdességi magasság 0,1 mm, 1 mm, 1 cm, illetve 10 cm? (A referencia szint 10 m-re van a kiszorítási rétegvastagság felett.)

VIII.3.6. A 10 m-es szinten a szélesebbesség $4,7 \text{ m s}^{-1}$, az ide interpolált hőmérséklet 27°C , a relatív nedvesség 70%. Becsüljük meg a vízfelszín latens hőáramát az ellenállás módszer segítségével (indifferenshez közeli rétegződés feltételezésével, ha a vízhőmérséklet a) 26°C , b) 27°C , c) 28°C ! $C_M = C_E = 1,5 \cdot 10^{-3}$, $\rho = 1,2 \text{ kg m}^{-3}$, a légnyomás 1000 hPa. Milyen eredmény adódna a $C_M = C_E = 1 \cdot 10^{-3}$ és $C_M = C_E = 2 \cdot 10^{-3}$ értékek alkalmazásával? (Milyen értékeket kapnánk a hasonlósági elmélet alkalmazásával? Próbáljunk ki több univerzális függvényt, elemezzük az eredményeket, vizsgáljuk a párolgásszámítás bizonytalanságát! – Szorgalmi feladat!)

VIII.3.7. Két szinten (0,5 m és 2 m) mérünk a vízfelszín felett a szélesebbességet ($\bar{u}(0,5 \text{ m}) = 4,25 \text{ m s}^{-1}$ és $\bar{u}(2 \text{ m}) = 5,31 \text{ m s}^{-1}$), hőmérsékletet és a relatív nedvességet. A hőmérséklet 15°C , és a hőmérsékletkülönbség a két szint között $0,1^\circ \text{C}$ -nál is kisebb. A 0,5 m-es szinten a relatív nedvesség 92%, a 2 m-es szinten 75%. Adjuk meg az impulzus áramot és a latens hőáramot! Hány mm a párolgás 1 óra alatt? ($p = 1000 \text{ hPa}$)

VIII.3.8. A 10 m-es szinten a szélesebbesség $7,66 \text{ m s}^{-1}$, a hőmérséklet $27,44^\circ \text{C}$, a specifikus nedvesség $16,6 \text{ g kg}^{-1}$. A vízfelszín hőmérséklete $28,41^\circ \text{C}$, a légnyomás az egyszerűség kedvéért 1000 hPa. Most $C_M = C_H = C_E = 1,5 \cdot 10^{-3}$.

A levegő sűrűsége legyen $1,2 \text{ kg m}^{-3}$. Számítsuk ki az impulzus-, a szenzibilis- és a latens hőáramot, illetve az 1 óra alatt elpárolgott vízmennyiséget!

Határozzuk meg a virtuális hőmérsékleti fluktuációk alapján számított virtuális szenzibilis hőáramot is ($H_v = c_{pd} \bar{\rho}_m \bar{T}_v' w'$)! Itt azt használjuk ki, hogy a virtuális hőmérséklet fluktuációja a hőmérsékletfluktuáció mellett függ a specifikus hőmérséklet fluktuációjától is, hiszen

$$\bar{T}_v = \bar{T} + 0,608 \bar{q}, \quad T_v' = T' + 0,608 q',$$

illetve

$$\bar{\Theta}_v = \bar{\Theta}(1 + 0,608 \bar{q}), \quad \Theta_v' \cong \Theta' + 0,608 \bar{\Theta} q'.$$

(A száraz levegő állandó nyomáson vett fajhőjével számoljunk.)

VIII.3.9. Vezessük le a Penman-formulát az

$$LE = -L \bar{\rho}_m C_E \bar{u}_r (\bar{q}_{rs} - \bar{q}_{r0}) + LE_a,$$

$$LE_a = -L \bar{\rho}_m C_E \bar{u}_r (\bar{q}_r - \bar{q}_{rs})$$

ellenállás módszerrel adott alakjából kiindulva, felhasználva a Bowen-arány definícióját és a felszíni energia egyenletet!

Mit jelent és mekkora az értéke az Δ és a γ paraméternek, ha $p = 1000 \text{ hPa}$, $t = 20^\circ \text{C}$, és a relatív nedvesség a) 50%, b) 75%, c) 100%?

Adjuk meg Δ és a γ paraméter értékét, ha $p = 1000 \text{ hPa}$, $t = 5^\circ \text{C}$, és a relatív nedvesség 50%! Hogy függ Δ és a γ értéke a hőmérséklettől? Mennyire „érzékeny” γ a nyomás változására?

VIII.3.10. A sugárzási egyenleg egy meleg nyári nap kora délutánján 560 W m^{-2} . A talajba jutó hőáram – a gyakran használt parametrizációs eljárás szerint a sugárzási egyenleg 10%-a. A növényzettel borított felszín hőmérséklete 20°C . A 10 m-es szintre (kiszorítási réteg felett) extrapolált szélesség 4 m s^{-1} , a relatív nedvesség 74%, míg a hőmérséklet $18,8^\circ \text{C}$.

A nyomás 990 hPa. Becsüljük meg a szenzibilis és a latens hőáramot a Penman-módszer alapján! Hasonlítsuk össze a formulában szereplő két tag nagyságát is! Az ellenállási paraméter legyen $C_E = 8 \cdot 10^{-3}$!

VIII.3.11. Milyen esetekben nem lehet megbízhatóan alkalmazni a Bowen-arány módszert? Mi történik, ha $B \rightarrow -1$?

A 0,5–2 m-es rétegben a hőmérséklet különbség $-1,5^\circ \text{C}$, a gőznyomás különbség $-0,8 \text{ hPa}$ a hőmérséklet mérés bizonytalansága $\pm 0,1^\circ \text{C}$, a specifikus nedvesség $\pm 0,1 \text{ hPa}$. Adjuk meg a Bowen-arány mérés bizonytalanságát!

VIII.4. Az Ekman-spirál

Stacionárius esetben egy horizontálisan homogén vízszintes aljzat fölött indifferens rétegződést feltételezve és elhanyagolva a horizontális szélnyírást az északi féltekén a szélességekre vonatkozó egyenleteket a következő alakban írhatjuk fel:

$$K_m \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + f(v - v_g) = 0,$$

$$K_m \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - f(u - u_g) = 0,$$

ahol u_g és v_g az x és y irányú geostrofikus szélkomponens:

$$u_g = -\frac{1}{\rho f} \frac{\partial p}{\partial y},$$

$$v_g = \frac{1}{\rho f} \frac{\partial p}{\partial x}.$$

Feltételezve azt, hogy a turbulens diffúziós együttható (K_m) értéke nem változik a magassággal, levezethetjük a légkörben kialakuló, úgynevezett alsó Ekman-spirál egyenletét. A második mozgásegyenletet az imaginárius egységgel (i) szorozva és összeadva az elsőegyenlettel a következőt kapjuk:

$$K_m \frac{\partial^2}{\partial z^2} (u + iv) + f(v - v_g - iu + iu_g) = 0.$$

A fenti differenciálegyenlet megoldása:

$$u + iv = A \exp \left[(i+1) \frac{z}{h} \right] + B \exp \left[-(i+1) \frac{z}{h} \right] + u_g + iv_g,$$

ahol A és B állandók, és a határréteg vastagsága $h = \left(\frac{2K_m}{f} \right)^{\frac{1}{2}}$. Az alsó határfeltételek ($z=0$, $u=0$, $v=0$) és felső peremfeltételek ($z \rightarrow \infty$, $u \rightarrow u_g$, $v \rightarrow v_g$) segítségével azt kapjuk, hogy $A=0$ és $B = -u_g - iv_g$, vagyis:

$$u + iv = (-u_g - iv_g) \exp \left[-(i+1) \frac{z}{h} \right] + u_g + iv_g.$$

A reális és imaginárius részek szétválasztásával arra az eredményre jutunk, hogy:

$$u = u_g \left[1 - \exp \left(-\frac{z}{h} \right) \cos \frac{z}{h} \right] - v_g \exp \left(-\frac{z}{h} \right) \sin \frac{z}{h},$$

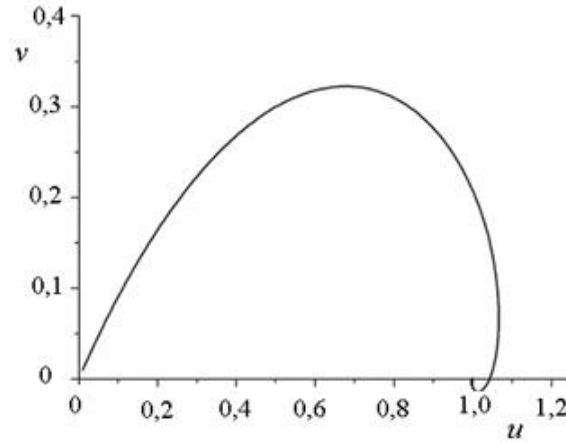
$$v = u_g \exp \left(-\frac{z}{h} \right) \sin \frac{z}{h} + v_g \left[1 - \exp \left(-\frac{z}{h} \right) \cos \frac{z}{h} \right].$$

A fenti egyenletek alapján egyértelmű, hogy a geostrofikustól való eltérés jelentős és iránybeli változásban is kifejeződik. Nyugati geostrofikus áramlás esetén ($v_g = 0$) az Ekman-spirál gyakran használt alakját kapjuk:

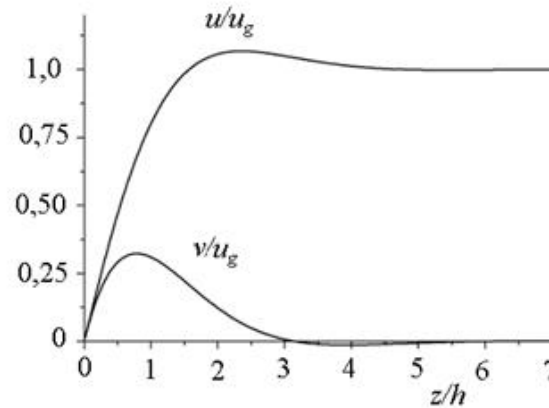
$$u = u_g \left[1 - \exp \left(-\frac{z}{h} \right) \cos \frac{z}{h} \right],$$

$$v = u_g \exp \left(-\frac{z}{h} \right) \sin \frac{z}{h}.$$

A fenti egyenletek a magassággal felfelé haladva erősödő szélmezőt mutatnak. A szélirány pedig jobbra fordul. Az Ekman-spirál szemléltetésére a hodográfot használják (VIII.4.1. ábra), amelyen a szélkomponenseket egymás függvényében ábrázolják. A hodográf ábrázolt függvény minden pontja egy adott magasságban mérhető értéknek felel meg. A VIII.4.1. ábrán látható, hogy a felszínen a szélsébség nulla, a magasban pedig megegyezik a geostrofikus széllal. A kettő közötti átmenet során a szélnek a geostrofikus szélre merőleges komponense is van, azaz egy spirálisan forduló ageostrofikus szélmezőt kapunk (VIII.4.2–3. ábra).



VIII.4.1. ábra. az Ekman-spirál hodográfja relatív egységekben (a geostrofikus szél x irányba mutat és egységnyi nagyságú).



VIII.4.2. ábra. A szélkomponensek változása a magassággal az Ekman-rétegben (a geostrofikus szél egységnyi erősségű, és x irányba fúj).

A határrétegben jelentős a geostrofikustól eltérő anyagtranszport, ezt hívjuk Ekman-transzportnak. Az Ekman-transzport értékét a következő egyenletek alapján számolhatjuk ki, ahol az integrál felső határát kényelmi okokból vesszük végtelennek:

$$U = \int_0^{\infty} (u - u_g) dz = -\frac{h}{2} (u_g + v_g),$$

$$V = \int_0^{\infty} (v - v_g) dz = \frac{h}{2} (u_g - v_g)$$

Az Ekman-traszport következtében a kétdimenziós divergencia nem egyenlő nullával. Ennek köszönhetően fel- vagy leáramlás, úgynevezett Ekman-pumpálás jön létre. A kontinuitási egyenletből kiindulva és kihasználva a $w(z=0)=0$ és $w(z \rightarrow \infty)=w_\varepsilon$ peremfeltételeket, a következőt kapjuk:

$$w_\varepsilon = -\int_0^\infty \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dz = \frac{h}{2} \left(\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x} - \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial y} \right) = \frac{h}{2\rho f} \Delta p.$$

A feláramláshoz ($w_\varepsilon > 0$) ciklonális, a leáramláshoz ($w_\varepsilon < 0$) anticiklonális áramlásra van szükség.

Nézzük a folyadékáramlást! Vízszintes folyadékszint felett fújó, a folyadékra τ nyírófeszítéssel ható szél következtében alakul ki az úgynevezett felső határréteg. Ebben a határrétegben kialakuló Ekman-spirál egyenletét

a nyírási peremfeltétel ($z=0$, $\tau_x = \rho K_m \frac{\partial u}{\partial z}$, $\tau_y = \rho K_m \frac{\partial v}{\partial z}$), valamint annak tudatában vezetjük le, hogy a folyadék belsejében a geosztrófikus áramlást kell visszakapnunk ($z \rightarrow -\infty$, $u \rightarrow u_\varepsilon$, $v \rightarrow v_\varepsilon$).

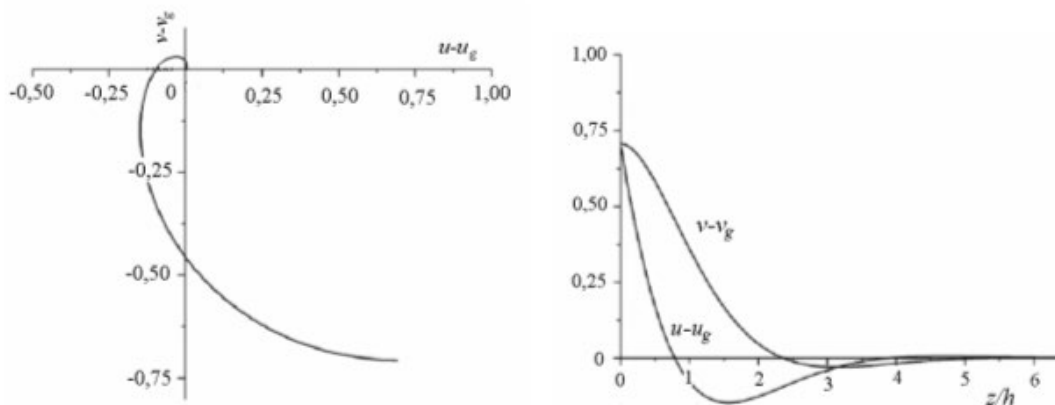
Itt τ_x, τ_y a momentum áram x és y irányú összetevője, míg K_m az impulzus szállításra vonatkozó turbulens diffúziós együttható.

A folyadékokban kialakuló Ekman-spirál (gondoljunk a nagy tavak, tengerek, óceánok áramlási képére) leírására a következő egyenleteket kapjuk:

$$u = \frac{\sqrt{2}}{\rho f h} \exp\left(\frac{z}{h}\right) \left[\tau_x \cos\left(\frac{z}{h} - \frac{\pi}{4}\right) - \tau_y \sin\left(\frac{z}{h} - \frac{\pi}{4}\right) \right] + u_\varepsilon,$$

$$v = \frac{\sqrt{2}}{\rho f h} \exp\left(\frac{z}{h}\right) \left[\tau_x \sin\left(\frac{z}{h} - \frac{\pi}{4}\right) + \tau_y \cos\left(\frac{z}{h} - \frac{\pi}{4}\right) \right] + v_\varepsilon,$$

ahol $h = \left(\frac{2K_m}{f} \right)^{\frac{1}{2}}$ a határréteg karakterisztikus vastagsága. A kapott egyenletek azt mutatják, hogy a geosztrófikustól eltérő áramlás a nyírásnak köszönhető. A folyadék áramlási sebessége 45°-os szöget zár be a nyírási feszítéssel, úgy, hogy az északi féltekén a nyírási feszítéstől jobbra mutat.



VIII.4.3. ábra. Az „ageosztrófikus folyadékáramlás” az Ekman-rétegben hodográfban (balra), illetve komponensenként jelölve (jobbra)

A geosztrófikustól eltérő tömegtranszport alakja:

$$U = \int_{-\infty}^0 (u - u_{\varepsilon}) dz = \frac{\tau_y}{\rho f},$$

$$V = \int_{-\infty}^0 (v - v_{\varepsilon}) dz = -\frac{\tau_x}{\rho f}.$$

Az Ekman-transzport merőleges a szélnyírási vektorra, az északi féltekén a szélnyíráshoz viszonyítva jobbra mutat. Az Ekman-pumpálásra a felső határrétegben azt kapjuk, hogy:

$$w_{\varepsilon} = \int_{-\infty}^0 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dz = \frac{1}{\rho f} \left(\frac{\partial \tau_y}{\partial x} - \frac{\partial \tau_x}{\partial y} \right).$$

VIII.4.1. Bizonyítsuk be, hogy a határréteg alján ($z \rightarrow 0$) az x és y irányú szélsébségek megközelítőleg egyenlők

és értékük $u_{\varepsilon} \frac{z}{h}$!

VIII.4.2. Bizonyítsuk be, hogy a modellbeli neutrális határréteg alján a szélsébség a geosztrófikushoz képest 45° -os szöget zár be!

VIII.4.3. Az Ekman-spirál egyenlete alapján bizonyítsuk be, hogy az x irányú szélsébség a $z = \frac{3\pi}{4} h$ magasságon a legnagyobb és értéke $u = 1,07 \cdot u_{\varepsilon}$!

VIII.4.4. Bizonyítsuk be, hogy a légkörben az Ekman-transzport értéke $f = 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ és $V = \frac{h}{2} (u_{\varepsilon} - v_{\varepsilon})$!

VIII.4.5. Határozzuk meg a vertikális sebességet a határréteg felső határán, amennyiben a geosztrófikus örvényesség értéke $\zeta_{\varepsilon} = 10^{-5} \text{ s}^{-1}$, a Coriolis-féle paraméter $f = 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ és a diffúziós állandó $K_m = 10 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$. Feltételezzük, hogy az y irányú geosztrófikus sebesség nullával egyenlő.

VIII.4.6. Bizonyítsuk be, hogy a geosztrófikustól eltérő tömegtranszport, vagyis az ageosztrófikus komponensek felső határrétegre vonatkozó integrálja:

$$U = \frac{\tau_y}{\rho f} \quad \text{és} \quad V = -\frac{\tau_x}{\rho f} !$$

VIII.4.7. Viharhullámnak a part felé irányuló áramlás miatt kialakult vízszintemelkedést nevezzük. A viharhullám kialakulásának az a feltétele, hogy erős szelek fújjanak a partvonal mentén huzamosabb ideig úgy, hogy az Ekman-transzport a part felé irányuljon (VIII.4.4.). Az északi félgömbön ez akkor következik be, amikor a partvonal a széltől jobbra, a déli félgömbön a széltől balra található. A jelenség egyszerűen leírható a szélnyírással gerjesztett sekélyfolyadék egyenletekkel. Az áramlási sebességek kicsik, így a nemlineáris tagok elhanyagolhatóak. Az egyszerűség kedvéért a viharhullámot egy végtelen kiterjedésű H mélységű medencében modellezzük, a partvonal az y – tengellyel párhuzamos. A kormányzó egyenletek:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - fv = -g \frac{\partial \eta}{\partial x},$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + fu = g \frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\tau}{\rho H}$$

és

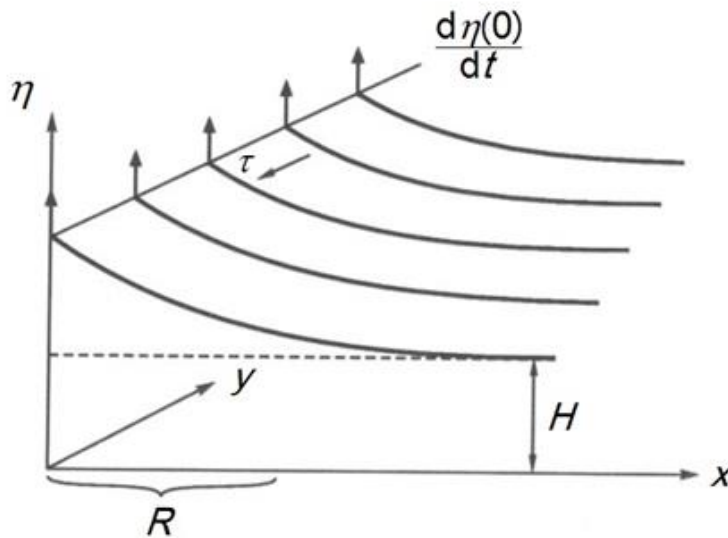
$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + H \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0,$$

ahol τ a konstans nyírási feszültség, f a Coriolis-paraméter, η a szintemelkedés.

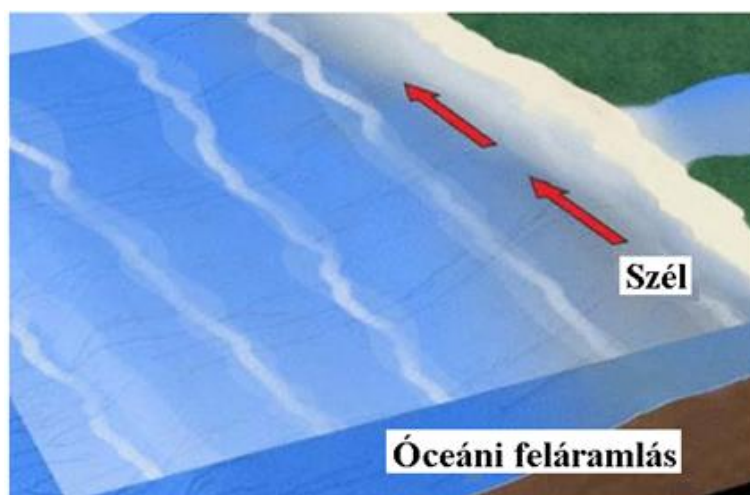
Az egyszerűség kedvéért a viharhullámokat egy végtelen kiterjedésű H mélységű kádban modellezzük! A partvonal mentén az aktuális mélység η . u, v a folyadék x és y irányú sebesség összetevői. A partvonal az y -tengellyel párhuzamos.

Hogy változik a viharhullám sebessége és a vízoszlop magassága az időben? Adjuk meg a Rossby-sugarat is!

A viharhullám kialakulását és a szintemelkedés változását a VIII.4.1. videón is követhetjük. Azt feltételezzük, hogy a partfal ($x = 0$) magassága elegendően nagy, vagyis nem csap át rajta a hullám, nem folyik ki a víz a „medencéből”)

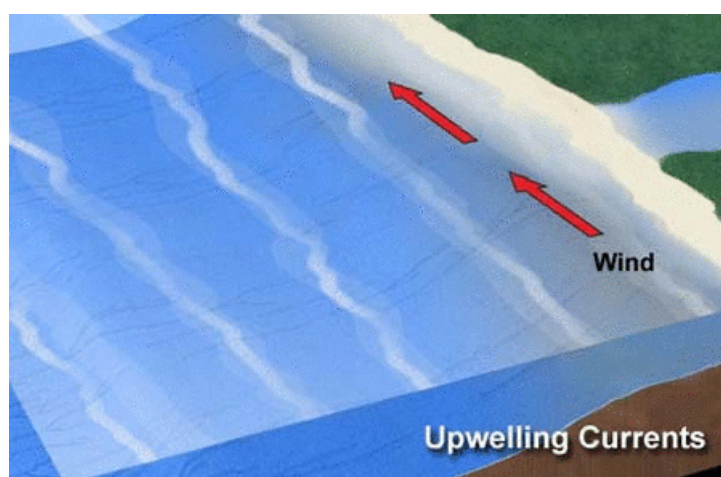


VIII.4.4. ábra. A Viharhullám keletkezése.



VIII.4.5. ábra. A parttól távolodó Ekman-transzport feláramlást generál, például Dél-Amerika partjainál.

Amikor a partvonal mentén olyan szél fúj, hogy az Ekman-transzport a partvonalra merőlegesen kifelé mutat, akkor part menti feláramlás indul meg (VIII.4.5. ábra). A kontinuitási egyenlet értelmében a part mellett a hiányzó víztömeget a mélyről jövő feláramlás pótolja.



VIII.4.1. videó. Az Ekman-transzport jelensége Dél-Amerika partjainál.



VIII.4.2. interaktív videó. A Viharhullám keletkezése

VIII.4.8. Feltételezve, hogy a levegő sűrűsége állandó, határozzuk meg, időben hogyan csökken az örvényesség a határreteg fölötti rétegben. Mennyi időre van szükség, hogy az örvényesség a kezdeti érték e -ad részére csökkenjen, ha a légoszlop magassága 10 km , a turbulens diffúziós együttható értéke $K_m = 10\text{ m}^2\text{ s}^{-1}$ és a Coriolis-paraméter $f = 10^{-4}\text{ s}^{-1}$?

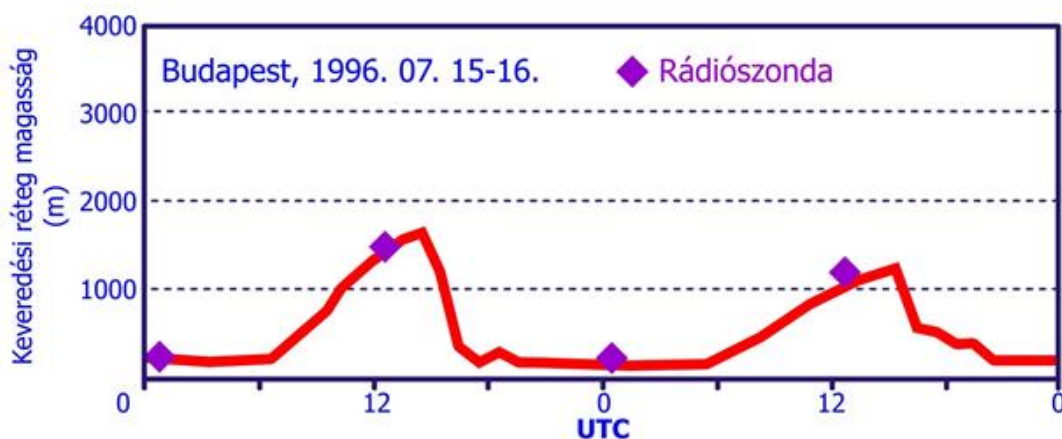
Legyen a kiindulási egyenletünk az örvényesség időbeli megváltozását leíró

$$\frac{d\zeta}{dt} = f \frac{\partial w}{\partial z}$$

egyenlet, ahol csak a horizontális divergencia hatását modellezzük. Az egyenlet felírásánál kihasználtuk az összenyomhatatlan közegre vonatkozó kontinuitási egyenletet is.

VIII.5. A stabil és az instabil keveredési réteg vastagságának számítása

A keveredési réteg a földfelszín felett lévő légréteg, ahol a felszín közelében kibocsátott légszennyező anyagok a turbulens mozgások következtében vertikálisan átkeverednek. A réteg vastagsága időben folytonosan és szakadásosan is változhat. A keveredési réteg kialakulásában a mechanikai és a termikus turbulencia játszik szerepet. A mechanikai turbulencia a felszín érdessége (fák, bokrok, épületek, domborzat) által előidézett vertikális szélnyírás következtében létrejövő örvényes légmozgás. Mértékét az érdességi elemek magassága, elhelyezkedése, egymástól való távolsága, valamint a szélsébség határozza meg. A termikus turbulencia a vertikális hőmérsékleti gradiens bizonyos értékei mellett kialakuló örvénylő légmozgás a földfelszín feletti légtérben. Kifejlődésében a meleg felszín feletti labilis hőmérsékleti rétegződés játszik fontos szerepet. A függőleges hőmérsékleti gradiens irányától és nagyságától függően különböző intenzitású tulajdonság-kicserélő mozgások alakulnak ki a légkörben. A VIII.5.1. ábrán a mechanikai és a termikus turbulencia által létrehozott keveredési rétegvastagság (vagy rétegmagasság) 2 napos időtartam alatti változása figyelhető meg.



VIII.5.1. ábra. Keveredési rétegvastagság számított értékeinek változása 1996. 07. 15-16. között a budapesti (12843) rádiószondás felszállások és modellszámítások (magyarországi szabvány) alapján.

A fejezet célja, hogy a megismerkedjünk a keveredési rétegvastagság (vagy másképpen határreteg magasság) számítására szolgáló szabványszerű módszerrel, amit a magyarországi gyakorlatban is használnak. Az európai gyakorlat iránt érdeklődő olvasóknak a **COST Action 710 (1998) program kiadványát javasoljuk, ami az internetről könnyen letölthető.**

Az alább részletezett számítási módszerek akkor alkalmazhatók, ha:

- a vizsgált órákban rendelkezésre állnak a felszín közeli réteg dinamikai paraméterei;

- rendelkezésre állnak a 00 és 12 UTC-kor mért standard magas légköri adatok;
- a vizsgált terület közel sík;
- a vizsgált terület nem sűrűn beépített.

VIII.5.1. A keveredési rétegvastagság meghatározása különböző napszakokra

A keveredési rétegvastagság meghatározására a légköri turbulencia két fő fajtája – azaz a mechanikus- és a termikus turbulencia – szerint eltérő módszereket kell alkalmazni. A mechanikus turbulencia által létrehozott keveredési rétegvastagságot (h) – az éjjeli és a nappali órákra – a **VIII.5.2. szakasz** szerint kell kiszámítani. A termikus

turbulencia által létrehozott keveredési rétegvastagságot a nappali időszakban labilis légrétegződés ($L_* < 0$) esetén

a **VIII.5.3. szakasz** szerint kell kiszámítani. (Itt L_* jelöli a Monin–Obukhov-féle hosszt. Meghatározását lásd a **VIII.2.** és a **VIII.3. fejezetben**.) Ezekben az órákban a kétféleképpen kiszámított h érték közül a nagyobbikat kell venni. (A kétféle számítási módszer, amit összevetünk: i) az éjszakai keveredési réteg vastagság számító algoritmus (mechanikus turbulencia), illetve ii) a nappali számítási módszer, vagyis a termikus és a mechanikus turbulencia együttes hatását figyelembe vevő eljárás.) Nappali órák azok, amikor a globálsugárzás értéke pozitív. A keveredési rétegvastagságnak legalább 100 méternek kell lenni, ha a számított érték ezt nem éri el, akkor a rétegvastagságot 100 m-re kell módosítani.

Általános módszer

A keveredési rétegvastagságot (h) stabilis légállapot esetén a következő egyenlettel kell kiszámítani:

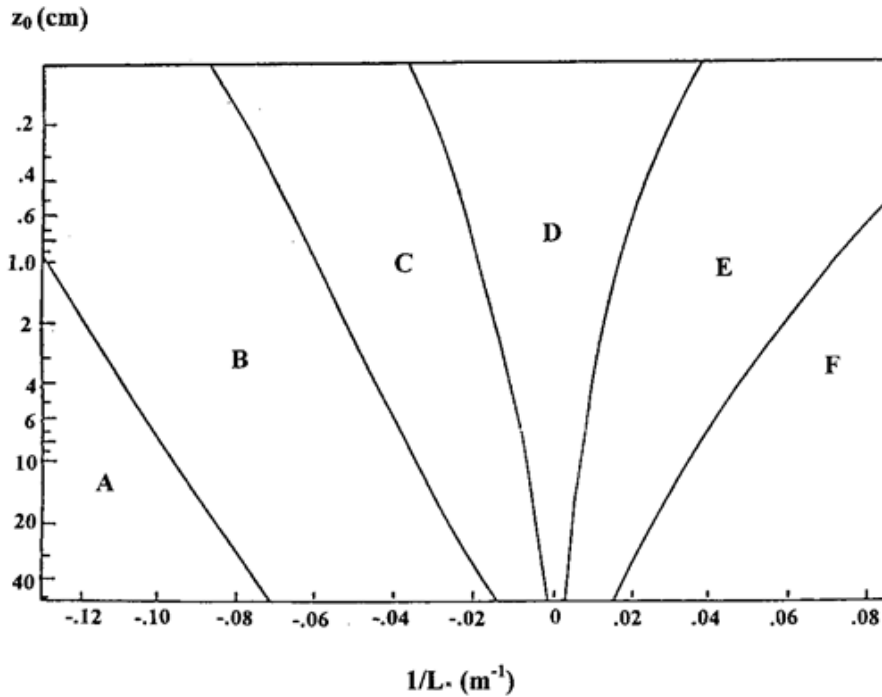
$$h = c_* \sqrt{\frac{u_* \cdot L_*}{f}}$$

ahol $c_* = 0,35$ számítási állandó, u_* a dinamikus (vagy sűrűlási sebesség), $f = 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ a Coriolis-paraméter a 45° szélességi körön.

A szabványmódszer szerint a légállapot akkor stabilis, ha a Monin–Obukhov-féle hossz reciproka ($1/L_*$) és az érdességi magasság (z_0) „koordináta-rendszerében” a mért értékek a **VIII.5.2. ábra** szerinti E vagy F tartományába esnek. (Megjegyezzük, hogy az A-tól F-ig terjedő tartományok a levegőkörnyezet-védelemben elterjedten használt

Pasquill-indexet jelölik, ami a légköri stabilitás jelzőszáma (lásd pl. Pasquill, 1974). Ha $z_0 > 50 \text{ cm}$ (ez már egy

falusi, vagy jobban beépített terület, illetve erdő például), akkor, a $z_0 > 50 \text{ cm}$ -es érdességi magasságokra jellemző kategóriákat kell alkalmazni. A jellemző érdességi magasság kategóriákat, ami a vízfelszín mm-es nagyságrend alatti értékeitől a szántóföldi területek 1–10 cm-es adatain át a városi területek 0,5–2 m-es értékéig terjed, lásd például Arya (2001) tankönyvében.



VIII.5.2. ábra. A légállapot összefüggése a Monin–Obukhov-féle hossz reciprokával (L^{-1}) és az érdességi magassággal (z_0).

Módszer rendszeres magaslégköri mérés esetén éjjel

Ha rendelkezésre állnak a 00 UTC-kor mért rádiószondás magaslégköri adatok, akkor a keveredési rétegvastagságot (h) a következő egyenlet alapján iterációval határozhatjuk meg:

$$h = Ri_c \frac{(\Delta u)^2}{\beta \cdot \Delta \Theta_v},$$

ahol Δu a felszín és a h magasság közötti szélesség különbség, $\Delta \Theta_v$ a felszín (praktikusan a 2 m-es szint) és a h magasság közötti virtuális potenciális hőmérséklet különbsége Ri_c a felszín és a h magasság közötti keveredési rétegre jellemző kritikus gradiens Richardson-szám ($Ri_c = 0,25$). Azzal a feltételezéssel élünk, hogy ekkor a h magasság felett már nem fejlődik ki mechanikus turbulencia, tehát szennyezőanyag terjedési feladatokban ezt a

h réteget tekinthetjük keveredési rétegnek. Továbbá $\beta = \frac{g}{\bar{\Theta}_v}$ a stabilitási paraméter, ahol $\bar{\Theta}_v$ a vizsgált rétegre jellemző átlagos virtuális potenciális hőmérséklet, g a nehézségi gyorsulás. Első közelítésként

$$\beta = \frac{1}{30} \text{ m s}^{-2} \text{ K}^{-1}$$

Emlékeztetőül megadjuk a virtuális potenciális hőmérséklet alakját is:

$$\Theta_v = T_v \left(\frac{p_0}{p} \right)^{\frac{R}{c_p}},$$

ahol T_v a virtuális hőmérséklet, P a légnyomás, $P_0 = 1000 \text{ hPa}$ a referencia szint nyomása, R a levegő specifikus gázállandója, c_p az állandó nyomáson vett fajhője. A T_v virtuális hőmérséklet alakja:

$$T_v = T(1 + 0,608r),$$

ahol T a hőmérséklet, r a keverési arány.

Az iterációt az alábbiak szerint kell elvégezni:

1. lépés: A h magasság fokozatos (10 m-enkénti) növelésével szintenként interpolációval meg kell határozni a β , $\Delta\Theta_v$ és Δu mennyiségek értékeit, valamint a szélességet és a hőmérsékleti profilt.

2. lépés: Meg kell vizsgálni, hogy az aktuális h esetén a

$$Ri = h \frac{\beta \cdot \Delta\Theta_v}{(\Delta u)^2}$$

kifejezés értéke eléri-e a kritikus Richardson-szám ($Ri_c = 0,25$) értékét. Ha Ri értéke eléri a 0,25-öt, akkor az ehhez tartozó h értéket fogadjuk el keveredési rétegvastagságként.

A mechanikai turbulencia által létrehozott keveredési rétegvastagság meghatározása nem stabilis légállapot esetén

A keveredési rétegvastagságot nem stabilis légállapot esetén a következő egyenlettel kell kiszámítani:

$$h = c \cdot \frac{u_*}{f},$$

ahol $c = 0,2$ számítási állandó. A légállapot akkor nem stabilis, ha a Monin–Obukhov hossz reciproka és az érdességi magasság „koordináta-rendszerében” a mért értékek a VIII.5.2. ábra szerinti A , B , C vagy D tartományába esnek. Hasonlóan az előzőekhez, ha $z_0 > 50 \text{ cm}$, akkor, a erre az érdességi magasságra jellemző kategóriákat kell alkalmazni.

VIII.5.2. A termikus turbulencia által létrehozott keveredési rétegvastagság meghatározása

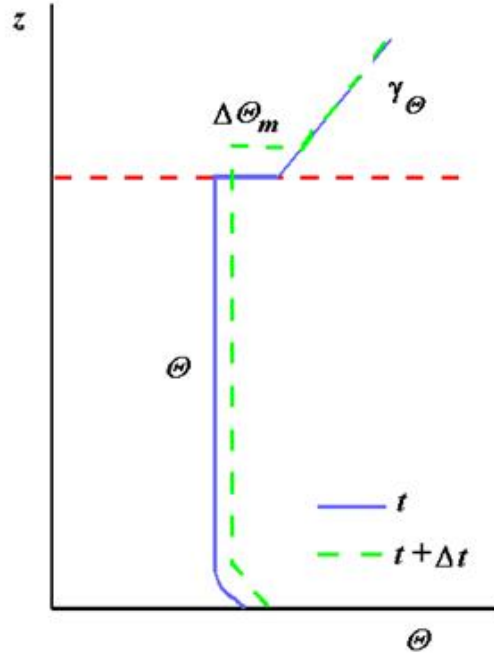
A termikus turbulencia által létrehozott keveredési rétegvastagság időbeli változásának meghatározása

Nappal, termikus konvekció idején a keveredési rétegvastagság fejlődését leíró egyszerűsített egydimenziós modellt három változó határozza meg. Ezek maga a keveredési rétegvastagság a

$$t$$

időpontban, a keveredési réteg átlagos potenciális hőmérséklete (vagy virtuális potenciális hőmérséklete) és a keveredési réteget és a szabad légkört lezáró potenciális (vagy virtuális potenciális) hőmérsékleti ugrás. A keveredési

rétegben a potenciális hőmérsékleti gradiens nulla, míg felette a szabad légkörre jellemző érték $\gamma_\theta = \frac{\partial\Theta}{\partial z}$. Itt a potenciális hőmérséklet nő a magassággal. A keveredési réteg időbeli fejlődését ($t, t + \Delta t$) időintervallumban a VIII.5.3. ábra szemlélteti.



VIII.5.3. ábra. A konvektív keveredési réteg (vagy határreteg) fejlődése a $(t, t + \Delta t)$ időintervallumban. h a keveredési rétegvastagság, Θ a keveredési rétegre jellemző átlagos potenciális hőmérséklet, $\Delta\Theta_m$ a potenciális hőmérsékleti ugrás a réteg tetején, γ_Θ a szabad légkörre jellemző potenciális hőmérsékleti gradiens.

A három változó fejlődését egy-egy differenciálegyenlet írja le. A keveredési réteg potenciális hőmérséklet változása a felszíni

$$\left(\overline{(\Theta'w)'} \right)_z = -u_* \cdot T_*$$

és a réteg tetején levő $\left(\overline{(\Theta'w)'} \right)_h$ potenciális hőmérsékleti áramtól függ. Itt T_* a dinamikus hőmérséklet, amit a szenzibilis hőáram meghatározása kapcsán már ismerünk ($H = -\rho c_p u_* T_*$). A második egyenlet a keveredési réteg tetején levő potenciális hőmérsékleti áram megadására szolgál. Ez negatív előjelű, és a potenciális hőmérsékleti ugrástól, illetve a keveredési réteg vastagságának a változásától függ, hogy mennyi levegőt olvaszt magába a vastagodó határreteg:

$$\overline{(\Theta'w)'}_h = -\Delta\Theta_m \cdot \frac{\partial h}{\partial t}$$

A harmadik egyenlet a keveredési réteg tetején kialakuló potenciális hőmérséklet ugrás időbeli változását adja meg:

$$\frac{\partial \Delta\Theta_m}{\partial t} = \gamma_\Theta \frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\partial \Theta}{\partial t},$$

ami a keveredési rétegvastagság és a keveredési réteg potenciális hőmérsékletének időbeli változásától függ, ahogy azt a VIII.5.3. ábra is szemléletesen mutatja.

E három egyenlet kombinálásával kapjuk a keveredési rétegvastagság időbeli változására vonatkozó közös differenciál egyenletet, aminek a munkaformulája:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = (1 + 2A) \frac{(-u_* \cdot T_*)}{\gamma_\Theta \cdot h} + 2B \frac{u_*^3}{\gamma_\Theta \cdot \beta \cdot h^2}$$

Itt $A = 0,2$ és $B = 2,5$ számítási állandók. A differenciálegyenlet analitikus megoldása szerint a τ_1 időponttól, a τ_2 időpontig a keveredési rétegvastagság ($h_2 - h_1$) változása a következő egyenlettel adható meg:

$$\tau_2 - \tau_1 = \frac{1}{C^3} \left[\frac{1}{2} (C \cdot h + D)^2 - 2D \cdot (C \cdot h + D) + D^2 \cdot \ln(C \cdot h + D) \right]_{h_1}^{h_2},$$

ahol a szükséges zárójel mögött a két integrálási határ a kezdeti és a befejező időpontbeli keveredési rétegvastagság. A fenti egyenletben

$$C = \frac{(1 + 2A) \cdot (-u_* \cdot T_*)}{\gamma_\Theta},$$

$$D = \frac{2B \cdot u_*^3}{\gamma_\Theta \cdot \beta},$$

valamint τ_1 a kiindulási időpont τ_2 a vizsgált időpont, h_1 a keveredési rétegvastagság a τ_1 időpontban, h_2 a keveredési rétegvastagság a τ_2 időpontban.

A keveredési rétegvastagság feletti (γ_Θ) potenciális hőmérsékleti gradienst a rádiószondás mérésekből előállított γ_Θ felhasználásával kell megadni, figyelembe véve a keveredési réteg felső határára számított potenciális hőmérsékleti ugrás ($\Delta\Theta_m$) kritikus értékeit. A keveredési réteg felső határára számított potenciális hőmérsékleti ugrást a következő egyenlettel kell kiszámítani:

$$\Delta\Theta_m = \frac{A \cdot h - \kappa \cdot B \cdot L_*}{(1 + 2A) \cdot h - \kappa \cdot B \cdot L_*} \cdot \gamma_\Theta \cdot h$$

Itt $\kappa = 0,4$ a Kármán-konstans, γ_Θ az adott nap 00 UTC-s magaslégköri méréséből a 925 hPa és a 850 hPa-os szint között meghatározott potenciális hőmérsékleti gradiens. Ha a nap folyamán a keveredési réteg magassága nem éri el a 925 hPa-os szintet, akkor a potenciális hőmérsékleti gradienst a 12 UTC-kor mért rádiószonda adatokból 925 hPa és 850 hPa-os szint között kell meghatározni. A potenciális hőmérsékleti ugrás kritikus értékeivel korrigált új értékek a következők:

$$\Delta\Theta_m^{\hat{u}} = \Delta\Theta_m, \text{ ha } 0,5^\circ\text{C} \leq \Delta\Theta_m \leq 2,0^\circ\text{C},$$

$$\Delta\Theta_m^{\hat{u}} = 0,5 \cdot (0,5^\circ\text{C} + \Delta\Theta_m), \text{ ha } \Delta\Theta_m \leq 0,5^\circ\text{C},$$

$$\Delta\Theta_m^{\hat{u}} = 0,5 \cdot (2,0^\circ\text{C} + \Delta\Theta_m), \text{ ha } 2,0^\circ\text{C} \leq \Delta\Theta_m \leq 3,0^\circ\text{C},$$

$$\Delta\Theta_m^{\hat{u}} = 2,5^\circ\text{C}, \text{ ha } \Delta\Theta_m > 3,0^\circ\text{C}.$$

Az így kiszámított $\Delta \Theta_m := \Delta \Theta_m^{\text{pot}}$ potenciális hőmérsékleti ugrás alkalmazásával kiszámítható a modellbeli módosított $\gamma_{\Theta_m} \gamma_{\Theta}$ potenciális hőmérsékleti gradiens:

$$\gamma_{\Theta_m} = \frac{(1 + 2A) \cdot h - \kappa \cdot B \cdot L_*}{A \cdot h^2 - \kappa \cdot B \cdot L_* \cdot h} \Delta \Theta_m$$

A termikus turbulencia által létrehozott keveredési rétegvastagság időbeli változását leíró differenciálegyenlet megoldása iterációval történik. Megfelelően kicsi magasságlépcsőt ($h_2 - h_1$) választva a keveredési rétegvastagság fokozatos növelésével ellenőrizhető az egyenlet teljesülése.

A napi maximális keveredési rétegvastagság becslése

A nappali keveredési rétegvastagság növekedésére szolgáló differenciálegyenlet megoldásán kívül egy egyszerű becselő eljárással is megadhatjuk a várható maximális keveredési rétegvastagságot.

A napi maximum hőmérséklethez tartozó várható legnagyobb keveredési rétegvastagságot a 00 UTC-kor végzett magaslégköri rádiószondás mérésből meghatározott virtuális potenciális hőmérsékleti profil azon pontjának talajszint feletti magassága adja meg, ahol a virtuális potenciális hőmérséklet értéke megegyezik a maximális földfelszíni hőmérsékletből számított virtuális potenciális hőmérséklettel (egyszerű részecske módszer).

Korrektció hőmérsékleti inverzió esetén

Ha 00 és 12 UTC-kor a magaslégköri rádiószondás mérések alapján a határrétegben hőmérsékleti inverzió van jelen, és a két felszállás közötti időpontokban, valamint a felszállást megelőző, illetve azt követő három órában a VIII.5.1. szakasz szerint számított keveredési rétegvastagság az inverziós réteg középső szintjének (a két mérésből számított) átlagos magasságánál nagyobb, akkor a keveredési rétegvastagságot az inverziós réteg középső szintjének átlagos magasságára kell módosítani. Ha csak az egyik magaslégköri mérés mutat hőmérsékleti inverziót, akkor a korrekciót csak a mérés időpontjától számított ± 3 órás időszakra kell alkalmazni.

VIII.5.1. Határozzuk meg a keveredési rétegvastagságot éjjel 2-kor! Az érdességi magasság $z_0 = 25 \text{ cm}$. Legyen $u_* = 26 \text{ cm s}^{-1}$ és $L_* = 102 \text{ m}$!

VIII.5.2. Határozzuk meg a virtuális potenciális hőmérsékleti gradiens értékét a 00 UTC-s rádiószondás felszállás alapján a gyenge inverzió felett a 2. és a 3. markánspon adatai alapján a VIII.5.1.–VIII.5.5. táblázat adataira támaszkodva!

VIII.5.1. táblázat A vizsgálat ideje és helye.

A vizsgálat ideje és helye		
Jel	Megnevezés	Érték
	hó, nap	Február 15.
τ_{UTC}	adott nap órája (UTC szerint)	00 UTC
Φ_{rad}	a hely földrajzi szélessége	$47,43^\circ = 0,827 \text{ radián}$
λ_{rad}	a hely földrajzi hosszúsága	$19,18^\circ = 0,334 \text{ radián}$

VIII.5.2. táblázat. A földfelszíni meteorológiai adatok.

A 00 UTC-kor mért földfelszíni meteorológiai adatok		
Jel	Megnevezés	Számérték, mértékegység
p_0	Földfelszíni légnyomás	$1004,5 \text{ hPa} = 100\,450 \text{ Pa}$
T_{2m}	Lég hőmérséklet 2 m magasságban	$279,1 \text{ K}$

t		6,0 °C
$T_{d, 2 m}$	Harmatpont 2 m magasságban	273,9 K
t_d		0,8 °C

VIII.5.3. táblázat. A maximális hőmérséklet idején mért felszíni meteorológiai adatok.

A maximális hőmérséklet időpontjában mért földfelszíni meteorológiai adatok		
Jel	Megnevezés	Számérték, mértékegység
$p_{0, max}$	Földfelszíni légnyomás	1004,0 hPa = 100 400 Pa
$T_{2 m, max}$	Lég hőmérséklet 2 m magasságban	284,0 K
$t_{2 m, max}$		10,9 °C
$T_{d, 2 m, max}$	Harmatpont 2 m magasságban	279,1 K
$t_{d, 2 m, max}$		6,0 °C

VIII.5.4. táblázat. A 00 UTC-kor mért markáns ponti adatok.

A 00 UTC-kor a markáns pontokban mért magaslégtörési adatok		
Jel	Megnevezés	Érték, mértékegység
z_1	A markáns pont tengerszint feletti magassága	380 m
$T(z_1)$	A z_1 markáns pont hőmérséklete	278,4 K
$t(z_1)$		5,3 °C
$T_d(z_1)$	A z_1 markáns pont harmatpontja	273,1 K
$t_d(z_1)$		0 °C
$p(z_1)$	A z_1 markáns pont légnyomása	97500 Pa
z_2	A markáns pont tengerszint feletti magassága	600 m
$T(z_2)$	A z_2 markáns pont hőmérséklete	278,6 K
$t(z_2)$		5,5 °C
$T_d(z_2)$	A z_2 markáns pont harmatpontja	272,3 K
$t_d(z_2)$		-0,8 °C
$p(z_2)$	A z_2 markáns pont légnyomása	94900 Pa
z_3	A markáns pont tengerszint feletti magassága	2670 m
$T(z_3)$	A z_3 markáns pont hőmérséklete	269,0 K
$t(z_3)$		-4,1 °C
$T_d(z_3)$	A z_3 markáns pont harmatpontja	265,0 K
$t_d(z_3)$		-8,1 °C
$p(z_3)$	A z_3 markáns pont légnyomása	73700 Pa

VIII.5.5. táblázat. A gőznyomás kiszámításához (Magnus-formula) felhasznált állandók és a referencia nyomás a potenciális hőmérséklet számításához.

Állandók		
Jel	Megnevezés	Érték, mértékegység
a	Magnus-formula állandója	7,45
b	Magnus-formula állandója	235 °C
p_{00}	Referencia nyomás a potenciális hőmérséklet kiszámításához	100 000 Pa

VIII.5.3. Adjuk meg a keveredési rétegvastagság napi maximális értékét a **VIII.5.2. feladat** adataira támaszkodva!

VIII.5.4. Határozzuk meg a keveredési réteg fejlődését labilis légállapot esetén 12 UTC-ig a **VIII.5.2. feladat** adataiból kiindulva! (A keveredési réteg feletti potenciális hőmérsékleti gradiens $\square_{\square} = 0,005 \text{ K m}^{-1}$ a markáns ponti adatok alapján.)

A mért órás meteorológiai adatokat a **VIII.5.6. táblázat** tartalmazza, míg a hazai szabvány alapján meghatározott dinamikus sebesség, hőmérséklet és Monin–Obukhov-hossz adatait a **VIII.5.7. táblázat** mutatja. (A felszíni energiamérleg komponensek számításával itt külön nem foglalkozunk.)

VIII.5.6. táblázat. A szinoptikus állomáson mért órás meteorológiai adatok (lásd a **VIII.5.2 feladatot** is).

Bemenő adatok				
τ_{UTC}	$t_{2 \text{ m}}$ [°C]	$u_{2 \text{ m}}$ [m s ⁻¹]	N [okta]	$t_{d, 2 \text{ m}}$ [°C]
6	4,1	1,0	4	0,3
7	4,8	1,0	3	1,3
8	5,5	2,0	3	2,5
9	6,8	1,0	2	4,0
10	7,3	2,0	2	6,0
11	9,4	3,0	2	7,5
12	10,5	2,0	2	6,3

VIII.5.7. táblázat. Az u_* , T_* és L_* paraméterek értékei az órás meteorológiai adatok alapján a magyarországi szabványmódszer felhasználásával.

t_{UTC}	u_* [m s ⁻¹]	T_* [K]	L_* [m]
6	0,05	0,04	4,4
7	0,07	0,05	6,1
8	0,17	-0,18	-11,2
9	0,10	-0,54	-3,0
10	0,18	-0,38	-6,1
11	0,24	-0,27	-15,6
12	0,18	-0,32	-7,3

A számítás elvégzéséhez a következő adatok szükségesek:

- a labilis keveredési réteg fejlődésének kezdeti időpontja (t_1);

- az egyes órák standard meteorológiai méréseiből kiszámított dinamikai paraméter (u_* , T_* és L_*);
- a keveredési réteg feletti átlagos potenciális hőmérsékleti gradiens ($\square\square$).

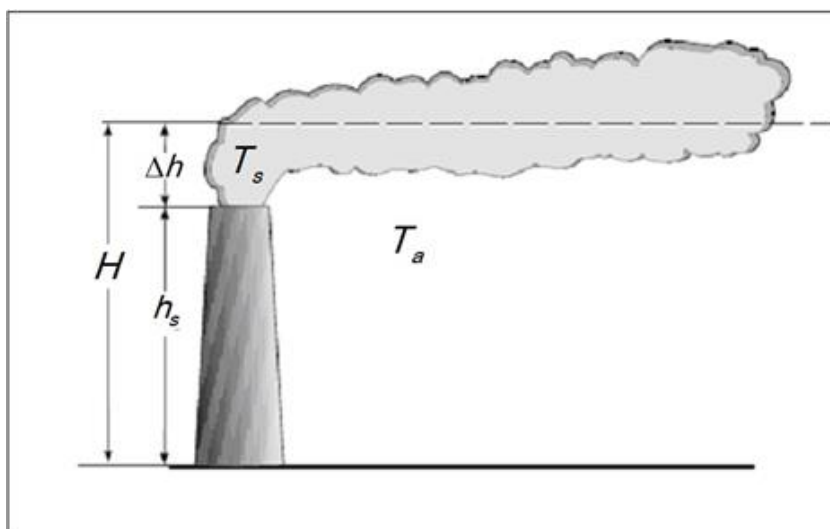
A 12 UTC-s rádiószonda felszállásból (ha van) a földfelszínen, illetve a főzobár szinteken mért léghőmérsékleti adatok.

VIII.6. A turbulens keveredés, a szennyezőanyag diszperziója

A fejezet célja a hazai szabványmódszerek alapján a szennyezőanyag-terjedés leírásában használt turbulens keveredési folyamatokat leíró paraméterek meghatározása és alkalmazás-orientált számítása. Ezzel is szeretnénk kihangsúlyozni a határreteg-meteorológia fontosságát, s rámutatni a gyakorlati alkalmazás lehetőségeire.

VIII.6.1. A füstfáklya középvonalának kiszámítása

A pontforrásból kilövellt füstgáz kilépési sebességgel és a környezetnél magasabb hőmérséklettel rendelkezik. Ez a két hatás okozza a füstfáklya felemelkedését, amelyet a VIII.6.1. ábrán Δh -val jelöltünk. Az ábra további jelölései a következő mennyiségeket jelentik: h_s a kémény magasság, H az effektív kéménymagasság, T_s a füstgáz kilépési hőmérséklete és T_a a környezeti levegő hőmérséklete.



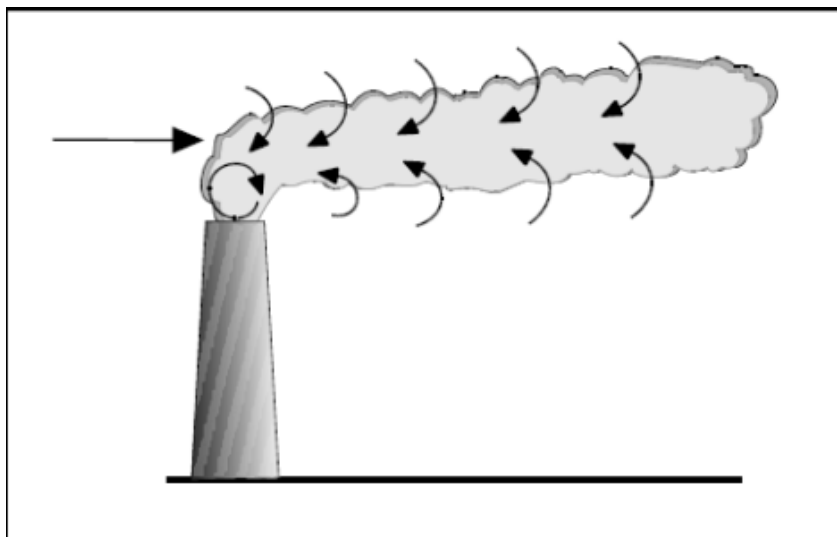
VIII.6.1. ábra. Füstfáklya emelkedés sematikus képe (h_s a kéménymagasság, Δh a füstfáklya emelkedése H az effektív kéménymagasság, T_s a füstgáz kilépési hőmérséklete és T_a a környezeti levegő hőmérséklete, a szaggatott vonal jelöli a füstfáklya középvonalát).

A füstfáklya középvonalának magassága a forrástól vett távolság (x) függvényében az alábbi alapösszefüggéssel határozható meg:

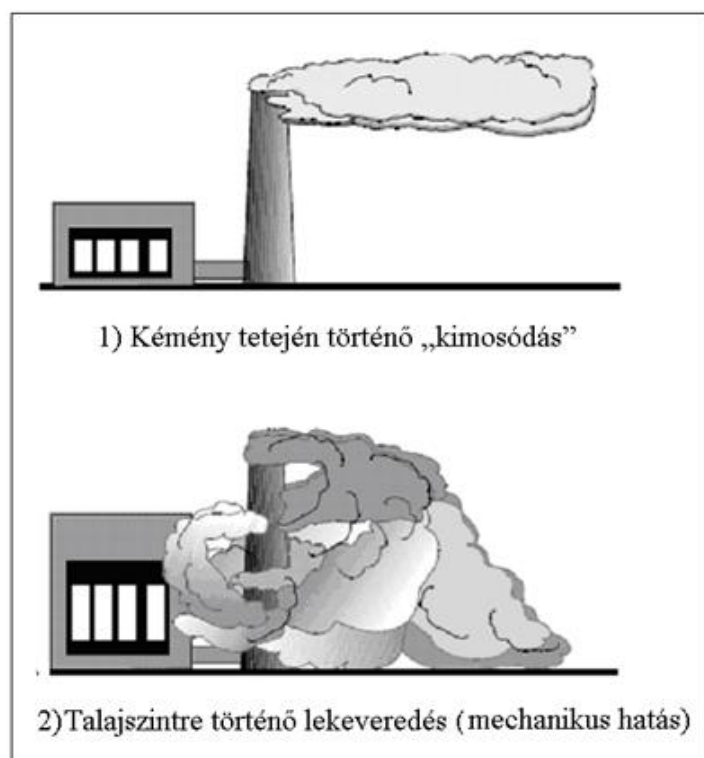
$$H_p(x) = h_s + \Delta h(x)$$

A füstfáklya középvonalának magassága a levegőben történő terjedés során változik, mely érték függ a légköri stabilitástól, a forrástól vett távolságtól, a füstfáklya emelkedés mértékétől és a keveredési rétegvastagságtól.

A környezeti levegőbe kibocsátott füstgáz a légköri viszonyok függvényében más és más folyamatok hatása alá kerülhet. Egy ilyen hatást szemléltet a VIII.6.2. ábra, ahol a szél hatására a környezeti levegő bekeveredik a füstfáklya belsejébe, amelynek eredményeképpen a füstfáklya gyorsan elveszti felhajtó erejét és nem képes a kéménymagasságnál magasabb rétegekbe emelkedni.



VIII.6.2. ábra. Szélsebesség hatására létrejövő környezeti levegő beáramlás (hígulás) a füstfáklyába.



VIII.6.3. ábra. Két példa a füstfáklya lecsapódására: a kémény tetején történő kimosódás (1) és a környező épület által előidézett talajszintre történő lekeveredés (2).

A kémény tetején történő füstfáklya lemosódás (VIII.6.3. ábra (1) rész) akkor jön létre, ha a kilépési sebesség és a szélsebesség aránya nagyon kis érték. Ebben az esetben az alacsony nyomás miatt a kémény sodorvonalában a füstfáklya lejjebb húzódhat a kémény mögötti területen. Ilyenkor a légszennyező anyagok átkeveredése és szóródása csökken, ami közvetlenül a kémény mögötti szélárnyékban magas koncentrációkat okoz.

A légáramlást az épületek hatására kialakuló örvények (*mechanikus turbulencia*) perturbálhatják. Az örvények hatására a kibocsátó forrás magasságától függően a füstfáklya lecsapódhat a talajfelszínre. (VIII.6.3. ábra (2) rész). Ezt aerodinamikai vagy épület által okozott kimosódásnak nevezzük, amely a forrás szélárnyékos területén, a talajszinten szintén magas szennyezőanyag koncentrációt okoz.

A füstfáklya középvonalának kiszámítása stabilis légrétegződés esetén

Stabilis légrétegződés esetén a füstfáklya emelkedését ($\Delta h(x)$) a forrástól vett távolság függvényében az alábbi egyenlettel kell kiszámítani:

$$\Delta h(x) = 2,66 \left(\frac{F_b}{N^2 \cdot u_p} \right)^{1/3} \cdot \left[\frac{0,7N \cdot F_m}{F_b} \cdot \sin \left(\frac{0,7N \cdot x}{u_p} \right) + 1 - \cos \left(\frac{0,7N \cdot x}{u_p} \right) \right]^{1/3},$$

ahol az u_p haladási sebesség (szélesség) és az N (Brunt–Väisälä frekvencia) kezdeti értéke a kéménymagasságban (h_s). (Az emelkedő füstfáklya középvonalában a forrástól x távolságra a forrás középvonalának magassága $H_p(x)$.)

A képletben szereplő F_b, F_m a kéményből kiáramló füst sebességével, illetve a felhajtóerővel és a kéménymérettel kapcsolatos módosító faktorok. Képlettel kifejezve:

$$F_b = g \cdot w_s \cdot r_s^2 \cdot \frac{\Delta T_s}{T_s},$$

$$F_m = \frac{T(h_s)}{T_s} \cdot w_s^2 \cdot r_s^2,$$

$$\Delta T_s = T_s - T(h_s),$$

$$N = \left[\frac{g}{\Theta(z)} \frac{\partial \Theta}{\partial z} \right]^{1/2}.$$

A füstfáklya emelkedés ($\Delta h(x)$) számított értékét korrigálni kell a maximális füstfáklya emelkedés ($\Delta h(x_{\hat{x}})$), a semlegeshez közeli légrétegződés esetén számított maximális füstfáklya emelkedés (Δh_n) és a stabilis légrétegződés esetén a kis szélességek mellett fellépő maximális füstfáklya emelkedés (Δh_t) figyelembevételével.

- A füstfáklya maximális emelkedési helyének a forrástól vett horizontális távolságát ($x_{\hat{x}}$) általános esetben a következő összefüggés határozza meg:

$$x_{\hat{x}} = \frac{u_p}{0,7N} \cdot \arctan \left(\frac{0,7N \cdot F_m}{F_b} \right).$$

- A füstfáklya maximális emelkedése:

$$\Delta h(x_{\hat{x}}) = 2,66 \left(\frac{F_b}{u_p \cdot N^2} \right)^{1/3}.$$

- Közel semleges légrétegződés mellett, amikor N értéke nullához közele, a füstfáklya maximális emelkedése:

$$\Delta h_n = 1,2 \left(\frac{F_b}{u_p \cdot u_*} \right)^{3/5} \cdot \left(h_s + 1,2 \frac{F_b}{u_p \cdot u_*} \right)^{2/5}.$$

Itt u_* a dinamikus (vagy súrlódási sebesség).

Stabilis légrétegződés esetén kis szélességek mellett a füstfáklya maximális emelkedését a következő egyenlettel kell kiszámítani:

$$\Delta h_c = \frac{4 F_b^{1/4}}{N^{3/4}}.$$

A fentiek alapján kiszámított négy érték: $\Delta h(x)$, $\Delta h(x_f)$, Δh_n , Δh_c , valamint a keveredési rétegvastagság és a kéménymagasság különbségének ($h - h_z$) figyelembevételével stabilis légrétegződés esetén a füstfáklya emelkedést az alábbi kifejezés adja meg a forrástól vett x távolságban:

$$\Delta h(x) = \min \{ \Delta h(x), \Delta h(x_f), \Delta h_n, \Delta h_c, (h - h_z) \}.$$

A füstfáklya középvonalának kiszámítása labilis légrétegződés esetén

Labilis légrétegződés esetén $\Delta h(x)$ -t a következő egyenlet határozza meg:

$$\Delta h(x) = \left(\frac{3 F_m \cdot x}{\beta_1^2 \cdot u_p^2} + \frac{3}{2 \beta_1^2} \cdot \frac{F_b \cdot x^2}{u_p^3} \right)^{1/3},$$

ahol most $\beta_1 = 0,6$; F_m , F_b pedig a korábban már megadott paraméterek.

Labilis légrétegződés esetén $u_p = u(h_z)$, ahol $u(h_z)$ a szélesség a füstfáklya középvonalában.

A korlátozott keveredés miatt a forráshoz közel ($x < x_f$) a füstfáklya tömegközéppontja lesz a füstfáklya magassága ($H_p(x) = h_z + \Delta h(x)$).

A forrástól távol ($x > x_m$) – ahol a szennyezőanyag már jól átkeveredett a rétegben – a keveredési réteg felező magassága ($h/2$) adja meg a füstfáklya középvonalát ($H_p(x) = h/2$). A füstfáklya emelkedés (vagy süllyedés) utolsó szakaszában ($x_f < x \leq x_m$) a füstfáklya középvonala ($H_p(x)$) lineárisan változik ezen határok között. $H_p(x)$ értéke a füstfáklya emelkedése során nem haladhatja meg a keveredési réteg magasságát.

A füstfáklya középvonalának magasságát a forrástól vett x távolság függvényében – a fentiek alapján – a következő összefüggés adja meg:

$$H_p(x) = \begin{cases} \min \{ (h_z + \Delta h(x)), h \} & , \text{ ha } x \leq x_f ; \\ H_p(x_f) + \left(\frac{h}{2} - H_p(x_f) \right) \cdot \frac{(x - x_f)}{(x_m - x_f)} & , \text{ ha } x_f < x \leq x_m ; \\ h/2 & , \text{ ha } x > x_m . \end{cases}$$

A füstfáklya stabilizációjának távolsága, x_f az alábbiak szerint határozható meg:

ha $0 < F_b < 55$, akkor $x_f = 49 F_b^{5/8}$,

ha $F_b \geq 55$, akkor $x_f = 119 F_b^{2/5}$.

VIII.6.2. A keveredési réteg paraméterek vertikális átlagai

A diszperziós együtthatók meghatározásához szükség van az $u(z)$, $\sigma_v^2(z)$, $\sigma_w^2(z)$ és $\tau_{L_v}(z)$ keveredési réteg paraméterek vertikális átlagainak előállítására (szélsebesség, szóródás, Lagrange-féle karakterisztikus idő). Az átlagolást a receptor pont felett ($x = x_r$, z_r) a füstfáklya tömegközéppontjának a magassága, $h_t = H_p(x_r)$ és a h_b magasság közötti rétegben kell elvégezni. A vertikális átlagokat általánosan ε -nal jelöljük:

$$\varepsilon = \frac{1}{(h_t - h_b)} \int_{h_b}^{h_t} \varepsilon(z) dz,$$

ahol

$$h_b = \max \{ H_p(x_r) - 2,15 \cdot \sigma_z(x), z_r \},$$

$$h_t = H_p(x_r).$$

Az integrálás felső határának megadásakor szerepel $\sigma_z(x)$, amely függ $u(z)$ és $\sigma_w^2(z)$ értékétől. Első lépésben a $\sigma_w(H_p)$ és az $u(H_p)$ értéket kell használni a $\sigma_z(x)$ kijelölésére, majd a h_b kiszámítására. Második lépésben az első lépésben kiszámított $\sigma_z(x)$ ismeretében újra meg kell határozni h_b értékét, majd újra ki kell számítani ε értékét.

Az integrálást, vagyis ε értékének meghatározását az állapotjelzők lineáris profiljainak feltételezésével kell elvégezni.

VIII.6.3. A szennyezőanyagok turbulens diszperziója

A pontforrásból eredő szennyezőanyagok terjedését Gauss-moddal írjuk le, amiből a felszíni szennyezőanyag koncentrációra $\chi(x, z)$ a következő összefüggés adódik:

$$\chi(x, z) = \frac{Q}{2\pi \cdot \sigma_x(x) \cdot \sigma_z(x) \cdot u(z)} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{x}{\sigma_x(x)}\right)^2\right) \cdot \left\{ \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{z - H(x)}{\sigma_z(x)}\right)^2\right) + \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{z + H(x)}{\sigma_z(x)}\right)^2\right) \right\},$$

ahol Q a kibocsátott szennyezőanyag mennyisége, $\sigma_x(x)$, $\sigma_z(x)$ a szennyezőanyag koncentráció standard szórása horizontális és vertikális irányban a forrástól x távolságra, $u(z)$ a szélsebesség z magasságban, $H(x)$ az effektív kéménymagasság. A képletben szereplő horizontális és vertikális diszperziós együtthatók számítására eltérő eljárások alkalmazandók stabilis és labilis légrétegződések esetén. A következőkben ezzel foglalkozunk.

A horizontális diszperziós együttható meghatározása stabilis légrétegződés esetén

A horizontális diszperziós együtthatót a következő összefüggés adja meg:

$$\sigma_y(x) = \frac{\left(\overline{\sigma_v^2}\right)^{1/2} \cdot x / \bar{u}}{\left(1 + \frac{x}{2\bar{u} \cdot \overline{\tau_{Ly}}}\right)^{0.5}}$$

A Lagrange-féle időskálát ($\overline{\tau_{Ly}}$) a következőképpen számítjuk:

$$\overline{\tau_{Ly}} = \frac{h \cdot z_{max}}{z_{ref} \cdot \left(156 \left(\overline{\sigma_v^2}\right)^{1/2}\right)},$$

ahol $z_{max} = \max\{z, z_{ref}\}$.

A horizontális diszperziós együttható meghatározása labilis légrétegződés esetén

A definíciós egyenlet:

$$\sigma_y(x) = \frac{\left(\overline{\sigma_v^2}\right)^{1/2} \cdot x}{\bar{u} \cdot (1 + \alpha \cdot X)^p},$$

ahol a hatványkitevő $p = 0,3$, továbbá:

$$X = \frac{\left(\overline{\sigma_v^2}\right)^{1/2} \cdot x}{\bar{u} \cdot h},$$

$$\alpha = \frac{h}{H_p(x)}.$$

Következő lépésben a vertikális diszperziós együttható meghatározásával foglalkozunk stabilis és labilis rétegződés esetén.

A vertikális diszperziós együttható meghatározása stabilis légrétegződés esetén

A vertikális diszperziós együttható a keveredési rétegben levő forrás esetén egy emelt szintű és egy felszíni részből áll:

$$\sigma_z(x) = \left(1 - \frac{H_p(x)}{h}\right) \cdot \sigma_{ze}(x) + \left(\frac{H_p(x)}{h}\right) \cdot \sigma_z(x)$$

A vertikális diszperziós együttható emelt szintű komponense:

$$\sigma_{ze}(x) = \frac{\left(\overline{\sigma_w^2}\right)^{1/2} \cdot t}{\left(1 + \frac{t}{2\overline{\tau_{Lz}}}\right)^{1/2}},$$

ahol $t = \frac{x}{\bar{u}}$. A vertikális átlagos Lagrange-féle időskálát ($\overline{\tau_{Lz}}$) a következő összefüggés határozza meg:

$$\overline{\tau_{Lz}} = \frac{l}{(\overline{\sigma_w^2})^{1/2}}$$

Az l skálahossz a következő egyenletből számítható ki:

$$l = \frac{l_n \cdot l_z}{l_z + l_n},$$

ahol

az l_n neutrális skálahossz, $l_n = 0,36 \cdot H_p(x)$,

és az l_z stabilis skálahossz, $l_z = 0,27 \cdot \frac{(\overline{\sigma_w^2})^{1/2}}{N}$,

Az összetett skálahossz (l) erősen stabilis feltételek mellett vagy nagy kibocsátási magasságok esetén megközelíti a stabilis értéket (l_s).

A vertikális diszperziós együttható felszíni összetevőjét a következő egyenlettel kell kiszámítani:

$$\sigma_{zz}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi} \frac{u_* \cdot x}{u} \left(1 + 0,7 \frac{x}{L_*}\right)^{-1,3}},$$

ahol $\bar{u}$ a vizsgált rétegre jellemző átlagos szélesség, u_* a súrlódási sebesség, míg L_* a Monin–Obukhov-féle hossz.

A vertikális diszperziós együttható meghatározása labilis légrétegződés esetén

A vertikális diszperziós együttható is egy emelt szintű és egy felszíni részből áll, és a következő egyenlettel határozható meg:

$$\sigma_z(x) = \sqrt{\sigma_x(x)^2 + \sigma_{zz}(x)^2}.$$

A vertikális diszperziós együttható emelt szintű része:

$$\sigma_{ze}(x) = \left(\frac{1}{2} \left(\sum_j \sigma_{ze,j}^2(x) \right) \right)^{1/2},$$

ahol

$$\sigma_{ze,j}(x) = \alpha_b \left[b_j \cdot \frac{w_* \cdot x}{u} \right],$$

w_* a konvektív (vagy tiszteletből a Deardoff) sebesség. Ez a konvektív keveredési réteg (vagy határréteg) egyik skála paramétere:

$$w_* = [-\beta h u_* T_*]^{1/3},$$

ahol $\beta = g / \bar{T}_v$ a h vastagságú keveredési rétegre jellemző átlagos stabilitási paraméter ($\bar{T}_v$ az átlagos virtuális hőmérséklet), T_* a dinamikus hőmérséklet. A képletben $j=1$ szerepel, ha a füstfáklya felfelé és $j=2$, ha a füstfáklya lefelé irányul.

Ha $H_p(x) < 0,1h$, akkor

$$\alpha_b = 0,6 + 0,4 \left(\frac{H_p(x)}{0,1h} \right),$$

míg abban az esetben, ha $H_p(x) \geq 0,1h$, akkor

$$\alpha_b = 1.$$

Nézzük meg b megadását:

ha $j=1$, akkor $b_1 = R \cdot a_1$, ha $j=2$, akkor $b_2 = R \cdot a_2$,

ahol $R = 2,0$. Végezetül nézzük meg a_j előállítását is:

$$\text{ha } j=1, \text{ akkor } a_1 = \frac{(\bar{\sigma}_w^2)^{1/2}}{w_*} \left(\frac{\alpha \cdot S}{2} + \frac{1}{2} \left(\alpha^2 \cdot S^2 + \frac{4}{\beta} \right)^{1/2} \right),$$

$$\text{ha } j=2, \text{ akkor } a_2 = \frac{(\bar{\sigma}_w^2)^{1/2}}{w_*} \left(\frac{\alpha \cdot S}{2} - \frac{1}{2} \left(\alpha^2 \cdot S^2 + \frac{4}{\beta} \right)^{1/2} \right).$$

A fenti egyenletekben szereplő paraméterek:

$$\alpha = \frac{1+R^2}{1+3R^2}, \quad \beta = 1+R^2, \quad S = \frac{\bar{w}^3 / w_*^3}{\left((\bar{\sigma}_w^2)^{1/2} / w_* \right)^3},$$

ahol teljesül

$$\text{ha } H_p(x) > 0,1h, \text{ akkor } \frac{\bar{w}^3}{w_*^3} = 0,125, \text{ és}$$

$$\text{ha } H_p(x) \leq 0,1h, \text{ akkor } \frac{\bar{w}^3}{w_*^3} = 1,25 \frac{H_p(x)}{h}.$$

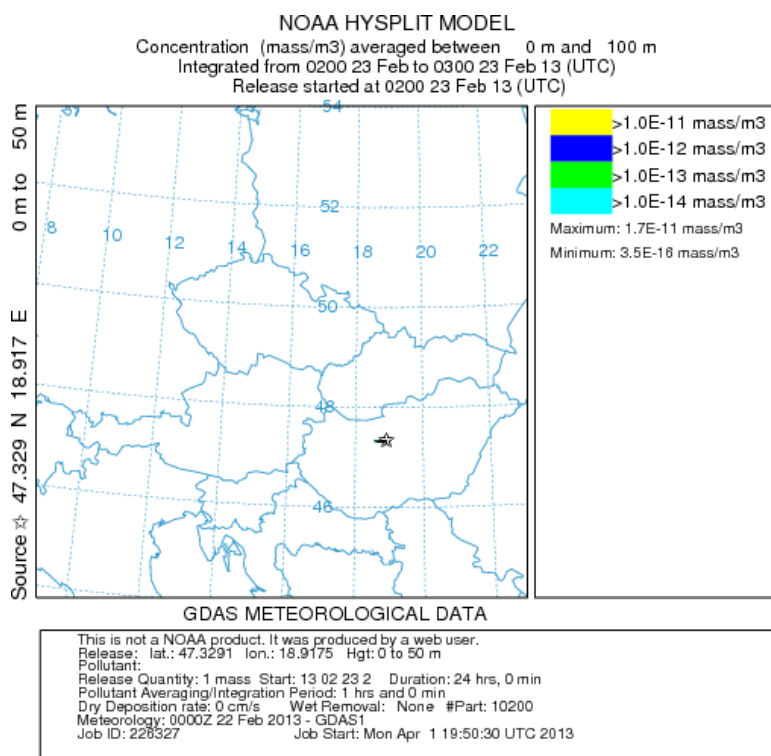
A vertikális diszperziós együttható felszíni része pedig

$$\sigma_{zz}(x) = b_c \left[1 - 10 \cdot \left(\frac{H_p(x)}{h} \right) \right] \cdot \left(\frac{u_*}{u} \right)^2 \cdot \frac{x^2}{|L|}, \text{ ha } H_p(x) < 0,1h,$$

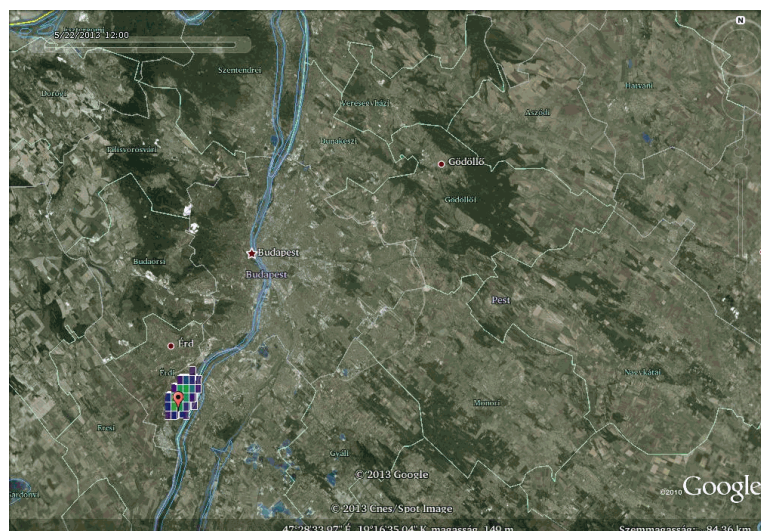
$$\sigma_z(x) = 0, \text{ ha } H_p(x) \geq 0,1h.$$

Itt $b_t = 0,5$.

A füstfáklya terjedésének megismerése és egyszerű modellezése segít a valóságban lejátszódó terjedési folyamatok megértésében és a komplex 3D modellszámítások kiértékelésében. Erre mutatunk példát a *VIII.6.1. videó*n, ahol egy százhalombattai szennyezőanyag forrás hatását modellezzük az USA HYSPLIT szabadon letölthető terjedési modellel és az ELTE Meteorológiai Tanszéken fejlesztett terjedési modellel (PyTREX). A videókat Leelőssy Ádám doktorandusz és Ludányi Erika meteorológus hallgató készítette.



VIII.6.1. videó. Szennyezőanyag terjedés modellezése a HYSPLIT modellel alapján Százhalombattára. (Készítette Leelőssy Ádám doktorandusz és Ludányi Erika meteorológus hallgató.)



VIII.6.2. videó. Szennyezőanyag terjedés modellezése a PyTREX modell alapján Százhalombattára. (Készítette Leelőssy Ádám doktorandusz.)

VIII.6.1. Határozzuk meg a füstfáklya középvonalának elhelyezkedését a forrástól távolodva a VIII.6.1.–4. táblázat adatai alapján labilis rétegződés esetén!

VIII.6.1. táblázat. A mérőhely és a mérés főbb adatai.

A vizsgálat ideje és helye		
Jel	Megnevezés	Számérték, mértékegység
	Hó, nap	Február 15.
t_{UTC}	Az adott nap órája (UTC szerint)	12 UTC
φ_{rad}	A hely földrajzi szélessége	$47,43^\circ = 0,827$ radián
λ_{rad}	A hely földrajzi hosszúsága	$19,18^\circ = 0,334$ radián
h_0	A hely tengerszint feletti magassága	140 m
z_r	A receptor pont földfelszín feletti magassága (a kéményalap magassága: $z = 0$)	1 m

VIII.6.2. táblázat. Mért és számított meteorológiai adatok.

Mért és számított meteorológiai adatok		
Jel	Megnevezés	Számérték, mértékegység
p_m	Légnyomás az állomáson	100 400 Pa
t_m	Lég hőmérséklet 2 m magasan	10,5 °C
T_m		283,6 K
$U_m = u_m$	Szélesség a 10 m-es magasságban	2 m s ⁻¹
Θ_m	Potenciális hőmérséklet a 2 m-es magasságban	283,3 K

VIII.6.3. táblázat. A felszínközeli réteg dinamikai paraméterei.

A felszínközeli réteg dinamikai paraméterei		
Jel	Megnevezés	Számérték, mértékegység
L_*	Monin–Obukhov hossz	-7,3 m
T_*	Dinamikus hőmérséklet	-0,32 K
u_*	Súrlódási sebesség	0,18 m s ⁻¹

Tudjuk továbbá, hogy a kéménymagasság szintjében a szélesség értéke:

$$u_p = u(h_z) = u(100 \text{ m}) = 3,2 \text{ m s}^{-1}$$

Megjegyezzük, hogy a hazai szabvány foglalkozik $u(z)$, $\sigma_v^2(z)$, $\sigma_w^2(z)$ profilok megadásával is mind stabilis, mind labilis rétegződés esetén a felszínközeli réteg paramétereinek az ismeretében. Mi ebben a feladatban nem foglalkozunk ezek előállításával a szükséges adatokat közöljük.

A keveredési réteg szélprofiljának és a vertikális diszperziós együttható profiljának ismeretében az átlagos szélesség és az átlagos vertikális diffúziós együttható értéke legyen rendre: $\bar{u} = 5,7 \text{ m s}^{-1}$ és $\bar{\sigma}_w = 0,619 \text{ m s}^{-1}$.

VIII.6.4. táblázat. A kémény és a kibocsátott füstgáz paramétere.

A kibocsátott füstgáz paramétere		
Jel	Megnevezés	Számérték, mértékegység
h_z	Kéménymagasság (megadásakor figyelembe kell venni a kémény tetején jelentkező füstfáklya leáramlást)	100 m
r_z	A kémény tetején a füstfáklya leáramlásával korrigált kéménysugár	2,5 m
w_z	Füstgáz kilépési sebesség	15 m s^{-1}
T_z	Füstgáz hőmérséklete	433 K
$T(h_z)$	A környezeti hőmérséklet a leáramlással korrigált kéménymagasságban	281,9 K

VIII.6.2. Adjuk meg – az előző VIII.6.1. feladat adataira támaszkodva – a horizontális diszperziós együtthatót a forrás 5 km-es körzetében labilis légrétegződés esetén!

A forrástól vett x távolság függvényében a VIII.6.1. feladatból ismert a füstfáklya középvonalának a magassága,

$H_p(x)$, s már ismertnek tekintjük $(\bar{\sigma}_v^2)^{1/2}$ és $\bar{u}$ értékeit, amit a VIII.6.5. táblázatban közlünk.

VIII.6.5. táblázat. A füstfáklya középvonalának a magassága, $(\bar{\sigma}_v^2)^{1/2}$ és $\bar{u}$ értékei a forrástól vett x távolság függvényében.

x	$H_p(x)$ [m]	$(\bar{\sigma}_v^2)^{1/2}$ [m s ⁻¹]	$\bar{u}$ [m s ⁻¹]
100 m	178,4	0,704	4,3
200 m	221,2	0,704	4,7
300 m	257,4	0,704	5,1
400 m	289,7	0,704	5,5
500 m	319,5	0,704	5,8
600 m	347,4	0,705	6,0
700 m	373,8	0,706	6,3
800 m	398,9	0,708	6,5
900 m	423,0	0,710	6,7
1000 m	446,3	0,713	6,9
2000 m	445,1	0,708	5,8
3000 m	389,1	0,696	4,6

4000 m	333,1	0,693	4,3
5000 m	277,1	0,691	3,9

VIII.6.3. Adjuk meg a vertikális diszperziós együtthatót – a **VIII.6.1. feladat** adatait felhasználva – a forrás 5 km-es körzetében labilis légrétegződés esetén! A forrástól vett x távolság függvényében ismert a füstfáklya középvezonának a magassága $H_p(x)$, s már ismertnek tekintjük $(\overline{\sigma_w^2})^{1/2}$ és $\bar{u}$ értékeit is, amit a **VIII.6.6. táblázat**ban közlünk.

VIII.6.6. táblázat. A füstfáklya középvezonának a magassága, $(\overline{\sigma_w^2})^{1/2}$ és $\bar{u}$ értékei a forrástól vett x távolság függvényében.

x	$H_p(x)$ [m]	$(\overline{\sigma_w^2})^{1/2}$ [m s ⁻¹]	$\bar{u}$ [m s ⁻¹]
100 m	178,4	0,639	4,3
200 m	221,2	0,637	4,7
300 m	257,4	0,635	5,1
400 m	289,7	0,634	5,5
500 m	319,5	0,633	5,8
600 m	347,4	0,633	6,0
700 m	373,8	0,632	6,3
800 m	398,9	0,632	6,5
900 m	423,0	0,632	6,7
1000 m	446,3	0,633	6,9
2000 m	445,1	0,635	5,8
3000 m	389,1	0,618	4,6
4000 m	333,1	0,615	4,3
5000 m	277,1	0,612	3,9

IX. fejezet - Légtörri hullámok

Tasnádi Péter

IX.1. Felületi és térbeli hullámok, a kis perturbációk módszere

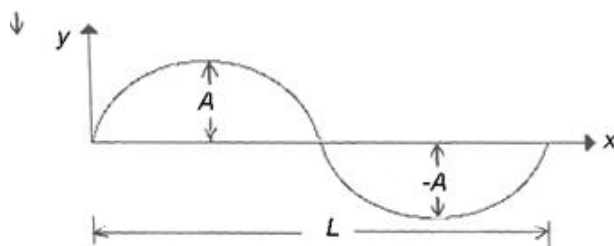
A légtörben, a tengerekben illetve a víz felszínén és a légtörri határfelületeken bonyolult, hullámszerű zavarok terjedhetnek. Az összetett hullámformák azonban Fourier-sorok, illetve Fourier-integrálok segítségével harmonikus hullámok összegeként adhatók meg. Ezért többnyire elegendő az egyszerű harmonikus hullámokkal foglalkozni.

A vonal mentén terjedő egyetlen harmonikus hullám az

$$y = A \sin(kx - \omega t)$$

összefüggéssel adható meg. Ez a hullám a pozitív x tengely irányában $\frac{\omega}{k} = c$ sebességgel terjed. A formulában A a hullám amplitúdója $\omega = \frac{2\pi}{T}$ a hullám körfrekvenciája $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ pedig a hullámszám, ahol T a periódusidő λ pedig a hullámhossz (IX.1.1. ábra).

E fejezetben a folyadékdinamikában szokásos módon a kétdimenziós folyadékban az y irány jelenti a folyadék magasságát. Ha hullámmegoldást nézünk, akkor – a fenti egyenletben $y = 0$ körül végezz hullámmozgást a folyadék A amplitúdóval, vagyis a folyadék magassága a referencia szinthez képest $-A$ és $+A$ között változik.



IX.1.1. ábra. Hullám sematikus képe az (x, y) síkon.

Az x irányban terjedő tetszőleges zavar az

$$y(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(k) e^{i(kx - \omega t)} dk$$

Fourier-integrálal (hullámcsomag) adható meg. A zavart természetesen az integrál valós része reprezentálja, a komplex írásmódot a számítások egyszerűsítésére használjuk. A tapasztalat azt mutatja, hogy az összetevő hullámok ω körfrekvenciája a k hullámszám függvénye lehet. Az $\omega = \omega(k)$ összefüggést diszperziós relációnak nevezzük.

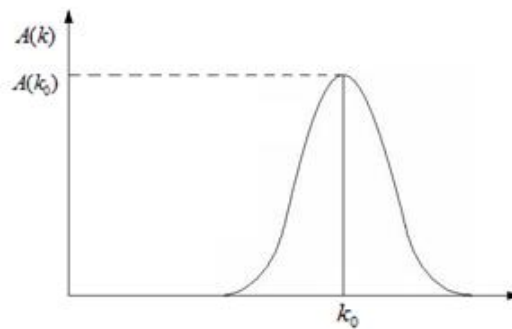
Amennyiben a hullámcsomag a k_0 hullámszám köré csoportosul és $|A(k)|$ a k_0 hullámszám környezetétől eltekintve elhanyagolhatóan kicsiny, akkor a diszperziós reláció a k_0 hely környezetében sorba fejthető:

$$\omega(k) = \omega(k_0) + (k - k_0) \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k_0}$$

A IX.1.2. ábra a feltételezett $A(k)$ amplitúdó eloszlást mutatja. A hullámcsomag ekkor az

$$y = \int_{-\infty}^{\infty} A(k) e^{i(kx - \omega t)} dk = e^{i[k_0 x - \omega(k_0) t]} \int_{-\infty}^{\infty} A(k) e^{i(k - k_0) \left(x - \frac{d\omega}{dk} t \right)} dk$$

alakban írható fel.



IX.1.2. ábra. Az $A(k)$ amplitúdó eloszlása a k_0 hullámszám körül.

Látható, hogy a formula két tényezőre esik szét, az első tényező a k_0 hullámszámú klasszikus hullám, a második csak az $x - \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k_0} t$ kifejezéstől függ. Ez mutatja, hogy a hullámcsomag burkolója, azaz a hullámcsomag, mint egész a

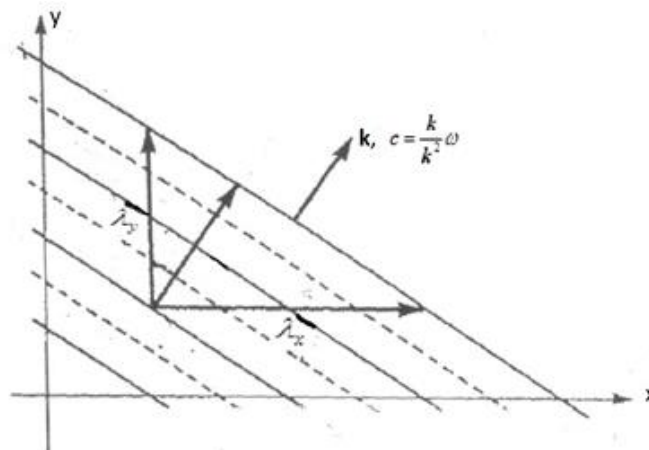
$$c_{cz} = \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k_0}$$

sebességgel mozog. Ezt a sebességet *csoportsebesség*nek nevezzük. A csoportsebesség általában különbözik a csomagot alkotó hullámok fázissebességétől, ezért a hullámcsomag az idő múlásával „szétfolyik”.

A hullámszám vektor és a hullám terjedési iránya

Egydimenziós hullámok esetén a hullámterjedés a terjedés vonala mentén pozitív, vagy negatív irányban történhet. A hullámszám vektort is ennek megfelelően látjuk el előjellel. Síkbeli, illetve térbeli terjedés esetén a hullámszám vektort a hullámterjedés irányába mutató vektornak tekintjük.

Síkban terjedő egyenes hullámok esetén (a hullámfrontok, azaz az azonos fázisú pontok egyenesek) a hullámszám nagysága a IX.1.3. ábra jelöléseivel a λ hullámhossz segítségével a szokásos $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ formulával adható meg. A k hullámszám vektor pedig a terjedési sebesség irányába mutat



IX.1.3. ábra. Síkban terjedő egyenes hullámok, (a hullámfrontok, azaz az azonos fázisú pontok egyenesek) és a hullámszám nagysága.

Ha nem a terjedés irányába eső egyenes mentén haladunk, akkor az azonos fázisú pontokat hosszabb úton érjük el. Ennek megfelelően bejelöltük az ábrán az x és y irányba eső λ_x és λ_y hullámhosszakat. A IX.1.3. ábráról leolvasható az is, hogy a terjedés irányának az x tengelytől mért φ szögével kifejezve

$$\sin \varphi = \frac{\lambda}{\lambda_y} \quad \text{és} \quad \cos \varphi = \frac{\lambda}{\lambda_x}.$$

Ily módon

$$\lambda = (\lambda_x^{-2} + \lambda_y^{-2})^{-\frac{1}{2}}.$$

Bevezetve a

$$l = \lambda_x^{-1} \quad \text{és} \quad m = \lambda_y^{-1}$$

jelölést, a hullámszám vektor:

$$\mathbf{k} = l\mathbf{e}_x + m\mathbf{e}_y \quad \text{és} \quad |\mathbf{k}| = \frac{2\pi}{\lambda} = \sqrt{l^2 + m^2}.$$

A hullám fázissebessége a fázisvonalak állására merőleges irányba mutat, és nagysága

$$c = \frac{\lambda}{T} = \frac{\omega}{k},$$

vektoriálisan pedig:

$$c = \frac{k}{k^2} \omega.$$

Vegyük észre, hogy a fázissebesség komponensei nem egyeznek meg a megfelelő tengelyek mentén mért fázissebességgel.

A csoportsebességet a

$$c_{cz} = \nabla_k \omega = \frac{\partial \omega}{\partial l} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial \omega}{\partial m} \mathbf{e}_2$$

egyenlettel definiáljuk. Itt a ∇_k jelölés azt jelenti, hogy a deriválást a $\mathbf{k}$ -térben kell elvégezni.

Vízfelületi hullámok

Belátható, hogy a végtelen mélynek tekinthető víz felületén terjedő k hullámszámú hullámcsoport diszperziós relációja

$$\omega = \sqrt{gk + \frac{\sigma k^3}{\rho}},$$

ahol σ a folyadék felületi feszültsége, ρ a sűrűsége, g a nehézségi gyorsulás.

A hanghullámok terjedési sebessége a levegőben

$$c_h = \sqrt{\kappa R T}, \text{ ahol } \kappa = \frac{c_p}{c_v},$$

a levegő állandó nyomáson és térfogaton vett fajhőjének hányadosa.

A folyadékok határfelületén terjedő hullámok

Két különböző, rendre ρ_1 és ρ_2 sűrűségű folyadék határfelületén terjedő hullám diszperziós relációja, ha mindkét közeg végtelen mély és a felületi feszültség elhanyagolható:

$$\omega = \sqrt{gk \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + \rho_2}}.$$

A határfelületen terjedő hullámok tárgyalásakor a hullám következő tulajdonságait használjuk fel. Feltételezzük, hogy a folyadék összenyomhatatlan és súrlódásmentes. A hullám sebességmezeje kétdimenziós $\mathbf{v}[u(x, y, t), v(x, y, t), 0]$ és feltételezzük, hogy a mozgás rotációmentes, azaz

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

(A feltétel biztosan teljesül, ha a folyadék eredetileg nyugalomban volt, mert ez azt jelenti, hogy $t=0$ -ban a feltétel teljesült, a kétdimenziós súrlódásmentes örvényességi egyenlet pedig biztosítja az örvényesség megmaradását.)

Az örvénymentesség miatt létezik sebességpotenciál, azaz

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y}.$$

Az összenyomhatatlanság miatt $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$, azaz a sebességpotenciálra teljesül a Laplace egyenlet:

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0.$$

Megjegyezzük, hogy a sebességpotenciálra itt alkalmazott – az elméleti hidrodinamikában elterjedten használt jelölés – eltér a meteorológiai gyakorlatban megszokottól. Ismét hangsúlyozzuk, hogy a kétdimenziós folyadékaramlásban az (x, y) síkban dolgozunk, a sebesség-komponensek u, v , s az y tengely a helyi függőleges irányába mutat. E jelöléssel a folyadékaramlás kétdimenziósságát hangsúlyozzuk.

A folyadék mozgása a határfelület $y = \eta(x, t)$ perturbációjából származik. A fenti feltételek mellett a Laplace egyenlet megoldásával meghatározhatjuk a $\phi(x, y, t)$ sebességpotenciált és abból a $\mathbf{v}(x, y, t)$ sebességmezőt. A megoldás viszonylag egyszerűen adódik, ha a felszín kicsiny deformációjára korlátozódunk, azaz a másodrendű kicsiny tagok elhanyagolásával az egyenleteket linearizáljuk.

A Laplace egyenlet megoldásai közül olyat kell kiválasztanunk, amely eleget tesz a következőknek:

a) *kinematikai feltétel* a felszínen, vagyis a felszíni folyadékrészek a mozgás során mindig a felszínen maradnak;

b.) *dinamikai feltétel*, vagyis érvényes a Bernoulli-egyenlet nem stacionárius alakja:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 + \chi = G(t)$$

ahol $G(t)$ tetszőleges, csak az időtől függő függvény, és $\chi = g y$.

(Emlékeztetünk, hogy y -tengely irányába mérjük a folyadék vastagságát, így egy referencia szinthez ($y=0$) képest a tömegegységnyi folyadékelem potenciális energiája: $\chi = g y$.)

c.) *nyomási feltétel a felszínen*, vagyis a folyadék felszínén a nyomásnak meg kell egyeznie a külső nyomással.

A hullámok leírása komplex függvényekkel

A hullámok kezelése gyakran egyszerűbbé, válik, ha az

$$y = A \cos(kx - \omega t + \delta)$$

függvény helyett az

$$y = A e^{i(kx - \omega t + \delta)}$$

komplex függvényt használjuk. Az $y = A e^{i(kx - \omega t + \delta)}$ komplex függvénynek az $\text{Re } y$ valós része az $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$ Moivre-formula szerint

$$\text{Re } y = A \cos(kx - \omega t + \delta)$$

meg egyezik a hullámok leírására használt harmonikus függvénnyel. Ennek megfelelően a hullámegyenletek megoldásait kereshetjük komplex alakban, majd a számítások elvégzése után a megoldás valós része adja a fizikai probléma megoldását.

A komplex számításmódnak több előnye is van.

a) A fázisállandók a komplex amplitúdók részeként kezelhetők, hiszen

$$y = A e^{i(kx - \omega t + \delta)} = A^* e^{i(kx - \omega t)}$$

ahol $A^* = A e^{i\delta}$.

b) A $k^* = k_1 + ik_2$ komplex hullámszám és $\omega^* = \omega_1 + i\omega_2$ komplex körfrekvencia bevezetésével a hullámfüggvény

$$y = A e^{i(k^* x - \omega^* t + \delta)} = A e^{-k_2 x} e^{i k_1 x} e^{-\omega_2 t} e^{i(\omega_1 t - \omega_2 t)} e^{i(k_1 x - \omega_1 t + \delta)}$$

alakra hozható. Az $e^{-k_2 x}$ és $e^{-\omega_2 t}$ faktorok valós függvények, amelyek az amplitúdót térben illetve időben exponenciálisan változtatják. A hullámszám k_2 és a körfrekvencia ω_2 összetevőjének megfelelő választásával ily módon a hullámok csillapodása, vagy instabilitása is jellemezhetővé válik.

c) A hullámfüggvény deriváltjai egyszerű szorzásokkal fejezhetők ki:

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial x} &= i k A e^{i(kx - \omega t + \delta)} = i k y \\ \frac{\partial y}{\partial t} &= -i \omega A e^{i(kx - \omega t + \delta)} = -i \omega y \end{aligned}$$

Feladatok

IX.1.1. Vezessük le a Bernoulli-egyenlet

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} v^2 + \chi = G(t)$$

nem stacionárius alakját.

IX.1.2. Bizonyítsuk be, hogy a gravitációs felületi hullámok (a felületi feszültség elhanyagolható) diszperziós relációja

$$\omega = \sqrt{gk}$$

Határozzuk meg, a csoportsebességet!

IX.1.3. Bizonyítsuk be, hogy a szabad vízfelszínen keltett gravitációs hullámokban a részecskék körpályán mozognak!

IX.1.4. Bizonyítsuk be, hogy a felületi hullámok diszperziós relációja

$$\omega = \sqrt{gk + \frac{\sigma k^3}{\rho}},$$

ha a felületi feszültséget is figyelembe vesszük. Határozzuk meg a csoportsebességet!

IX.1.5. Határozzuk meg a felületi hullámok diszperziós relációját, ha a folyadék véges mélységű!

IX.1.6. Bizonyítsuk be, hogy két végtelen mély, a felső térfélben ρ_1 , az alsóban ρ_2 sűrűségű közeg határán ($\rho_2 > \rho_1$) keltett gravitációs hullámok diszperziós relációja

$$\omega = \sqrt{gk \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1}}$$

IX.1.7. A sztatikus légkörben egy eredetileg egyensúlyi helyzetben lévő légrést kissé kimozdítunk a helyéről és magára hagyjuk. Tegyük fel, hogy a kimozdított légrést mind sűrűségét, mind térfogatát megőrzi! Írjuk fel a légrést mozgásegyenletét és adjuk meg mozgását!

IX.1.8. A homogén gravitációs mezőben nyugvó végtelen kiterjedésű közegben a sűrűség a magassággal ismert módon csökken. Nyugalmi állapotban a folyadék $p = p_0(y)$ nyomását a hidrosztatika alapegyenlete szabja meg. A közegben kicsiny zavart keltünk, a mozgás azonban kétdimenziósnak tekinthető, azaz horizontálisan csak az x koordinátától függ. A zavar hatására létrejövő mozgásban minden részecske megőrzi tömegét is és térfogatát (összenyomhatatlanság) is.

Írjuk fel a mozgásegyenleteket!

IX.1.9. Az előző **IX.1.8. feladatban** a folyadék perturbált állapotáról tételezzük fel, hogy

$$p = p_0(y) + p_1(x, y, t), \quad \rho = \rho_0(y) + \rho_1(x, y, t), \quad \rho = \rho_{00} e^{-\frac{y}{H}},$$

valamint

$$u = u_1(x, y, t), \quad v = v_1(x, y, t), \quad w = 0.$$

Az 1 indexek a kicsiny perturbációkat jelölik. Linearizáljuk a mozgásegyenleteket és oldjuk meg őket, feltételezve, hogy a kicsiny perturbációkat harmonikus függvények írják le, s a mozgásegyenletek változói

$$\begin{aligned} u &= u_1(x, y, t) = u_1^*(y) e^{i(kx - \omega t)}, \\ v &= v_1(x, y, t) = v_1^*(y) e^{i(kx - \omega t)}, \\ \rho &= \rho_0(y) + \rho_1(x, y, t) = \rho_0(y) + \rho_1^*(y) e^{i(kx - \omega t)}, \\ p &= p_0(y) + p_1(x, y, t) = p_0(y) + p_1^*(y) e^{i(kx - \omega t)} \end{aligned}$$

alakban vehetők fel. Tételezzük fel továbbá, hogy nyugalmi állapotban a sűrűség a magassággal a

$$\rho_0 = \rho_{00} e^{-\frac{y}{H}}$$

függvény szerint csökken! Határozzuk meg a diszperziós relációt!

IX.1.10. Határozzuk meg a **IX.1.9. feladatban** keresett perturbációk fázis és csoportsebességét!

IX.1.11. A **IX.1.10. feladatban** a sűrűségeloszlást meghatározó H magasság általában nagy érték, ezért az $\frac{1}{4H^2}$ tag elhanyagolható a légköri hullámok hullámszámának $k^2 + l^2$ négyzetéhez képest. Ekkor a csoportsebesség és a fázissebesség kifejezése is egyszerűsödik. Mutassuk meg, hogy ebben a közelítésben a **IX.1.9.** és a **IX.1.10. feladatban** tárgyalt zavar fázissebessége merőleges a csoportsebességre, valamint hogy a részecskék mozgási sebessége a hullámfrontba esik!

IX.2. Hanghullámok

A hanghullámok jellegzetesen a folyadék összenyomhatóságának következtében jöhetnek létre, és a hanghullámok esetén a nehézségi erő hatása is elhanyagolható. A hullámok frekvenciája általában nagy, a hullámterjedés folyamata adiabatikusnak tekinthető. A légrések egyensúlyi helyzettől mért kitérése, valamint a nyomás- és sűrűségingadozások a hanghullámokban a megfelelő egyensúlyi értékekhez képest nagyon kicsik, ezért a hanghullámok terjedését leíró egyenletek a kis perturbációk módszerével linearizálhatók. Megjegyezzük továbbá, hogy a hanghullámoknak az időjárást irányító légköri folyamatokban nincsen jelentőségük.

A hanghullámokra vonatkozó mozgásegyenlet:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p,$$

érvényes továbbá a

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

kontinuitási egyenlet, valamint a

$$p\rho^{-\gamma} = \text{állandó}$$

adiabata egyenlet.

A hanghullámok terjedési sebessége gázokban:

$$c = \sqrt{\gamma \frac{R^*}{M} T},$$

ahol $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$ a gáz állandó nyomáson és állandó térfogaton vett fajhőjének hányadosa, R^* az univerzális gázállandó, M a gáz móltömege, T az abszolút hőmérséklet.

IX.2.1. Mutassuk meg, hogy adiabatikus folyamat esetén a kicsiny nyomás- és sűrűség perturbációk arányosak egymással!

IX.2.2. Bizonyítsuk be, hogy a hanghullámok terjedési sebessége

$$c = \sqrt{\gamma \frac{R^*}{M} T} !$$

Mutassuk meg, hogy a hanghullámok esetén a fázis- és csoportsebesség megegyezik.

IX.2.3. Mutassuk meg, hogy a pontszerű forrásból gömbszimmetrikusan terjedő hanghullámok amplitúdója a forrástól mért távolsággal fordított arányban csökken!

IX.2.4. Bizonyítsuk be, hogy amennyiben a hanghullámok terjedése izotermikus folyamat lenne, akkor a hullámok

$$c = \sqrt{\frac{R}{M} T} \text{ sebességgel terjednének!}$$

IX.2.5. Milyen közelítések mellett nem szerepelnek a légköri hullámok leírására szolgáló egyenletek megoldásában a hanghullámok?

IX.3. Tehetetlenségi és gravitációs hullámok

A forgó Földön a légkör és a tenger hullámmozgásait is a hidro-termodinamikai egyenletrendszer írja le. Az egyenletrendszer nemlineáris tagokat is tartalmaz. Az egyszerűbb matematikai leírás kedvéért hullámmozgásokra a kis perturbációk módszerét alkalmazzuk, amelynek segítségével az egyenletek linearizálhatók. A nem lineáris tagok elhanyagolása ellenére ez a módszer jól használható a légköri és óceáni hullámmozgások fizikai természetének mélyebb megértésére.

A légköri folyamatokban használt változókat, a $\mathbf{v} = \mathbf{v}(u, v, w)$ sebességet, a ρ sűrűséget és a T hőmérsékletet ebben az esetben a $\mathbf{v} = \bar{\mathbf{v}} + \mathbf{v}_1$, $\rho = \bar{\rho} + \rho_1$, $T = \bar{T} + T_1$ alakban fejezzük ki, ahol a felülvonással jelzett mennyiségek az alapállapotnak megfelelő értékeket jelentik, amelyhez képest az 1 indexszel jelöltek a hullámmozgáshoz vezető zavart létrehozó kicsiny perturbációkat jelentik. A sűrűséggel egyenértékű változóként gyakran a fajlagos, (vagy

specifikus) térfogatot ($\alpha = \frac{1}{\rho}$) használjuk. A légköri folyamatokra vonatkozóan fennáll továbbá, hogy a nyomás, a fajlagos térfogat (sűrűség) és a hőmérséklet átlagos (egyensúlyi) értéke csak a magasság függvénye:

$$\bar{p} = p(z), \quad \bar{\alpha} = \alpha(z), \quad \bar{T} = T(z),$$

továbbá, hogy a légkör ideális gáz és egyensúlyi állapotban hidrosztatikus, azaz

$$\bar{p} = \bar{\alpha} R \bar{T}, \quad \text{és} \quad \bar{\alpha} \frac{d\bar{p}}{dz} = -g$$

Emellett a hullámszerű zavarok vizsgálatakor feltételezzük, hogy a légköri folyamatok adiabatikusak és a disszipatív erők (súrlódás) is elhanyagolható. Ezekkel a feltevésekkel a hidro-termodinamikai egyenletrendszernek a kicsiny perturbációkat leíró linearizált alakját Práger (1981) nyomán a következő alakban írhatjuk fel.

A mozgásegyenlet vektoriális alakban:

$$\frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} + (\bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla) \mathbf{v}_1 + \bar{\alpha} \nabla p_1 + f(\mathbf{e}_z \times \mathbf{v}_1) + \alpha_1 \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} \mathbf{e}_z = 0,$$

ahol $\mathbf{e}_z$ a vertikális irányba mutató egységvektor, f pedig a Coriolis-paraméter, amit a Föld görbültségének elhanyagolása miatt első közelítésben állandónak tekintünk (f_0 sík közelítés), s ahogy korábban már említettük, $\mathbf{v}_1$ a hullámmozgáshoz vezető zavar (perturbáció) a sebességi mezőben.

Amennyiben a Föld görbületét is figyelembe kívánjuk venni, akkor legegyszerűbb közelítésként az

$$f = f_0 + \beta y$$

közelítéssel élünk (β sík közelítés). A béta sík közelítés a légköri folyamatokban fontos nagy hullámhosszúságú, lassú Rossby-hullámok magyarázatában játszik fontos szerepet.

A kontinuitási egyenlet:

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial t} + (\bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla) \alpha_1 + w_1 \frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial z} - \bar{\alpha} \nabla \cdot \mathbf{v}_1 = 0$$

A termodinamikai egyenlet:

$$\bar{\alpha} \left(\frac{\partial p_1}{\partial t} + (\bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla) p_1 \right) + \alpha_1 \bar{w} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \bar{\alpha} w_1 \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \frac{c_p}{c_v} \bar{p} \left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial t} + (\bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla) \alpha_1 \right) + \frac{c_p}{c_v} \left(p_1 \bar{w} \frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial z} + \bar{p} w_1 \frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial z} \right) = 0.$$

Itt eltekintettünk a nem-adiabatikus hatásoktól, mert a légköri folyamatok nagy része elegendően gyors ahhoz, hogy adiabatikus legyen.

Az egyenletrendszer alkalmazásakor vegyük figyelembe, hogy a termodinamikai egyenlet a fenti formájában csak ideális gázra érvényes, azaz csak a légkörre alkalmazható!

A különböző hullámmozgások vizsgálatakor a fenti egyenleteket még tovább egyszerűsítjük, attól függően, hogy a mozgásegyenletben melyik erő dominál. Amennyiben a nehézségi erő elhanyagolható a Coriolis-erőhöz képest, akkor tehetetlenségi, a fordított esetben gravitációs hullámokról beszélünk.

A hullámot leíró megoldásfüggvényt többnyire egyetlen síkhullám-módus alakjában vesszük fel, mert az összetett hullámok (hullámcsomag) mindig megadhatók ilyen hullámok összegeként, vagy integráljaként.

A pontos megoldáshoz ismernünk kell a peremfeltételeket. Többnyire azt tételezzük fel, hogy a folyadékot alul a $z=0$ merev felület, felül pedig a közeg végtelen kiterjedésű, vagy szabad felszín határolja, amely felett a nyomás

állandó. Ebből következik, hogy az alsó határon a vertikális sebesség zérus ($w=0$), a felsőn pedig $\frac{dp}{dt}=0$.

Az óceánra vonatkozó egyenletek felírásakor gyakran alkalmazzuk a **IV. fejezetben** leírt sekélyvíz közelítést, kihasználva, hogy a vizsgált folyadék mélysége sokkal kisebb, mint horizontális mérete. Bár a légkörnek nincsen felső határa, a sekélyvíz modell mégis gyakran alkalmazható annak figyelembe vételével, hogy a homogén (állandó sűrűségű és állandó hőmérsékletű) légkör mintegy 9 km magas lenne, így a légkör magassága is sokkal kisebb, mint horizontális mérete. Ebben a közelítésben, ha egyensúlyi állapotban a folyadékot hidrosztatikusnak tekintjük és feltételezzük, hogy horizontálisan állandó U sebességgel áramlik x irányban, a kicsiny perturbációkra vonatkozó egyenletek az alábbi alakban írhatók fel:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x}\right) u_1 - f v_1 + g \frac{\partial h_1}{\partial x} = 0,$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x}\right) v_1 + f u_1 + g \frac{\partial h_1}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{1}{H} \frac{\partial h_1}{\partial t} = 0,$$

ahol H a folyadék egyensúlyi magassága, az 1 indexes mennyiségek pedig kicsiny perturbációk.

IX.3.1. Határozzuk meg az állandó sűrűségűnek tekinthető, eredetileg a forgó Földhöz képest nyugvó folyadékban (levegőben, tengerben) keltett kicsiny zavar hatására kialakuló mozgást. Keressük a megoldást síkhullám alakban és tételezzük fel, hogy a hullám nem függ az y koordinátától! Határozzuk meg a hullám diszperziós relációját és a csoportsebességét is!

IX.3.2. Az előző **IX.3.1. feladat** megoldásaként talált hullám esetén határozzuk meg a mozgás sebességét! Mutassuk meg, hogy a hullám tranzverzális! Mutassuk meg továbbá, hogy a sebesség-hodográf a hullámterjedés irányára merőleges síkban egy kör!

IX.3.3. Mutassuk meg, hogy hogyan befolyásolja a kezdetben nyugvó, állandó sűrűségű folyadék felszínén keletkező perturbációs hullám mozgását a Föld forgása, valamint a folyadék mélysége. Tegyük fel, hogy a közeget alul a $z=0$ merev felület határolja, és a folyadék átlagos magassága H_0 . Határozzuk meg a diszperziós relációt! (Keressük a perturbációs egyenletek megoldását adott hullámhosszúságú harmonikus zavar formájában, amely az egyszerűség kedvéért horizontálisan csak az x koordinátától függ!)

IX.3.4. Határozzuk meg a **IX.3.2. feladatban** kapott harmonikus hullám diszperziós relációját, fázis- és csoportsebességét, sekély folyadék közelítésben, azaz ha a hullámhossz sokkal nagyobb, mint a folyadék H_0 mélysége. Mutassuk meg, hogy amennyiben a forgás elhanyagolható, akkor a hullámoknak nincs diszperziója!

IX.3.5. Keressük meg, hogy a **IX.3.2. feladatban** tárgyalt hullám terjedésében milyen hullámhosszak esetén válik dominánssá a forgás hatása a gravitációs hatáshoz képest. Határozzuk meg, hogy földi körülmények között mekkora ennek a hullámhossznak az értéke, ha a folyadék (tenger) mélységét 1 km-el, a gravitációs gyorsulást $9,81 \text{ m s}^{-2}$ -tel,

a Coriolis-paramétert 10^{-4} s^{-1} -mal közelítjük! (Ezt a hosszúságot nevezzük külső Rossby-sugárnak. Mekkora ebben az esetben a fázis és a csoportsebesség?

IX.3.6. Határozzuk meg az összenyomhatatlan sekély folyadékban terjedő kicsiny harmonikus zavar fázis és csoportsebességét! Tételizzük fel továbbá, hogy a horizontális divergencia zérus és a sebesség független a z koordinátától, a Coriolis-paraméterre azonban fennáll az $f(y) = f_0 + \beta y$ összefüggés!

IX.3.7. Mutassuk meg, hogy a **IX.3.6. feladat**ban kapott sebesség-hullám transzverzális!

IX.3.8. Diskutáljuk a **IX.3.6. feladat** megoldásaként kapott hullámot!

a) Határozzuk meg, hogy milyen sebességgel terjed a hullám az x irányban. Bizonyítsuk be, hogy a hullámok csoportsebessége speciális esetben nagyobb lehet mint a fázissebesség!

b) Határozzuk meg, hogy mi a feltétele annak, hogy a hullám az x tengely mentén stacionárius legyen! Bizonyítsuk be, hogy ilyen esetben tisztán x irányú hullámterjedés mellett a csoportsebesség kétszerese a szélesebességnek!

c) Mutassuk meg, hogy horizontális alapáramlás hiányában az adott ω_0 körfrekvenciához tartozó hullámok hullámszám vektorai a hullámszám térben körön helyezkednek el. Határozzuk meg a kör egyenletét ábrázoljuk a kört és rajzoljuk be a csoportsebesség vektort néhány hullámszám esetén.

IX.3.9. A **IX.3.6. feladat**ban szereplő hullámok tulajdonságai, így diszperziós relációja megfelel a barotrop Rossby-hullámokénak. Határozzuk meg a fázissebességét azoknak a Rossby-hullámoknak, amelyeknek hullámhossza az északi szélesség 60 fokán észak déli irányban 2500 km, kelet nyugati irányban pedig 10 000 km! Az átlagos szélesebesség keleti irányban 10 m s^{-1} .

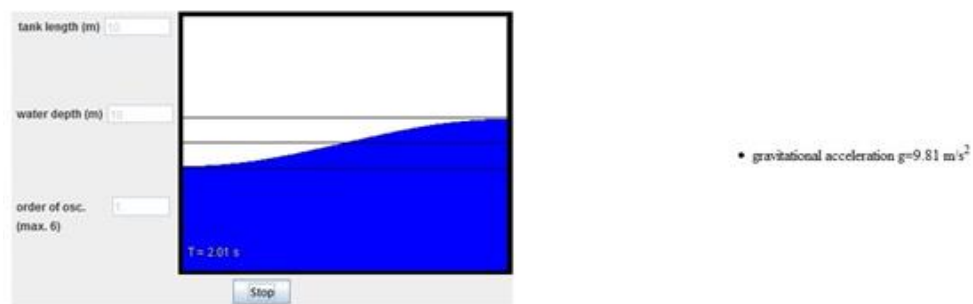
IX.3.10. Határozzuk meg a stacionárius barotrop Rossby-hullámok hullámhosszát a 45° szélességi körön, ha a hullám csak az x koordinátától függ és az átlagos keleti irányú áramlás sebessége 10 m s^{-1} ! Hány hullámhossznyi hullám fér el az adott szélességi körön?

IX.3.11. A tó lengés (seiche) jelenségét a gravitációs hullámok elmélete alapján értelmezhetjük. A jelenséget először François-Alphonse Forel írta le a Genfi-tóban kialakuló állóhullámokat vizsgálva. Tőle származik a seiche kihejezés is, ami a francia nyelv svájci nyelvjárásában azt jelenti, hogy "hinta-palinta" (to sway back and forth). A oszcillációk periódusideje a tó, vagy tartály alakjától és dimenzióitól függ. Az egyszerűsített modell kiindulási egyenletei:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad \text{és} \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} = -H \frac{\partial u}{\partial x},$$

ahol u a horizontális sebesség, H a vízmélység, η a vízmélység megváltozása a lengés következtében. A fenti két egyenlet alapján határozzuk meg a gravitációs hullám terjedési sebességét és a tó lengés periódusidejét. A tó lengés dinamikáját a **IX.3.1. interaktív videón** szemléltetjük.

Seiche



[<previous](#) [index](#) [next>](#)

MIX.3.1. interaktív videó. A tólagés

X. fejezet - Légköri energetika

Tasnádi Péter

Weidinger Tamás

X.1 Légköri energiafajták

A légköri energetika a teljes légkörben illetve a légkör meghatározott részében található energia kiszámításával illetve az energiák egymásba alakulásával foglalkozik. Az energiaátalakulási folyamatok ismerete fontos része a globális és lokális légköri folyamatok értelmezésének.

A légkör anyaga ideális gáznak tekinthető, amit a gravitációs vonzás tart meg a Föld körül. Ennek megfelelően a légkör belső (termikus), gravitációs potenciális (helyzeti) és kinetikus energiával rendelkezik.

A vizsgált légréteg energiáját az energiasűrűség integrálásával határozhatjuk meg. A meteorológiában az energiasűrűséget egységnyi tömegre illetve egységnyi térfogatra szokás megadni.

A belső energia sűrűsége egységnyi térfogatra illetve egységnyi tömegre vonatkoztatva:

$$e_b = c_v \rho T \quad \text{illetve} \quad e'_b = c_v T,$$

ahol c_v a levegő (tömegegységnyi) állandó térfogaton vett fajhője, ρ a sűrűsége, T pedig a hőmérséklete.

A gravitációs potenciális energia sűrűsége egységnyi térfogatra illetve egységnyi tömegre vonatkoztatva:

$$e_p = \rho g z \quad \text{illetve} \quad e'_p = g z,$$

ahol $g \approx 9,81 \text{ m s}^{-2}$ a nehézségi gyorsulás, z pedig a tengerszinttől mért magasság. A nehézségi gyorsulás a teljes légkörre azért tekinthető állandónak, mert a földi légkör össztömege jó közelítéssel a tengerszinttől mért 10 km sugarú gömbhøjban helyezkedik el. Ebben a közelítésben a tömegegységre jutó helyzeti energia megegyezik a geopotenciállal, $\Phi = g z$.

A kinetikus energia sűrűsége egységnyi térfogatra illetve egységnyi tömegre vonatkoztatva:

$$e_k = \frac{1}{2} \rho v^2 \quad \text{illetve} \quad e'_k = \frac{1}{2} v^2,$$

ahol v a levegő áramlási sebessége.

A légkör V tartományában található belső, potenciális és kinetikus energia rendre:

$$E_b = \int_V c_v \rho T dV, \quad E_p = \int_V \rho g z dV, \quad E_k = \int_V \frac{1}{2} \rho v^2 dV.$$

Az energiafajták teljes légkörre vett integrálásakor eltekinthetünk a Föld gömb alakjától és az összegezést a síkba kiterített földfelszín felett végezhetjük el (lásd a **X.1.4. feladatot** is). Emiatt gyakran használjuk az egységnyi alapterületű légoszlopban található átlagos energiát, mint energetikai jellemzőt.

A légköri energetikában, a nagy térségben található energiák meghatározásakor általában hidrosztatikus közelítést alkalmazunk és ebben az esetben alkalmas koordináta-rendszer a nyomási és potenciális hőmérsékleti rendszer is.

Az időjárási folyamatokat döntően a légkör kinetikus energiája szabja meg. A kinetikus energia azonban csak kicsiny hányada a légkör összenergiájának, amelynek döntő részét a potenciális és termikus energia képezi. Belátható, hogy hidrosztatikus rétegződés esetén a potenciális és belső energia arányos egymással. A meteorológiában gyakran e két energia összegét nevezzük potenciális vagy teljes potenciális energiának (E_{pot}). Kimutatható, hogy

$$E_{pot} = E_p + E_p = \int_V c_p \rho T dV$$

X.1.1. Mekkora a T_0 hőmérsékletű izoterm légkörben a P_0 nyomású (talaj) és P nyomású szint között elhelyezkedő egységnyi alapterületű száraz légoszlop helyzeti és belső energiája? Milyen nyomáson és milyen magasságban van a légoszlop súlypontja?

X.1.2. Határozzuk meg a P_0 nyomású (talaj) és P nyomású szint között elhelyezkedő egységnyi alapterületű száraz légoszlop helyzeti és belső energiáját, ha a levegő hőmérséklete a talajon mért T_0 hőmérsékletéről a $T = T_0 - \gamma z$ összefüggés szerint lineárisan csökken a magassággal! Mekkora ennek a légoszlopnak az átlagos hőmérséklete? Milyen nyomáson és magasságban helyezkedik el a légoszlop súlypontja?

X.1.3. Határozzuk meg a P_1 és P_2 izobár szintek között elhelyezkedő egységnyi keresztmetszetű légoszlop helyzeti és belső energiája közötti összefüggést, ha tudjuk, hogy a P_1 és P_2 izobárok rendre z_1 és z_2 magasságban helyezkednek el!

X.1.4. Határozzuk meg az ICAO standard légkörben a troposzféra levegőjének teljes helyzeti és belső energiáját! (Az ICAO légkörben a tengerszinti nyomás $P_0 = 1013,25 \text{ hPa}$, a tengerszinti hőmérséklet $T_0 = 288 \text{ K}$, a nehézségi gyorsulás $g = 9,806 \text{ m s}^{-2} \approx 9,81 \text{ m s}^{-2}$ a hőmérséklet a tengerszinttől a 11000 m magasban kezdődő tropopauzáig lineárisan csökken, $\gamma = 6,5 \cdot 10^{-3} \text{ K m}^{-1}$. A tropopauza hőmérséklete $-217,5 \text{ K}$, nyomása pedig 234 hPa .)

X.1.5. Mekkora kinetikus energiával rendelkezik a talajtól a P_1 izobár szintig tartó egységnyi keresztmetszetű légoszlop, ha a horizontális sebesség a talaj szintjétől a magassággal lineárisan nő, a vertikális sebesség összetevő pedig elhanyagolható? A talaj szintjén a horizontális sebesség is elhanyagolható, a P_1 szinten pedig v_{P_1} . Mekkora az átlagos szélsősebesség ebben a rétegben? Milyen nyomáson veszi fel a szél ezt a sebességet? Tegyük fel továbbá, hogy

a) a légkör izoterm ($T = T_0$),

b) a hőmérséklet a talaj szintjétől a $T = T_0 - \gamma z$ összefüggés szerint lineárisan csökken!

X.1.6. Határozzuk meg annak a vertikálisan statikus légoszlopnak az egységnyi felületére jutó

a) kinetikus energiáját,

b) az átlagos áramlás kinetikus energiáját,

c) a vertikális nyírás energiáját, amelyben a v sebesség a következő összefüggés szerint változik:

$$v(p) = v_{\max} \frac{p}{p_1}, \text{ ha } 0 < p < p_1$$

és

$$v(p) = v_{\max} \frac{p_0 - p}{p_0 - p_1}, \text{ ha } p_1 < p < p_0!$$

X.1.7. Határozzuk meg a hőmérséklet és a nyomás közötti kapcsolatot, ha a sztatikus stabilitási paraméterre fennáll

a $\sigma = \frac{\sigma_0 p_0^2}{p^2}$ összefüggés, ahol $\sigma_0 = 10^{-6} \text{ m}^4 \text{ s}^2 \text{ kg}^{-2}$ és $p_0 = 100 \text{ hPa}$! Határozzuk meg az egységnyi területű légoszlop potenciális és belső energiáját a p_0 és p_1 nyomásszintek között!

X.1.8. Bizonyítsuk be, hogy a hidrosztatikus egyensúlyban lévő légkörben mindig van olyan $p_1(z_1)$ és $p_2(z_2)$ szint, amelyek közé eső egységnyi területű légoszlop potenciális és belső energiájának aránya megegyezik a teljes légkörre számított hasonló légoszlop potenciális és belső energiájának arányával!

X.1.9. Határozzuk meg az $y = p^z$ függvény maximumát különböző légköri rétegződés esetén:.

- a) izoterm légkörben,
- b) politrop légkörben,
- c) adiabatikus légkörben,
- d) állandó sűrűségű légkörben!

X.2. A légköri energiák közötti átalakulások

A légkör hosszabb időtávon energetikai szempontból dinamikus egyensúlyban van, azaz a Napból a Földre érkező rövidhullámú sugárzási energia megegyezik a Föld által kibocsátott hosszuhullámú sugárzási energiával. Amíg azonban Föld által kisugárzott energia földrajzi hely szerint egyenletesen oszlik el, a Napról érkező sugárzási energia egyenetlenül éri a Földet, övezetes szerkezetű. A rendszer entrópiája nem maximális. Emiatt a légkör mozgásba jön, kinetikus energiája lesz. A sugárzási energia a légkör termikus energiáját változtatja, s ez alakul át a légköri mozgások kinetikus energiájává. Nagyon fontos tehát a légköri energiafajták tendencia egyenleteinek meghatározása.

Belátható, hogy

$$\begin{aligned} \frac{dE_p}{dt} &= \int_V \rho g w dV, \\ \frac{dE_b}{dt} &= \int_V Q' \rho dV - \int_V p \nabla \cdot \mathbf{v} dV, \\ \frac{dE_k}{dt} &= - \int_V \rho g w dV + \int_V p \nabla \cdot \mathbf{v} dV + \int_V \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{F} dV, \end{aligned}$$

ahol az integrál a teljes légkörre vonatkozik, $Q' \rho$ a légkör egységnyi térfogatában egységnyi idő alatt elnyelt teljesítmény, $\rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{F}$ pedig az egységnyi térfogatban disszipált munka. Az energiaátalakulás szemléltethető úgynevezett

doboz diagramokkal, ha bevezetjük a $C(E_p, E_k)$, $C(E_b, E_k)$ kifejezéseket, amelyek rendre a potenciális energia egységnyi idő alatt kinetikus energiává transzformálódó részét, valamint a belső energia egységnyi idő alatt kinetikus energiává transzformálódó részét jelentik. Továbbá legyen $G(E_b)$ az egységnyi idő alatt a légkörbe hő formájában

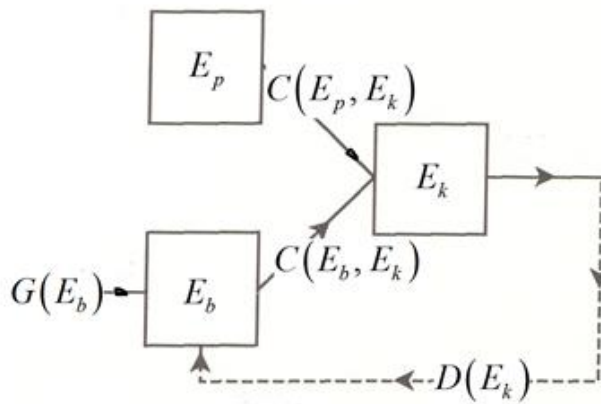
bevitt energia (ami nyilvánvalóan a belső energiát növeli), valamint $D(E_k)$ az egységnyi idő alatt disszipált energia (ami nyilvánvalóan a kinetikus energiát csökkenti). Az energiaátalakulást leíró egyenletek:

$$\frac{dE_p}{dt} = -C(E_p, E_k),$$

$$\frac{dE_b}{dt} = -C(E_b, E_k) + G(E_p),$$

$$\frac{dE_k}{dt} = C(E_p, E_k) + C(E_b, E_k) - D(E_k).$$

Az energiaátalakulásokat a X.2.1. ábra szemlélteti:



X.2.1. ábra. Légköri energiaátalakulások.

Az energiaátalakulási egyenleteket a most bevezetett szimbólumokkal kifejezett egyenletekkel összehasonlítva nyilvánvalóan adódik, hogy:

$$C(E_p, E_k) = - \int_V \rho g w dV,$$

$$C(E_b, E_k) = \int_V p \nabla \cdot \mathbf{v} dV,$$

$$G(E_b) = \int_V Q' \rho dV,$$

$$D(E_k) = \int_V \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{F} dV.$$

X.2.1. Mutassuk meg, hogy tetszőleges s sűrűségű skalármennyiség $\mathbf{j} = s\mathbf{v}$ áramára teljesül,

hogy, hogy divergenciáját a teljes légkörre integrálva zérust kapunk:

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{j} dV = 0$$

X.2.2. Mutassuk meg, hogy tetszőleges S skalármennyiség esetén:

$$\int_V \rho \frac{dS}{dt} dV = \int_V \frac{\partial(\rho S)}{\partial t} dV$$

X.2.3. Bizonyítsuk be, hogy $\frac{dE_p}{dt} = \int_V \rho g w dV$!

X.2.4. Bizonyítsuk be, hogy $\frac{dE_\phi}{dt} = \int_V Q' \rho dV + \int_V p \nabla \cdot \mathbf{v} dV$!

X.2.5. Mutassuk meg, hogy $\frac{dE_k}{dt} = - \int_V \rho g w dV + \int_V p \nabla \cdot \mathbf{v} dV + \int_V \mathbf{v} \cdot \mathbf{F} dV$!

X.2.6. A légekőri folyamatokban a horizontális sebesség általában nagyságrendekkel nagyobbak a vertikálisnál. Ezért választhatjuk szét a horizontális és vertikális sebességből származó kinetikus energiát és rajzolhatjuk meg az energiaátalakulások doboz diagramját. Térbeli polár-koordináta rendszer használatával válasszuk szét a kinetikus energiát a horizontális és a vertikális mozgásból adódó részre, határozzuk meg az energiaátalakulásokat leíró tendenciákat és rajzoljuk meg a megfelelő doboz diagramot!

X.2.7. Hidrosztatikus közelítésben a vertikális sebesség már nem független változó. Ha megköveteljük, hogy a légekő minden pillanatban és minden helyen hidrosztatikus egyensúlyban legyen, akkor a vertikális sebesség meghatározható. A hidrosztatikus egyensúly feltételezésével, kontinuitási egyenlet és a termodinamikai egyenlet felhasználásával Richardson a vertikális sebességre a

$$p \frac{\partial W}{\partial z} = \frac{1}{\kappa} \left(\int_z^\infty g \nabla_h \cdot (\rho \mathbf{v}_h) dz - \nabla_h \cdot (p \mathbf{v}_h) - \frac{R}{c_v} p \nabla_h \cdot (\mathbf{v}_h) + \frac{R}{c_v} \rho Q' \right)$$

összefüggést kapta, ahol a vertikális sebességre azért használunk nagybetűt (W), hogy megkülönböztessük az általánosan érvényes egyenletrendszer w független változójától. A h alsó index a kétdimenziós horizontális

mennyiségre utal, $\kappa = \frac{c_p}{c_v}$, a többi változók jelentése a szokásos. Bizonyítsuk be a Richardson-egyenletet!

X.2.8. Hogyan egyszerűsödik a **X.2.6. feladat** diagramja, ha hidrosztatikus közelítést használunk?

X.3. A felhasználható potenciális energia

Edward Lorenz kimutatta, hogy a teljes potenciális energiának hidrosztatikus légekőben csak egy része alakítható át kinetikus energiává, mert a légekő barotróp állapotban is rendelkezik potenciális, pontosabban fogalmazva teljes potenciális energiával, ami tovább már nem csökkenthető. A teljes potenciális energiának a felhasználható (hozzáférhető) hányada (available potential energy, APE) az

$$E_{APE} = E_{pot} - E_{pot(min)},$$

ahol E_{pot} a légekő adott állapotában a teljes potenciális energia (a belső energia és a nehézségi erő keltette potenciális energia összege), $E_{pot(min)}$ pedig a teljes potenciális energia minimuma, amivel a légekő akkor rendelkezik, amikor az adott állapotból adiabatikusan úgy rendezzük át, hogy az izobár és izentróp felületek egybe essenek. Az átrendezés az eredetileg is hidrosztatikus rétegződésű légekőt úgy alakítja át, hogy az izentróp felületek változatlanok maradnak, és rajtuk a nyomás az eredetileg az izentróp felületen mért nyomáseloszlás átlaga lesz.

Lorenz a felhasználható potenciális energiát a

$$E_A = \frac{c_p}{g p_0^k (k+1)} \int_0^{p_0} \int_A (p^{k+1} - \bar{p}^{k+1}) dA dp$$

formulával fejezte ki, ahol p_0 a referenciaállapotban 1 at. A formulában a betűk jelentése a szokásos. Az összefüggés a gyakorlatban nehezen használható, mert az adatok többnyire nyomási koordinátákban állnak rendelkezésre. A felhasználható potenciális energiára Wiin Nielsen a

$$E_A = \frac{1}{g} \int_0^{p_0} \int_A \frac{\alpha'^2}{2\bar{\sigma}} dA dp$$

közelítést adta, ahol $\alpha' = \alpha - \bar{\alpha}$ a fajlagos (vagy specifikus) térfogatnak az adott nyomási szinten vett átlagától vett

eltérése, $\bar{\sigma} = -\frac{\bar{\alpha}}{\bar{\theta}} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial p}$ az átlagos adatokból képzett statikus stabilitási paraméter. Ez megegyezik a Lorentz által

$$E_A = \int_0^{p_0} \int_A \bar{T} \frac{1}{\Gamma_d - \bar{T}} \left(\frac{T'}{\bar{T}} \right)^2 dA dp$$

alakban megadott közelítéssel. Itt Γ_d a száraz adiabatikus hőmérsékleti gradiens, míg $\bar{T}$ a léggör átlagos hőmérsékleti gradiense.

A felülvonalas itt is az átlagolás jele. Megjegyezzük, hogy a fluktuációk négyzetátlaga itt is egy hosszabb időszakra vonatkozik, de külön nem jelöljük az átlagolást, vagyis az itteni és a turbulens áramlásban (*VII.* és a *VIII. fejezet*) alkalmazott jelölések szerint: $T'^2 \equiv \overline{T'^2}$ és $\alpha'^2 \equiv \overline{\alpha'^2}$)

X.3.1. Az „A” alapterületű edényben ρ_0 sűrűségű összenyomhatatlan folyadék helyezkedik el. A folyadék magassága $h(x, y, t)$. Határozzuk meg, hogy milyen $h(x, y, t)$ függvény esetén minimális az edényben elhelyezkedő folyadék helyzeti energiája. Ha adott pillanatban a folyadék magasságeloszlása a $h(x, y, t_0)$ akkor mennyi helyzeti energia nyerhető ki a rendszerből (Wiin Nielsen nyomán)?

X.3.2. Margules az 1900-as évek elején a ciklonok kinetikus energiájának keletkezésével foglalkozott. Ennek kapcsán a folyadék átrendeződéséből felszabadítható potenciális energiát is vizsgálta. Egyik példája az alábbi volt.

Két, rendre A_1 és A_2 alapterületű h_0 magasságú összenyomhatatlan folyadékoszlopot függőleges fal választott el.

A folyadékoszlopok sűrűsége rendre ρ_1 és ρ_2 . Mennyivel csökken a folyadék potenciális energiája, ha a falat kivesszük és a folyadék minimális energiájú egyensúlyi állapotba jut?

X.3.3. Fogadjuk el az előző **X.3.2. feladatban** adódó eredményt, mely szerint

$$\frac{\Delta E_p}{M} = \frac{g h_0}{8} \frac{\Delta \rho}{\rho}$$

Tegyük fel továbbá, hogy $\frac{\Delta \rho}{\rho} \approx \frac{\Delta T}{\bar{T}}$ és a felszabaduló potenciális energiából kinetikus energia lesz. Becsüljük meg ennek alapján, az áramlás átlagos sebességét a $\Delta T = 15 \text{ K}$, $\bar{T} = 288 \text{ K}$, $g = 10 \text{ ms}^{-2}$ és $h_0 = 2 \text{ km}, 3 \text{ km}$ és 5 km értékek mellett!

X.3.4. V. H. Reid 1923-ban hengersizmetrikusan örvénylő áramlást vizsgált, amelyben érvényesül a gradiens szél egyensúly és az áramló közeg összenyomhatatlansága. Feltételezte továbbá, hogy a szélesség csak az $x = \frac{r}{r_0}$ dimenziótlan sugár $v(x) = v_0 x e^{1-x}$ alakú függvénye.

a.) Mutassuk meg, hogy a sebesség maximuma ebben az áramlásban az $x = 1$ ($r = r_0$) helyen van, és értéke $v_{\max} = v_0$!

b.) Határozzuk meg az áramló közeg átlagos magasságát, ha az áramlás maximális kiterjedését $x_{\max}$ -szal közelítjük!

c.) Határozzuk meg az áramlás kinetikus és potenciális energiáját, valamint a felhasználható potenciális energia értékét!

d.) A $v_0 = 20 \text{ m s}^{-1}$, $f = 10^{-4} \text{ s}^{-1}$, $g = 10 \text{ m s}^{-2}$, $r_0 = 2 \cdot 10^5 \text{ m}$ és $x_m = 10$ értékek mellett határozzuk meg a kinetikus, potenciális és felhasználható potenciális energia értékét, valamint a kinetikus és potenciális illetve kinetikus és felhasználható potenciális energia átlagát!

X.3.5. Mutassuk meg, a felhasználható potenciális energia

$$E_A = \frac{c_p}{g p_0^k (k+1)} \int_0^{\infty} \int_A (p^{k+1} - \bar{p}^{k+1}) dA d\theta$$

kifejezéséből kiindulva az

$$E_A = \frac{1}{g} \int_0^{p_0} \int_A \frac{\alpha'^2}{2\sigma} dA dp$$

közelítés érvényességét! (Bontsuk fel a nyomást a területi átlag és az attól vett perturbáció összegére és csak a harmadrendben kicsiny tagokat hanyagoljuk el!)

X.3.6. A felhasználható potenciális energia

$$E_A = \frac{1}{g} \int_0^{p_0} \int_A \frac{\alpha'^2}{2\sigma} dp dA$$

Wiin Nielsen féle közelítéséből kiindulva bizonyítsuk be a Lorentz féle

$$E_A = \frac{1}{g} \int_0^{p_0} \int_A \frac{1}{\Gamma_d - \bar{\Gamma}} \left(\frac{\Gamma'}{\bar{\Gamma}} \right)^2 dA dp$$

közelítés érvényességét! Itt Γ_d a száraz adiabatikus hőmérsékleti gradiens, míg $\bar{\Gamma}$ a légkör átlagos hőmérsékleti gradiense.

X.3.7. Edward Lorenz a légkör stabilitását vizsgálva bevezette az

$$E_E = \frac{1}{1+k} \frac{c_p}{g} \int_0^{p_0} \theta dp$$

mennyiséget. Tételezzük fel, hogy a Föld felszínén az átlagos nyomás megegyezik a potenciális hőmérsékletben használt referencia nyomással! Bizonyítsuk be, hogy ekkor

$$E_p - E_E = -E_s,$$

ahol

$$E_s = \frac{1}{1+k} \frac{p_0 c_p}{g} \int_0^{p_2} \left[\frac{p}{p_0} - \left(\frac{p}{p_0} \right)^{k+1} \right] \left(-\frac{\partial \Theta}{\partial p} \right) dp !$$

X.3.8. A lokális sztatikus stabilitás többféle kissé eltérő paraméterrel jellemezhető. Használható például a

$\sigma = \frac{1}{p_0^k T_{00}} \left(\frac{\partial \Theta}{\partial (p^{-k})} \right)$ dimenziótlan mennyiség is, ahol T_{00} a légkörre jellemző standard hőmérséklet. (Figyelem ez a mennyiség nem azonos az előző feladatokban használt sztatikus paraméterrel.) Mutassuk meg, hogy hidrosztatikus légkörben

a) $\sigma = \frac{T}{T_{00}} \frac{\Gamma_d - \Gamma}{\Gamma_d}$ ahol Γ_d a száraz adiabatikus hőmérsékleti gradiens és $\Gamma = -\frac{dT}{dz}$,

b) $E_s = \frac{k}{1+k} \frac{T_{00}}{\Gamma_d} \int_0^{p_2} \left[\left(\frac{p}{p_0} \right)^{-k} - 1 \right] \sigma dp !$

X.3.9. Edward Lorenz az E_s kifejezést a légkör teljes statikus stabilitására jellemző mennyiségnek tekintette, „gross static stability” paraméternek nevezte. Mutassuk meg, hogy a teljes stabilitási paraméter megváltozása adiabatikus körülmények között megegyezik a kinetikus energia megváltozásával!

XI. fejezet - A szinoptikus skálájú légköri folyamatok dinamikája

Havasi Ágnes
Tasnádi Péter

XI.1. A szinoptikus mozgásrendszerek főbb sajátosságai, matematikai leírásuk

A szinoptikus skálájú mozgásrendszerek leírásakor nyomási koordináta-rendszerben dolgozunk. A hidrodinamikai egyenletrendszert a következő feltevések figyelembevételével egyszerűsítjük.

Az egyenletek a *szabad légkörre* vonatkoznak, ezért a súrlódási erőt elhanyagoljuk.

Kvázigeosztrófikus közelítés: a mozgásegyenletek egyes tagjaiban a teljes szelet kicseréljük a geosztrófikus szélre. Az egyszerűség kedvéért a geosztrófikus szél definíciójában az f Coriolis-paramétert állandónak tekintjük, tehát a geosztrófikus szélegyenlet szokásos

$$u_{\varepsilon} = \frac{1}{f} \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad v_{\varepsilon} = -\frac{1}{f} \frac{\partial \Phi}{\partial y}$$

alakja helyett az

$$u_{\varepsilon} = \frac{1}{f_0} \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad v_{\varepsilon} = -\frac{1}{f_0} \frac{\partial \Phi}{\partial y}$$

alakkal dolgozunk, ahol f_0 állandó (a vizsgált térség közepes földrajzi szélességének megfelelő érték). A kvázigeosztrófikus közelítés során azt használjuk fel, hogy szinoptikus skálán a szél geosztrófikus komponense sokkal nagyobb az ageosztrófikusnál. Ennek figyelembevételével a nyomási rendszerben felírt horizontális mozgásegyenletek a

$$\frac{\partial u_{\varepsilon}}{\partial t} + u_{\varepsilon} \frac{\partial u_{\varepsilon}}{\partial x} + v_{\varepsilon} \frac{\partial u_{\varepsilon}}{\partial y} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} + f v$$

$$\frac{\partial v_{\varepsilon}}{\partial t} + u_{\varepsilon} \frac{\partial v_{\varepsilon}}{\partial x} + v_{\varepsilon} \frac{\partial v_{\varepsilon}}{\partial y} = -\frac{\partial \Phi}{\partial y} - f u$$

alakra egyszerűsödnek.

További fontos egyszerűsítés, hogy a Coriolis-erő komponenseit leíró $f u$ és $f v$ tagokban a β -sík közelítést alkalmazzuk. Ez azt jelenti, hogy az f Coriolis-paraméter y koordinátától való függését figyelembe vesszük, de csak a lineáris tag erejéig. Ebből az

$$f \approx f_0 + \beta y$$

közelítés adódik, ahol β az $f y$ -szerinti deriváltja a vizsgált tartomány y_0 közepes földrajzi szélességén, és f_0 a Coriolis-paraméter értéke az y_0 szélességen. Ebben a közelítésben:

$$\frac{df}{dy} = \beta$$

A mozgásegyenletek helyett gyakran az *örvényességi egyenletet* használjuk, amelynek kvázigeosztrófikus közelítésben felírt alakja

$$\frac{\partial \zeta_\varepsilon}{\partial t} = -\mathbf{v}_\varepsilon \cdot \nabla (\zeta_\varepsilon + f) + f_0 \frac{\partial \omega}{\partial p}$$

A szinoptikus skálájú mozgásrendszerekben a függőleges gyorsulásoktól eltekinthetünk. Így a harmadik mozgásegyenlet a sztatika alapegyenletére egyszerűsödik, amelynek nyomási rendszerbeli alakja:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial p} = -\alpha$$

ahol α a specifikus térfogat.

A *termodinamikai egyenletben* adiabatikus közelítéssel élünk, és gyakran alkalmazzuk a hőmérsékleti profil standardizálását. Ez utóbbi azt jelenti, hogy a

$$\sigma = -\frac{\alpha}{\Theta} \frac{\partial \Theta}{\partial p}$$

sztatikai stabilitási paramétert csak a p nyomás függvényének tekintjük. Ebben az esetben a $\bar{\sigma}$ jelölést alkalmazzuk.

XI.1.1. Számítsuk ki a geosztrófikus szél divergenciáját állandó illetve változó f Coriolis-paraméter esetén!

XI.1.2. Mutassuk meg, hogy szinoptikus skálán a $-\partial \Phi / \partial p$ derivált a p nyomási szinten a hőmérséklettel arányos!

XI.1.3. a) Fejezzük ki a geosztrófikus szél örvényességét a Φ geopotenciál segítségével!

b) Tegyük fel, hogy a geopotenciál térbeli eloszlását a

$$\Phi(x, y, p) = \Phi_0(p) - Ky + \Phi^* \sin(kx)$$

függvény adja meg, ahol Φ_0 csak a nyomás függvénye, K , k és Φ^* pedig állandók. Adjuk meg a geosztrófikus szélmezt, valamint a geosztrófikus örvényességet az x , y és p függvényében!

XI.1.4. Mutassuk meg, hogy szinoptikus skálán, adott nyomási szinten a σ sztatikai stabilitási paraméter csak a geopotenciál térbeli eloszlásának a függvénye!

XI.1.5. Mutassuk meg, hogy szinoptikus skálán, izoterm légkörben a σ sztatikai stabilitási paraméter a nyomás négyzetével fordítottan arányos!

XI.1.6. Az 500 hPa-os szinten, a 45. északi szélességen a geosztrófikus örvényesség három óránként $3 \cdot 10^{-6} \text{ s}^{-1}$ értékkel változik. Délnyugati szél 20 ms^{-1} sebességgel, és a geosztrófikus örvényesség gradiense délnyugat felé mutat, nagysága pedig 100 km-en $4 \cdot 10^{-6} \text{ s}^{-1}$ -os értékkel változik. Számítsuk ki a horizontális divergenciát! Dolgozzunk β -sík közelítésben, és számoljunk az $f_0 = 10^{-4} \text{ s}^{-1}$, $\beta = 1,6 \cdot 10^{-11} \text{ m}^{-1} \text{ s}^{-1}$ értékekkel.

XI.1.7. Legyen a geopotenciál a térváltozók és az idő függvényében

$$\Phi(x, y, p, t) = \Phi_0(p) + cf_0 \left\{ -y[\cos(\pi p / p_0) + 1] + \frac{1}{k} \sin(k(x - ct)) \right\},$$

ahol $c > 0$ konstans sebesség, k a zonális hullámszám, és $p_0 = 1000 \text{ hPa}$. A kvázigeosztrófikus örvényességi egyenletből számítsuk ki a horizontális divergencia mezejét, vagyis a $\nabla \cdot \mathbf{v}(x, y, p, t)$ függvényt! A $\frac{\partial f}{\partial y}$ deriváltat vegyük nullának.

XI.2. A tendencia- és az omegaegyenlet

A szinoptikus skálájú mozgásrendszerek leírásában központi szerepe van a Φ geopotenciálnak, ugyanis ezen skalárfüggvény térbeli eloszlása határozza meg az áramlás főbb jellemzőit. Célszerű ezért mind a *kvázigeosztrófikus örvényességi egyenletet*, mind a termodinamikai egyenletet Φ -vel kifejezett alakban felírni:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla^2 \Phi) = -f_0 \mathbf{v}_\varepsilon \cdot \nabla \left(\frac{1}{f_0} \nabla^2 \Phi + f \right) + f_0^2 \frac{\partial \omega}{\partial p},$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial p} \right) = -\mathbf{v}_\varepsilon \cdot \nabla \left(\frac{\partial \Phi}{\partial p} \right) - \bar{\sigma} \omega$$

A fenti két egyenlet zárt *prognosztikai egyenletrendszer* alkot a Φ geopotenciálra és az ω (nyomási rendszerbeli) függőleges sebességre nézve. Ezt a rendszert a továbbiakban *kvázigeosztrófikus egyenletrendszernek* nevezzük. Belőle további fontos egyenletek származtathatók. Az ω kiküszöbölésével kapjuk a

$$\left[\nabla^2 + \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{f_0^2}{\bar{\sigma}} \frac{\partial}{\partial p} \right) \right] \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) = -f_0 \mathbf{v}_\varepsilon \cdot \nabla \left(\frac{1}{f_0} \nabla^2 \Phi + f \right) + \frac{\partial}{\partial p} \left[\frac{f_0^2}{\bar{\sigma}} \mathbf{v}_\varepsilon \cdot \nabla \left(-\frac{\partial \Phi}{\partial p} \right) \right]$$

tendenciaegyenletet. Egyhullám-közelítésben a bal oldal a $\partial \Phi / \partial t$ tendencia (-1) -szeresével arányos. A jobb oldali első tag az abszolút örvényesség geosztrófikus széllel történő advekcijával arányos, a második tag pedig a hőmérsékleti advekciónak a nyomás szerinti deriváltját tartalmazza (differenciális hőmérsékleti advekciónak). Mivel a jobb oldalon csak a geopotenciál térváltozók szerinti deriváltjai szerepelnek, és minden egyéb változó vagy ismert (pl.

f), vagy szintén kifejezhető a geopotenciál függvényében (pl. $\mathbf{v}_\varepsilon$), így a tendenciaegyenlet segítségével a geopotenciál térbeli eloszlásából meghatározható a geopotenciál idő szerinti deriváltja, azaz a geopotenciál későbbi eloszlása.

A kvázigeosztrófikus egyenletrendszerből a $\partial \Phi / \partial t$ tendencia kiküszöbölésével az

$$\left(\nabla^2 + \frac{f_0^2}{\bar{\sigma}} \frac{\partial^2}{\partial p^2} \right) \omega = \frac{f_0}{\bar{\sigma}} \frac{\partial}{\partial p} \left[\mathbf{v}_\varepsilon \cdot \nabla \left(\frac{1}{f_0} \nabla^2 \Phi + f \right) \right] + \frac{1}{\bar{\sigma}} \nabla^2 \left[\mathbf{v}_\varepsilon \cdot \nabla \left(-\frac{\partial \Phi}{\partial p} \right) \right]$$

omega-egyenletet nyerjük. A bal oldal – szintén egyhullám-közelítésben – $-\omega$ -val arányosnak vehető. A jobb oldalon az első tag a differenciális örvényességi advekciónak arányos, a második tag pedig a hőmérsékleti advekciónak a Laplace-kifejezését tartalmazza. A jobb oldalt ezáltal is egyértelműen meghatározza a geopotenciál térbeli eloszlása. Így az omega-egyenlet segítségével a *geopotenciál térbeli eloszlásából következtethetünk a függőleges sebességre*.

XI.2.1. Mutassuk meg, hogy egyhullám-közelítésben a tendenciaegyenlet bal oldala $-\partial \Phi / \partial t$ -vel arányos! Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy $\bar{\sigma}$ állandó.

XI.2.2. Mutassuk meg, hogy egyhullám-közelítésben az omega-egyenlet bal oldala $-\omega$ -val arányos!

XI.2.3. Legyen adott időpillanatban a geopotenciál térbeli eloszlása

$$\Phi(x, y, p) = \Phi_0(p) - Ky + \Phi^* \sin(kx),$$

ahol Φ_0 csak a nyomás függvénye, K, k és Φ^* pedig állandók. A tendenciaegyenlet alapján határozzuk meg, hogy a geopotenciál időben csökkeni vagy nőni fog-e az $x=0$ koordinátájú pontokban! Dolgozzunk egyhullám-közelítésben, és tekintsünk el az f Coriolis-paraméter földrajzi szélességtől való függésétől!

XI.3. A vertikális sebesség becslése, a Q-vektor szerepe

A vertikális sebesség fontos a felhő- és csapadékképződésben, így pontos meghatározása igen lényeges az időjárás előrejelzése során. Kiszámítására számos lehetőség kínálkozik.

A kinematikai módszer a függőleges sebességet a

$$\nabla_h \cdot \mathbf{v} + \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0$$

kontinuitási egyenletből származtatja. Minthogy az egyenletben az ω p szerinti deriváltja szerepel, így meghatározásához p szerinti integrálás szükséges:

$$\omega(p_1) - \omega(p_0) = - \int_{p_0}^{p_1} \nabla_h \cdot \mathbf{v} dp$$

Ha p_0 a földfelszíni nyomás, akkor $\omega(p_0)$ nullának vehető. A módszer hátránya, hogy meglehetősen érzékeny a szélesebbéskomponensek mérési hibáira.

Az ω függőleges sebességet a

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla^2 \Phi) = -f_0 \mathbf{v}_E \cdot \nabla \left(\frac{1}{f_0} \nabla^2 \Phi + f \right) + f_0^2 \frac{\partial \omega}{\partial p}$$

kvázigeosztrófikus örvényességi egyenletből is meg lehet határozni, ehhez azonban szintén p szerinti integrálás szükséges, és további hátrányt jelent, hogy a tendenciát is ismernünk kell. A geopotenciált többnyire csak bizonyos időlépésként ismerjük, így a tendenciát véges különbségekből becsülhetjük, ami pontatlanságot eredményez.

A termodinamikai egyenlet

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial p} \right) = -\mathbf{v}_E \cdot \nabla \left(\frac{\partial \Phi}{\partial p} \right) - \bar{\sigma} \omega$$

alakjában szintén szerepel az ω vertikális sebesség, és integrálás nélkül kifejezhető, de a tendencia ismerete ebben az esetben is szükséges a meghatározásához.

Végül rendelkezésünkre áll még az *omega-egyenlet* is.

$$\left(\nabla^2 + \frac{f_0^2}{\bar{\sigma}} \frac{\partial^2}{\partial p^2} \right) \omega = \frac{f_0}{\bar{\sigma}} \frac{\partial}{\partial p} \left[\mathbf{v}_\varepsilon \cdot \nabla \left(\frac{1}{f_0} \nabla^2 \Phi + f \right) \right] + \frac{1}{\bar{\sigma}} \nabla^2 \left[\mathbf{v}_\varepsilon \cdot \nabla \left(-\frac{\partial \Phi}{\partial p} \right) \right]$$

Nagy előnye, hogy nem tartalmaz idő szerinti deriváltakat, hátránya azonban a magasabbrendű deriváltak jelenléte, továbbá az, hogy a jobb oldalon álló két tag gyakran egyszerre azonos nagyságrendű és ellentétes előjelű. Ez akkor okozhat problémát, ha ezeket a tagokat csak közelíteni tudjuk, ilyenkor ugyanis kis hiba elkövetése is minőségileg más eredményre vezethet. Ezt a hátrányt kiküszöböli, ha az omega-egyenletet az

$$\bar{\sigma} \nabla^2 \omega + f_0^2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial p^2} = -2 \nabla \cdot \mathbf{Q}$$

alakban írjuk fel, ahol

$$\mathbf{Q} = (Q_1, Q_2) = \left(-\frac{R}{p} \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x} \nabla T, -\frac{R}{p} \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial y} \nabla T \right)$$

az ún. $\mathbf{Q}$ -vektor. A $\mathbf{Q}$ -vektorral felírt omega-egyenlet bal oldalát $-\omega$ -val arányosnak véve könnyen látható, hogy

- $\nabla \mathbf{Q} > 0$ esetén $\omega > 0$ ($w < 0$, azaz a z -rendszerben leáramlás van);
- $\nabla \mathbf{Q} < 0$ esetén $\omega < 0$ ($w > 0$, azaz a z -rendszerben feláramlás van).

XI.3.1. Legyen a geopotenciál a térváltozók és az idő függvényében

$$\Phi(x, y, p, t) = \Phi_0(p) + cf_0 \left\{ -y [\cos(\pi p / p_0) + 1] + \frac{1}{k} \sin(k(x - ct)) \right\},$$

ahol $c > 0$ konstans sebesség, k a zonális hullámszám, és $p_0 = 1000 \text{ hPa}$! Feltéve, hogy a földfelszínen a vertikális sebesség eltűnik, fejezzük ki a vertikális sebességet x, y, p és t függvényében a kinematikai módszer alapján, vagyis a horizontális divergencia p szerinti integrálásával!

XI.3.2. Tegyük fel, hogy a geopotenciál térbeli eloszlását a

$$\Phi(x, y, p) = \Phi_0(p) - f_0 U \cos \frac{\pi p}{p_0} + \frac{f_0 c}{k} \sin(kx)$$

függvény írja le, ahol U, c és k állandók, és $p_0 = 1000 \text{ hPa}$! Az f Coriolis-paramétert és a $\bar{\sigma}$ sztatikai stabilitási paramétert tekintjük állandóknak! Adjuk meg a nyomási rendszerbeli vertikális sebességet a térváltozók függvényében az omega-egyenlet felhasználásával! Ehhez keressük a megoldást

$$\omega = W_0 \sin \frac{\pi p}{p_0} \cos(kx)$$

alakban.

XI.3.3. Legyenek az izotermák párhuzamosak az x tengellyel, és tegyük fel, hogy délebbre helyezkedik el a melegebb levegő! Mutassuk meg, hogy ekkor a $\mathbf{Q}$ -vektor a következő alakra hozható:

$$\mathbf{Q} = \frac{R}{p} \left| \frac{\partial T}{\partial y} \right| \left(\frac{\partial \mathbf{v}_g}{\partial x} \times \mathbf{k} \right)_!$$

Értelmezzük ezt az eredményt! Mi határozza meg a $\mathbf{Q}$ -vektor irányát és nagyságát?

XI.3.4. Fejezzük ki a $\mathbf{Q}$ -vektor komponenseit a T hőmérséklet helyett a Φ geopotenciál segítségével!

XI.3.5. Legyen a geopotenciál a térváltozók és az idő függvényében

$$\Phi(x, y, p, t) = \Phi_0(p) + cf_0 \left\{ -y[\cos(\pi p / p_0) + 1] + \frac{1}{k} \sin(k(x - ct)) \right\},$$

ahol $c > 0$ konstans sebesség, k a zonális hullámszám, és $p_0 = 1000 \text{ hPa}$! Írjuk fel a $\mathbf{Q}$ -vektor divergenciáját a térváltozók és az idő függvényében! A $p = 500 \text{ hPa}$ -os szinten a $t = 0$ időpillanatban, az $x = 0$ koordinátájú pontokban leáramlás vagy feláramlás van?

XI.3.6. Mutassuk meg, hogy a hidrosztatikai egyenlet P -rendszerben a $-\frac{\partial \Phi}{\partial p} = f\gamma\Theta$ alakban is felírható, ahol

$$\gamma = \frac{R}{f p_0} \left(\frac{p_0}{p} \right)^{\frac{\kappa}{\gamma}}$$

és fejezzük ki ennek alapján a termikus szelet a potenciális hőmérséklet gradiensevel!

XI.3.7. Mutassuk meg, hogy adiabatikus esetben és geosztrófikus közelítésben

$$f\gamma \frac{d_g}{dt} \nabla \Theta = \mathbf{Q}, \quad \text{ahol} \quad \mathbf{Q} = -f\gamma \left[\frac{\partial \mathbf{v}_g}{\partial x} \cdot \nabla \Theta, \frac{\partial \mathbf{v}_g}{\partial y} \cdot \nabla \Theta \right].$$

XI.3.8. Bizonyítsuk be, hogy adiabatikus esetben a frontogenetikus függvény geosztrófikus közelítése és a $\mathbf{Q}$ vektor között egyértelmű kapcsolat áll fenn!

XII. fejezet - Különböző típusú és különböző skálájú légköri instabilitások

Gyuró György
Tasnádi Péter

A légköri instabilitások vizsgálatához a *Mechanika* hagyományos módszereit használjuk. Ezek szerint egy képzeletbeli próbatestet – esetünkben légrészecskét – kimozdítunk eredeti helyzetéből, és megvizsgáljuk, milyen erők hatnak rá új helyzetében, azaz az eredeti helyzethez viszonyítva milyen irányba mozdul el. Ha az erők eredője az eredeti helyzet irányába mutat, akkor stabil, ha azzal ellentétes irányba, akkor instabil, vagy más szóval labilis egyensúlyi helyzetről beszélünk. Ha az új helyzetben a légrészecskére ható erők eredője nulla, akkor az egyensúlyi helyzet semleges, más szóval indifferens. Ebben a fejezetben a próbatestként megadott légrészecskére a hagyományos definíciót használjuk: a légkörnek az a legkisebb darabja, amin az adott nagyságrendi skálán értelmezhetők a levegő alapvető állapothatározói (sebesség, nyomás, hőmérséklet, nedvességtartalom).

A nagyságrendi különbségek miatt a földi légkör esetében két alapvető instabilitási formát különböztetünk meg: a hidrosztatikai és a hidrodinamikai instabilitást. A hidrosztatikai instabilitás vizsgálatakor a próbatestet (légrészecskét) vertikális, míg a hidrodinamikai instabilitás vizsgálatakor a próbatestet horizontális irányban mozdítjuk ki. A hidrodinamikai instabilitásnak két fajtáját különböztetjük meg: a barotróp és a baroklin instabilitás. Találkozunk az ún. ferde instabilitással is, amikor a légrészecskét mind horizontálisan, mind vertikálisan elmozdítjuk, pl. egy frontfelületen haladva. *(Ez utóbbi instabilitással itt nem foglalkozunk részletesen, az érdeklődő hallgatóknak javasoljuk pl. Holton Problems Solutions 3rd Ed., 2013: <http://www.scribd.com/doc/28565679/Holton-Problems-Solutions-3rd-Ed> egyetemi tankönyvét.)*

XII.1. A hidrosztatikai instabilitás

A hidrosztatikai instabilitás jelenségeivel a mezometeorológia foglalkozik. A légköri mozgásrendszerek besorolására – többek között – Orlanski (1975) tett javaslatot. A javaslat óta elfogadottá vált nagyságrendi kategorizálás szerint a légköri mozgásrendszereket a *makro*, a *mezo* és a *mikro* elnevezésű csoportokba soroljuk be. A besorolás nyomán nyolc kategória figyelhető meg a légkörben. A mozgásrendszerek karakterisztikus horizontális kiterjedése és karakterisztikus élettartama alapján három csoportba, *makro*, *mezo* és *mikro* csoportokba soroljuk (XII.1.1. ábra.).

T_s L_s	1 HÓNAP	1 NAP	1 ÓRA	1 PERC	1 MÁSODPERC	
10000 km	ÁLLÓ- HULLÁMOK	ULTRA-HOSSZÚ HULLÁMOK	APÁLY- DAGÁLY			MAKRO α SKÁLA
2000 km		BAROKLIN HULLÁMOK				MAKRO β SKÁLA
200 km		FRON- TOK és HURRI- KÁNOK				MEZO α SKÁLA
20 km			ÉJSAKAI ALACSONY SZINTŰ JET SQUALL LINE BELSŐ HULLÁMOK HEGYI és TÁVI SZELEK			MEZO β SKÁLA
2 km			ZIVATAROK VÁROSI HATÁS			MEZO γ SKÁLA
200 m			TORNÁDÓK MÉLY KONVEKCIÓ RÖVID GRAVITÁCIÓS HULLÁMOK			MIKRO α SKÁLA
20 m				PORFOR- GATAGOK TERMIEK		MIKRO β SKÁLA
				ÉRDESSÉG TURBULENCIA		MIKRO γ SKÁLA
	ÉGHAJLATI SKÁLA	SZINOPTIKUS PLANETÁRIUS SKÁLA	MEZO SKÁLA	MIKRO SKÁLA		JAVASOLT DEFINIÓ

XII.1.1. ábra. A légköri mozgásrendszerek jellegzetes tér- (L_s) és időskálái (T_s) Orlanski, 1975; Stull, 1988 és Czelnai, 1995 alapján.

A hidrosztatikai instabilitás meghatározása kulcskérdés a meteorológiai előrejelzések szempontjából, hiszen nagyon sok olyan jelenség van (pl. gomolyfelhő-képződés, zápor, zivatar, jégeső, felhőszakadás, tornádó), ami kapcsolatban van a légköri függőleges mozgásokkal. A függőleges irányú mozgásegyenletekben két domináns erőhatás van, a gravitációs erő és a függőleges nyomási gradiens erő. Ezek eredője a légkör hidrosztatikus állapotában zérus:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + g = 0. \quad (\text{XII.1.1})$$

Az egyenlet átalakítható az elemi nyomásváltozást kifejező

$$dp = -\rho g dz = -\rho d\Phi \quad (\text{XII.1.2})$$

alakra.

Hálózatszerű, operatív mérések hiányában a hidrosztatikai instabilitás meghatározásához az úgynevezett index-módszert alkalmazzuk. Ennek lényege az, hogy a magaslégköri (rádiószondás) mérések alapján a főizobárszintek hőmérsékleti és légnedvességi adatai alapján különböző indexeket számolunk, és a földfelszíni megfigyelési adatok alapján megállapítjuk az egyes indexek instabilitást jelző kritikus értékét. Az első indexeket az Egyesült Államokban dolgozták ki az 1940-es évektől kezdődően.

A következő alfejezetekben számos indexet találunk. Az indexek nagy száma azt mutatja, hogy sem a hidrosztatikai instabilitás általános jellemzésére, sem a heves konvekcióval járó jelenségek előrejelzéséhez nincs univerzális, minden időjárási helyzetben, minden évszakban és minden földrajzi helyen használható index. Minden szakembernek megvannak a saját kedvenc indexei, viszont az mindenképpen igaz, hogy érdemes több indexet is megvizsgálni, mielőtt döntést hoznánk az időjárási helyzettel kapcsolatban.

XII.1.1. Néhány index a hidrosztatikai instabilitás általános jellemzésére

A függőleges hőmérsékleti gradiens

$$\gamma = -\frac{dT}{dz}. \quad (\text{XII.1.3})$$

Az instabilitás vizsgálatához a

$$\gamma_{da} = \frac{g}{c_p} = 0,98 \frac{^\circ\text{C}}{100 \text{ m}} \quad (\text{XII.1.4})$$

száraz adiabatikus hőmérsékleti gradienst tekintjük viszonyítási alapnak. Ha a γ függőleges hőmérsékleti gradiens megmért értéke nagyobb, mint γ_{da} , akkor a légkör szuperadiabatikus állapotban van, és abszolút instabil a függőleges mozgásokkal szemben. Mivel a nedves adiabatikus függőleges hőmérsékleti gradiens értéke általában 0,5 és 0,6 $^\circ\text{C} / 100 \text{ m}$ közé esik, ezért $\gamma_{da} > \gamma \geq 0,5 \text{ } ^\circ\text{C} / 100 \text{ m}$ esetén feltételes instabilitásról beszélünk. Ha $\gamma < 0,5 \text{ } ^\circ\text{C} / 100 \text{ m}$, a légkör hidrosztatikailag stabil állapotban van.

A gomolyfelhő alapjának magassága (Cumulus cloud base)

A nappali órákban, derült időben, időjárási frontoktól távol kizárólag a Nap sugárzási energiája gerjeszti a konvekciót. Mivel a sugárzási energia a földfelszín felmelegedése útján jut a légkörbe, ezért a konvekció útján keletkező gomolyfelhők alapjának a magasságát (h) viszonylag egyszerűen ki lehet számolni, ha feltételezzük, hogy a felhőalap alatt száraz adiabatikus folyamat megy végbe. A felhőalap magassága ilyenkor az ún. Ferrel-formulával számolható a földfelszín közelében mért hőmérséklet (t) és harmatpont (t_d) alapján:

$$h = 120(t - t_d). \quad (\text{XII.1.5})$$

A Showalter-féle stabilitási index

$$SSI = t_{500 \text{ hPa}} - t'_{500 \text{ hPa}}, \quad (\text{XII.1.6})$$

ahol $t_{500 \text{ hPa}}$ az 500 hPa-os főizobárszinten mért hőmérséklet, $t'_{500 \text{ hPa}}$ pedig az a hőmérséklet, amit akkor érne el a légrézecske, ha a 850 hPa-os főizobárszintről a száraz adiabata mentén a kondenzációs szintig, majd onnan a nedves adiabata mentén az 500 hPa-os főizobárszintig emelnénk. Az indexet Albert Showalter alkotta meg 1946-ban. Kritikus értékei a következők:

$SSI > 10$ esetén nem várható aktív konvekció;

$SSI \leq 3$ esetén záporos csapadék várható;

$SSI \leq 0$ esetén zivatar valószínű;

$SSI \leq -3$ esetén heves zivatar / jégeső valószínű;

$SSI \leq -6$ esetén igen heves zivatar / tornádó valószínű.

A nedvességi index (más szóval a telítési index)

$$NI = (t - t_d)_{850 \text{ hPa}} + (t - t_d)_{700 \text{ hPa}} + (t - t_d)_{500 \text{ hPa}} \quad (\text{XII.1.7})$$

ahol $(t - t_d)_{850 \text{ hPa}}$, $(t - t_d)_{700 \text{ hPa}}$, és $(t - t_d)_{500 \text{ hPa}}$, a harmatpont-deficit értéke a megfelelő főizobárszinten. Az indexet N. V. Lebegyeva alkotta meg 1955-ben. Csak légtömegben belül és csak a nappali időszakban alkalmazható. Kritikus értékei a következők: $NI \geq 25$ esetén nem várható aktív konvekció. Ha $NI < 18$, továbbá a várható maximum és maximum hőmérséklet idején fellépő harmatpont különbsége kisebb, mint 12°C , akkor záporos csapadék várható. NI értékének csökkenésével növekszik a csapadékképződés valószínűsége és a várható csapadék intenzitása.

A módosított nedvességi index

$$NI^* = (t - t_d)_{700 \text{ hPa}} + (t - t_d)_{500 \text{ hPa}} \quad (\text{XII.1.8})$$

Az indexet szintén N. V. Lebegyeva alkotta meg 1955-ben. NI^* értékének csökkenésével növekszik zivatarok kialakulásának valószínűsége.

Az emelési index (lifted index, LI)

$$LI = t_{500 \text{ hPa}} - t_{500 \text{ hPa}}^* \quad (\text{XII.1.9})$$

ahol $t_{500 \text{ hPa}}^*$ az a hőmérséklet, amit akkor érne el a légrészecske, ha a földfelszínről, a várható napi maximumhőmérséklet pontjából a száraz adiabata mentén a kondenzációs szintig, majd onnan, a nedves adiabata mentén az 500 hPa-os főizobárszintig emelnénk. Az indexet Joseph Galway alkalmazta először 1956-ban. Kritikus értékei a következők:

$LI > 2$ esetén nem várható aktív konvekció;

$LI \leq 2$ esetén záporos csapadék várható;

$LI \leq 0$ esetén zivatar valószínű;

$LI \leq -4$ esetén heves zivatar / jégeső valószínű;

$LI \leq -6$ esetén igen heves zivatar / tornádó valószínű.

A K-index

$$K = (t_{850 \text{ hPa}} - t_{500 \text{ hPa}}) + t_{d850 \text{ hPa}} - (t - t_d)_{700 \text{ hPa}} \quad (\text{XII.1.10})$$

A vitorlázórepülők között igen népszerű indexet Joseph George publikálta egy 1960-ban kiadott repülésmeteorológiai tankönyvben. Kritikus értékei a következők:

$K < 20$ esetén nem várható aktív konvekció;

$K \geq 25$ esetén gyenge konvektív aktivitás léphet fel;

$K \geq 30$ esetén mérsékelt konvektív aktivitás léphet fel;

$K \geq 35$ esetén erős konvektív aktivitás léphet fel;

$K \geq 40$ esetén igen konvektív aktivitás (heves zivatar / jégeső) várható.

A Thompson-index (TI)

$$TI = K - LI. \quad (XII.1.11)$$

Az Egyesült Államokban készített statisztikák szerint $TI < 25$ esetén nem kell számítani zivatarok kialakulására. Minél nagyobb TI értéke, annál nagyobb a zivatarok kialakulásának valószínűsége, és annál nagyobb a várható zivatarok intenzitása. Ha $TI > 40$, akkor igen heves zivatarokra kell számítani.

A Boyden-index (BI)

$$BI = RT_{700 \text{ hPa} - 1000 \text{ hPa}} - t_{500 \text{ hPa}} - 200. \quad (XII.1.12)$$

Az $RT_{700 \text{ hPa} - 1000 \text{ hPa}}$ relatív geopotenciál értékét *geopotenciális dekaméterben* kell megadni. Kritikusan szemlélve meglehetősen furcsa index, mégis több ország meteorológiai szolgálatánál alkalmazzák a napi gyakorlatban. Érdekessége egyrészt az, hogy nem tartalmaz nedvességi mérőszámot, másrészt az, hogy a 700 és az 1000 hPa-os főizobárszint közötti relatív geopotenciál értékét hasonlítjuk össze egy hőmérsékleti értékkel. Az indexnek így módon nem értelmezhető a dimenziója, bár tudjuk, hogy a relatív geopotenciál egyenesen arányos a légréteg középhőmérsékletével. Ezt az állítást a hidrosztatika (XII.1.2) alakú alapegyenlete és az egyesített gázelmélet

$$p = \rho RT, \text{ vagyis } \rho = \frac{p}{RT} \quad (XII.1.13-14)$$

alakuló egyenlete felhasználásával tudjuk igazolni. Az indexet C. J. Boyden alkalmazta először 1963-ban. A tapasztalatok szerint $BI > 94$ esetén nagy valószínűséggel alakulnak ki zivatarok.

A Miller-féle összegző indexek (totals)

- a vertikális összeg (vertical totals):

$$VT = t_{850 \text{ hPa}} - t_{500 \text{ hPa}}, \quad (XII.1.15)$$

- a keresztösszeg (cross totals):

$$CT = t_{d850 \text{ hPa}} - t_{500 \text{ hPa}}, \quad (XII.1.16)$$

- a teljes összeg (total totals):

$$TT = VT + CT = t_{850 \text{ hPa}} + t_{d850 \text{ hPa}} - 2t_{500 \text{ hPa}}. \quad (XII.1.17)$$

Az indexeket Robert Miller alkotta meg 1972-ben. Az elemzések szerint a következő kritikus értékek állapíthatók meg: a vertikális összeget használva $VT > 26$ esetén kell zivatar kialakulásával számolni. A másik két index esetében a következő megfigyelések születtek:

- $CT < 18$ esetén nem várható aktív konvekció;
- $CT \geq 18$ esetén gyenge vagy mérsékelt konvektív aktivitás léphet fel;
- $CT \geq 20$ esetén erős konvektív aktivitás léphet fel;
- $CT \geq 29$ esetén igen erős konvekció / tornádó kialakulása valószínű.

- $TT < 42$ esetén nem várható aktív konvekció;
- $TT \geq 42$ esetén gyenge vagy mérsékelt konvektív aktivitás léphet fel;
- $TT \geq 48$ esetén erős konvektív aktivitás léphet fel;
- $TT \geq 55$ esetén igen erős konvekció / tornádó kialakulása valószínű.

A KO-index

$$KO = [(\Theta_{e500 \text{ hPa}} + \Theta_{e700 \text{ hPa}}) - (\Theta_{e850 \text{ hPa}} + \Theta_{e1000 \text{ hPa}})] / 2, \quad (\text{XII.1.18})$$

ahol $\Theta_{e500 \text{ hPa}}$, $\Theta_{e700 \text{ hPa}}$, $\Theta_{e850 \text{ hPa}}$ és $\Theta_{e1000 \text{ hPa}}$ az ekvivalens potenciális hőmérséklet az egyes főizobárszinteken. Az indexet T. Andersson és munkatársai dolgozták ki Svédországban, 1989-ben. Kritikus értékei a következők: ha KO értéke nagyobb 5-nél, akkor nem valószínű zivatar kialakulása. A 2 és 5 közé eső KO értékek esetén gyenge vagy mérsékelt, a 2 vagy annál kisebb KO értékek esetén erős, vagy igen erős zivatartevékenység várható.

Az S-index

$$SI = TT - (t_{700 \text{ hPa}} - t_{d700 \text{ hPa}}) - a. \quad (\text{XII.1.19})$$

Az a paraméter értéke 0, ha a vertikális összeg ($VT = t_{850 \text{ hPa}} - t_{500 \text{ hPa}}$) nagyobb 25-nél. $a = 2$, ha VT 22 és 25 közé esik, végül $a = 6$, ha VT kisebb 22-nél. Az index használatát M. Reymann és munkatársai javaslatára a Német Katonai Geofizikai Hivatal meteorológusai számára vezették be 1998-ban, és légtömegben belüli konvektív helyzetekben alkalmazzák a nyári félévben, azaz április és szeptember között. A verifikációs eredmények szerint az $SI < 39$ értékekre az esetek 89%-ában nem fordult elő zivatar. Ha SI értéke 39 és 46 közé esik, akkor 42%, a 46-nál nagyobb értékekre 75% a zivatarok kialakulásának valószínűsége.

A Rackliff-index (RI)

$$RI = \Theta_{sw850 \text{ hPa}} - \Theta_{500 \text{ hPa}}, \quad (\text{XII.1.20})$$

ahol $\Theta_{sw850 \text{ hPa}}$ a pszeudonedves potenciális hőmérséklet a 850 hPa-os főizobárszinten, $\Theta_{500 \text{ hPa}}$ pedig a potenciális hőmérséklet az 500 hPa-os főizobárszinten. Az indexet T. Rackliff dolgozta ki 1962-ben. Kritikus értékei:

$RI < 25$ esetén záporos csapadék várható;

$RI \geq 25$ esetén zápor és/vagy gyenge zivatar valószínű;

$RI \geq 30$ esetén mérsékelt vagy heves zivatar valószínű.

A Bradbury-index (BrI)

$$BrI = \Theta_{sw500 \text{ hPa}} - \Theta_{sw850 \text{ hPa}}, \quad (\text{XII.1.21})$$

ahol $\Theta_{sw500 \text{ hPa}}$ a pszeudonedves potenciális hőmérséklet az 500 hPa-os főizobárszinten, $\Theta_{sw850 \text{ hPa}}$ pedig a pszeudonedves potenciális hőmérséklet a 850 hPa-os főizobárszinten. Az indexet T. Bradbury dolgozta ki 1977-ben. A szakirodalom potenciális instabilitási index néven is emlegeti. A vizsgálatok szerint a nyári félévben a $BrI < -2$, a téli félévben a $BrI < 3$ értékek mellett lehet zivatar kialakulására számítani.

A Van Delden-féle potenciális instabilitási index (PII)

$$PII = \frac{\Theta_{e925 \text{ hPa}} - \Theta_{e500 \text{ hPa}}}{RT_{500 \text{ hPa} - 925 \text{ hPa}}}, \quad (\text{XII.1.22})$$

ahol $\Theta_{e925 \text{ hPa}}$, illetve $\Theta_{e500 \text{ hPa}}$ az ekvivalens potenciális hőmérséklet a 925, illetve az 500 hPa-os főizobárszinten; $RT_{500 \text{ hPa} - 925 \text{ hPa}}$ a relatív geopotenciál (gpm-ben) a két főizobárszint között. Az index definícióját és annak verifikálását az európai térségre 2001-ben publikálta a holland szerző. (Figyelem! A PII nem tévesztendő össze a BrI -vel, amit szintén emlegetnek néha ugyanezen a néven.) A szerző szerint zivatar kialakulásának a $PII \geq -0,52 \cdot 10^{-3}$ esetben legalább 84%-os esélye van.

A (módosított) Jefferson-index (MJI)

$$MJI = 1,6\Theta_{sw850 \text{ hPa}} + t_{500 \text{ hPa}} - 0,5(t_{700 \text{ hPa}} - t_{d700 \text{ hPa}}) - 8, \quad (\text{XII.1.23})$$

(A jelölések megegyeznek a fentiekkel.) Az indexet G. Jefferson dolgozta ki 1963-ban, és ő az, aki a jelenleg használt, módosított alakját is a napi gyakorlatba hozta. A vizsgálatok szerint zivatar kialakulására $MJI > 27$ esetén lehet számítani, és ez a valószínűség MJI növekedtével növekszik. Ha $MJI > 30$, akkor heves zivatarok kialakulására kell számítani.

A nullafokos izoterma magassága (freezing level)

Látszólag egyszerű fogalomról van szó, de a jégeső kialakulása szempontjából nem lehet kihagyni. Kritikus értéke változhat az időjárási helyzet és a földrajzi hely függvényében. A legtöbb szakirodalmi forrás a 650 hPa-os (~3600 gpm) értéket adja meg, azaz a konvektív csapadék keletkezése esetén nagy esély van jégeső keletkezésére, ha a nulla-fokos izoterma az adott szint alatt van.

XII.1.2. Néhány index a heves hidrosztatikai instabilitás jellemzésére

A Miller-féle tornádófenyegetettségi index (severe weather threat, *SWEAT*)

$$SWEAT = 20(TT - 49) + 12t_{d850 \text{ hPa}} + 2\bar{f}_{850 \text{ hPa}} + \bar{f}_{850 \text{ hPa}} + \\ + 125[\sin(ddd_{500 \text{ hPa}} - ddd_{850 \text{ hPa}}) + 0, 2] , \quad (\text{XII.1.24})$$

ahol TT a Miller-féle teljes összeg; $\bar{f}_{850 \text{ hPa}}$, illetve $\bar{f}_{500 \text{ hPa}}$ a csomóban (knot-ban) mért szélsébség a 850, illetve az 500 hPa-os főzobárszinten; $ddd_{500 \text{ hPa}}$, illetve $ddd_{850 \text{ hPa}}$ a szélirány az 500, illetve a 850 hPa-os főzobárszinten. Az indexet Robert Miller alkotta meg 1972-ben.

Az index kiszámításakor a szerző szerint a következő kiegészítő szabályt kell alkalmazni: egyetlen tag értéke sem lehet negatív, így ha $(TT - 49)$, vagy $t_{d850 \text{ hPa}}$, illetve $[\sin(ddd_{500 \text{ hPa}} - ddd_{850 \text{ hPa}}) + 0, 2]$ negatív értékű, akkor nullát helyettesítünk. Ez egy empirikus szabály, így az index kiértékelése meglehetősen vitatott. Legtöbbször a következő kritikus értékeket alkalmazzák: $SWEAT \geq 250$ esetén erős, $SWEAT \geq 300$ esetén pedig igen erős konvekció várható. A tapasztalatok szerint tornádó akkor alakulhat ki, ha $SWEAT \geq 400$.

Hozzáférhető konvektív instabilitási energia (convective available potential energy, *CAPE*)

$$CAPE = \int_{p_{sz}}^{p_{ke}} (\alpha_r - \alpha_k) dp = \int_{z_{sz}}^{z_{ke}} g \left(\frac{T_{v,r} - T_{v,k}}{T_{v,k}} \right) dz , \quad (\text{XII.1.25})$$

ahol p_{sz} , illetve z_{sz} a szabad konvekció szintje, p_{ke} , illetve z_{ke} a kiegyenlített réteg magassága az (x, y, p) , illetve az (x, y, z) lokális descartes-i koordináta-rendszerben; α_r , illetve α_k a légrésezecske, illetve környezetének specifikus térfogata; $T_{v,r}$, illetve $T_{v,k}$ a légrésezecske, illetve környezetének a virtuális hőmérséklete. Ennek az – igen népszerű – indexnek a definícióját Mitchell Moncrief és Martin Miller publikálta 1976-ban. A heves hidrosztatikai instabilitás vizsgálatához azért vált nagyon elterjedté, mert összefüggés van a *CAPE* értéke és a konvektív képződmény környezetében várható legerősebb szellőkések sebessége (f_x) között:

$$f_x = \sqrt{2CAPE} . \quad (\text{XII.1.26})$$

A *CAPE* kritikus értékeiről megoszlanak a tapasztalatok. A leggyakrabban a következő értékeket használják:

- $CAPE < 200$ esetén nem várható aktív konvekció;
- $200 \leq CAPE < 500$ esetén gyenge vagy mérsékelt konvekció várható ($f_x > 20 \text{ m s}^{-1}$);
- $500 \leq CAPE < 600$ esetén erős konvekció várható ($f_x > 30 \text{ m s}^{-1}$);

$600 \leq CAPE < 1000$	esetén igen erős konvekció várható ($f_x > 35 \text{ m s}^{-1}$);
$1000 \leq CAPE < 2000$	esetén nagyon erős konvekció várható ($f_x > 40 \text{ m s}^{-1}$);
$2000 \leq CAPE$	esetén extrém konvekció várható ($f_x > 60 \text{ m s}^{-1}$).

A *CAPE* index alkalmazhatóságát az is jelzi, hogy különböző változatban használják, pl. *NCAPE*, *SBCAPE*, *MUCAPE* és *MLCAPE*. Sőt! A légzuhatagok (downburst és microburst) előrejelzéséhez használható változatát (downdraft *CAPE*: *DCAPE*) is kidolgozták.

Normált hozzáférhető konvektív instabilitási energia (normalized convective available potential energy, *NCAPE*)

$$NCAPE = \frac{CAPE}{p_z - p_{kz}} \quad (XII.1.27)$$

A jelölések megegyeznek a *CAPE* esetében használt jelölésekkel. Csak gyenge konvekcióval találkozhatunk, ha *NCAPE* értéke kisebb, mint 0,1. *NCAPE* értékének növekedtével a várható konvekció erőssége is növekszik. *NCAPE* = 0,4 körül már erős konvekcióra kell számítani.

A földfelszíntől számított hozzáférhető konvektív instabilitási energia (surface based convective available potential energy, *SBCAPE*)

$$SBCAPE = \int_{p_0}^{p_{kz}} (\alpha_r - \alpha_k) dp = \int_0^{z_{kz}} g \left(\frac{T_{v,r} - T_{v,k}}{T_{v,k}} \right) dz \quad (XII.1.28)$$

Kritikus értékei megegyeznek a *CAPE* kritikus értékeivel. Az *r* index itt is a részecskére utal.

A leglabilisabb hozzáférhető konvektív instabilitási energia (most/maximum unstable *CAPE*, *MUCAPE*)

Az integrálás alsó határa ebben az esetben az a szint, amellyel a leginstabilabb (legnagyobb) konvektív instabilitási energiát kapjuk. Kritikus értékei megegyeznek a *CAPE* kritikus értékeivel.

A réteggközépeltől számított hozzáférhető konvektív instabilitási energia (mixed layer *CAPE*, *MLCAPE*):

Számításakor a környezet specifikus térfogata (α_k), illetve virtuális hőmérséklete ($T_{v,k}$) helyébe az alsó 100 hPa vastag réteg átlagos specifikus térfogatát, illetve virtuális hőmérsékletét írjuk. Kritikus értékei megegyeznek a *CAPE* kritikus értékeivel.

A leáramlás hozzáférhető konvektív instabilitási energiája (downdraft *CAPE*, *DCAPE*)

$$DCAPE = - \int_{p_0}^{p_{kz}} (\alpha_r - \alpha_k) dp = - \int_0^{z_{kz}} g \left(\frac{T_{v,r} - T_{v,k}}{T_{v,k}} \right) dz \quad (XII.1.29)$$

p_{sz} , illetve z_{sz} ezúttal azt a szintet jelöli, ahonnan a leáramlás, azaz a légzuhatag indul. Helyette általában a hibrid légzuhatag indexet használják. Az *r* index itt is a részecskére utal.

Hibrid légzuhatag index (hybrid microburst index, *HMI*)

$$HMI = 10 \cdot \gamma + (t - t_d)_{850 \text{ hPa}} - (t - t_d)_{670 \text{ hPa}} \quad (XII.1.30)$$

Itt γ a hőmérsékleti gradiens értéke °C / 100 m egységben a 850 hPa-os és a 670 hPa-os szint között. Az index kritikus értékei és a légzuhatag által generált maximális szélleökés (f_x) értékei a következők:

- $HMI < 8$ esetén nem várható légzuhatag kialakulása ($f_x < 15 \text{ m s}^{-1}$);
- $HMI \geq 8$ esetén kis esély van légzuhatag kialakulására ($f_x < 20 \text{ m s}^{-1}$);
- $HMI \geq 16$ esetén közepes esély van légzuhatag kialakulására ($f_x < 25 \text{ m s}^{-1}$);
- $HMI \geq 24$ esetén nagy esély van légzuhatag kialakulására ($f_x < 25 \text{ m s}^{-1}$).

Emelési munka, más szóval konvektív gátlás (convective inhibition, *CIN*)

$$CIN = \int_{p_1}^{p_2} (\alpha_r - \alpha_k) dp \quad (XII.1.31)$$

A hidrodinamikai instabilitás kialakulásának tanulmányozásakor általában azt vizsgáljuk, hogy a konvektív gátlás leküzdéséhez szükséges emelési munkát biztosítja-e a konvektív instabilitási energia. Ha $CAPE > CIN$, akkor feltételes instabilitásról beszélünk. Az emelési munka értéke azt is meghatározza, hogy a keletkező gomolyfelhők milyen fejlettséget érhetnek el. A következő kritikus értékeket szokás alkalmazni:

- $CIN < 15$ esetén Cu humilis, Cu mediocris keletkezhet;
- $15 \leq CIN < 50$ esetén Cu humilis, Cu mediocris keletkezhet;
- $50 \leq CIN < 200$ esetén multicellás Cb keletkezhet;
- $200 \leq CIN$ esetén többnyire nem keletkezik gomolyfelhő, mert nincs elegendő energiaforrás az emelési munka biztosításához, azaz a konvektív gátlás leküzdéséhez.

Átfogó konvektív Richardson-szám (bulk Richardson number, *BRN*)

$$BRN = \frac{CAPE}{0,5(v_{610\text{m}} - v_{500\text{m}})^2} \quad (XII.1.32)$$

ahol $v_{610\text{m}}$ a szélvektor 610 m, $v_{500\text{m}}$ pedig 500 méter magasan. Használatát M. Weisman és J. Klemp javasolta 1986-ban. Nagyon hasznos indexnek bizonyult annak eldöntésében, hogy milyen esély van szupercellák kialakulására. A tapasztalatok szerint a következő kritikus értékek alkalmazhatók:

- $BRN \leq 10$ esetén kicsi az esély zivatarok kialakulására a nagy szélnyírás miatt;
- $10 < BRN \leq 45$ esetén szupercellák kialakulására kell számítani;
- $45 \leq BRN$ egycellás és multicellás zivatarok kialakulása valószínű.

Helicitás (csavarodás, helicity, *H*)

A hidrosztatikai instabilitáshoz kapcsolódó jelenségeket szokás vízszintes tengelyű örvényekként szemlélni. Az igen heves konvektív jelenségek, mint például a szupercellák és a tornádók esetén viszont erősen csavarodik vertikálisan a szélmező. Ezt a jelenséget a (XII.1.36) egyenlet és a XII.1.2. ábra mutatja be. Ennek a csavarodásnak az erősségét fejezi ki a helicitás:

$$H = \int_{\vec{h}_1}^{\vec{h}_2} \mathbf{v} (\nabla \times \mathbf{v}) d\vec{h} \quad (XII.1.33)$$

ahol $\mathbf{v}$ a szélvektor $\mathbf{v} = (u, v, 0)$, más szóval a hidrodinamikában használt áramlási vektor hidrosztatikus közelítés mellett. A nabla operátor a hidrodinamikában megismert alakot ölti:

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right). \quad (\text{XII.1.34})$$

A (XII.1.33) definíciós egyenletből kiindulva a függőleges tengelyű örvények megjelenését az alábbi levezetéssel lehet igazolni. Az egyenletben az integrandus egyik tényezője:

$$\nabla \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & 0 \end{vmatrix} = -\mathbf{i} \frac{\partial v}{\partial z} + \mathbf{j} \frac{\partial u}{\partial z} + \mathbf{k} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right). \quad (\text{XII.1.35})$$

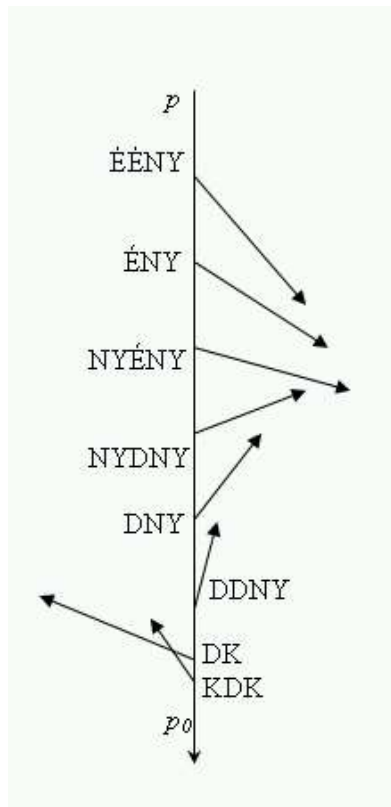
Ezek után – a $\mathbf{v}$ -vel történő skaláris szorzást is figyelembe véve – az integrandus alakja:

$$\mathbf{v} (\nabla \times \mathbf{v}) = \begin{bmatrix} u \\ v \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \end{bmatrix} = -u \frac{\partial v}{\partial z} + v \frac{\partial u}{\partial z}. \quad (\text{XII.1.36})$$

A fenti levezetés alapján világos, miért függ össze a helicitás jelensége a függőleges szélnyírással, azaz a

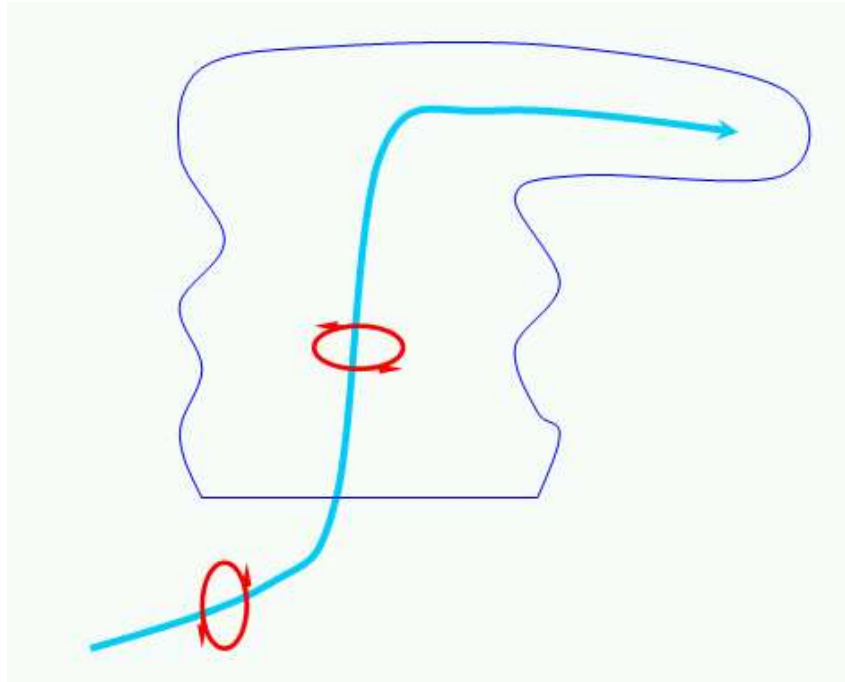
$$-\frac{\partial v}{\partial z} \text{ és a } \frac{\partial u}{\partial z} \quad (\text{XII.1.37})$$

mennyiségekkel. A helicitás megjelenésére a *XII.1.2. ábrán* láthatunk példát.



XII.1.2. ábra. Vertikális szélnyírás (a szélirányok feltüntetésével) heves hidrosztatikai instabilitás jelenléte mellett.

A következő, XII.1.3. ábra pedig azt szemlélteti, hogyan csavarodik egy intenzív konvektív képződmény.



XII.1.3. ábra. Sematikus példa a helicitás, azaz a csavarodás megjelenésére intenzív konvektív rendszerben.

H kritikus értékei a következők:

- $H < 150$ esetén nem várható szupercella;
- $150 \leq H < 300$ esetén alkalmas a helyzet szupercellák kialakulására;
- $300 \leq H < 400$ esetén igen alkalmas a helyzet szupercellák kialakulására;
- $400 \leq H$ esetén igen heves szupercellák, tornádók kialakulására kell számítani.

A helicitás további alkalmazására is van példa.

Az alapáramláshoz viszonyított helicitás (storm relative helicity, SRH)

Pontosabb képet kapunk, ha az alapáramlás sebességéből ($\mathbf{v}$) kivonjuk az örvény mozgásának sebességét ($\mathbf{c}$). Bevezetését R. Davies-Jones, D. Burgess és M. Foster javasolta 1990-ben.

$$SRH = \int_{h_1}^{h_2} (\mathbf{v} - \mathbf{c}) \cdot (\nabla \times \mathbf{v}) \, dh \quad (XII.1.38)$$

Az integrálás helyettesítésére P. Markowski és Y. Richardson 2010-ben a következő praktikus képletet használta:

$$SRH = \sum_{n=1}^{N-1} \left[(u_{n+1} - c_x) \cdot (v_n - c_y) - (u_n - c_x) \cdot (v_{n+1} - c_y) \right] \quad (XII.1.39)$$

ahol u és v a $\mathbf{v}$ szélvektor nyugat-keleti és dél-északi komponensei az i -edik szinten; c_x és c_y az örvény mozgási sebessége nyugat-keleti és dél-északi irányban.

A verifikációk szerint:

$SRH < 150$ esetén a konvekciós cella alig csavarodik;

$SRH \geq 150$ esetén a zivatarcellák csavarodnak, függőleges tengelyű örvénylés várható;

$SRH \geq 300$ esetén szupercellák képződnek függőleges tengelyű örvénnyel;

$SRH \geq 450$ esetén a szupercellák számottevő örvénylése várható a függőleges tengely körül, és tornádók is képződnek.

Helicitási energia (energy helicity index, EHI)

$$EHI = \frac{CAPE}{160000} SRH \quad (XII.1.40)$$

Az index egyesíti a vertikális szélnyírás és az instabilitás hatását. Általában az alsó 2 km-es rétegben számítják ki. Az SRH index dimenziója $m^2 s^{-2}$, a $CAPE$ indexé $J kg^{-1}$. Az EHI index jól szolgálja a várható tornádók erősségének meghatározását. Használatát J. Hart és W. Korotky javasolta 1991-ben. A tapasztalatok szerint a korrigált Fujita-skálán (EF):

$EHI < 1$ esetén cellás konvekció várható tornádó nélkül;

$1 \leq EHI < 2$ esetén gyenge (EF0, EF1 erősségű) tornádók alakulhatnak ki;

$2 \leq EHI < 4$ esetén közepes erősségű (EF2) tornádókra számíthatunk;

$4 \leq EHI$ esetén erős (EF2-nél erősebb) tornádók keletkezhetnek.

FELADATOK

XII.1.1. A *XII.1.1. ábra* szerint légköri mozgásrendszereket a karakterisztikus tér- és időskálájuk alapján nyolc csoportba soroljuk. A nyolc csoport mindegyikét besoroltuk egy-egy „főcsoportba”. Miért? Miben különböznek egymástól az egyes „főcsoportok” (makro-, mezo-, mikro-)?

XII.1.2. Milyen dimenziója, azaz mértékegysége van az egyes indexeknek?

XII.1.3. A hidrosztatika alapegyenlete ($dp = -\rho g dz$) és az egyesített gázegyenlet ($p = \rho R T$) segítségével igazolja, hogy a P_1 és P_2 izobárfelületekkel határolt réteg relatív geopotenciálja egyenszen arányos a réteg középhőmérsékletével!

XII.1.4. A *XII.1.1. táblázat* adatai alapján határozza meg a felhőfajtákat, mennyiségüket, a legalacsonyabb szintű felhőzet mennyiségét és a felhőalap magasságát nappali gomolyfelhők esetén! Jellemezze szövegesen a felhőkép változását a nap során! A SYNOP-távirat számcsoportjainak jelentését – többek között – a *Klasszikus dinamikus meteorológiai példatár I.* című kötetben (Weidinger és Tasnádi, 2007), a *szinoptikus időjárás analízis eszközei* című munkafüzetben (Gyuró, 2007a), vagy a Meteorológiai Világszervezet honlapján lehet megtalálni a következő címen: www.wmo.int/pages/prog/www/WMOCodes.html.

XII.1.1. táblázat. Budapest-Pestszentlőrinc állomás SYNOP-táviratának 2., 3. és 5. szakasza 2013. május 20-án.

GG	$i_R i_x h V V N d d f f 1 s_n T T T 2 s_n T_d T_d T_d 3 P_0 P_0 P_0 P_0 4 P P P P 5 a p p p 6 R R R t_R 7 w w W_1 W_2 8 N_h C_L C_M C_H 3 3 3 (1 s_n T_x T_x T_x) (2 s_n T_n T_n T_n) (5 5 S S S) (6 R R R t_R) (7 R_{24} R_{24} R_{24} R_{24}) (8 N_S C_h S_h S) (9 2 5 T_w T_w) 5 5 5 1 0 U U U 5 5 f_x f_x g_n$
00	11670 71901 10150 20147 39943 40109 55001 60021 71398 83272 333 83840=
01	41668 41701 10148 20148 39941 40107 50009 70111 81242 333 81840 555 10100=
02	41968 32303 10140 20131 39941 40107 52006 70100 81042 555 10094=
03	41970 22103 10126 20103 39947 40114 53004 70111 81042 555 10086=
04	41980 12202 10118 20099 39952 40120 52011 70100 80002 555 10088 /7464=
05	41982 12302 10130 20104 39958 40125 52017 70300 81042 555 10084=

06	11982 12403 10144 20098 39965 40131 53018 60022 70211 81042 333 20117 55140 70024=
07	41684 22502 10160 20103 39970 40135 52018 70300 82100 333 82840 555 10069=
08	41686 42504 10174 20103 39974 40139 51016 70300 84200 333 84840 555 10063 55082=
09	41686 32404 10183 20102 39977 40141 51012 70100 83200 333 83840 555 10059 55091=
10	41686 42803 10188 20093 39980 40144 51010 70300 84200 333 84840 555 10054 55071=
11	41686 42203 10201 20097 39981 40144 51007 70300 84200 333 84843 555 10051 55071 /7486=
12	31686 52103 10206 20092 39980 40143 50003 70311 85200 333 85846=
13	41686 62203 10205 20085 39978 40141 58002 70322 85260 333 85846 555 10046 55071=
14	41686 42906 10195 20097 39977 40141 57004 72581 84960 333 81946 83846 555 10053 55124=
15	41786 32703 10210 20073 39973 40136 57007 70181 82263 333 82850 555 10041 55091=
16	41786 22403 10212 20085 39970 40133 57008 70100 81203 333 81850 555 10044 55073=
17	41784 22503 10207 20080 39968 40131 56009 70100 81202 333 81850 555 10044=
18	41784 22502 10192 20085 39969 40133 55004 70381 81263 333 10215 81850=
19	41783 30000 10163 20099 39974 40139 53004 70300 81283 333 81850 555 10066=
20	41982 50702 10153 20097 39977 40143 52009 70311 81083 555 10069=
21	41982 71002 10145 20103 39977 40143 51008 70311 83088 555 10076=
22	41782 70902 10145 20103 39977 40143 51003 70322 81288 333 81850 555 10076=
23	41981 51402 10134 20102 39976 40143 58001 71322 82082 555 10081=

XII.1.5. A *XII.1.2. táblázat* adatai alapján határozza meg γ értékét a 925 és a 850 hPa-os szint között, és jellemezze a légkör hidrosztatikai stabilitásának állapotát! A dekódoláshoz használja a *XII.1.3. táblázat*ot!

XII.1.2. táblázat. Budapest-Pestszentlőrinc állomás TEMP-távirata „A” részének 2., 3. és 5. szakasza, valamint a „B” rész 5. szakasza 2013. május 20-án 00 UTC-kor:

TTAA	99P ₀ P ₀ P ₀ T ₀ T ₀ T _{a0} D ₀ D ₀ d ₀ d ₀ d ₀ f ₀ f ₀ ...P _n P _n h _n h _n h _n T _n T _n T _{an} D _n D _n d ₀ d ₀ d ₀ f ₀ f ₀ ...88P _t P _t P _t T _t T _t T _{at} D _t D _t d _t d _t f _t f _t
TTAA	99994 15203 17001 00090 // // // // 92754 16260 20506 85468 11830 22508 70060 00612 20016 50567 17167 19518 40731 29961 20016 30929 45545 14022 25049 52560 18516 20194 513// 16008 15382 507// 22505 10643 537// 08001 88243 53560 19015=
TTBB	... n _n n _n P _n P _n P _n T _n T _n T _{an} D _n D _n ...
TTBB	00994 15203 11971 15236 22956 17457 33914 15861 44864 12832 55801 07825 66779 06050 77734 03019 88696 00211 99672 01350 11609 07319 22579 10359 33557 12158 44548 12367 55437 24168 66372 34558 77361 35350 88320 41734 99293 46749 11272 49358 22243 53560 33228 503// 44215 481// 55193 529// 66178 485// 77116 539// 88106 557// 99100 537//

XII.1.6. A *XII.1.2. táblázat* adatai alapján számolja ki a következő indexek értékét: NI , NI^* , K , BI , VT , CT és TT ! Adjon előrejelzést a konvekcióval kapcsolatban! A dekódoláshoz használja a *XII.1.3.* és a *XII.1.4. táblázat*okat!

XII.1.3. táblázat. A TEMP-távirat „A” rész 2. és 3. szakaszának kódolása.

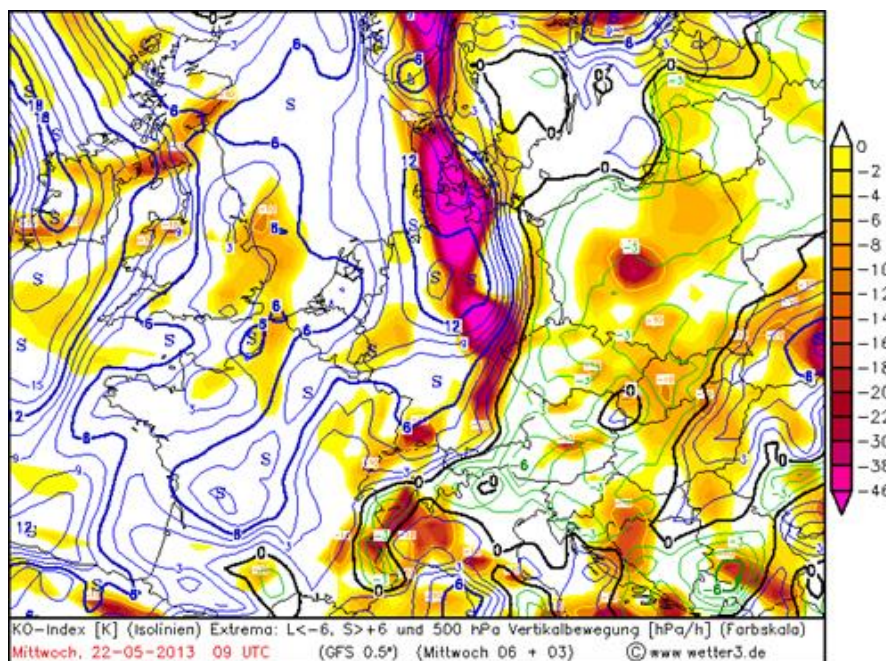
99	az állomás szintjének csoportjelző száma
P ₀ P ₀ P ₀	az állomás szintjén mért légnyomás tized hPa-ban
T ₀ T ₀ T _{a0}	lég hőmérséklet tized °C-ban (pozitív hőmérséklet esetén T _{a0} páros, negatív hőmérséklet esetén páratlan)
D ₀ D ₀	harmatpont deficit (5 °C alatt tized fokban, fölötté egész fokban 50-nel növelve)
d ₀ d ₀ d ₀	szélirány az állomás szintjén (öt fokoskénti lépésközzel)
f ₀ f ₀	szélsebesség az állomás szintjén

$P_n P_n$	az egyes főizobárszintek csoportjelző száma (1000 hPa: 00, 925 hPa: 92, 850 hPa: 85, 700 hPa: 70, 500 hPa: 50, 400 hPa: 40, 300 hPa: 30, 250 hPa: 25, 200 hPa: 20, 150 hPa: 15, 100 hPa: 10)
$h_n h_n h_n$	az adott főizobárszint standard geopotenciálja (500 hPa alatt gpm-ben, 500 hPa-on és fölötté az ezresek és tízezresek elhagyva, gpdam-ben)
$T_n T_n T_{an}$	lég hőmérséklet az adott főizobárszinten tized °C-ban (pozitív hőmérséklet esetén T_{an} páros, negatív hőmérséklet esetén páratlan)
$D_n D_n$	harmatpont deficit az adott főizobárszinten (5 °C alatt tized fokban, fölötté egész fokban 50-nel növelve)
$d_n d_n d_n$	szélirány az adott főizobárszinten (ötfokonkénti lépésközzel)
$f_n f_n$	szélsebesség az adott főizobárszinten
88	a tropopauza szintjének csoportjelző száma
$h_t h_t h_t$	a tropopauza szintjének standard geopotenciálja (az ezresek és tízezresek elhagyva, gpdam-ben)
$T_t T_t T_{at}$	lég hőmérséklet a tropopauza szintjén tized °C-ban (a páratlan T_{at} negatív hőmérsékletet jelent)
$D_t D_t$	harmatpont deficit a tropopauza szintjén (5°C alatt tized fokban, fölötté egész fokban 50-nel növelve)
$d_t d_t d_t$	szélirány a tropopauza szintjén (ötfokonkénti lépésközzel)
$f_t f_t$	szélsebesség a tropopauza szintjén

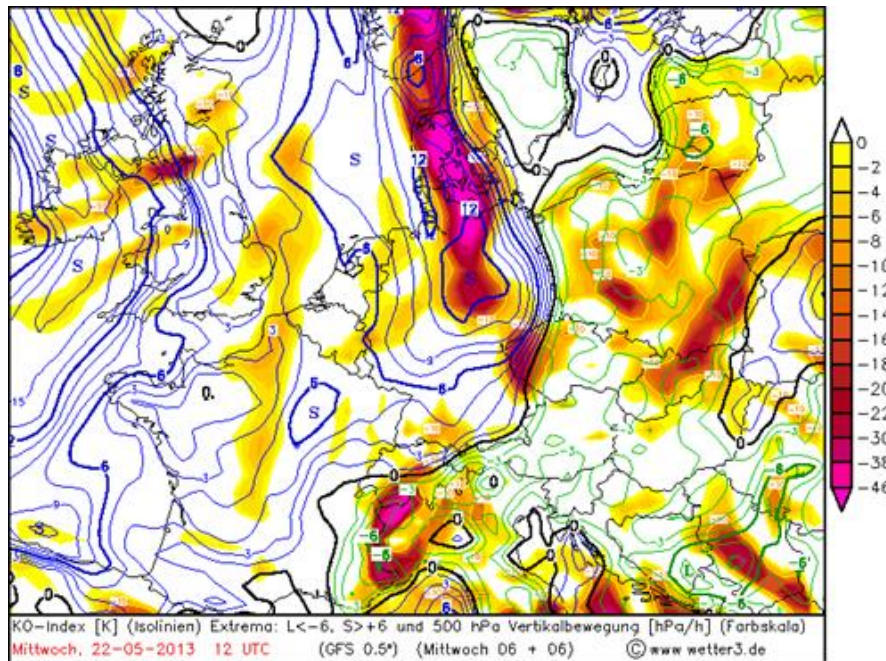
XII.1.4. táblázat. A TEMP-távirat „B” rész 5. szakaszának kódolása (hőmérséklet és légnedvesség a szignifikáns szinteken).

$n_n n_n$	a szignifikáns szint sorszama (az állomás szintjén 00, a továbbiakban 11; 22; ... ; 99; 11; ...)
$P_n P_n P_n$	a légnyomás értéke a szignifikáns szinten egész hPa-ban
$T_n T_n T_{an}$	lég hőmérséklet a szignifikáns szinten tized °C-ban (pozitív hőmérséklet esetén T_{an} páros, negatív hőmérséklet esetén páratlan)
$D_n D_n$	harmatpont deficit a szignifikáns szinten (5 °C alatt tized fokban, fölötté egész fokban 50-nel növelve)

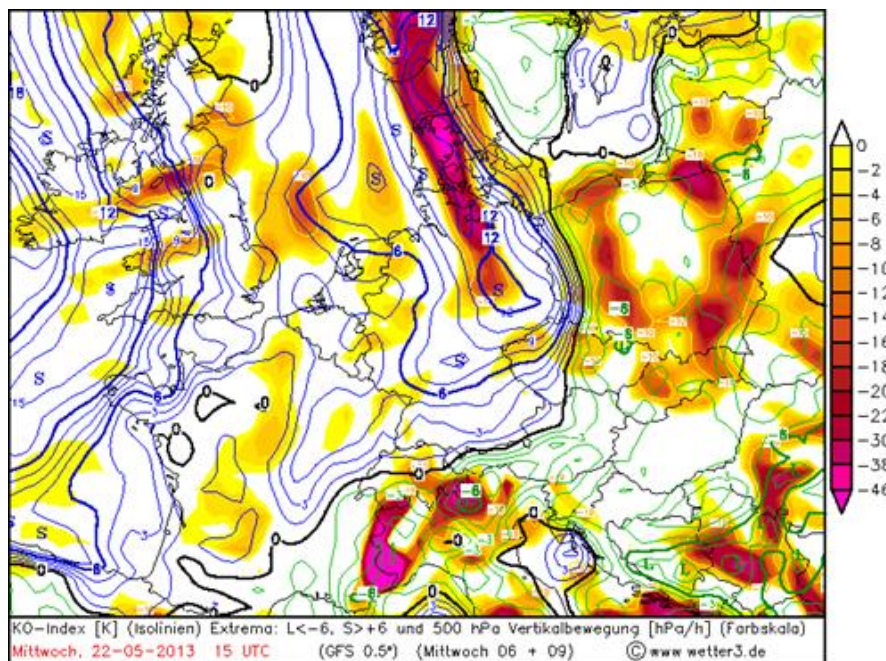
XII.1.7. Másodfajú hidegfront vonult át a Kárpát-medence fölött 2013. május 22-én. A KO-index előrejelzései (XII.1.4.–7. ábra) alapján elemezze a hidrosztatikai instabilitási viszonyokat a front átvonulása után! Verifikálja elemzéseit a megfigyelési adatok (XII.1.5., XII.1.6. és XII.1.7. táblázatok) alapján!



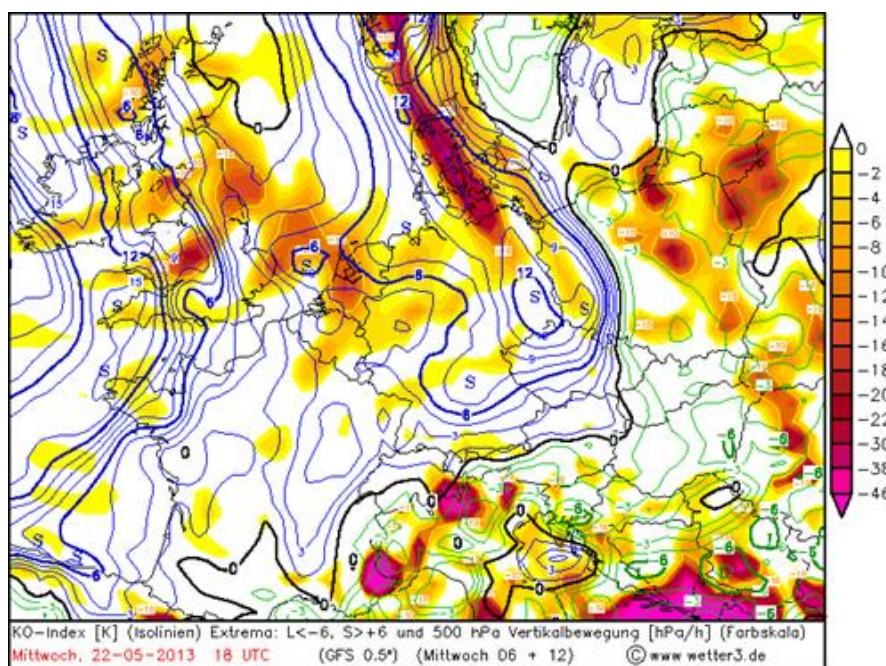
XII.1.4. ábra. A KO-index és az 500 hPa-os főizobárszinten várható függőleges sebesség (színskála) háromórás előrejelzése 2013. május 22. 09 UTC-re.



XII.1.5. ábra. A KO-index és az 500 hPa-os főizobárszinten várható függőleges sebesség (színskála) hatórás előrejelzése 2013. május 22. 12 UTC-re.



XII.1.6. ábra. A KO-index és az 500 hPa-os főizobárszinten várható függőleges sebesség (színskála) kilencórás előrejelzése 2013. május 22. 15 UTC-re.



XII.1.7. ábra. A KO-index és az 500 hPa-os főzobárszinten várható függőleges sebesség (színskála) tizenkétórás előrejelzése 2013. május 22. 18 UTC-re.

XII.1.5. táblázat. A SYNOP-távirat 2., 3. és 5. szakasza 2013. május 22-én 09 UTC-kor az észlelővel működő állomásokon.

Miskolc	41575 81802 10142 20117 39805 40081 57005 72162 878// 333 84820 83626 555 10085=
Szombathely	41583 73001 10142 20092 39845 40084 50001 72522 82272 333 82826 555 10072=
Budapest	41581 72003 10151 20105 39914 40079 52001 70122 878// 333 86823 85633 555 10074=
Kékestető	41/01 92103 10072 20072 38923 42720 58002 74544 333 89/01 555 10100 55071=
Szolnok	41370 82203 10131 20123 39978 40085 50000 76166 887// 333 83708 83720 88640=
Eger	41470 81703 10135 20110 39814 40082 58005 70322 8617/ 333 86810 555 10085=
Debrecen	41256 82402 10133 20120 39956 40085 57004 78066 872// 333 87805=
Siófok	41583 62204 10171 20088 39945 40073 58002 70322 84878 333 83826 81630 92519 555 10058=
Pécs / Pogány	41375 72004 10119 20108 39850 40090 52004 72166 8657/ 333 86608=
Paks	41560 81802 10127 20114 39966 40083 57003 72582 8327/ 333 83820 555 10092=
Kecskemét	41356 82103 10129 20113 39956 40092 53001 76366 8682/ 333 82607 85812 88545=
Szeged	41270 82301 10130 20124 39990 40089 50000 76066 8412/ 333 84805 88530=
Békéscsaba	41225 82903 10135 20132 39981 40086 56003 76186 8457/ 333 84604=
Sármellék	41586 60102 10170 20099 39936 40078 56002 70311 83202 333 83825 555 10063=

XII.1.6. táblázat. A SYNOP-távirat 2., 3. és 5. szakasza 2013. május 22-én 12 UTC-kor.

Szécsény	16/// /0601 10154 20112 39882 40063 57011 60041 555 10076 55081 6032/=
Jósvafő	16/// /1802 10127 20108 39707 40073 57007 60011 555 10088 6994/=
Miskolc	11580 81803 10132 20118 39799 40076 57006 60011 72186 8787/ 333 84820 83626=
Záhony	16/// /2302 10141 20123 39950 40075 56009 60061 555 10089 6020/=
Sopron	36/// /2701 10176 20085 39930 40069 56010 555 10055=

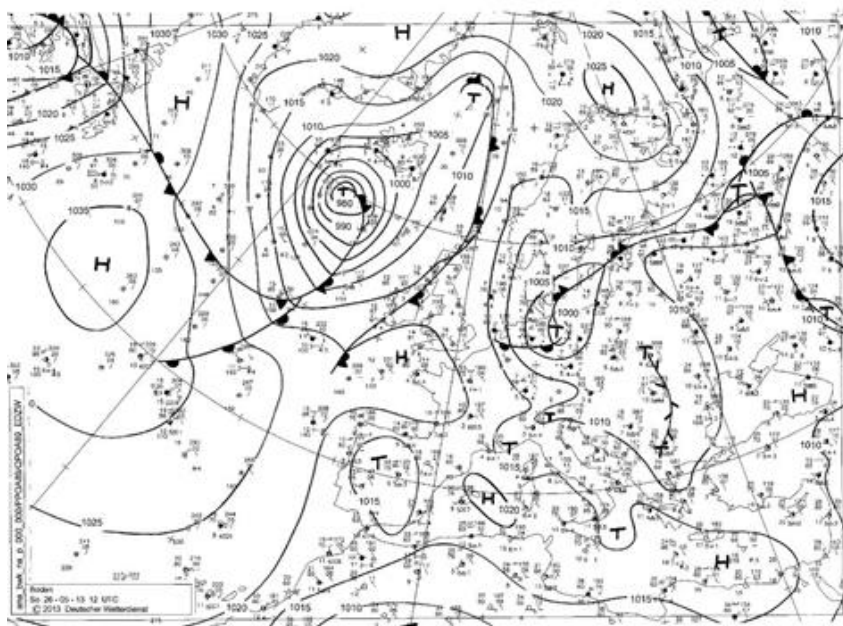
Szombathely	31680 61602 10173 20084 39835 40071 57010 71581 85382 333 83933 83836 555 10056=
Mosonmaglócai	36/// /3103 10178 20081 39922 40064 57012 555 10053 55081=
Győr	36/// /2702 10197 20090 39927 40063 58009=
Veszprém	36/// /0302 10177 20113 39736 40063 56004 555 10066 55081=
Tata	36/// /2902 10186 20094 39917 40062 58009 555 10055=
Budapest	31575 71803 10181 20107 39903 40066 57011 70122 85232 333 85830=
Agárd	36/// /2403 10193 20089 39939 40063 57012 555 10051=
Kékestető	11/01 92004 10076 20076 38918 42715 57005 60021 74586 333 89/01 555 10100 55083=
Szolnok	11470 72203 10140 20127 39975 40081 55003 60051 72162 878// 333 85810 87657=
Poroszló	16/// /2102 10141 20125 39971 40079 54000 60021 555 10090 6999/=
Eger	31470 81903 10142 20114 39808 40075 57006 70222 888// 333 85810 88620 555 10083=
Debrecen	11358 82503 10138 20122 39951 40080 57005 60051 78086 872// 333 87806=
Napkor	16/// /2403 10136 20131 39908 40077 57009 60041 555 10097 6015/=
Farkasfa	36/// /1202 10168 20077 39707 40071 57007 555 10055=
Zalaegerszeg	36/// /0401 10178 20057 39791 40071 58007 555 10045=
Nagykanizsa	36/// /1802 10190 20074 39904 40068 57008=
Kaposvár	36/// /2502 10192 20102 39916 40068 58008 555 10056=
Siófok	31682 52506 10187 20098 39935 40062 58010 70122 84202 333 84833 92520 555 10056 55082=
Pécs / Pogány	11589 62003 10169 20110 39843 40079 57007 60051 70162 86200 333 86823=
Paks	11575 52004 10167 20118 39960 40076 58006 60011 70182 83202 333 83826 555 10073 55072=
Baja	16/// /2102 10163 20130 39950 40082 58002 60051 555 10081=
Kecskemét	11480 62102 10153 20121 39950 40085 56006 60061 72162 85842 333 83815 84643=
Szeged	11380 71502 10140 20126 39986 40085 58004 60041 76066 8682/ 333 82809 85630=
Békéscsaba	11215 82706 10132 20127 39984 40090 52003 60041 78182 8327/ 333 83804=
Tát	36/// /2903 10198 20100 39932 40061 57011 555 10053 55071=
Sármellék	31686 53601 10189 20105 39928 40069 58008 70211 84202 333 84840 555 10058=

XII.1.7. táblázat. A SYNOP-távirat 2., 3. és 5. szakasza 2013. május 22-én 15 UTC-kor az észlelővel működő állomásokon.

Miskolc	41560 72003 10148 20104 39787 40062 57012 70322 873// 333 83920 84823 555 10075=
Szombathely	41682 22002 10174 20101 39825 40061 58010 70191 81963 333 81933 81836 555 10062=
Budapest	41575 32302 10180 20091 39891 40054 57012 72991 82963 333 81923 82826=
Kékestető	41260 72406 10052 20052 38909 42709 57009 78098 872// 333 87805=
Szolnok	42580 52004 10169 20110 39956 40061 57019 85200 333 85830=
Eger	41565 71902 10152 20100 39796 40062 57012 71792 87900 333 82820 86930 555 10071 55081=
Debrecen	41480 72303 10144 20108 39940 40068 57011 72186 8428/ 333 84813 555 10079=
Siófok	41682 32405 10200 20099 39923 40049 58012 70111 82202 333 82833 92521 555 10052 55071=
Pécs / Pogány	41589 31601 10183 20111 39822 40056 58021 70111 83202 333 83826 555 10063=
Paks	41575 42004 10189 20117 39942 40056 57018 70211 84200 333 84826 555 10063=
Kecskemét	42682 42102 10180 20093 39930 40063 56020 84203 333 81835 84840=
Szeged	41587 52503 10175 20113 39969 40066 58017 70162 85202 333 85823 555 10067=

Békéscsaba	41472 71501 10153 20128 39968 40073 56016 72582 84270 333 84810 555 10085=
Sármellék	41686 33504 10185 20082 39917 40058 58011 70111 82202 333 82840 555 10051 55103=

XII.1.8. A *XII.1.8. ábrán* bemutatott szinoptikus analízis szerint egy nagy kiterjedésű ciklon peremén összeáramlási zóna alakult ki a Kárpát-medence fölött 2013. május 26-án. Ennek következtében többfelé hullott eső, záporosó. Egyes helyeken felhőszakadással kísért zivatar és jégeső is előfordult. A jégverés jelentős mezőgazdasági károkat okozott. Északkeleten a lehullott jégszemek vastagon borították a felszínt. A felhőszakadások és a jégszemekkel borított felszín miatt közlekedési fennakadások voltak, több baleset is történt. Egyes hírportálok beszámolóí szerint Nógrád, Heves, Borsod-Abaúj-Zemplén, Bács-Kiskun, Jász-Nagykun-Szolnok, Hajdú-Bihar és Szabolcs-Szatmár-Bereg megyék területén tucatnál is több helyen figyeltek meg tornádó keletkezésére utaló felhőtölcsért (tubát). Elemezze az időjárási helyzetet a fentebb megismert indexek segítségével! Használja a *XII.1.8. táblázatban* található TEMP-táviratok adatait! Verifikálja elemzését a lehullott csapadék mennyiségének mért adatai (*XII.1.9. táblázat*) alapján!



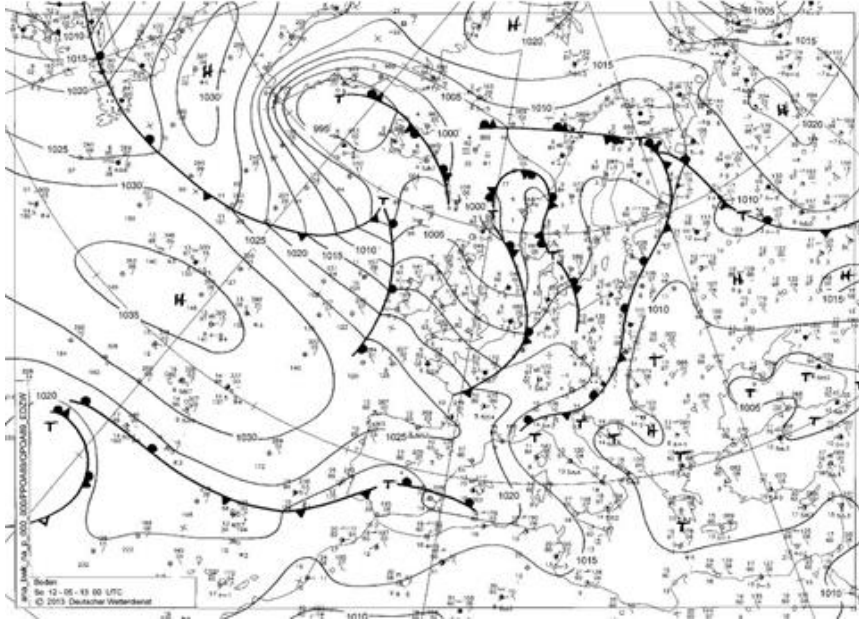
XII.1.8. ábra. A Német Meteorológiai Szolgálat szinoptikus térképe (2013. május 26. 12 UTC).

XII.1.8. táblázat. Néhány állomás TEMP-távirata „A” részének 2. szakasza 2013. május 26-án.

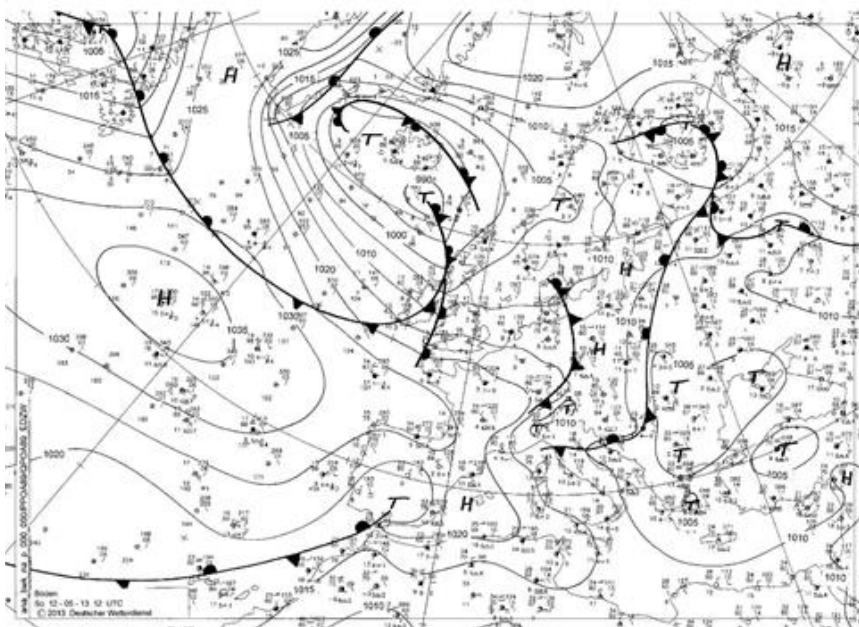
Poprád 00 UTC	99926 05811 04002 00065 // // // // 92715 05811 04002 85407 02815 31501 70950 07158 21008 50549 24358 21511 40707 38357 20014 30899 47176 20017 25022 43186 18510 20173 42786 20009 15365 44985 00501 10634 49584 19503
Budapest 00 UTC	99993 10258 31004 00080 // // // // 92724 06056 30515 85412 02036 27010 70951 08139 27012 50549 24967 24505 40706 38758 21005 30898 45577 27003 25021 415// 23005 20173 419// 22004 15366 461// 20513 10634 507// 16505
Szeged 00 UTC	99000 09812 27005 00083 09812 27005 92733 08659 30016 85425 03258 30512 70965 07756 29012 50550 25165 30011 40707 39161 28012 30899 44175 28506 25021 421// 25507 20173 409// 23006 15367 461// 20510 10634 519// 24505
Poprád 12 UTC	99926 11656 36002 00057 // // // // 92708 11256 36002 85400 02427 03002 70942 07514 33003 50548 24761 21509 40706 38560 18507 30898 44980 18513 25021 41586 17012 20172 42386 18014 15365 45585 21503 10633 49584 08002

XII.1.9. Hosszan elnyúló, hullámzó frontálzóna hidegfrontja haladt át a Kárpát-medence fölött 2013. május 12-én (*XII.1.9.–10. ábra*). Több helyen mértek jelentős mennyiségű csapadékot. Helyenként jégeső is volt. Vaján, Szabolcs-Szatmár-Bereg megyében tornádó keletkezett, ami jelentős károkat okozott. A *XII.1.9. táblázat* alapján

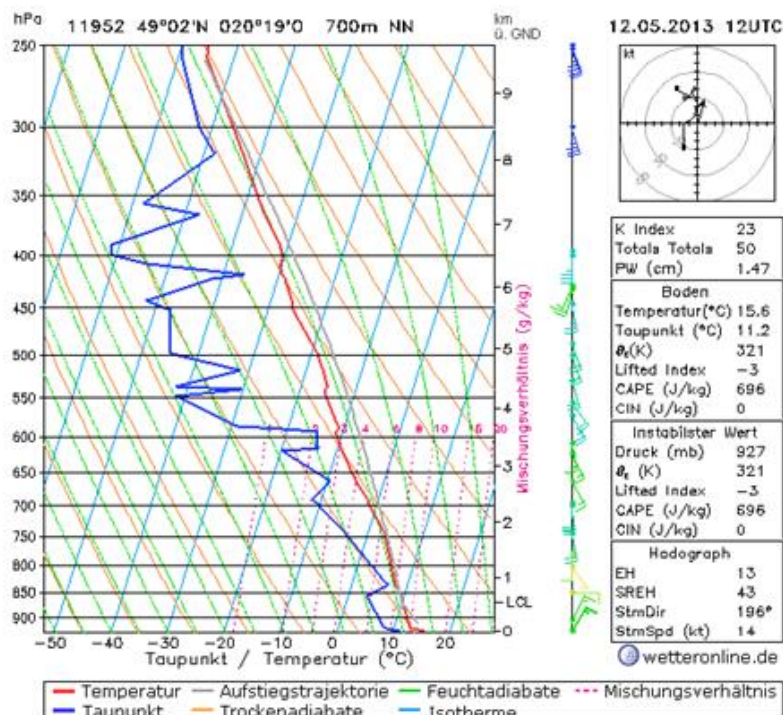
számolja ki a következő indexeket: K , VT , CT , TT , BI , SI ! Poprád állomásnak a XII.1.11. ábrán látható TEMP-analízise alapján vizsgálja meg a következő indexeket: K , TT , LI , $CAPE$ és SRH ! A TEMP-analízis alapján számolja ki a Thompson-index értékét! Elemezze a hidrosztatikai instabilitási viszonyokat! Verifikálja elemzését a XII.1.10. táblázatban található megfigyelési adatok alapján!



XII.1.9. ábra. A Német Meteorológiai Szolgálat szinoptikus térképe (2013. május 12. 00 UTC).



XII.1.10. ábra. A Német Meteorológiai Szolgálat szinoptikus térképe (2013. május 12. 12 UTC).



XII.1.11. ábra. Poprád aerológiai diagramja (2013. május 12. 12 UTC).

XII.1.9. táblázat. Néhány állomás TEMP-távirata „A” részének 2. szakasza 2013. május 12-én.

Poprád 00 UTC	99929 11211 32002 00071 // // // // 92736 11815 00505 85446 12459 14503 70033 00761 17506 50564 16379 16517 40728 30769 16016 30926 45566 16017 25045 55358 15020 20186 54572 19008 15373 50984 20510 10636 54982 27503
Budapest 00 UTC	99992 13613 31506 00072 // // // // 92727 13443 31510 85438 11058 18506 70024 00756 16514 50563 17558 16518 40726 30750 15512 30924 46945 13512 25042 52161 13513 20186 509// 20008 15374 497// 21509 10636 551// 25506
Szeged 00 UTC	99002 16656 16504 00101 17257 16505 92772 18466 18514 85488 12259 19507 70081 00413 16506 50571 15585 18511 40735 27576 17509 30935 43157 18510 25055 53938 17010 20197 563// 21505 15382 523// 27503 10642 577// 29004

XII.1.10. táblázat. A 06 és 12 UTC között lehullott csapadék mennyisége (R_{12}) 2013. május 26-án.

	R_{12}		R_{12}
Szécsény	4	Debrecen	0,1
Jósvafő	10	Napkor	9
Miskolc	8	Farkasfa	1
Záhony	20	Zalaegerszeg	0
Sopron	0	Nagykanizsa	2
Szombathely	0,3	Kaposvár	3
Mosonmagyaróvár	0	Siófok	0
Győr	0	Pécs / Pogány	27
Veszprém	0	Paks	5
Tata	0	Baja	3
Budapest	0	Kecskemét	25
Agárd	0	Szeged	5

Kékestető	10		Békéscsaba	3
Szolnok	10		Tát	0
Poroszló	8		Sármellék	3
Eger	20			

XII.1.10. Az Egyesült Államokban, Oklahomában, a 15 ezer lakosú Moore városában közel 400 személyi sérüléssel járt, 24 halálos áldozatot követelt és 2 milliárd \$ anyagi kárt okozott a 2013. május 20-án, 39 perc alatt átvonult EF5 erősségű tornádó. Vonulásának 27 km-es útvonalán a legerősebb széllokkések sebességét 300–340 km/óra értékre becsülik. Mekkora lehetett a *CAPE* értéke?

XII.2. A barotróp instabilitás

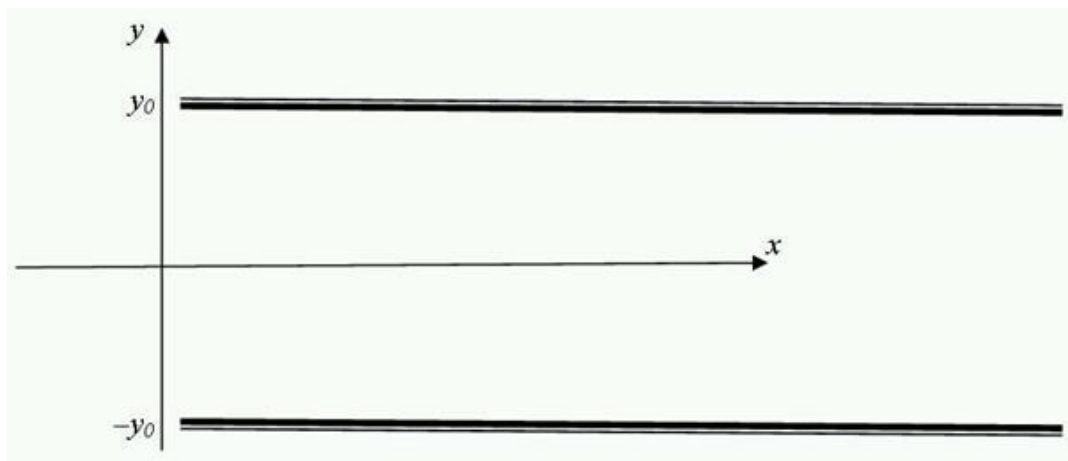
A légkör akkor van barotróp állapotban, ha az izobár és az izoszter felületek párhuzamosak. Mivel az izoszter felületek párhuzamosak az izoterm felületekkel, ezért a barotropitás feltétele úgy is megfogalmazható, hogy az izobár és az izoterm felületek párhuzamosak, más szóval nem keletkeznek szolenoidok. Matematikai alakban a barotropitás a sűrűség gradiense és a nyomási gradiens segítségével írható fel a következő alakban:

$$\nabla \rho = \frac{c_p}{c_p R T} \nabla p. \quad (\text{XII.2.1})$$

A barotróp instabilitás a légköri mozgásrendszerek besorolására Orlanski által javasolt nagyságrendi kategorizálás szerint a makro- β , azaz a szinoptikus skálán megfigyelhető jelenség.

Barotróp instabilitásról akkor beszélünk, ha a légkör barotróp állapotban van, az áramlás divergenciamentes, és horizontális szélnyírás lép fel. Ebben az esetben az áramlást kétdimenziós, azaz horizontális síkáramlásnak tekinthetjük. Ezt az áramlási típust leggyakrabban az ún. csatornamodell segítségével szemléltetjük (XII.2.1. ábra).

A modell síkáramlást ír le a közepes földrajzi szélességeken. A csatorna fala északon ($y=y_0$) és délen ($y=-y_0$) áthatolhatatlan.



XII.2.1. ábra. A csatornamodell a lokális Descartes-féle koordináta-rendszerben.

A csatornamodellben az áramlást az időben átlagolt alapáramlás jellemzi. Az instabilitás vizsgálatok a szélműzöt a kis perturbációk módszere segítségével írjuk le. Ebben az esetben a $\mathbf{v}(u, v, t)$ szélvektor zonális (u) és meridionális (v) komponense U zonális alapáramlás mellett a következő alakban írható fel:

$$u(x, y, t) = U(y) + u'(x, y, t) \quad \text{és} \quad v(x, y, t) = v'(x, y, t). \quad (\text{XII.2.2-3})$$

A csatornamodell segítségével bebizonyítható, hogy a barotróp instabilitás feltétele az, hogy az abszolút örvényesség átlagának, azaz az $\overline{\eta(y)} = \overline{\zeta + f}$ mennyiségnek szélsőértéke vagy inflexiós pontja legyen:

$$\frac{d\overline{\zeta + f}}{dy} = 0, \text{ azaz } \frac{d\overline{\zeta}}{dy} + \beta = \frac{d^2 U}{dy^2} + \beta = 0, \quad (\text{XII.2.4-5})$$

ahol β a Coriolis-paraméter meridionális megváltozása:

$$\beta = \frac{df}{dy} \equiv \frac{d\overline{f}}{dy}. \quad (\text{XII.2.6})$$

A (XII.2.4-5) egyenletekkel leírt feltételből az következik, hogy barotróp instabilitás esetén az abszolút örvényességnek szélsőértéke vagy inflexiós pontja van. Ez a feltétel akkor és csak akkor teljesül, ha horizontális szélnyírás lép fel. A barotróp instabilitás során az u' és v' perturbációkból eredő perturbációs kinetikus energia forrása az alapáramlás kinetikus energiája. Ezzel a jelenséggel lehet a sugáráram (jet stream) meanderezését magyarázni.

A barotróp instabilitást *Lord Rayleigh*, a fizikai Nobel-díj 1904-es díjazottja írta le először 1880-ban, nem forgó áramlási térre ($\beta=0$). Forgó áramlási térre, azaz a valós földi légkörre a japán származású amerikai meteorológus, *Hsiao-lan Kuo* adta meg az első leírást 1949-ben.

FELADATOK

XII.2.1. Igazoljuk, hogy a (XII.2.2-3) egyenletekkel leírt síkáramlás esetén az alapáramlás divergenciamentes!

XII.2.2. Mi következik abból, hogy az áramlás a barotróp instabilitás kialakulása után is divergenciamentes marad?

XII.2.3. Írjuk fel a relatív örvényességet a (XII.2.2-3) egyenletekkel definiált áramlás esetén!

XII.2.4. Igazoljuk, hogy az f -síkon, ahol f állandó és $\beta=0$, a barotróp instabilitás kialakulásának szükséges és elégséges feltétele a horizontális szélnyírás!

XII.2.5. A (XII.2.2-3) egyenletekkel megadott feltételek mellett vezessük le a barotróp örvényességi egyenletet!

XII.2.6. A $\Psi(x, y, t)$ hullámfüggvény segítségével írjuk fel a relatív örvényesség definícióját!

XII.2.7. A $\Psi(x, y, t)$ hullámfüggvény segítségével írjuk fel a **XII.1.5. feladat** megoldásaként levezetett barotróp örvényességi egyenletet!

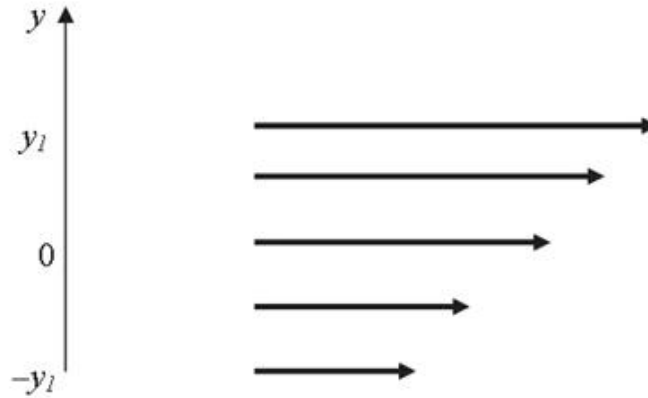
XII.2.8. Igazoljuk, hogy a $\Psi_0(y)$ amplitúdójú és

$$\Psi(x, y, t) = \Psi_0(y) e^{i\omega(x-ct)} \quad (\text{XII.2.7})$$

alakú komplex hullámfüggvénnyel leírható áramlásban barotróp instabilitás akkor és csak akkor jöhet létre, ha a $c = c_r + ic_i$ fázissebesség imaginárius része nullától különböző!

XII.2.9. Igazoljuk, hogy teljesül a barotróp instabilitás feltétele a **XII.2.2. ábrán** látható alapáramlás esetén az f -síkon ($\beta=0$)! Az ábrázolt lineáris szélprofil a következő egyenlettel adhatjuk meg:

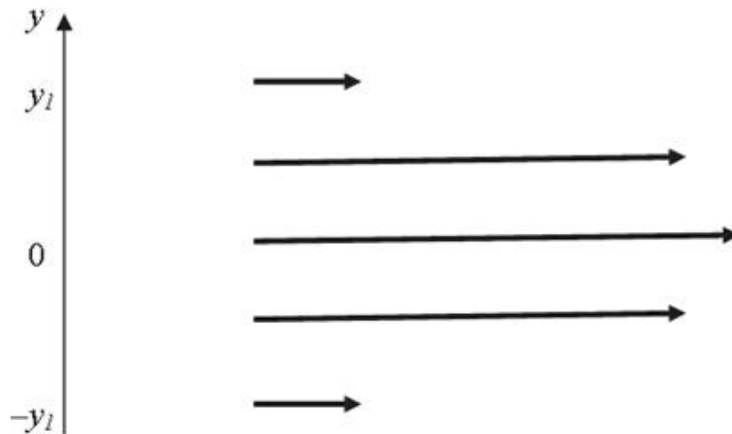
$$U(y) = U_0 + U_1 \frac{y}{y_1}. \quad (\text{XII.2.8})$$



XII.2.2. ábra. Lineáris szélprofil a közepes földrajzi szélességek modelljében.

XII.2.10. Igazoljuk, hogy az $y=0$ pontban teljesül a barotróp instabilitás feltétele a XII.2.3. ábrán látható alapáramlás esetén a β -síkon (β állandó)! Az ábrázolt parabolikus szélprofil a következő egyenlettel adhatjuk meg:

$$U(y) = U_0 + \frac{\beta}{2} y^2 . \quad (\text{XII.2.9})$$



XII.2.3. ábra. Parabolikus szélprofil a közepes földrajzi szélességek modelljében.

XII.2.11. A szélirány megváltozásával járó szélnyírást (ld. XII.2.4. ábra) a *tangens hiperbolikus* függvénnyel lehet modellezni:

$$U(y) = U_0 \text{th} \frac{y}{y_1} . \quad (\text{XII.2.10})$$

Igazoljuk, hogy az f -síkon az $y=0$ pontban teljesül a barotróp instabilitás feltétele!

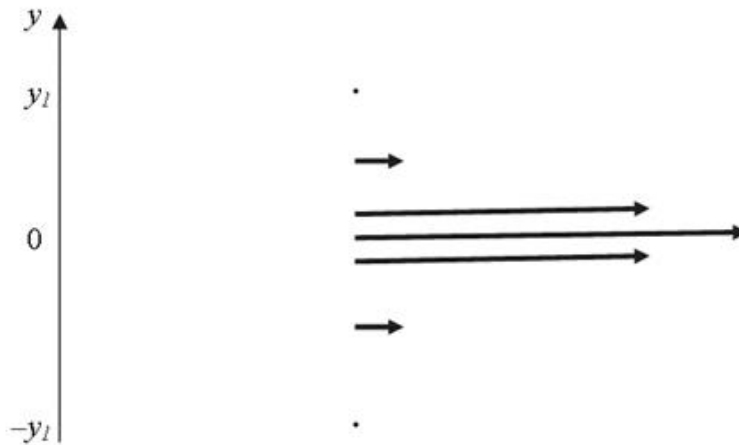


XII.2.4. ábra. A szélirány megváltozásával járó horizontális szélnyírás modellje.

XII.2.12. Igazoljuk, hogy a Bickley-féle szélprofil, azaz a sugáráram (jet stream) matematikai modellje esetén a β -síkon az $y = 0$ helyen teljesül a barotróp instabilitás feltétele! A függvény alakja:

$$U(y) = -\beta \frac{y_l^2}{2} \operatorname{sch}^2 \frac{y}{y_l}, \quad (\text{XII.2.11})$$

ahol sch a *sche* hiperbolikus függvény. A szélprofil a XII.2.5. ábra szemléleti.



XII.2.5. ábra. A Bickley-féle szélprofil. (Figyelem! A $\operatorname{sch}^2 y$ függvény határértéke az $y \rightarrow +\infty$ és az $y \rightarrow -\infty$ esetekben 0.)

XII.3. A baroklin instabilitás

A légkör akkor van baroklin állapotban, ha az izobár és az izoszter felületek metszik egymást, vagyis szolenoidok keletkeznek. A baroklin instabilitás a légköri mozgásrendszerek besorolására Orlanski által javasolt nagyságrendi kategorizálás szerint a makro- β , azaz a szinoptikus skálán megfigyelhető jelenség, és szoros összefüggésben van a ciklonok és az anticiklonok, azaz a Rossby-hullámok keletkezésének mechanizmusával.

Baroklin instabilitásról akkor beszélünk, ha a légkör baroklin állapotban van, és vertikális szélnyírás lép fel. A jelenséget Jule Charney amerikai és Eric Eady brit meteorológus írta le először 1947-ben, illetve 1949-ben publikált írásában.

A baroklin instabilitás szemléltetésére többféle modellt is alkalmazhatunk. Minden modell lényeges eleme a vertikális szélnyírás. A következő feladatok egyrétegű és vertikális szélnyírást tartalmazó modellre vonatkoznak.

Ezt a módszert a szakirodalom *Rayleigh*-féle eljárásként emlegeti (Haltiner és Williams, 1980; Holton 2004).

Alapáramlásként a $\sigma = -\ln(p/p_0)$ redukált nyomási koordináta-rendszerben felírt $U(y, \sigma)$ horizontális áramlást választjuk. Ezzel a horizontális szélmező a következő alakban írható fel:

$$\mathbf{v}(x, y, \sigma, t) = iU(\sigma) + iu'(x, y, \sigma, t) + jv'(x, y, \sigma, t), \quad (\text{XII.3.1})$$

ahol i, j az x és az y irányú egységvektor. A levezetéshez a q -val jelölt kvázi-geosztrofikus potenciális örvényesség megmaradásának tételéből indulunk ki. A q kvázi-geosztrofikus potenciális örvényesség definíciós egyenlete a σ -koordináta-rendszerben a következő alakban írható fel (Haltiner és Williams, 1980; Holton 2004):

$$q(x, y, \sigma, t) = \nabla^2 \Psi(x, y, \sigma, t) + \beta y + e^\sigma \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\frac{f^2 e^{-\sigma}}{\Gamma} \cdot \frac{\partial \Psi(x, y, \sigma, t)}{\partial \sigma} \right), \quad (\text{XII.3.2})$$

ahol Γ a statikai stabilitási paraméter:

$$\Gamma = R \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial \sigma} + \frac{R}{c_p} \bar{T} \right). \quad (\text{XII.3.3})$$

Légkörmodellünkben érvényes a kvázi-geosztrofikus potenciális örvényesség megmaradásának tétele. Ez a következő alakban írható fel (Haltiner és Williams, 1980; Holton 2004):

$$\frac{\partial q'}{\partial t} + U \frac{\partial q'}{\partial x} + v' \frac{\partial \bar{q}}{\partial y} = 0. \quad (\text{XII.3.4})$$

A kis perturbációk módszerének alkalmazásával a q potenciális örvényesség a következő alakban írható fel:

$$q(x, y, \sigma, t) = \bar{q}(y, \sigma) + q'(x, y, \sigma, t). \quad (\text{XII.3.5})$$

A XII.3.5 és a XII.2.2-3 egyenletek felhasználásával a megmaradási tétel linearizált formája a következő alakban írható fel:

$$\frac{\partial q'}{\partial t} + U \frac{\partial q'}{\partial x} + v' \frac{\partial \bar{q}}{\partial y} = 0. \quad (\text{XII.3.6})$$

A kis perturbációk módszerének alkalmazásánál megszokott módon felhasználtuk a következő összefüggéseket:

$$\frac{\partial \bar{q}}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \bar{q}}{\partial x} = 0, \quad u' \frac{\partial q'}{\partial x} \approx 0 \quad \text{és} \quad v' \frac{\partial q'}{\partial y} \approx 0. \quad (\text{XII.3.7-10})$$

Bevezetjük a

$$\Psi(x, y, \sigma, t) = \bar{\Psi}(\sigma) + \Psi'(x, y, \sigma, t) \quad (\text{XII.3.11})$$

áramfüggvényt (hullámfüggvényt), ahol $\Psi'(x, y, \sigma, t) = \Psi'_0(\sigma) \cdot e^{i\omega(x-ct)}$. (Természetesen itt i az imaginárius egység.) A (XII.3.4) egyenletbe történő behelyettesítés és átrendezés után a potenciális örvényesség megmaradásának tétele a következő alakot ölti:

$$(U - c) \left[\frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial y^2} - \mu^2 \Psi_0 + e^\sigma \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\frac{f^2 e^{-\sigma}}{\Gamma} \frac{\partial \Psi_0}{\partial \sigma} \right) \right] + \frac{\partial \bar{q}}{\partial y} \Psi_0 = 0. \quad (\text{XII.3.12})$$

A hidrodinamikai instabilitás kialakulásának feltételét a barotróp instabilitás vizsgálatához hasonlóan keressük. Előtte viszont elhanyagolásokat és egyszerűsítéseket végzünk a XII.3.1. táblázatban összefoglaltak szerint.

XII.3.1. táblázat. A potenciális örvényesség megmaradásának egyenletén végrehajtott elhanyagolások és egyszerűsítések

a)	Boussinesq-közelítés
b)	a Γ statikai stabilitási paramétert állandónak tekintjük
c)	az áramlási kép meridionálisan homogén
d)	a tartomány alsó és felső határa áthatolhatatlan
e)	az áramlást az f -síkon vizsgáljuk
f)	az U alapáramlás egy k vertikális szélnyírási tényezővel arányosan (lineárisan) változik a magassággal (pontosabban a σ vertikális koordinátával)

Az egyszerűsítések és elhanyagolások után a kvázi-geosztrofikus potenciális örvényesség megmaradásának egyenlete (XII.3.12) a következő alakban írható fel:

$$(U - c) \left(\frac{f_0^2}{\Gamma} \frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial \sigma^2} - \mu^2 \Psi_0 \right) = 0. \quad (\text{XII.3.13})$$

Matematikai zsebkönyvek szerint az egyenlet általános megoldása a következő:

$$\Psi_0 = A \sinh \frac{\sigma}{\sqrt{\varepsilon}} + B \cosh \frac{\sigma}{\sqrt{\varepsilon}}, \quad (\text{XII.3.14})$$

ahol A és B integrálási konstansok ($A, B \in \mathbb{R}$), ε pedig a Froude-szám, azaz a mozgási energia és a helyzeti energia hányadosa, esetünkben a földforgás energiájának és a teljes potenciális energia részét képező belső energiának a hányadosa:

$$\varepsilon = \frac{f_0^2}{\mu^2 \Gamma}. \quad (\text{XII.3.15})$$

Helyettesítsük be az általános megoldást a XII.3.13 egyenletbe, és peremfeltételként alkalmazzuk az elhanyagolások és egyszerűsítések d) pontját! Ezzel megkapjuk az egyenlet partikuláris megoldását. A c fázissebesség egyenlete a következő alakban írható fel:

$$c^2 - kc + k^2 \left(\sqrt{\varepsilon} \coth \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} - \varepsilon \right) = 0. \quad (\text{XII.3.16})$$

A hidrodinamikai instabilitás kialakulásának – a barotróp instabilitás kialakulásához hasonlóan – ezúttal is az a feltétele, hogy a c fázissebesség komplex szám legyen, azaz a $c = c_r + ic_i$ alakú fázissebességben $c_i \neq 0$ (vö. XII.2.8. feladat). A feltétel akkor és csak akkor teljesül, ha a karakterisztikus egyenlet diszkriminánsa negatív. Ebből az következik, hogy a fázissebesség imaginárius része a következő alakban írható fel:

$$c_i = \pm \frac{k f_0}{\sqrt{\Gamma}} \sqrt{\left(\frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}} - \tanh \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}} \right) \left(\coth \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}} - \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}} \right)}. \quad (\text{XII.3.17})$$

Az egyenletből látszik, hogy c_i egyenesen arányos a k vertikális szélnyírási tényezővel. Mivel a megfigyelések szerint ott a legjelentősebb a vertikális szélnyírás, ahol erős a termikus szél, és a termikus szél erőssége a horizontális

hőmérsékleti gradienssel egyenesen arányos, ezért a legmarkánsabb baroklin instabilitással időjárási frontok közelében találkozunk.

Adrian Simmons és Brian Hoskins brit meteorológusok 1978-ban bebizonyították, hogy a baroklin instabilitás a néhány ezer kilométer horizontális kiterjedésű légköri mozgásrendszerek esetén a leghatékonyabb, azaz abban az esetben, ha a Froude-szám $\varepsilon = 0$. Ez a nagyságrendi kategória éppen a makro- β , azaz a szinoptikus skála jelenségeinek felel meg. Jogosan mondhatjuk tehát, hogy a baroklin instabilitás összefügg a ciklonok és az anticiklonok keletkezésének mechanizmusával.

FELADATOK

XII.3.1. Milyen kapcsolat van a korábban bevezetett (lásd a **X.** és a **XI. fejezetet** is) statikus stabilitási paraméter

$$-\frac{\bar{\alpha}}{\bar{\theta}} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \bar{p}} \quad (\text{XII.3.18})$$

és a most bevezetett

$$\Gamma = R \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial \sigma} + \frac{R}{c_p} \bar{T} \right). \quad (\text{XII.3.19})$$

statikai stabilitási paraméter között?

XII.3.2. Vezesse le a XII.3.6 egyenletet!

XII.3.3. Igazolja, hogy a feni légkörmodellben teljesül a baroklin instabilitás feltétele, ha a Froude-szám $\varepsilon = 1$!

XII.3.4. Mit jelent a francia Joseph Boussinesq által 1897-ben javasolt közelítés a baroklin instabilitás vizsgálatakor? Milyen következménye lesz ennek a XII.3.12 egyenlet egyszerűsítésekor?

XII.3.5. Mit jelent a XII.3.12 egyenlet szempontjából, ha a Γ stabilitási paramétert állandónak tekintjük?

XII.3.6. Mit jelent a XII.3.12 egyenlet szempontjából, ha az áramlási kép meridionálisan homogén?

XII.3.7. Mit jelent a XII.3.12 egyenlet szempontjából, ha a tartomány alsó és felső határa áthatolhatatlan?

XII.3.8. Mit jelent a XII.3.12 egyenlet szempontjából, ha az áramlást az f -síkon vizsgáljuk?

XII.3.9. A **XII.3.1. táblázatban** felsorolt elhanyagolások és egyszerűsítések felhasználásával vezesse le a XII.3.12 egyenletből a XII.3.13 egyenletet!

XIII. fejezet - Feladatok a numerikus prognosztika témaköréből

Szépszó Gabriella

XIII.1. Bevezetés

Az időjárás alakításában a legfontosabb szerepet a légkörben fellépő hidro- és termodinamikai folyamatok játsszák, így az időjárás-előrejelzési modellek is főként ezeket a folyamatokat és kölcsönhatásokat veszik figyelembe. Ha ismerjük a légkör állapotát adott időpillanatban, akkor mivel a rendszer determinisztikus, a fizikai törvények alapján felállított matematikai egyenletek segítségével elméletileg egyértelműen meghatározható az időbeli fejlődése. (A gyakorlati megvalósításnál korlátot jelent a légköri folyamatok kaotikus jellege, például a kiindulási feltételek bizonytalanságára mutatott rendkívüli érzékenység.) A Newton-féle mozgásegyenletek, a tömeg- és energia-megmaradási egyenlet az univerzális gáztörvénnyel kiegészítve alkotja azt a folytonos nem-lineáris parciális differenciálegyenlet-rendszert, melynek megoldására – analitikus megoldás hiányában – numerikus módszereket alkalmazunk (Horányi et al., 1998). A kezdeti- és határfeltételeket igénylő egyenletrendszert a numerikus megoldás során egy háromdimenziós térbeli rács rácspontjaiban értelmezzük és az előrejelzés folyamán diszkrét időbeli lépésekben oldjuk meg. Az első numerikus modellt az 1910-es években alkották meg, de a numerikus számítások aranykora a számítógépek, majd a szuperszámítógépek megjelenésével vette kezdetét.

XIII.2. A vizsgált parciális differenciálegyenletek

Az alábbiakban a *lineáris* másodrendű parciális differenciálegyenletek típusait és tulajdonságait tekintjük át. Ugyan az előrejelzési feladat alapját egy bonyolultabb, nem-lineáris parciális differenciálegyenlet-rendszer képezi, mégis lényeges ismerni az egyszerűsített lineáris egyenletek megoldására alkalmazott módszereket, mert hasonlókat használunk az összetett problémákra is (Kalnay, 2003). Tekintsük a másodrendű lineáris parciális

differenciálegyenletek alábbi általános alakját a $\varphi(x, y)$ kétváltozós függvényre:

$$A \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + D \frac{\partial \varphi}{\partial x} + E \frac{\partial \varphi}{\partial y} + F \cdot \varphi = G. \quad (\text{XIII.1.})$$

Az egyenletek osztályozását a másodrendű tagok együtthatói (azaz az A , a B és a C) alapján végezzük el a következőképpen (Courant és Hilbert, 1962):

1. Ha $B^2 - AC > 0$, akkor az egyenlet **hiperbolikus**, amire egyszerű példa a hullámegyenlet: $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$, ahol c a hullám terjedési sebessége.
2. Ha $B^2 - AC = 0$, akkor az egyenlet **parabolikus**, amire egyszerű példa a diffúziós egyenlet: $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \sigma \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$, ahol σ a diffúziós együttható.
3. Ha $B^2 - AC < 0$, akkor az egyenlet **elliptikus**, amire egyszerű példa a Poisson-egyenlet: $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = f(x, y)$ (konkrét meteorológiai példa az áramfüggvény és az örvényesség kapcsolata).

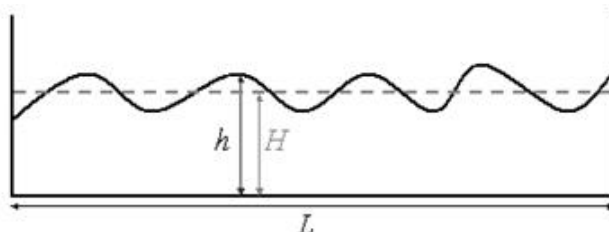
A további példáinkban gyakran előkerülő $\frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial t} + c \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial x} = 0$ alakban felírt egydimenziós lineáris advekciós egyenlet ugyan elsőrendű parciális differenciálegyenlet, de megoldásai kielégítik a másodrendű hiperbolikus hullámegyenletet, ezért a hiperbolikus egyenletek között tartjuk számon. Az elliptikus feladatok határérték-

problémák, melyek megoldásához peremfeltételek megadása szükséges minden határpontban. A parabolikus és hiperbolikus feladatok ezzel szemben kezdetiérték-problémák, melyek a kiindulási feltétel megadását igénylik. (Illetve amennyiben egy korlátos térrészre oldjuk meg őket, úgy vegyes feladatként mind kezdeti, mind peremfeltételek megadását igénylik.) A példatár ezen fejezetében olyan problémákkal foglalkozunk, melyek az állapothatározók kezdeti értékének megadását igénylik.

Tekintsük az ún. *sekély*, forgó folyadék egyenleteit, melynek karakterisztikus horizontális mérete jóval nagyobb a függőleges kiterjedésénél, vertikális irányban homogén, összenyomhatatlan és súrlódásmentes. Ezeket az egyenleteket **sekélyvíz-egyenleteknek** nevezzük:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -g \frac{\partial h}{\partial x} + f \cdot v \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= -g \frac{\partial h}{\partial y} - f \cdot u \\ \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} &= -h \cdot D, \end{aligned} \quad (\text{XIII.2.})$$

ahol $u(x, y, t)$ és $v(x, y, t)$ a horizontális áramlási sebesség komponensei, $h(x, y, t)$ a hullám magassága, g a gravitációs gyorsulás, f a Coriolis-paraméter és D a horizontális divergencia (l. a XIII.1. ábrát és az V.2. fejezetet is). A sekélyvíz egyenletek leírják a Rossby-hullámokat és a külső gravitációs hullámokat. A Rossby-hullámok a Coriolis-erő földrajzi szélességgel való változása következtében horizontális irányban fellépő hullámmozgások, melyek a teljes Földet körülölelik. Alapvető szerepet játszanak a nagytérségű légköri folyamatok alakításában, terjedési sebességük általában néhány száz 10 ms^{-1} , a hullámok hossza több ezer km. A külső gravitációs hullámok olyan vertikális hullámmozgások, melyek két közeg határán (pl. két eltérő sűrűségű légtömeg választófelületén) lépnek fel a gravitációs erő hatására. A Rossby-hullámoknál kisebb kiterjedésűek, tipikus méretskálájuk 500–2000 km, terjedési sebességük azonban megközelítheti a hanghullámok sebességét.



XIII.1. ábra. A sekély folyadék sematikus rajza: horizontális mérete (L) jóval nagyobb, mint átlagos vertikális kiterjedése (H ; a légkörre $\sim 10 \text{ km}$). A folyadék aktuális magassága h .

Mivel a (XIII.2.) egyenletrendszer leírja a legfontosabb légköri folyamatokat, gyakran használják a különböző numerikus sémák tesztelésére. Ezért példánkban mi is a sekélyvíz-egyenletek egyszerűsített, lineáris változatain vezetjük be és vizsgáljuk a numerikus módszereket, mégpedig:

- Az egydimenziós lineáris advekciós egyenleten:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0; \quad (\text{XIII.3.})$$

- Az egydimenziós lineáris gravitációs hullám-egyenleten:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + g \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial h}{\partial t} + H \frac{\partial u}{\partial x} = 0; \end{cases} \quad (\text{XIII.4.})$$

- Az advekciót és gravitációs hullám-tagokat egyaránt tartalmazó lineáris feladaton:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial h}{\partial t} + c \frac{\partial h}{\partial x} + H \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad (\text{XIII.5.})$$

Az előrejelzési feladatnak analitikus megoldása nem ismert, ezért numerikus módszerek segítségével oldjuk meg azt. A folytonos egyenletek diszkrétizációjakor egy háromdimenziós rács rácspontjaiban tekintjük a meteorológiai állapothatározókat, s az előrejelzést (a modellintegrálást) az időtáv időlépcsőkre osztásával, lépésenként készítjük el. A diszkrétizációval kapcsolatban az egyik legfontosabb kérdés, hogy az egyenletekben szereplő térbeli és időbeli differenciálást milyen numerikus módszerekkel végezzük el. A térbeli differenciáloperátorok közelítésére két módszeresaladot alkalmazhatunk: (i) a Galjorkin-módszerek esetében analitikusan integrálható függvények szerinti sorfejtéssel írjuk fel a meteorológiai változókat, míg (ii) a véges különbséges módszereknél a deriváltakat az állapothatározók rácspontbeli értékeinek segítségével állítjuk elő. A példatár jelen fejezetében a különböző véges differencia sémákon keresztül ismertetjük a numerikus módszerek legfontosabb jellemzőit.

XIII.3. Véges differencia sémák az időbeli és a térbeli deriváltak közelítésére

Az alábbiakban bemutatunk néhány, a térbeli és időbeli deriváltak közelítésére használható konkrét véges differencia sémát (l. a **II.6. fejezetet** is). Az egyenletekben szereplő térbeli differenciáloperátoroknak az adott j rácspontra vonatkozó diszkrétizációjára a legelterjedtebben a következő módszereket alkalmazzák:

• **Bal oldali séma:**

$$u_{x,j} = \frac{u_j - u_{j-1}}{\Delta x} ; \quad (\text{XIII.6.})$$

• **Jobb oldali séma:**

$$u_{x,j} = \frac{u_{j+1} - u_j}{\Delta x} ; \quad (\text{XIII.7.})$$

• **Középponti vagy centrált séma:**

$$u_{x,i}^o = \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2\Delta x} . \quad (\text{XIII.8.})$$

A sémák arról kapták a nevüket, hogy a j -edik rácspontbeli derivált kiszámításához melyik rácspontokat használják fel. A középponti séma magasabb, másodrendű pontossággal közelíti a folytonos differenciáloperátort, mint a bal és jobb oldali sémák. (A pontosságról bővebben a konzisztencia kapcsán ejtünk szót.)

Az időbeli deriválás esetében tekintsük a következő feladatot:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} + f(u, t) = 0 \\ u(t=0) = u_0 \end{cases} \quad (\text{XIII.9.})$$

A fenti **Cauchy-probléma** esetében a feladat tulajdonképpen $u(t)$ előrejelzése a kiindulási állapot ismeretében. Az egyenletben szereplő differenciáloperátor közelítésére explicit vagy implicit sémákat használhatunk. **Az explicit sémák** az adott időlépcsőbeli u meghatározásához csak **ismert időlépcsőbeli értékeket használnak fel**, míg **az implicit sémák a még nem ismert időlépcsőkből is felhasználnak értékeket**. Egy feladat implicit sémával történő megoldása ezért bonyolultabb (operátor invertálás vagy iteráció alkalmazását igényli), alkalmazásuk esetenként mégis előnyös lehet a számítási hatékonyság szempontjából (erről részletesen később).

Míg a térbeli deriváltak esetében a véges differencia sémákat a fent bemutatott differenciálhányados-alakban helyettesítjük az egyenletekbe, addig az időbeli fejlődés leírásánál a következő időlépcsőbeli u érték meghatározása

a cél, ezért a diszkrét egyenleteket ennek megfelelően rendezzük át [l. a (XIII.10.)-et, ahol $\frac{\Delta u}{\Delta t}$ és f_{Δ} a diszkrét térben értelmezett időbeli deriváltat és f függvényt jelöli]. Néhány konkrét véges differencia sémát mutatunk be az alábbiakban az időbeli derivált diszkrétizációjára (ahol az n index az n -edik időlépést jelöli):

A legegyszerűbb az **explicit Euler- vagy Euler-forward séma**, ahol a forward elnevezés arra utal, hogy a séma a következő időlépcsőbeli értéket az ismert értékekből, tehát időben előre határozza meg:

$$\frac{\Delta u}{\Delta t} + f_{\Delta} = \frac{u_{n+1} - u_n}{\Delta t} + f(u_n, t_n) \rightarrow u_{n+1} = u_n + f(u_n, t_n) \cdot \Delta t ; \quad (\text{XIII.10.})$$

• **Implicit Euler- vagy Euler-backward séma:**

$$u_{n+1} = u_n + f(u_{n+1}, t_{n+1}) \cdot \Delta t ; \quad (\text{XIII.11.})$$

• **Leapfrog séma:**

$$u_{n+1} = u_{n-1} + f(u_n, t_n) \cdot 2\Delta t ; \quad (\text{XIII.12.})$$

• **Másodrendű implicit séma:**

$$u_{n+1} = u_n - \left[f(u_n, t_n) + f(u_{n+1}, t_{n+1}) \right] \cdot \frac{\Delta t}{2} . \quad (\text{XIII.13.})$$

XIII.4. A numerikus megoldással szemben támasztott matematikai követelmények

A numerikus megoldással kapcsolatban elvárjuk, hogy a diszkrétizált egyenletek elegendően nagy pontossággal közelítsék a folytonos feladatot, a megoldása konvergáljon a folytonos megoldáshoz, továbbá a számítógépes megvalósítás hatékony legyen. Az alábbiakban sorra vesszük, hogyan definiáljuk ezeket a tulajdonságokat.

XIII.4.1. Konzisztencia

Tekintsük most a következő, általános alakban felírt folytonos feladatot:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = Lu, & t \in (0, T] \\ u(t=0) = u_0 . \end{cases} \quad (\text{XIII.14.})$$

Definiáljunk ehhez egy rácsot, az egyszerűség kedvéért ekvidisztáns Δx rácsfelbontással, továbbá osszuk fel az időtávot Δt hosszúságú időlépésekre! A folytonos feladathoz konstruáljunk egy olyan feladatot, melyet ezen a diszkrét téren értelmezünk (a továbbiakban ezt hívjuk diszkrét vagy véges differencia feladatnak). Azt szeretnénk, hogy a diszkrét feladat jól közelítse a folytonos feladatot, s ezt a „közelséget” a konzisztencia adja meg: a véges differencia feladat konzisztens a folytonos feladattal, ha $\Delta x \rightarrow 0, \Delta t \rightarrow 0$ mellett a két feladat közötti eltérés, azaz a különbségképzés után maradó **csontkítási hiba tart a 0-hoz**. A konzisztencia rendjét a csontkítási hiba vezető tagjának fokszáma adja meg, s ez minél magasabb, annál pontosabban közelíti az adott véges differencia séma a folytonos problémát.

XIII.4.2. Konvergencia

A numerikus megoldással kapcsolatban nemcsak azt várjuk el, hogy a diszkrétizált egyenletek elegendően nagy pontossággal közelítsék a folytonos feladatot, de azt is, hogy (U) megoldásuk konvergáljon $a(z)$ (u) folytonos megoldáshoz. Konvergencia esetén $\Delta x \rightarrow 0, \Delta t \rightarrow 0$ mellett **a diszkrét feladat megoldása tart a folytonos feladat megoldásához** bármely j rácspontban és $t > 0$ időpontban, azaz

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0, \Delta t \rightarrow 0, \\ j\Delta x \rightarrow x, n\Delta t \rightarrow t}} U(j\Delta x, n\Delta t) = u(x, t) . \quad (\text{XIII.15.})$$

A konvergenciának tehát az előrejelzési időtáv minden időpontjában fenn kell állnia (azaz például a határás előrejelzések esetében csakúgy, mint a kétnapos prognózisoknál). A konvergencia matematikai feltételének teljesülését azonban nehéz belátni, ezért helyette legtöbbször a stabilitás teljesülését vizsgáljuk.

XIII.4.3. Numerikus stabilitás

Egy feladat stabil, ha a megoldása „folytonosan függ” a kiindulási feltételektől: azaz kis eltérés (hiba) a kezdeti feltételben nem vezet lényegesen eltérő megoldásra. Világos, hogy a stabilitás egymástól függetlenül értelmezhető a folytonos és a diszkrét feladatban – előbbinél fizikai stabilitásról, utóbbinál számítási (numerikus) stabilitásról beszélünk. A meteorológiai problémák esetében, ahol az állapothatározók korlátos értékű függvények, a stabilitást a hiba korlátosságán keresztül vizsgáljuk. Adott pontbeli és időlépésbeli $U_{j,n}$ megoldás stabilitásához szükséges, hogy rögzített Δx rácsebontás mellett és $\Delta t \rightarrow 0$ esetén az

$$\varepsilon_n = U(j\Delta x, n\Delta t) - u(x, t) , \quad n\Delta t = t, j\Delta x = x \quad (\text{XIII.16.})$$

alakban definiált **hiba ne növekedjék az idővel**, azaz $\varepsilon_n \leq \varepsilon_{n+1}$. Az alkalmazott véges különbséges módszer pedig akkor stabil, ha bármely kezdeti feltételhez tartozó megoldás kielégíti a fenti feltételt (Mesinger és Arakawa, 1976). Lényeges, hogy a fenti követelmény csak **a stabilitás szükséges feltétele, elégséges feltételt** ugyanis nehéz **megadni és csak néhány speciális esetben lehetséges**. (Mindazonáltal a legtöbb esetben a szükséges feltétel teljesülése is elegendő a stabilitáshoz; Kalnay, 2003.)

A stabilitás és a konvergencia között a **Lax-Richtmyer tétel** (1956) teremt kapcsolatot, amely kimondja, hogy **egy konzisztens véges differencia sémával megadott lineáris kezdetiérték-feladat akkor és csak akkor konvergens, ha stabil**. Azaz a konzisztencia és a konvergencia együttes fennállása esetén a séma stabil, illetve a konzisztens és stabil séma egyben konvergens is. A tétel gyakorlati szempontból bír nagy jelentőséggel, mert külön-külön a konzisztencia és a stabilitás fenti feltételének vizsgálata egyszerűbb, mint közvetlenül a konvergencia teljesülését ellenőrizni.

Feladatok

1. feladat:

A $\varphi(x, t)$ mennyiségre vonatkozó

$$\frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial t} + c \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial x} = 0 \quad (\text{XIII.17.})$$

egydimenziós lineáris advekción egyenlet időbeli deriváltjának közelítésére a forward, térbeli deriváltjának közelítésére a centrált sémát alkalmazzuk az alábbi módon:

$$\frac{\varphi_{j,n+1} - \varphi_{j,n}}{\Delta t} + c \frac{\varphi_{j+1,n} - \varphi_{j-1,n}}{2\Delta x} = 0 , \quad (\text{XIII.18.})$$

ahol a j index a j -edik rácspontot, az n index az n -edik időlépcsőt jelöli, Δt és Δx pedig az időlépcső hossza és a rácsávolság. Taylor-sorfejtés segítségével határozzuk meg a közelítés konzisztenciájának rendjét!

2. feladat:

Tekintsük a következő feladatot, ahol u_0 az $u(t)$ értéke a kiindulási időpontban:

$$\begin{cases} \frac{du(t)}{dt} + f(u, t) = 0 \\ u(t=0) = u_0 \end{cases} \quad (\text{XIII.19.})$$

Az időbeli derivált közelítésére alkalmazzuk az explicit Euler-módszert:

$$u_{n+1} = u_n - f(u_n, t_n) \cdot \Delta t, \quad (\text{XIII.20.})$$

ahol az n index az adott időlépcsőt jelöli és Δt a numerikus modellintegrálás időlépcsője! Végezzük el a séma stabilitási analizisét!

3. feladat:

A (XIII.19.) feladatban alkalmazzuk az időbeli derivált közelítésére az alábbi implicit Euler-módszert:

$$u_{n+1} = u_n - f(u_{n+1}, t_{n+1}) \cdot \Delta t, \quad (\text{XIII.21.})$$

ahol az n index az adott időlépcsőt jelöli és Δt a numerikus modellintegrálás időlépcsője! Végezzük el a séma stabilitási analizisét!

4. feladat:

Tekintsük az alábbi

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = -\kappa \cdot u \\ u(t=0) = u_0 \end{cases} \quad (\text{XIII.22.})$$

súrlódási feladatot, ahol $\kappa > 0$ súrlódási együttható! Alkalmazzuk az időderivált közelítésére az explicit Euler-módszert és végezzük el a séma stabilitásvizsgálatát! Ábrázoljuk az eredményeket különböző időlépcsőkre! Ugyanezt tegyük meg az (implicit) Euler-backward módszerrel is, ami a (XIII.19.) feladatra általánosan a következőképpen írható fel (az n index az adott időlépcsőt jelöli és Δt a numerikus modellintegrálás időlépcsője):

$$u_{n+1} = u_n - f(u_{n+1}, t_{n+1}) \cdot \Delta t. \quad (\text{XIII.23.})$$

5. feladat:

Tekintsük az alábbi

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = i \cdot \omega \cdot u \\ u(t=0) = u_0 \end{cases} \quad (\text{XIII.24.})$$

oszcillációs feladatot, ahol ω a frekvencia és valós szám, $i = \sqrt{-1}$! Alkalmazzuk az időderivált közelítésére az explicit Euler-módszert és végezzük el a séma stabilitásvizsgálatát! Ugyanezt tegyük meg az (implicit) Euler-backward módszerrel is!

6. feladat:

A (XIII.19.) egyenletben alkalmazzuk az időderivált közelítésére az alábbi explicit leapfrog-sémát:

$$u_{n+1} = u_{n-1} - f(u_n, t_n) \cdot 2\Delta t, \quad (\text{XIII.25.})$$

ahol az n index az adott időlépést jelöli és Δt a numerikus modellintegrálás időlépcsője! Végezzük el a séma stabilitási analízisét és értelmezzük az eredményt!

Megoldások

1. feladat:

A konzisztencia rendjét a csonkítási hiba adja meg, amihez a diszkrét (XIII.18.) és a folytonos (XIII.17.) feladat különbségét kell venni. Ehhez először is alkalmazzunk Taylor-sorfejtést (XIII.18.) tagjaira a (j, n) pont körül:

$$\begin{aligned} \varphi_{j,n+1} &= \varphi(j \cdot \Delta x, n \cdot \Delta t + \Delta t) = \varphi(j \cdot \Delta x, n \cdot \Delta t) + \Delta t \cdot \left. \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_{j,n} + o(\Delta t^2), \\ \varphi_{j+1,n} &= \varphi(j \cdot \Delta x + \Delta x, n \cdot \Delta t) = \varphi(j \cdot \Delta x, n \cdot \Delta t) + \Delta x \cdot \left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_{j,n} + \frac{\Delta x^2}{2} \cdot \left. \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right|_{j,n} + o(\Delta x^3), \\ \varphi_{j-1,n} &= \varphi(j \cdot \Delta x - \Delta x, n \cdot \Delta t) = \varphi(j \cdot \Delta x, n \cdot \Delta t) - \Delta x \cdot \left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_{j,n} + \frac{\Delta x^2}{2} \cdot \left. \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right|_{j,n} - o(\Delta x^3). \end{aligned} \quad (\text{XIII.26.})$$

Mindezeket behelyettesítve (XIII.18.)-ba:

$$\begin{aligned} \frac{\varphi_{j,n+1} - \varphi_{j,n}}{\Delta t} &= \frac{1}{\Delta t} \left[\Delta t \cdot \left. \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_{j,n} + o(\Delta t^2) \right] = \left. \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_{j,n} + o(\Delta t), \\ \frac{\varphi_{j+1,n} - \varphi_{j-1,n}}{2\Delta x} &= \frac{1}{2\Delta x} \left[2\Delta x \cdot \left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_{j,n} + 2o(\Delta x^3) \right] = \left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_{j,n} + o(\Delta x^2). \end{aligned} \quad (\text{XIII.27.})$$

Kivonva (XIII.18.)-ból (XIII.17.)-et (XIII.27.) felhasználásával, a következőt kapjuk a csonkítási hibára:

$$Tr = o(\Delta t) + o(\Delta x^2). \quad (\text{XIII.28.})$$

Ez azt jelenti, hogy a **forward időbeli séma** az időderivált **elsőrendben pontos** közelítése, míg a térbeli derivált közelítésére használt **centrál séma** konzisztenciájának rendje 2, azaz **másodrendű** pontosságot biztosít.

2. feladat:

A stabilitás vizsgálatához írjuk fel (XIII.20.) hibával terhelt alakját:

$$u_{n+1} + \varepsilon_{n+1} = u_n + \varepsilon_n - f(u_n + \varepsilon_n, t_n) \cdot \Delta t. \quad (\text{XIII.29.})$$

A (XIII.29.)-ben szereplő $f(u_n + \varepsilon_n, t_n)$ -t fejtsük sorba $f(u_n, t_n)$ körül:

$$f(u_n + \varepsilon_n, t_n) = f(u_n, t_n) + \varepsilon_n \cdot \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_n + o[(\varepsilon_n)^2]. \quad (\text{XIII.30.})$$

A (XIII.30.) felhasználásával vonjuk ki (XIII.29.)-ből (XIII.20.)-at:

$$\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n - \varepsilon_n \cdot \frac{\partial f}{\partial u} \Big|_n \cdot \Delta t - o\left[(\varepsilon_n)^2\right] \cdot \Delta t. \quad (\text{XIII.31.})$$

Az utolsó tag elhanyagolásával:

$$\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n \cdot \left(1 - \Delta t \frac{\partial f}{\partial u} \Big|_n\right). \quad (\text{XIII.32.})$$

A stabilitáshoz szükséges, hogy a hiba korlátos maradjon, és ne növekedjen az idővel, azaz:

$$\varepsilon_{n+1} \leq \varepsilon_n \rightarrow \varepsilon_{n+1} = g \cdot \varepsilon_n, \text{ ahol } |g| \leq 1. \quad (\text{XIII.33.})$$

Jelen esetben a g ún. *áttérési együtthatóra* vonatkozó feltétel így alakul:

$$\left|1 - \Delta t \frac{\partial f}{\partial u} \Big|_n\right| \leq 1. \quad (\text{XIII.34.})$$

A $\frac{\partial f}{\partial u}$ -t tekintve három eset lehetséges:

1. $\frac{\partial f}{\partial u} > 0$, akkor a stabilitás feltétele, hogy $-1 \leq 1 - \Delta t \frac{\partial f}{\partial u} \rightarrow \Delta t \leq \frac{2}{\frac{\partial f}{\partial u}}$.
2. $\frac{\partial f}{\partial u} \leq 0$, akkor a séma feltétel nélkül instabil, mert $g > 1$.
3. $\frac{\partial f}{\partial u}$ komplex, pl. tisztán képzetes (pl. az oszcillációs feladatnál; l. az 5. feladatot), akkor a séma instabil, ugyanis $|g| = |1 - i \cdot \beta \cdot \Delta t| \rightarrow |g| = \sqrt{1 + \beta^2 \Delta t^2} > 1$.

3. feladat:

A stabilitás vizsgálatához írjuk fel (XIII.21.) hibával terhelt alakját:

$$u_{n+1} + \varepsilon_{n+1} = u_n + \varepsilon_n - f(u_{n+1} + \varepsilon_{n+1}, t_{n+1}) \cdot \Delta t. \quad (\text{XIII.35.})$$

A (XIII.35.)-ben szereplő $f(u_{n+1} + \varepsilon_{n+1}, t_{n+1})$ -t fejtsük sorba $f(u_{n+1}, t_{n+1})$ körül:

$$f(u_{n+1} + \varepsilon_{n+1}, t_{n+1}) = f(u_{n+1}, t_{n+1}) + \varepsilon_{n+1} \cdot \frac{\partial f}{\partial u} \Big|_{n+1} + o\left[(\varepsilon_{n+1})^2\right]. \quad (\text{XIII.36.})$$

A (XIII.36.) felhasználásával vonjuk ki (XIII.35.)-ből (XIII.21.)-et:

$$\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n - \varepsilon_{n+1} \cdot \frac{\partial f}{\partial u} \Big|_{n+1} \cdot \Delta t - o\left[(\varepsilon_{n+1})^2\right] \cdot \Delta t. \quad (\text{XIII.37.})$$

Az utolsó tag elhanyagolásával:

$$\varepsilon_{n+1} \cdot \left(1 + \Delta t \frac{\partial f}{\partial u} \Big|_{n+1} \right) = \varepsilon_n . \quad (\text{XIII.38.})$$

A stabilitás szükséges feltétele így alakul:

$$\frac{1}{|g|} = \left| 1 + \Delta t \frac{\partial f}{\partial u} \Big|_{n+1} \right| \geq 1 . \quad (\text{XIII.39.})$$

A $\frac{\partial f}{\partial u}$ -t tekintve három eset lehetséges:

- Ha $\frac{\partial f}{\partial u} \geq 0$, akkor a séma feltétel nélkül stabil, mert $1 + \Delta t \frac{\partial f}{\partial u} \geq 1$.
- Ha $\frac{\partial f}{\partial u} < 0$, akkor a stabilitás feltétele, hogy $1 + \Delta t \frac{\partial f}{\partial u} > -1 \rightarrow \Delta t < \frac{2}{-\frac{\partial f}{\partial u}}$.
- Ha $\frac{\partial f}{\partial u}$ komplex, pl. tisztán képzetes (pl. az oszcillációs feladatnál; l. az 5. feladatot), akkor a séma feltétel nélkül stabil, ugyanis $|g| = \frac{1}{|1 + i \cdot \beta \cdot \Delta t|} \rightarrow |g| < 1$.

4. feladat:

A sűrűlódási feladat analitikus megoldása $u(t) = u_0 \cdot e^{-\kappa \cdot t}$, azaz a feladat exponenciálisan csillapodó mozgást ír le. Ha az explicit Euler-módszert alkalmazzuk az időbeli derivált közelítésére, akkor az u megoldást tetszőleges időlépcsőben a következőképpen adhatjuk meg:

$$\begin{aligned} f &= \kappa \cdot u \rightarrow \\ u_{n+1} &= u_n - f(u_n, t_n) \cdot \Delta t = \\ &= u_n - \kappa \cdot u_n \cdot \Delta t = (1 - \kappa \cdot \Delta t) \cdot u_n = (1 - \kappa \cdot \Delta t)^n \cdot u_0 , \end{aligned} \quad (\text{XIII.40.})$$

ahol az egyenlőség végén szereplő n értelemszerűen nem index, hanem kitevő. A 2. feladat eredményét felhasználva:

mivel jelen esetben $\frac{\partial f}{\partial u} = \kappa > 0$, ezért a stabilitáshoz $\Delta t \leq 2 \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right)^{-1} = \Delta t \leq \frac{2}{\kappa}$ szükséges. Ugyanakkor, ha nem szeretnénk a feladat fizikai értelmét sem elveszíteni (azaz a sebesség a sűrűlódás hatására az idővel fokozatosan csökkenjen 0-ra, ahogy a valóságban), akkor a szigorúbb $\Delta t \leq \frac{1}{\kappa}$ feltételnek kell teljesülnie Δt -re azért, hogy a megoldás ne váltson előjelet és oszcilláljon időlépésenként.

Ha az Euler-backward módszert alkalmazzuk, akkor az u megoldást tetszőleges időlépcsőben a következőképpen adhatjuk meg:

$$u_{n+1} = u_n - \kappa \cdot u_{n+1} \cdot \Delta t \rightarrow u_{n+1} = \frac{1}{(1 + \kappa \cdot \Delta t)} \cdot u_n = \frac{1}{(1 + \kappa \cdot \Delta t)^n} \cdot u_0 , \quad (\text{XIII.41.})$$

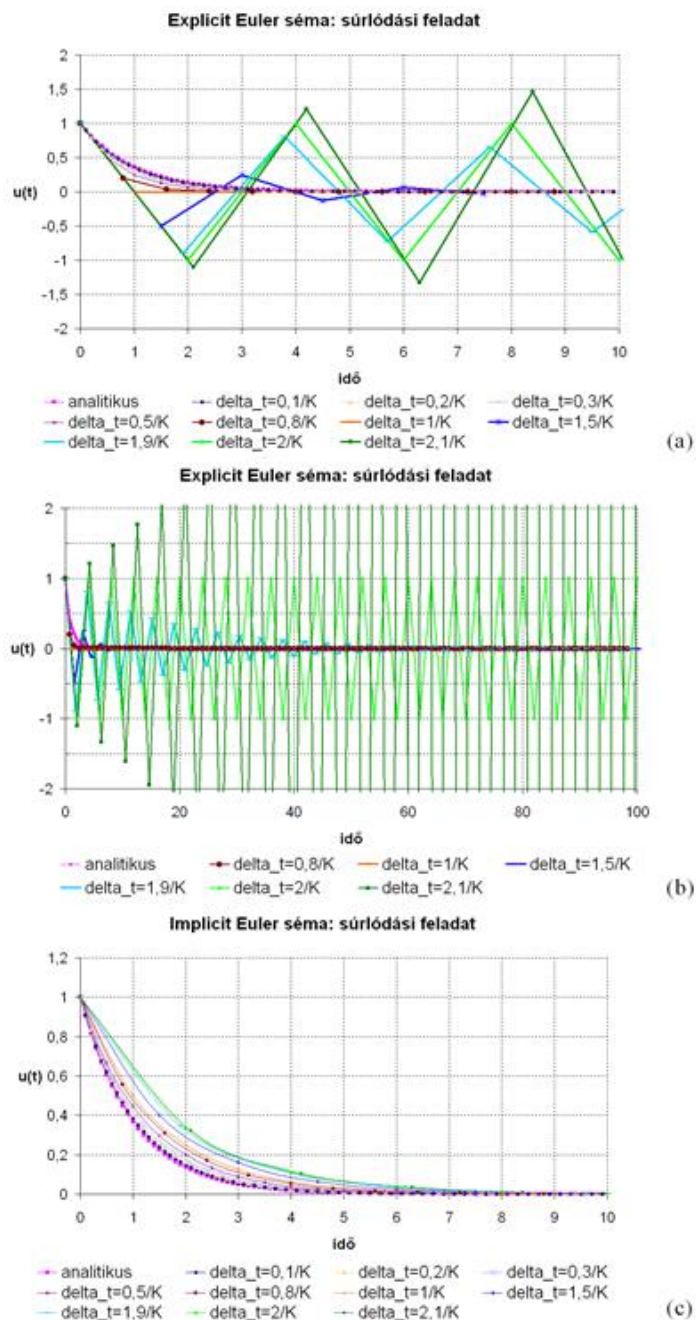
ahol az egyenlőség végén szereplő n itt is kitevő. A 3. feladat eredményét felhasználva: mivel jelen esetben $\frac{\partial f}{\partial u} = \kappa > 0$, ezért a módszer feltétel nélkül stabil.

A sűrűdési feladatra alkalmazott explicit és implicit Euler-módszerek különböző időlépcsők választásával számított

eredményét mutatja be a *XIII.2. ábra*. Látható, hogy ha az explicit Euler-módszer esetében a megengedett $\frac{2}{\kappa}$ -nál nagyobb időlépcsőt alkalmazunk a numerikus modellintegrálás során, akkor a diszkrét megoldás a folytonos feladat megoldásától teljesen eltérően viselkedik, és a két megoldás közötti eltérés az idővel tart a végtelenhez [(a) és (b)

panel]. Azt is láthatjuk, hogy ha $\frac{1}{\kappa} < \Delta t < \frac{2}{\kappa}$ hosszúságú időlépcsőt választunk, akkor a diszkrét megoldás oszcilláló viselkedést mutat, ami pedig nem jellemzi a fizikai megoldást. Ekkor a diszkrétizált feladat még stabil marad (hiszen az eltérés a folytonos és a diszkrét megoldás között korlátos), de a diszkrét feladat megoldása elveszíti fizikai értelmét.

Az ábra (c) panelje azt illusztrálja, hogy ha ugyanerre a feladatra az implicit Euler-sémát alkalmazzuk, akkor tetszőlegesen hosszú időlépcsőt választhatunk, a feladat stabil, sőt, fizikailag értelmes marad.



XIII.2. ábra. A súrlódási feladatra alkalmazott explicit (a és b) és implicit (c) Euler-módszerek vizsgálata különböző időlépcső (az ábrán Δt) értékek választásával. A rózsaszín görbék az analitikus megoldást mutatják, a többi görbe a különböző időlépcsővel számított numerikus megoldást 10 (a és c), illetve 100 (b) időegységig.

5. feladat:

Az oszcillációs feladat analitikus megoldása $u(t) = u_0 \cdot e^{i\omega t}$, azaz a feladat oszcilláló mozgást ír le. Ha az explicit Euler-módszert alkalmazzuk az időbeli derivált közelítésére, akkor az u megoldást tetszőleges időlépcsőben a következőképpen adhatjuk meg:

$$f = -i \cdot \omega \cdot u \rightarrow u_{n+1} = u_n + i \cdot \omega \cdot u_n \cdot \Delta t = (1 + i \cdot \omega \cdot \Delta t) \cdot u_n = (1 + i \cdot \omega \cdot \Delta t)^n \cdot u_0, \quad (\text{XIII.42.})$$

ahol az egyenlőség végén szereplő n értelemszerűen nem index, hanem kitevő. A 2. feladat eredményét felhasználva:

mivel jelen esetben $\frac{\partial f}{\partial u}$ tisztán képzetes, ezért a séma instabil.

Ha az Euler-backward módszert alkalmazzuk, akkor az u megoldást tetszőleges időlépcsőben a következőképpen adhatjuk meg:

$$u_{n+1} = u_n + i \cdot \omega \cdot u_{n+1} \cdot \Delta t \rightarrow u_{n+1} = \frac{1}{(1 - i \cdot \omega \cdot \Delta t)} \cdot u_n = \frac{1}{(1 - i \cdot \omega \cdot \Delta t)^n} \cdot u_0, \quad (\text{XIII.43.})$$

ahol az egyenlőség végén szereplő n kitevő (és nem index). A 3. feladat eredményét felhasználva: mivel jelen

esetben $\frac{\partial f}{\partial u}$ tisztán képzetes, ezért a módszer feltétel nélkül stabil.

Összefoglalva: az oszcillációs egyenletben a derivált közelítésére az explicit Euler-módszert alkalmazva nem tudunk olyan időlépcsőt választani, mellyel a modellintegrálás stabilitása biztosítható – tehát oszcillációs feladatokra az explicit Euler-módszer alkalmazása nem javasolt. Ugyanerre a feladatra az implicit Euler-sémát alkalmazva tetszőleges időlépcsőt választhatunk, a feladat stabil marad.

6. feladat:

A stabilitás vizsgálatához írjuk fel (XIII.25.) hibával terhelt alakját:

$$u_{n+1} + \varepsilon_{n+1} = u_{n+1} + \varepsilon_{n+1} - f(u_n + \varepsilon_n, t_n) \cdot 2\Delta t. \quad (\text{XIII.44.})$$

Az ebben szereplő $f(u_n + \varepsilon_n, t_n)$ -t fejtsük sorba $f(u_n, t_n)$ körül:

$$f(u_n + \varepsilon_n, t_n) = f(u_n, t_n) + \varepsilon_n \cdot \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_n + o[(\varepsilon_n)^2]. \quad (\text{XIII.45.})$$

Utóbbi felhasználásával vonjuk ki (XIII.44.)-ből (XIII.25.)-öt:

$$\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n \cdot \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_n \cdot 2\Delta t - o[(\varepsilon_n)^2] \cdot 2\Delta t. \quad (\text{XIII.46.})$$

Az utolsó tag elhanyagolásával és felhasználva, hogy $\varepsilon_n = g \cdot \varepsilon_{n-1}$:

$$\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n \cdot \left(\frac{1}{g} - 2\Delta t \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_n \right). \quad (\text{XIII.47.})$$

Ebből:

$$g = \frac{1}{g} - 2\Delta t \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_n \rightarrow K := \Delta t \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_n \rightarrow g^2 + 2K \cdot g - 1 = 0. \quad (\text{XIII.48.})$$

Abból eredően, hogy a leapfrog-séma három időszintet használ, g -re másodfokú egyenlet adódott, melynek két megoldása van. A másodfokú egyenlet megoldó-képlete alapján:

$$g_{1,2} = -K \pm \sqrt{K^2 + 1}. \quad (\text{XIII.49.})$$

Az egyik g a folytonos feladat fizikailag értelmes megoldásához tartozik (ún. *fizikai módus*). A másik g viszont abból ered, hogy a leapfrog sémánál két kezdeti feltételt kell megadni a séma indításakor, s ebből adódóan keletkezik az ún. *számítási módus*. Utóbbinak nincs fizikai értelme, csupán a több-időszintes diszkretizációs módszer alkalmazása miatt jelenik meg a numerikus megoldásban. **A teljes numerikus megoldás a fizikai és a számítási módus (lineáris) kombinációjaként áll elő**, ezért nagy jelentősége van annak, hogy a számítási módus hogyan fejlődik az idővel.

- Ha K valós, akkor az egyik gyök (g) abszolút értéke mindig nagyobb egynél, azaz a megoldás instabil lesz.
- Ha K komplex, pl. tisztán képzetes: $K = i\beta$ és $|K| > 1$, akkor az egyik gyök (g) mindig nagyobb egynél, azaz a megoldás instabil lesz.
- Ha K komplex, pl. tisztán képzetes: $K = i\beta$ és $|K| < 1$, akkor $g = 1$ és a sémára megadható stabilitási kritérium:

$$\Delta t \leq \frac{1}{\left| \frac{\partial f}{\partial u} \right|}$$

XIII.5. A stabilitás vizsgálata

XIII.5.1. CFL-kritérium

A stabilitás a véges differencia sémákkal kapcsolatban elvárt tulajdonságok közül a legfontosabb, mert konzisztens séma esetén teljesülése a numerikus megoldás pontos megoldáshoz való konvergenciáját is biztosítja. A stabilitást az előzőekben olyan feladatokra vizsgáltuk meg, amelyekben csak időbeli differenciálás szerepelt. Ezekben az esetekben az adott véges differencia módszerhez választható integrálási időlépcső hosszát alapvetően a folytonos feladat jellege határozza meg. A következőekben olyan – a legfontosabb légkördinamikai folyamatokat egyszerűsített formában leíró – problémákat vizsgálunk, melyekben az időbeli deriváltak mellett térbeli differenciálhányadosok is szerepelnek. Ezekben a feladatokban – és az időjárás-előrejelző modellekben – a térbeli diszkretizáció adott rácsfelbontáson történik. Ezért a továbbiakban arra keressük a választ, hogy ezekben a problémákban mi határozza meg az alkalmazható időlépcső nagyságát, s vajon a térbeli felbontás és az alkalmazható időlépcső hossza között van-e összefüggés.

Tekintsük a (XIII.17.) egydimenziós lineáris advekciós egyenletet! Ennek analitikus megoldása $\phi(x - ct, 0)$, amely a kezdeti feltételben megadott hullám c sebességgel való haladását írja le [XIII.3. ábra (a) panel]. Diszkretizáljuk a feladatot úgy, hogy az időbeli deriválásra explicit Euler-, a térbeli differenciálásra pedig bal oldali sémát alkalmazunk Δx rácsfelbontás és Δt időlépés mellett:

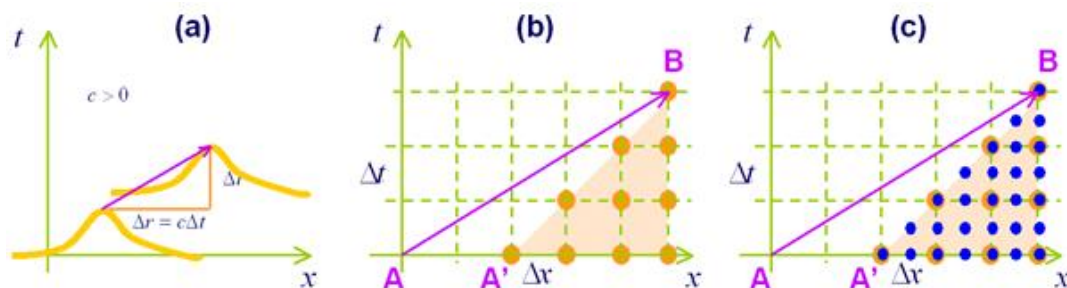
$$\frac{\varphi_{j,n+1} - \varphi_{j,n}}{\Delta t} + c \frac{\varphi_{j,n} - \varphi_{j-1,n}}{\Delta x} = 0. \quad (\text{XIII.50.})$$

Tudjuk, hogy a fenti sémák konzisztensek: mind az Euler-módszer, mind a bal oldali séma elsőrendben pontos, s annál kisebb hibával közelíti a folytonos feladatot, minél finomabb a rácsfelbontás és az időlépcső. Vessük most össze a numerikus megoldást a pontos megoldással néhány időlépés után egy kiválasztott B rácspontban, amihez tekintsük a XIII.3. ábra (b) paneljét. A folytonos feladatban a φ B -beli értékét a kiindulási, azaz az A pontbeli értéke határozza meg (A nem feltétlenül rácspont és helyzete az advekciós sebességtől függ). Amennyiben a fenti sémákat alkalmazzuk a diszkretizációra, úgy a diszkretizált feladatban szintén c advekciós sebességgel számolva, φ B -beli értékét az ábrán körrel jelölt rácspontok értékei határozzák meg. Ha az időlépcső és a rácsávolság aránya olyan, hogy a körök által lefedett terület nem tartalmazza az A pontot (mint a XIII.3. ábrán), akkor a numerikus és a pontos megoldás eltérése az idővel korlátlanul megnövekedhet, azaz (a definíció alapján) a numerikus módszer nem lesz stabil. Az ábra (c) panelje illusztrálja, hogy a felbontás és az időlépés *tetszőleges* finomítása nem javít ezen: hiába alkalmazunk feleakkora rácsávolságot és időlépést, a helyzet nem változik.

Hogyan válasszuk meg tehát az adott rácsfelbontáshoz tartozó időlépést, ha szeretnénk a stabilitást garantálni? A válasz megadható a XIII.3. ábra alapján: úgy kell megállapítani az időlépcsőt, hogy a B pontbeli numerikus megoldást meghatározó rácspontok tartománya magában foglalja a B pontbeli folytonos megoldást meghatározó

A pontot (azaz az ábrán az A pont legyen része a színezett sárga tartománynak). Ez pedig akkor teljesül, ha az $A'B$ szakasz meredeksége nem nagyobb, mint az AB szakaszé, azaz:

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{c} \quad (\text{XIII.51.})$$



XIII.3. ábra. (a) Az egydimenziós lineáris advekciós egyenlet megoldásának sematikus rajza: a kezdeti feltétellel meghatározott hullám $c > 0$ sebességgel x -irányba való áthelyeződése egy időlépcső alatt. (b) Adott A pontbeli információ advekciója B pontba x -irányba mutató $c > 0$ sebességgel néhány időlépcső alatt (lila egyenes) a folytonos feladatban, valamint azok a rácsponatok (sárga pontok) időlépésenként, amelyek a (XIII.50.) sémával, Δx rácsfelbontással és Δt időlépcsővel diszkrétizált feladatban meghatározzák az érkezési pontban vett értéket. Ezek között a kiindulási időpillanatban a legszélső bal oldali rácsponat az A' rácsponat. (c) Ugyanaz, mint (b), csak feleakkora időlépcsővel és rácsfelbontással (kék pontok).

A (XIII.51.) feltétel tehát kimondja, hogy az időlépcsőt és a térbeli felbontást nem finomíthatjuk tetszőleges arányban. A diszkrétizált feladat stabilitásához rögzített rácsávolság mellett az alkalmazható időlépcsőt a feladat által leírt mozgásformák leggyorsabb terjedési sebessége határozza meg (a fenti példában a c advekciós sebesség). (Ez a stabilitás szükséges feltétele.) A feltétel általánosítható más feladatokra is, s általános alakjában Courant–Friedrichs–Lewy vagy CFL-kritériumnak (Courant et al., 1928) nevezik. A kritériumnak a számítási hatékonyság szempontjából van jelentősége, a meteorológiai előrejelzések készítésénél a számítási műveletek és az adatok rendkívüli mennyisége miatt ugyanis az alkalmazott numerikus módszerek hatékonysága is lényeges szempont. Minél nagyobb időlépcsőt tudunk használni, annál kevesebb lépésben kell megismételni az integrálási műveleteket, s az előrejelzést annál gyorsabban tudjuk előállítani. Célunk tehát az, hogy az előrejelzési feladatot olyan numerikus sémák segítségével oldjuk meg, melyek adott felbontás mellett a lehető legnagyobb időlépcső használatát engedik meg.

XIII.5.2. Stabilitásvizsgálati módszerek

A továbbiakban két olyan stabilitásvizsgálati módszert tekintünk át, amelyek jól használhatók a különböző meteorológiai problémák megoldása során alkalmazott véges differencia sémák stabilitási és egyéb tulajdonságainak vizsgálatára.

Energia-módszer

Az energia-módszer lényege, hogy egy, a diszkrét feladathoz definiált pozitív definit mennyiségről megmutatjuk annak adott (pl. L_2 -térbeli) norma szerinti korlátosságát. Amennyiben ez minden időlépcsőre teljesül, úgy a feladatban alkalmazott véges differencia séma stabil. A módszert azért nevezik energia-módszernek, mert a vizsgált mennyiség gyakran energiát reprezentál. Például az egydimenziós lineáris advekciós egyenlet esetében a diszkrét feladat által leírt rendszer energiája felírható a következő alakban (ahol j index a rácsponatot, n az időlépést jelöli):

$$E_n = \frac{1}{2} \sum_j (\varphi_{j,n})^2 \quad (\text{XIII.52.})$$

Ha φ helyébe az áramlási sebességet helyettesítjük, akkor látható, hogy a fenti mennyiség a rendszer mozgási energiájával arányos. Az energia-módszer előnye, hogy nem-lineáris feladatok stabilitásának vizsgálatára is

alkalmazható (Dévényi et al., 1998). Hátránya ugyanakkor, hogy bizonyos feladatoknál nehéz a stabilitási feltételt kinyerni a segítségével.

Feladat

7. feladat:

Tekintsük a $\varphi(x, t)$ mennyiségre vonatkozó

$$\frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial t} + c \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial x} = 0 \quad (\text{XIII.53.})$$

egydimenziós lineáris advekción egyenletet, ahol c konstans advekción sebesség. Ha az időbeli derivált közelítésére a forward, a térbeli derivált közelítésére pedig a bal oldali sémát alkalmazzuk, akkor a következőt kapjuk:

$$\frac{\varphi_{j,n+1} - \varphi_{j,n}}{\Delta t} + c \frac{\varphi_{j,n} - \varphi_{j-1,n}}{\Delta x} = 0, \quad (\text{XIII.54.})$$

ahol a j index a j -edik rácspontot, az n index az n -edik időlépcsőt jelöli, Δt és Δx pedig az időlépcső hossza és a rácstávolság. Végezzük el (XIII.54) stabilitási analízisét az energia-módszer segítségével!

Megoldás

7. feladat:

Vezessük be $\alpha = c \frac{\Delta t}{\Delta x}$ -et és rendezzük át (XIII.54.)-et a következő módon:

$$\varphi_{j,n+1} - \varphi_{j,n} = -\alpha \cdot (\varphi_{j,n} - \varphi_{j-1,n}). \quad (\text{XIII.55.})$$

(A sémát egyébként *upstream* vagy *upwind* sémának is nevezik, mivel ha megfigyeljük, $c > 0$ esetén a $\varphi_{j,n+1}$ meghatározásához csak abból a – jelen esetben bal oldali – térbeli irányból használunk fel rácspontokat, ahonnan az áramlás és azzal az információ érkezik. A *downstream* vagy *downwind* sémák esetében olyan rácspontok értékeit is felhasználjuk, melyek az áramlás irányába esnek, és ahonnan fizikailag nem történhetne információterjedés.)

Szorozzuk be mindkét oldalt $(\varphi_{j,n+1} + \varphi_{j,n})$ -nel:

$$\varphi_{j,n+1}^2 - \varphi_{j,n}^2 = -\alpha \cdot (\varphi_{j,n} - \varphi_{j-1,n}) \cdot (\varphi_{j,n+1} + \varphi_{j,n}), \quad (\text{XIII.56.})$$

s a jobb oldalon helyettesítsünk $\varphi_{j,n+1}$ helyére $\varphi_{j,n} - \alpha \cdot (\varphi_{j,n} - \varphi_{j-1,n})$ -et:

$$\begin{aligned} \varphi_{j,n+1}^2 - \varphi_{j,n}^2 &= -\alpha \cdot (\varphi_{j,n} - \varphi_{j-1,n}) \cdot [2\varphi_{j,n} - \alpha \cdot (\varphi_{j,n} - \varphi_{j-1,n})] = \\ &= -2\alpha \cdot \varphi_{j,n}^2 + 2\alpha \cdot \varphi_{j,n} \cdot \varphi_{j-1,n} + \alpha^2 \cdot (\varphi_{j,n} - \varphi_{j-1,n})^2 = \\ &= -\alpha \cdot (\varphi_{j,n} - \varphi_{j-1,n})^2 - \alpha \cdot \varphi_{j,n}^2 + \alpha \cdot \varphi_{j-1,n}^2 + \alpha^2 \cdot (\varphi_{j,n} - \varphi_{j-1,n})^2 = \\ &= -\alpha \cdot (\varphi_{j,n}^2 - \varphi_{j-1,n}^2) - \alpha(1-\alpha)(\varphi_{j,n} - \varphi_{j-1,n})^2. \end{aligned} \quad (\text{XIII.57.})$$

Összegezzük mindkét oldalt minden j rácspontra ($J+1$ a rácspontok száma a tartományon):

$$\sum_{j=1}^{J+1} \varphi_{j,n+1}^2 - \sum_{j=1}^{J+1} \varphi_{j,n}^2 = - \sum_{j=2}^{J+1} \alpha \cdot (\varphi_{j,n}^2 - \varphi_{j-1,n}^2) - \sum_{j=2}^{J+1} \alpha(1-\alpha)(\varphi_{j,n} - \varphi_{j-1,n})^2. \quad (\text{XIII.58.})$$

Vegyük észre, hogy a bal oldalon az $(n+1)$ -edik és az n -edik időlépés energiájának különbsége áll! Továbbá a jobb oldali első tagban minden rácspontbeli érték kétszer szerepel, ellentétes előjellel, tehát az összegzésnél ez a tag eltűnik, amennyiben periodikus határfeltételeket tételezünk fel (azaz $\varphi_{1,n} = \varphi_{N+1,n}$). A következő marad:

$$E_{n+1} - E_n = -\alpha(1-\alpha) \cdot \sum_{j=2}^{N+1} (\varphi_{j,n} - \varphi_{j-1,n})^2. \quad (\text{XIII.59.})$$

Az energia-módszer értelmében a stabilitás szükséges feltétele, hogy a rendszer energiája korlátos maradjon, s ne növekedjen az idővel, azaz a fenti kifejezés nem lehet pozitív. Mivel az összegzésben szereplő négyzetösszegek mindig nem-negatívak, ezért az összegzés előtt álló együtthatónak szintén nem-negatívnak kell lennie, azaz:

$$\alpha(1-\alpha) \geq 0. \quad (\text{XIII.60.})$$

Ez a feltétel akkor teljesül, ha érvényes a következő:

$$0 < \alpha = c \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1 \rightarrow c > 0, \quad \Delta t \leq \frac{\Delta x}{c}. \quad (\text{XIII.61.})$$

Itt szükséges megjegyezni, hogy ha $\alpha < 1$, akkor a diszkrét feladatban az energia időlépésenként csökken (szemben a tényleges megoldás energiájával).

A Neumann-módszer

A Neumann-módszer lineáris (vagy linearizált) problémák numerikus stabilitásának vizsgálatára alkalmazható. A módszert az advekciós egyenlet példáján keresztül mutatjuk be. Tekintsük a $\varphi(x, t)$ mennyiségre vonatkozó egydimenziós lineáris advekciós egyenlet és az erre vonatkozó kezdeti feltétel által meghatározott Cauchy-feladatot:

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial t} + u_0 \cdot \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial x} = 0, & x \in [0, L] \\ \varphi(x, t=0) = f(x) \rightarrow \text{kezdeti feltétel} \\ \varphi(x=0, t) = \varphi(x=L, t) \rightarrow \text{periodikus határfeltételek} \end{cases} \quad (\text{XIII.62.})$$

ahol u_0 a konstans advekciós sebesség (az advekciós sebesség jelölésénél a továbbiakban áttérünk az u_0 használatára, mert a c változót másra fogjuk használni). A (XIII.62.) feladat analitikus megoldása ismert:

$$\varphi(x, t) = \varphi(x - u_0 \cdot t, 0) = f(x - u_0 \cdot t). \quad (\text{XIII.63.})$$

A lineáris differenciálegyenletek megoldása kifejezhető függvénysorok segítségével, a Neumann-módszer alkalmazásánál a kezdeti feltételt és a megoldást Fourier-sor alakban keressük (ezért a módszert Fourier-sor módszernek is nevezik). Ennek alapján tehát a kezdeti feltételt a következőképpen írhatjuk fel:

$$\varphi(x, t=0) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cdot e^{ikx}, \quad (\text{XIII.64.})$$

ahol k az adott hullámhoz tartozó hullámszám, c_k az ahhoz tartozó együttható. Ennek a (XIII.63.) analitikus megoldásba való behelyettesítésével a (XIII.62.) folytonos feladat megoldása a következő alakot ölti:

$$\varphi(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cdot e^{ik(x-u_0 \cdot t)} = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi(x, 0) \cdot e^{iku_0 \cdot t}. \quad (\text{XIII.65.})$$

Látható, hogy a fenti kifejezés olyan megoldást ír le, ami az adott k hullámszámú hullámot u_0 sebességgel x irányba advektálja anélkül, hogy annak kezdeti amplitúdóját megváltoztatná. Lineáris feladat esetében a Fourier-sor minden tagja megoldás, így elegendő egyetlen (jelen esetben a k -adik) Fourier-komponenst tekinteni. A kezdeti feltétel és a hozzá tartozó megoldás ekkor tehát egyetlen hullámot ír le:

$$\begin{aligned} \varphi(x, t=0) &= c_k \cdot e^{ikx}, \\ \varphi(x, t) &= c_k \cdot e^{ik(x-c \cdot t)} = \varphi(x, 0) \cdot e^{ikx \cdot t}. \end{aligned} \quad (\text{XIII.66.})$$

Tekintsük most a (XIII.62.) feladathoz konstruált diszkrét feladatot, amelyben a térbeli és az időbeli deriváltak közelítésére különböző véges differencia sémákat alkalmazunk. A diszkrét feladat kezdeti feltétele a folytonos feladattal analóg módon írható fel:

$$\varphi(x_j, t=0) = \varphi_{j,0} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cdot e^{ikx_j}, \quad (\text{XIII.67.})$$

ahol a j index a j -edik rácspontot, az időre vonatkozó 0 index pedig a kezdeti időpontot jelöli. A kezdeti feltétel ismeretében a diszkrét feladat megoldása adott rácspontban és időlépésben a következőképpen adható meg:

$$\varphi(x_j, t_n) = \varphi_{j,n} = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^n \cdot c_k \cdot e^{ikx_j}, \quad (\text{XIII.68.})$$

ahol λ a k hullámhoz tartozó és a numerikus sémától függő komplex-értékű, amplitúdó-jellegű mennyiség, a j index az adott rácspontot, az n kitevő pedig az adott időlépést jelöli. A diszkrét feladat esetében is igaz, hogy lineáris esetben a Fourier-sor minden tagja megoldása a feladatnak, s elegendő egyetlen hullámmódusra vizsgálni:

$$\begin{aligned} \varphi_{j,0} &= c_k \cdot e^{ikx_j}, \\ \varphi_{j,n} &= \lambda_k^n \cdot c_k \cdot e^{ikx_j}. \end{aligned} \quad (\text{XIII.69.})$$

A fenti összefüggésben tehát a numerikus megoldás úgy áll elő, hogy a kezdeti feltétel minden időlépésben egy amplitúdó-jellegű mennyiséggel szorozódik. Könnyen belátható, hogy ahhoz, hogy a megoldás korlátos maradjon,

szükséges, hogy $|\lambda_k|$ ne legyen nagyobb 1-nél – ez a stabilitás (és a konvergencia) szükséges feltétele. (Említettük, hogy a stabilitás elégséges feltételét nehéz meghatározni, ezért általában csupán a szükséges feltétel teljesülését vizsgálják.) Amennyiben $|\lambda_k| > 1$, úgy a kezdeti feltételt leíró hullám minden időlépésben gerjesztődik és a diszkrét

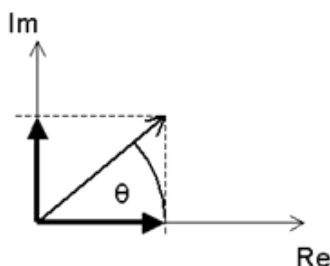
feladat nem lesz stabil. Ha $|\lambda_k| < 1$, akkor a véges differencia séma fiktív csillapítást vezet be, azaz a kezdeti feltételhez tartozó hullámmegoldás az idővel folyamatosan csillapodik, szélsőséges esetben bizonyos (különösen

a rövid hullámhosszú) hullámok teljesen el is tűnhetnek. Ideálisan $|\lambda_k|$ pontosan 1-gyel egyenlő, akkor a véges differencia séma nem változtatja meg a kezdeti feltételt leíró hullámot.

A hullám-megoldás amplitúdóján kívül a véges differencia séma a folytonos feladatban jellemző u_0 fázissebességet is módosíthatja: gyorsíthatja illetve lassíthatja azt. A diszkrét feladatbeli fázissebesség megadásához először is tekintsük a λ_k komplex mennyiséget következő alakban:

$$\lambda_k = |\lambda_k| \cdot e^{i\theta} \quad (\text{XIII.70.})$$

ahol θ a λ_k képzetes és valós része által bezárt szög (XIII.4. ábra)!



XIII.4. ábra. A λ_k valós és képzetes része által bezárt szög.

Ekkor a diszkrét feladat megoldása az alábbi módon írható fel:

$$\varphi_{j,n} = (\lambda_k)^n \cdot c_k \cdot e^{ikx_j} = |\lambda_k|^n \cdot c_k \cdot e^{ik(x_j + n\theta/k)} \quad (\text{XIII.71.})$$

A folytonos feladat analógiájára a fázissebesség a diszkrét feladatban:

$$c' = -\frac{n \cdot \theta}{k \cdot n \cdot \Delta t} = -\frac{\theta}{k \Delta t} \quad (\text{XIII.72.})$$

A fázishiba megmutatja, hogy a folytonos feladatbeli u_0 és a diszkrét feladatbeli c' fázissebességek hogyan viszonyulnak egymáshoz:

$$R = \frac{c'}{u_0} \quad (\text{XIII.73.})$$

Amennyiben $R > 1$, a véges differencia séma gyorsítja a folytonos feladatbeli k hullámot; ha $R < 1$, akkor a séma lassítja a k hullámot; s ha $R = 1$, akkor a séma nem változtatja meg a hullám fázissebességét. Bár az utóbbi eset tűnik ideálisnak, mégis alkalmasan megválasztott véges differencia séma esetében bizonyos hullámok „lassúbbá torzítása” előnyös is lehet (Radnóti, 2003). Tekintsünk például egy olyan feladatot, amelynek a meteorológiai szempontból kevésbé releváns gyorsan terjedő gravitációs hullámok is megoldásai! Ha erre explicit véges differencia sémát alkalmazunk, amely a hullámok fázissebességét lényegesen nem változtatja meg, akkor meglehetősen szigorú feltételt kell a numerikus stabilitás teljesítéséhez kielégíteni, amiben a vezető tag a feladat által leírt leggyorsabban terjedő mozgásforma (jelen esetben a gravitációs hullámok) fázissebessége. Implicit séma alkalmazásával azonban egy kedvezőbb feltétel nyerhető vagy éppen feltétel nélküli stabilitással tudunk dolgozni, mégpedig azáltal, hogy az implicit séma ezeknek a hullámoknak a fázissebességét csökkenti. A megoldás fizikai értelmezésénél ez nem okoz problémát, mert amint már említettük, ezek a hullámok a meteorológiai folyamatok szempontjából nem lényegesek, viszont a gyorsan terjedő hullámok lassításával stabilizálható a feladat ezekért felelős része.

Összefoglalva

A véges differencia séma a k hullámszámú hullámra

- stabil, ha $|\lambda_k| \leq 1$,
- instabil, ha $|\lambda_k| > 1$.

A véges differencia séma a k hullámszámú hullámra

- neutrális, ha $|\lambda_k| = 1$,
- fiktív csillapítást vezet be, ha $|\lambda_k| < 1$,
- gerjesztést vezet be, ha $|\lambda_k| > 1$.

A véges differencia séma a k hullámszámú hullám fázissebességét

- nem változtatja meg, ha $R=1$,
- lassítja, ha $R < 1$,
- gyorsítja, ha $R > 1$.

Feladatok

8. feladat:

Lássuk be a Neumann stabilitásvizsgálati módszer alkalmazásával, hogy a $\varphi(x, t)$ mennyiségre vonatkozó

$$\frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial t} + u_0 \cdot \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial x} = 0 \quad (\text{XIII.74.})$$

egydimenziós lineáris advekciós egyenlet időbeli és a térbeli deriváltjainak közelítésére használt forward illetve centrált sémák alkalmazása esetén a

$$\frac{\varphi_{j,n+1} - \varphi_{j,n}}{\Delta t} + u_0 \cdot \frac{\varphi_{j+1,n} - \varphi_{j-1,n}}{2\Delta x} = 0 \quad (\text{XIII.75.})$$

diszkrét feladat **abszolút instabil** (a j index a j -edik rácspontot, az n index az n -edik időlépcsőt jelöli, Δt és Δx pedig az időlépcső hossza és a rácsávolság)!

9. feladat:

Lássuk be a Neumann stabilitásvizsgálati módszer alkalmazásával, hogy a $\varphi(x, t)$ mennyiségre vonatkozó (XIII.74.) egydimenziós lineáris advekciós egyenlet időbeli deriváltjának közelítésére a forward séma, illetve térbeli deriváltjának közelítésére két időszintbeli centrált séma átlagának (azaz a hatpontos Crank-Nicholson séma) alkalmazása esetén a

$$\frac{\varphi_{j,n+1} - \varphi_{j,n}}{\Delta t} + u_0 \cdot \frac{\frac{\varphi_{j+1,n} - \varphi_{j-1,n}}{2\Delta x} + \frac{\varphi_{j+1,n+1} - \varphi_{j-1,n+1}}{2\Delta x}}{2} = 0 \quad (\text{XIII.76.})$$

diszkrét feladat **feltétel nélkül stabil** (a j index a j -edik rácspontot, az n index az n -edik időlépcsőt jelöli, Δt és Δx pedig az időlépcső hossza és a rácsávolság)!

10. feladat:

Adjuk meg a Crank-Nicholson sémával diszkrétizált (XIII.76.) egyenletben érvényes fázissebességet! Értelmezzük az eredményt, összehasonlítva a (XIII.74.) folytonos feladatbeli fázissebességgel!

11. feladat:

Lássuk be, hogy a $\varphi(x, t)$ mennyiségre vonatkozó (XIII.74.) egydimenziós lineáris advekción egyenlet időbeli és térbeli deriváltjainak közelítésére használt leapfrog illetve centrált sémák esetén a

$$\frac{\varphi_{j,n+1} - \varphi_{j,n-1}}{2\Delta t} + u_0 \cdot \frac{\varphi_{j+1,n} - \varphi_{j-1,n}}{2\Delta x} = 0 \quad (\text{XIII.77.})$$

diszkrét feladatból (a j index a j -edik rácspontot, az n index az n -edik időlépcsőt jelöli, Δt és Δx pedig az időlépcső hossza és a rácsávolság) a Neumann stabilitásvizsgálati módszer alkalmazásával a következő adódik:

$$\lambda_k^2 + 2 \cdot i \cdot \alpha \cdot \sin(k\Delta x) \cdot \lambda_k - 1 = 0, \quad (\text{XIII.78.})$$

ahol $\alpha = u_0 \frac{\Delta t}{\Delta x}$! Értelmezzük az eredményt!

12. feladat:

Lássuk be, hogy az $u(x, t)$ zonális sebességre és a $h(x, t)$ hullámmagasságra vonatkozó

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + g \frac{\partial h(x, t)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial h(x, t)}{\partial t} + H \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad (\text{XIII.79.})$$

egydimenziós lineáris gravitációs hullám egyenlet időbeli és térbeli deriváltjainak közelítésére használt leapfrog illetve centrált sémák esetén a

$$\begin{cases} \frac{u_{j,n+1} - u_{j,n-1}}{2\Delta t} + g \frac{h_{j+1,n} - h_{j-1,n}}{2\Delta x} = 0 \\ \frac{h_{j,n+1} - h_{j,n-1}}{2\Delta t} + H \frac{u_{j+1,n} - u_{j-1,n}}{2\Delta x} = 0 \end{cases} \quad (\text{XIII.80.})$$

diszkrét feladatra [ahol g a gravitációs gyorsulás, H a folyadék átlagos magassága (vagy mélysége; pl. az óceán vagy a légkör esetében), a j index a j -edik rácspontot, az n index az n -edik időlépcsőt jelöli, Δt és Δx pedig az időlépcső hossza és a rácsávolság] a Neumann stabilitásvizsgálati módszer alkalmazásával a következő stabilitási kritérium adódik:

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{\sqrt{g \cdot H}}. \quad (\text{XIII.81.})$$

Értelmezzük az eredményt!

Megoldások

8. feladat:

A Neumann-módszer alkalmazásával a diszkrét megoldást adott rácspontban és időlépcsőben az alábbi alakban írjuk fel:

$$\varphi_{j,n} = \lambda_k^n \cdot c_k \cdot e^{ikx_j}, \quad (\text{XIII.82.})$$

ahol λ komplex-értékű szám, k az adott hullámhoz tartozó hullámszám, c_k a hullámhoz tartozó együttható, a j index az adott rácpontot, az n kitevő pedig az adott időlépést jelöli. Ezt behelyettesítve a (XIII.75.) egyenletbe, a következőt kapjuk:

$$\frac{\lambda_k^{n+1} \cdot c_k \cdot e^{ikx_j} - \lambda_k^n \cdot c_k \cdot e^{ikx_j}}{\Delta t} + u_0 \cdot \frac{\lambda_k^n \cdot c_k \cdot e^{ikx_{j+1}} - \lambda_k^n \cdot c_k \cdot e^{ikx_{j-1}}}{2\Delta x} = 0. \quad (\text{XIII.83.})$$

Egyszerűsítve $\lambda_k^n \cdot c_k$ -val és bevezetve az $\alpha = u_0 \frac{\Delta t}{\Delta x}$ mennyiséget:

$$\lambda_k \cdot e^{ikx_j} - e^{ikx_j} + \frac{\alpha}{2} (e^{ikx_{j+1}} - e^{ikx_{j-1}}) = 0. \quad (\text{XIII.84.})$$

Ezt elosztva e^{ikx_j} -vel és kihasználva, hogy $x_{j\pm 1} = (j \pm 1) \cdot \Delta x$:

$$\lambda_k - 1 + \frac{\alpha}{2} (e^{ik\Delta x} - e^{-ik\Delta x}) = 0. \quad (\text{XIII.85.})$$

Felismerve a zárójelben szereplő Euler-formulát, kapjuk az alábbi:

$$\lambda_k - 1 + \frac{\alpha}{2} \cdot 2 \cdot i \cdot \sin(k\Delta x) = 0 \rightarrow \lambda_k = 1 - \alpha \cdot i \cdot \sin(k\Delta x). \quad (\text{XIII.86.})$$

Az $\alpha = x + i \cdot y$ komplex szám abszolútértékének négyzete $|a|^2 = a \cdot \bar{a} = x^2 + y^2$, ennek ismeretében a λ_k abszolútértékének négyzete:

$$|\lambda_k|^2 = 1 + \alpha^2 \cdot \sin^2(k\Delta x). \quad (\text{XIII.87.})$$

Mivel mind az α , mind a $\sin^2$ függvény pozitív értékűek, ezért a $|\lambda_k|^2$ minden esetben 1-nél nagyobb értéket vesz fel. **Azaz a Neumann-módszer stabilitási kritériumából következően a két séma együttes alkalmazásával nem tudunk olyan időlépcsőt választani, amellyel a diszkrét feladat stabil lesz.**

9. feladat:

A Neumann-módszert (l. a 8. feladatnál) alkalmazva a (XIII.76.) egyenletre, a következőt kapjuk:

$$\frac{\lambda_k^{n+1} \cdot c_k \cdot e^{ikx_j} - \lambda_k^n \cdot c_k \cdot e^{ikx_j}}{\Delta t} + \frac{u_0}{2} \left(\lambda_k^n \cdot c_k \cdot \frac{e^{ikx_{j+1}} - e^{ikx_{j-1}}}{2\Delta x} + \lambda_k^{n+1} \cdot c_k \cdot \frac{e^{ikx_{j+1}} - e^{ikx_{j-1}}}{2\Delta x} \right) = 0. \quad (\text{XIII.88.})$$

Egyszerűsítve $\lambda_k^n \cdot c_k \cdot e^{ikx_j}$ -vel és bevezetve az $\alpha = u_0 \frac{\Delta t}{\Delta x}$ mennyiséget:

$$\lambda_k - 1 + \frac{\alpha}{4} (1 + \lambda_k) \cdot (e^{\tilde{k}\Delta x} - e^{-\tilde{k}\Delta x}) = 0. \quad (\text{XIII.89.})$$

Felismerve a zárójelben szereplő Euler-formulát, kapjuk az alábbi:

$$\lambda_k - 1 + \frac{\alpha}{2} \cdot (1 + \lambda_k) \cdot i \cdot \sin(k\Delta x) = 0. \quad (\text{XIII.90.})$$

Ebből kifejezve λ_k -t:

$$\lambda_k = \frac{1 - \frac{\alpha}{2} \cdot i \cdot \sin(k\Delta x)}{1 + \frac{\alpha}{2} \cdot i \cdot \sin(k\Delta x)}. \quad (\text{XIII.91.})$$

Tovább alakítva ezt a kifejezést és kihasználva, hogy $i^2 = -1$:

$$\lambda_k = \frac{1 - \frac{\alpha}{2} \cdot i \cdot \sin(k\Delta x)}{1 + \frac{\alpha}{2} \cdot i \cdot \sin(k\Delta x)} \cdot \frac{1 - \frac{\alpha}{2} \cdot i \cdot \sin(k\Delta x)}{1 - \frac{\alpha}{2} \cdot i \cdot \sin(k\Delta x)} = \frac{1 - \frac{\alpha^2}{4} \cdot \sin^2(k\Delta x) - \alpha \cdot i \cdot \sin(k\Delta x)}{1 + \frac{\alpha^2}{4} \cdot \sin^2(k\Delta x)}. \quad (\text{XIII.92.})$$

Ebből a λ_k komplex mennyiség abszolútértékének négyzetét kifejezve:

$$|\lambda_k|^2 = \frac{\left[1 - \frac{\alpha^2}{4} \sin^2(k\Delta x)\right]^2 + \alpha^2 \cdot \sin^2(k\Delta x)}{\left[1 + \frac{\alpha^2}{4} \sin^2(k\Delta x)\right]^2} = \frac{1 + \frac{\alpha^4}{16} \sin^2(k\Delta x) + \frac{\alpha^2}{2} \sin^2(k\Delta x)}{\left[1 + \frac{\alpha^2}{4} \sin^2(k\Delta x)\right]^2} = 1. \quad (\text{XIII.93.})$$

Megállapíthatjuk tehát, hogy az egydimenziós lineáris advekción egyenletre alkalmazott implicit séma feltétel nélkül stabil lesz (azaz adott horizontális felbontáshoz bármekkora időlépcsőt választhatunk), ráadásul a kezdeti hullámok amplitúdója nem változik (nem nő – gerjesztődik – vagy csökken – csillapodik) az idővel. A séma hátránya ugyanakkor, hogy jelentős fázishibát okoz (l. a 10. feladatot is), illetve gyakorlati megvalósítása – az implicit tulajdonsága miatt – bonyolult.

10. feladat:

A diszkrét feladatbeli fázissebesség kifejezéséhez tekintsük λ_k -ra a $\lambda_k = |\lambda_k| \cdot e^{i\theta}$ alakot és használjuk fel a (XIII.92.) összefüggést:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\operatorname{Im} \lambda_k}{\operatorname{Re} \lambda_k} = \frac{-\alpha \cdot \sin(k\Delta x)}{1 - \frac{\alpha^2}{4} \cdot \sin^2(k\Delta x)} \rightarrow \theta = \operatorname{arctg} \frac{-\alpha \cdot \sin(k\Delta x)}{1 - \frac{\alpha^2}{4} \cdot \sin^2(k\Delta x)}. \quad (\text{XIII.94.})$$

Ebből a diszkrét feladatbeli fázissebesség:

$$c' = -\frac{\theta}{k\Delta t} = -\frac{1}{k\Delta t} \operatorname{arctg} \frac{\alpha \cdot \sin(k\Delta x)}{1 - \frac{\alpha^2}{4} \cdot \sin^2(k\Delta x)}. \quad (\text{XIII.95.})$$

A fenti kifejezés tovább alakítható, ha kihasználjuk az $\operatorname{arctg}(x) + \operatorname{arctg}(y) = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy}$ összefüggést, melyben jelen esetben $x = y = \frac{\alpha}{2} \sin(k\Delta x)$. Ekkor a fázissebességre a következő adódik:

$$c' = \frac{2}{k\Delta t} \operatorname{arctg} \frac{\alpha \cdot \sin(k\Delta x)}{2} . \quad (\text{XIII.96.})$$

Az eredményt megvizsgálva láthatjuk, hogy a folytonos feladatbeli fázissebesség növekedése ($u_0 \rightarrow \infty$, azaz $\alpha \rightarrow \infty$) esetén a diszkrét feladatbeli c' fázissebesség korlátos marad (az arctg -függvény felülről korlátos $\pi/2$ -vel). Azaz **az implicit séma lassítja a gyorsan terjedő hullám-megoldásokat**, ezáltal ezek kielégítik a CFL-kritériumot, s így tudja a séma a feltétel nélküli stabilitást garantálni.

11. feladat:

A Neumann-módszert (l. a 8. feladatnál) alkalmazva a (XIII.77.) egyenletre, a következőt kapjuk:

$$\frac{\lambda_k^{n+1} \cdot c_k \cdot e^{ikx_j} - \lambda_k^{n-1} \cdot c_k \cdot e^{ikx_j}}{2\Delta t} + u_0 \cdot \lambda_k^n \cdot c_k \frac{e^{ikx_{j+1}} - e^{ikx_{j-1}}}{2\Delta x} = 0 . \quad (\text{XIII.97.})$$

Egyszerűsítve $\lambda_k^{n-1} \cdot c_k \cdot e^{ikx_j}$ -vel és bevezetve az $\alpha = u_0 \frac{\Delta t}{\Delta x}$ mennyiséget:

$$\lambda_k^2 - 1 + \alpha \cdot \lambda_k \cdot (e^{ik\Delta x} - e^{-ik\Delta x}) = 0 . \quad (\text{XIII.98.})$$

Felismerve a zárójelben szereplő Euler-formulát, kapjuk az alábbi:

$$\lambda_k^2 + \alpha \cdot \lambda_k \cdot 2i \cdot \sin(k\Delta x) - 1 = 0 . \quad (\text{XIII.99.})$$

Amiatt, hogy a leapfrog séma nem kettő, hanem három időszintet használ, (XIII.99.)-cel λ_k -ra másodfokú egyenletet kaptunk, aminek két megoldása van. Ha alkalmazzuk a másodfokú egyenlet megoldó-képletét, és bevezetjük $p = \alpha \cdot \sin(k\Delta x)$ -et, akkor λ_k -ra a következő két megoldás (módusz) adódik:

$$\lambda_{k1,2} = -i \cdot p \pm \sqrt{1 - p^2} . \quad (\text{XIII.100.})$$

Ha $\alpha > 1$, akkor lesz olyan hullámszám, amire $p > 1$ és ebben az esetben a gyökjel alatt lévő mennyiség negatív.

Ekkor a λ_k tisztán képzetes, s $|\lambda_k|^2$ az egyik gyökre mindenképpen 1-nél nagyobb. Viszont ha $\alpha \leq 1$, azaz $\Delta t \leq \frac{\Delta x}{u_0}$, akkor $|\lambda_k|^2 = p^2 + 1 - p^2 = 1$, tehát a séma neutrálisan stabil. **Neutralitása, valamint másodrendű pontossága miatt ez az explicit séma kedvelt a meteorológiában annak ellenére, hogy a három időszint használata a korábban már bemutatott hátrányokkal jár.**

12. feladat:

A Neumann-módszert (l. a 8. feladatnál) alkalmazva a megoldást a következő alakban keressük:

$$\begin{aligned} u_{j,n} &= \bar{u} \cdot \lambda_k^n \cdot e^{ikx_j}, \\ h_{j,n} &= \bar{h} \cdot \lambda_k^n \cdot e^{ikx_j}, \end{aligned} \quad (\text{XIII.101.})$$

ahol $\bar{u}, \bar{h}$ a k hullámszámhoz tartozó együtthatók. Behelyettesítve (XIII.101.)-et a (XIII.80.) egyenletbe, a következőt kapjuk:

$$\begin{cases} \frac{\lambda_k^{n+1} \cdot \bar{u} \cdot e^{ikx_j} - \lambda_k^{n-1} \cdot \bar{u} \cdot e^{ikx_j}}{2\Delta t} + g \frac{\lambda_k^n \cdot \bar{h} \cdot e^{ikx_{j+1}} - \lambda_k^n \cdot \bar{h} \cdot e^{ikx_{j-1}}}{2\Delta x} = 0 \\ \frac{\lambda_k^{n+1} \cdot \bar{h} \cdot e^{ikx_j} - \lambda_k^{n-1} \cdot \bar{h} \cdot e^{ikx_j}}{2\Delta t} + H \frac{\lambda_k^n \cdot \bar{u} \cdot e^{ikx_{j+1}} - \lambda_k^n \cdot \bar{u} \cdot e^{ikx_{j-1}}}{2\Delta x} = 0. \end{cases} \quad (\text{XIII.102.})$$

Ha az $\bar{u}, \bar{h}$ együtthatókat úgy választjuk meg, hogy eleget tegyenek az alábbiak:

$$\frac{\bar{h}}{\bar{u}} = \sqrt{\frac{H}{g}}, \quad (\text{XIII.103.})$$

akkor a (XIII.102)-beli két csatolt egyenlet egy egyenletre redukálódik, mégpedig:

$$\frac{\lambda_k^{n+1} \cdot e^{ikx_j} - \lambda_k^{n-1} \cdot e^{ikx_j}}{2\Delta t} + \sqrt{gH} \cdot \frac{\lambda_k^n \cdot e^{ikx_{j+1}} - \lambda_k^n \cdot e^{ikx_{j-1}}}{2\Delta x} = 0. \quad (\text{XIII.104.})$$

Vegyük észre, hogy ez az egyenlet annyiban tér el a 11. feladatbeli (XIII.97.)-től, hogy az u_0 advektációs sebesség helyett $\sqrt{gH}$ szerepel benne! Ez pedig nem más, mint a gravitációs hullám terjedési sebessége, ugyanis a (XIII.79.) feladat átírható a következő módon:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} u \\ h \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -g \\ -H & 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} u \\ h \end{pmatrix}, \quad (\text{XIII.105.})$$

ahol a jobb oldalon szereplő mátrix sajátértéke $\pm\sqrt{gH}$, azaz a k hullámszámhoz két, ellentétes irányban $\sqrt{gH}$ fázissebességgel haladó hullám tartozik. Az egyszerűsítéseket elvégezve (XIII.104.)-en a következőket kapjuk:

$$\begin{aligned} \lambda_k^2 + \alpha \cdot \lambda_k \cdot 2i \cdot \sin(k\Delta x) - 1 &= 0, \\ \lambda_{k1,2} &= -i \cdot p \pm \sqrt{1 - p^2}, \end{aligned} \quad (\text{XIII.106.})$$

ahol $p = \alpha \cdot \sin(k\Delta x)$ és $\alpha = \sqrt{gH} \frac{\Delta t}{\Delta x}$. A 11. feladattal analóg módon tehát a stabilitási kritérium ebben az esetben a következőképpen alakul:

$$\alpha \leq 1 \rightarrow \Delta t \leq \frac{\Delta x}{\sqrt{gH}}. \quad (\text{XIII.107.})$$

Ez azt jelenti, hogy az egydimenziós lineáris gravitációs hullám-egyenlet diszkretizációjára a leapfrog és a centrált sémákat használva, az adott felbontás esetén alkalmazható **időlépcső hosszára a gravitációs hullám terjedési sebessége szab korlátot**. A tropopauza átlagos magasságát (H -t) 10 km-nek, a gravitációs gyorsulás (g) átlagos értékét 10 ms^{-2} -nak véve, ez a sebesség 300 ms^{-1} nagyságúnak adódik, s így a 10 km-es rácsfelbontásnál alkalmazható időlépcső nem nagyon haladhatja meg a 30 másodpercet. Ezzel szemben a 11. feladatban szereplő advekciós sebesség még a nagy magasságokban sem nagyobb 100 ms^{-1} -nál, ekkor az integrálási időlépés 10 km-es felbontás mellett 100 s is lehet. Látható tehát, hogy a most kapott (XIII.107.) stabilitási kritérium **szigorúbbkorlátot jelent** az időlépcső hosszára, mint amit az advekciós egyenlet esetében kaptunk. Azaz egy olyan feladatban, amely a gravitációs hullámok terjedését is leírja, adott felbontáshoz rövidebb integrálási időlépést tudunk csak alkalmazni (az integrálást több kisebb lépésben kell elvégezni), hogy a feladat numerikus stabilitása megmaradjon.

XIII.6. Hatékony numerikus sémák

Az előző alfejezetben az egydimenziós lineáris advekciós valamint lineáris gravitációs hullám egyenletekre vizsgáltuk meg a különböző véges differencia sémák numerikus stabilitását. Láttuk, hogy az explicit sémák alkalmazásával a numerikus stabilitás csak akkor teljesülhet, ha eleget teszünk a CFL-kritériumnak – azaz ha az integrálási időlépcső megválasztásánál tekintettel vagyunk a térbeli felbontás és a feladat által leírt leggyorsabban terjedő mozgásforma sebességének a hányadosára. (Ugyanakkor a 8. feladatban mutattunk példát olyan explicit véges differencia sémára is, amelynél a stabilitás még a CFL-feltétel betartásával sem garantálható.) Ezenkívül megállapítottuk, hogy az implicit sémák esetében tetszőlegesen hosszú időlépcső választható (l. a 9. feladatot), mégpedig azért, mert az implicit sémák a feladatban érvényes fázissebességet lassítják (l. a 10. feladatot), s ezáltal a gyorsan terjedő hullám-megoldásokra is stabil megoldást biztosítanak. Az általuk okozott fázishiba ugyanakkor nem minden hullám esetében kívánatos, ezért, valamint bonyolult megvalósításuk miatt a meteorológiai gyakorlatban nem alkalmaznak tisztán implicit sémákat.

A meteorológiai előrejelzések készítésénél a számítási műveletek és az adatok rendkívüli mennyisége miatt az alkalmazott numerikus módszerek pontossága mellett elsődleges szempont azok hatékonysága. Tehát **a céloyan diszkretizációs módszerek alkalmazása, melyekkel a numerikus stabilitás tetszőlegesen hosszú integrálási időlépcső használata mellett sem sérül**. A továbbiakban az előrejelzési feladatot reálisabban közelítő, advekciós és gravitációs hullám tagokat egyaránt tartalmazó egyenleteken fogjuk bemutatni azokat a numerikus sémákat, melyekkel ez teljesül és ezért a gyakorlatban is elterjedtek.

Tekintsük a következő egydimenziós lineáris egyenletrendszer az $u(x, t)$ zonális sebességre és a $h(x, t)$ hullámmagasságra vonatkozóan:

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + u_0 \cdot \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + g \frac{\partial h(x, t)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial h(x, t)}{\partial t} + u_0 \cdot \frac{\partial h(x, t)}{\partial x} + H \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad (\text{XIII.108.})$$

melyben az egyenletek középső tagjai a (lineáris) advekciót, az utolsó tagok pedig a (szintén lineáris) gravitációs hullámokat reprezentálják. A 11–12. feladat alapján a Neumann stabilitásvizsgálati módszer segítségével levezethető, hogy ha az időbeli deriváltak közelítésére a leapfrog, a térbeli deriváltak közelítésére a centrált sémát alkalmazzuk, akkor a diszkrét feladatra a stabilitás szükséges feltétele a következő lesz:

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{u_0 + \sqrt{gH}} \quad (\text{XIII.109.})$$

Tehát a fenti explicit sémát használva (XIII.108.)-ra, az adott felbontás esetén alkalmazható időlépcső hosszára az advekció és a gravitációs hullám terjedési sebességének összege szab korlátot. Mivel az előzőekben láttuk, hogy utóbbi lényegesen nagyobb az előbbinél, ezért kijelenthetjük, hogy a stabilitás szükséges feltételénél gyakorlatilag a gravitációs hullámok terjedési sebessége a meghatározó.

XIII.6.1. Szemi-implicit séma

Alkalmazzunk most (XIII.108.)-ra olyan ún. *szemi-implicit* diszkretizációt, ami az advekciós tagok esetében megtartja az explicit sémát, a gravitációs hullám tagokat viszont implicit módon kezeli (Robert, 1981). Például a második tagok esetében az explicit középponti sémát használjuk, a harmadik tagok esetében pedig centráltsémák átlagát vesszük két időszintre a korábban már látott módon:

$$\begin{cases} \frac{u_{j,n+1} - u_{j,n-1}}{2\Delta t} + u_0 \frac{u_{j+1,n} - u_{j-1,n}}{2\Delta x} + g \frac{\frac{h_{j+1,n} - h_{j-1,n}}{2\Delta x} + \frac{h_{j+1,n+1} - h_{j-1,n+1}}{2\Delta x}}{2} = 0 \\ \frac{h_{j,n+1} - h_{j,n-1}}{2\Delta t} + u_0 \frac{h_{j+1,n} - h_{j-1,n}}{2\Delta x} + H \frac{\frac{u_{j+1,n} - u_{j-1,n}}{2\Delta x} + \frac{u_{j+1,n+1} - u_{j-1,n+1}}{2\Delta x}}{2} = 0. \end{cases} \quad (\text{XIII.110.})$$

A Neumann-módszer segítségével belátható, hogy a szemi-implicit módszer alkalmazása esetén a következő adódik:

$$u_0^2 \cdot \Delta t^2 \leq \Delta x^2 + gH \cdot \Delta t^2, \quad (\text{XIII.111.})$$

ez pedig minden esetben teljesül, amikor az advekciós egyenletnél kapott stabilitási feltétel teljesül, azaz amikor:

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{u_0}. \quad (\text{XIII.112.})$$

Tehát a szemi-implicit módszer alkalmazásával elértük, hogy ne a feladat által leírt leggyorsabban terjedő mozgásforma, azaz a gravitációs hullámok terjedési sebessége legyen a meghatározó az időlépcső megválasztásánál, hanem az annál jóval kisebb advekciós sebesség, lehetővé téve a nagyobb időlépésekben történő stabil modellintegrálást.

A szemi-implicit séma szépsége abban áll, hogy az implicit kezelést az egyenlet lineáris részére alkalmazza, s ezek a tagok felelősek egyben azokért a hullám-megoldásokért, melyek gyorsan terjednek, de jelentőségük meteorológiai szempontból kicsi. Az implicit módszer ezeket a hullámokat lelassítja, ezáltal stabilizálva a feladat lineáris részét és érintetlenül hagyva a meteorológiai releváns, lassúbb mozgásformákat. Általánosan a szemi-implicit módszer a következő alakban írható fel:

$$\frac{\partial \Psi^0}{\partial t} = L \left(\frac{\Psi^+ + \Psi^-}{2} \right) + N(\Psi^0), \quad (\text{XIII.113.})$$

ahol a teljes nem-lineáris modellt linearizáljuk egy referencia-állapot körül, ami legtöbbször az izoterm, nyugvó légkör (ez gyakran távol esik a valós légköri állapottól): az L operátor a modell linearizált része, az N operátor a nem-lineáris maradéktag. A $0, +, -$ indexek pedig az aktuális, a későbbi és a korábbi időlépcsőket reprezentálják, jelölve, hogy a **szemi-implicit módszerben a linearizált tagokra implicit kezelést, a nem-lineáris tagokra explicit kezelést alkalmazunk.**

XIII.6.2. Szemi-Lagrange módszer

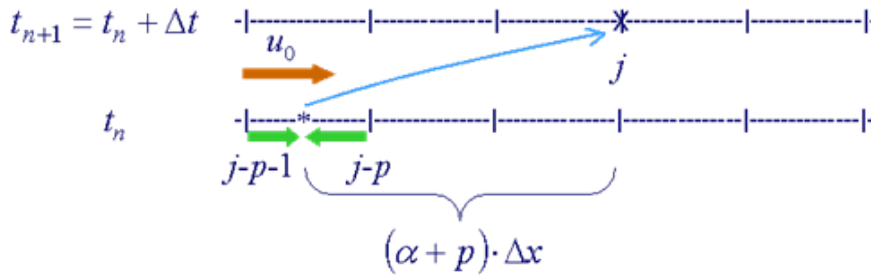
A nem-lineáris egyenletrendszer teljes implicit kezelése (ami biztosíthatná a feltétel nélküli stabilitást) nem lehetséges (reális), mert nem-lineáris operátor invertálását igényelné. Ezért hogy az advekciós sebesség által meghatározott stabilitási feltételt tovább tudjuk enyhíteni, a szemi-implicit sémát ötvözni kell egy másik hatékony módszerrel.

A hidro-termodinamikai egyenletrendszerben a legdominánsabb nem-lineáris tag a nem-lineáris advekció, ennek kezelésére segítségül hívjuk a Lagrange-módszert. A Lagrange-szemléletben nem egy térben rögzített koordináta-rendszer pontjaiban tekintjük az állapotváltozók változását, hanem a részecskékhez (légelemekhez) rögzített

lokális koordináta-rendszerekkel dolgozunk: a részecskék trajektóriáját követjük, ami mentén magukkal viszik kiindulási tulajdonságaikat. Adott ϕ tulajdonság trajektória-menti megmaradását fejezi ki az egydimenziós lineáris advekción egyenlet alábbi Lagrange-alakja:

$$\frac{d\phi}{dt} = 0, \quad \text{ahol} \quad \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u_0 \frac{\partial}{\partial x}. \quad (\text{XIII.114.})$$

Tehát az állapothatározók adott időpontban vett térbeli eloszlásának és pályájának ismeretében meghatározható jövőbeli eloszlásuk. A numerikus számítások során azonban szeretnénk az Euler-szemléletnek azt a kényelmes tulajdonságát megtartani, hogy a léggöri változókat egy szabályos rács rácspontjaiban tekintjük (egyrészt mert egyéb műveleteket is rácsra kell elvégezni, másrészt mert ezáltal biztosítható az egyenletes térbeli lefedettség). Ez a tiszta Lagrange-módszer segítségével nem lehetséges, hiszen azok a részecskék, melyek kiinduláskor még szabályosan helyezkedtek el, már egy időlépés után is szabálytalan és térben inhomogén elrendeződést vehetnek fel. Ezért az ún. **szemi-Lagrange módszerben minden időlépésben egy backward (visszafelé) trajektória számításával és térbeli interpoláció alkalmazásával állítjuk elő az állapothatározók értékét az általunk kívánt rácspontokban** (XIII.5. ábra). Világos, hogy így az időbeli integrálás során nem ugyanazokat a részecskéket követjük, hanem a rácspontok elhelyezkedése alapján minden időlépésben új részecskehalmazt definiálunk.



XIII.5. ábra. A szemi-Lagrange módszer sematikus rajza.

A trajektória kiindulási pontját (melyet az ábrán * jelöl) az advekción sebesség ismeretében tudjuk meghatározni, amit az egyszerűség kedvéért most tekintünk állandónak: a részecske ekkor Δt idő alatt u_0 sebességgel advektálódik, mialatt $(\alpha + p) \cdot \Delta x$ távolságot tesz meg. A korábbi időszintről való indulás nem feltétlenül rácspontból történik, ezért a megtett utat két részre oszthatjuk: a Δt idő alatt bejárt rácspontok számát p -vel jelöljük, ahol p egész szám, a maradék út pedig a rács távolság α -szorososa, ahol α értelemszerűen 0 és 1 közé eső törtszám, azaz:

$$(p + \alpha) \cdot \Delta x = u_0 \cdot \Delta t. \quad (\text{XIII.115.})$$

Az $(n+1)$ -edik időlépésben a ϕ állapothatározó értéke a konzervativitás miatt meg fog egyezni a ϕ n -edik időlépésben és * pontban felvett értékével. Mivel az n -edik időszinten a ϕ eloszlását csak a rácspontokban ismerjük, ezért a * pontbeli értéket térbeli interpolációval tudjuk előállítani. Az egyszerűség kedvéért tekintünk most a legegyszerűbb lineáris interpolációt, amivel a következőt kapjuk:

$$\phi_{j,n+1} = \phi_{*,n} = (1 - \alpha) \cdot \phi_{j-p,n} + \alpha \cdot \phi_{j-p-1,n}. \quad (\text{XIII.116.})$$

A Neumann-módszer segítségével belátható, hogy

$$|\lambda_k|^2 = 1 - 2\alpha \cdot (1 - \alpha) \cdot (1 - \cos k\Delta x) \quad (\text{XIII.117.})$$

mellett a séma stabilitásának feltétele, hogy α -ra fennálljon az alábbi:

$$0 \leq \alpha \leq 1. \quad (\text{XIII.118.})$$

Ez azonban a séma konstrukciójából eredően teljesül (hiszen α -t pontosan így választottuk meg), így **a séma feltétel nélkül stabil**. A szemi-Lagrange módszer alkalmazásával tehát nem kell tekintettel lennünk a CFL-kritériumra, az abban megengedettnél hosszabb időlépcsőt is választhatunk. Ez az időlépcső azonban továbbra sem lehet tetszőlegesen nagy: **teljesülnie kell a Lipschitz-feltételnek**, mely szerint **a trajektóriák egy időlépcső alatt nem metszhetik egymást** – ellenkező esetben nem lehetséges a részecskék pályáját egyértelműen meghatározni. Mindazonáltal numerikus kísérletekkel igazolták, hogy mezoszkálájú modellek esetén a szemi-Lagrange séma az időlépcső mintegy hatszoros növelését teszi lehetővé az euleri sémákkal szemben (Staniforth és Côté, 1991), továbbá a szemi-implicit sémával való kombinálása esetén az integrálás hatékonysága további hatszorosával nő (Robert et al., 1985).

Feladatok

13. feladat:

A φ mennyiségre vonatkozó egydimenziós lineáris advekción egyenletre a szemi-Lagrange módszert alkalmazva, φ értékét tetszőleges j rácspontban és $(n+1)$ -edik időlépcsőben a következőképpen határozhatjuk meg:

$$\varphi_{j,n+1} = \varphi_{*,n} = (1-\alpha) \cdot \varphi_{j-p,n} + \alpha \cdot \varphi_{j-1,n} \quad (\text{XIII.119.})$$

ahol a p egész szám a Δt idő alatt bejárt rácspontok száma, α pedig 0 és 1 közé eső törtszám, ami azt fejezi ki, hogy a maradék út a ráctávolságnak hanyadrésze. Neumann-módszer segítségével végezzük el (XIII.119.) stabilitási analízisét!

14. feladat:

Lássuk be, hogy a φ mennyiségre vonatkozó egydimenziós lineáris advekción egyenletre a szemi-Lagrange módszert alkalmazva, a folytonos feladatban lévő (u_0) és a diszkrétizált feladatban uralkodó (c') fázissebességek viszonyát jellemző fázishibára a következő adódik:

$$R = \frac{c'}{u_0} = \frac{p \cdot k \cdot \Delta x + \arctg \left[\frac{\alpha \cdot \sin k \Delta x}{1 - \alpha(1 - \cos k \Delta x)} \right]}{k \cdot \Delta x \cdot (p + \alpha)} \quad (\text{XIII.120.})$$

ahol a p egész szám a Δt idő alatt bejárt rácspontok száma, α pedig 0 és 1 közé eső törtszám, ami azt fejezi ki, hogy a maradék út a ráctávolságnak hanyadrésze! Értelmezzük az eredményt!

Megoldások

13. feladat:

A Neumann-módszert (l. a 8. feladatnál) alkalmazva (XIII.119.)-re:

$$\lambda_k^{n+1} \cdot c_k \cdot e^{ikx_j} = (1-\alpha) \cdot \lambda_k^n \cdot c_k \cdot e^{ikx_{j-p}} + \alpha \cdot \lambda_k^n \cdot c_k \cdot e^{ikx_{j-1}} \quad (\text{XIII.121.})$$

Egyszerűsítve $\lambda_k^n \cdot c_k \cdot e^{ikx_j}$ -vel:

$$\lambda_k = (1-\alpha) \cdot e^{-ik \cdot p \Delta x} + \alpha \cdot e^{-ik \cdot (p+1) \Delta x} \quad (\text{XIII.122.})$$

Ezt kifejtve:

$$\begin{aligned}\lambda_k &= (1-\alpha) [\cos(pk\Delta x) - i \cdot \sin(pk\Delta x)] + \\ &+ \alpha \{ \cos[(p+1)k\Delta x] - i \cdot \sin[(p+1)k\Delta x] \} = \\ &= (1-\alpha) \cdot \cos(pk\Delta x) + \alpha \cdot \cos[(p+1)k\Delta x] - \\ &- i \cdot (1-\alpha) \cdot \sin(pk\Delta x) - i \cdot \alpha \cdot \sin[(p+1)k\Delta x] .\end{aligned}\quad (\text{XIII.123.})$$

Kifejezve λ_k abszolútértékének négyzetét:

$$\begin{aligned}|\lambda_k|^2 &= \text{Re}^2 + \text{Im}^2 = \\ &= (1-\alpha)^2 \cdot \cos^2(pk\Delta x) + \alpha^2 \cdot \cos^2[(p+1)k\Delta x] + \\ &+ 2(1-\alpha) \cdot \alpha \cdot \cos(pk\Delta x) \cdot \cos[(p+1)k\Delta x] + \\ &+ (1-\alpha)^2 \cdot \sin^2(pk\Delta x) + \alpha^2 \cdot \sin^2[(p+1)k\Delta x] + \\ &+ 2(1-\alpha) \cdot \alpha \cdot \sin(pk\Delta x) \cdot \sin[(p+1)k\Delta x] .\end{aligned}\quad (\text{XIII.124.})$$

Felismerve a $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ és a $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta$ azonosságokat, a fentit egyszerűbb alakra hozhatjuk:

$$|\lambda_k|^2 = (1-\alpha)^2 + \alpha^2 + 2(1-\alpha) \cdot \alpha \cdot \cos(k\Delta x) . \quad (\text{XIII.125.})$$

Átrendezés után az alábbiakat kapjuk:

$$|\lambda_k|^2 = 1 - 2(1-\alpha) \cdot \alpha \cdot [1 - \cos(k\Delta x)] . \quad (\text{XIII.126.})$$

A stabilitáshoz a következőnek kell teljesülnie:

$$\begin{aligned}|\lambda_k|^2 &= 1 - 2(1-\alpha) \cdot \alpha \cdot [1 - \cos(k\Delta x)] \leq 1 , \\ 0 &\leq (1-\alpha) \cdot \alpha \cdot [1 - \cos(k\Delta x)] .\end{aligned}\quad (\text{XIII.127.})$$

Mivel a harmadik tényező nem-negatív, így az első két tényező szorzatának is annak kell lennie a feltétel teljesüléséhez. Ez pedig úgy lehetséges, ha $0 \leq \alpha \leq 1$, ami eleve adódik a séma konstrukciójából. A szemi-Lagrange módszer tehát feltétel nélkül stabil.

14. feladat:

A 13. feladatban λ_k -ra a következőt kaptuk:

$$\lambda_k = (1-\alpha) \cdot e^{-i\tilde{R} \cdot p\Delta x} + \alpha \cdot e^{-i\tilde{R} \cdot (p+1)\Delta x} . \quad (\text{XIII.128.})$$

A diszkrét feladatbeli fázissebesség kifejezéséhez tekintsük λ_k -ra a $\lambda_k = |\lambda_k| \cdot e^{i\theta}$ alakot és használjuk fel a (XIII.128.) összefüggést:

$$\lambda_k = |\lambda_k| \cdot e^{i\theta} = e^{-i\tilde{R} \cdot p\Delta x} [1 - \alpha \cdot (1 - e^{-i\tilde{R} \cdot \Delta x})] . \quad (\text{XIII.129.})$$

Rendezzük át a kapott egyenletet a következőképpen:

$$|\lambda_k| \cdot e^{\theta} \cdot e^{ik \cdot p \Delta x} = 1 - \alpha \cdot (1 - e^{-R \Delta x}) . \quad (\text{XIII.130.})$$

Felismerve és ismét felhasználva a $\lambda_k = |\lambda_k| \cdot e^{i\theta}$ alakot:

$$|\lambda_k| \cdot e^{i(\theta + k p \Delta x)} = \underbrace{1 - \alpha + \alpha \cdot \cos(k \Delta x)}_{\text{Re}} - i \underbrace{\alpha \cdot \sin(k \Delta x)}_{\text{Im}} . \quad (\text{XIII.131.})$$

Ebből $\theta' = \theta + k p \Delta x$ helyettesítéssel élve:

$$\theta' = \theta + k p \Delta x = \arctg \frac{\text{Im}}{\text{Re}} = \arctg \frac{-\alpha \cdot \sin(k \Delta x)}{1 - \alpha + \alpha \cdot \cos(k \Delta x)} . \quad (\text{XIII.132.})$$

Kifejezve a θ fázisszöveget:

$$\theta = \arctg \frac{-\alpha \cdot \sin(k \Delta x)}{1 - \alpha + \alpha \cdot \cos(k \Delta x)} - k p \Delta x , \quad (\text{XIII.133.})$$

amiből a fázishiba (XIII.115.) felhasználásával a következőnek adódik:

$$R = \frac{c'}{u_0} = - \frac{\theta}{u_0 \cdot k \Delta t} = \frac{p \cdot k \cdot \Delta x + \arctg \left[\frac{\alpha \cdot \sin k \Delta x}{1 - \alpha (1 - \cos k \Delta x)} \right]}{k \cdot \Delta x \cdot (p + \alpha)} . \quad (\text{XIII.134.})$$

A fázishibára kapott kifejezés alapján látható, hogyha a kiindulási pont rácspontba esik, azaz α értéke 0 vagy 1, akkor a szemi-Lagrange módszer nem változtat a megoldás terjedési sebességén ($R = 1$). A hosszú hullámoknál (amikor $k \Delta x \rightarrow 0$) a fázishiba szintén 1-hez közeli értéket vesz fel, továbbá akkor is, amikor a p nagy, tehát egy időlépés alatt a részecske nagy távolságot tesz meg.

XIII.7. Kitekintés

A példatár jelen fejezetében a numerikus prognosztika számos területe közül a különböző diszkretizációs eljárások pontosságát és stabilitását elemeztük gyakorlati feladatokon keresztül, külön hangsúlyt fektetve az ún. *rácsponti modellekben* a differenciáloperátorok közelítésére használt véges különbséges sémákra. Az alábbiakban röviden áttekintést adunk azokról a témákról, amelyek a jelen jegyzetben nem szerepeltek, de a numerikus előrejelzés kulcsfontosságú módszereiként részletesen tárgyaljuk őket az „Alkalmazott számszerű előrejelzés – numerikus időjárási és csatolt modellek a gyakorlatban” című jegyzet II. fejezetében, esetenként gyakorlati példákkal kiegészítve:

- A véges differencia sémák mellett az egyenletekben szereplő horizontális térbeli differenciáloperátorokat közelíthetjük olyan folytonos függvények lineáris kombinációjaként, melyek analitikusan deriválhatók, s így elvben segítségükkel a deriváltak végtelen rendű pontossággal meghatározhatók. Ezt a technikát Galjorkin-módszernek nevezzük és ezen belül a függvényrendszer megválasztásától függően beszélhetünk végeelem, illetve spektrális módszerről.
- A numerikus előrejelzés során olyan folyamatokat is figyelembe kell vennünk, amelyeket nem tudunk explicit módon származtatni – vagy azért, mert túl bonyolultak, vagy azért, mert karakterisztikus méretük kisebb a modell térbeli rácsának felbontásánál. Ezeket ún. *parametrizációs eljárások* segítségével írjuk le a numerikus modellekben.
- A modellintegrálás megkezdéséhez szükséges kezdeti feltétel meghatározása az előrejelzés elkészítésének egyik legkritikusabb lépése, hiszen minél pontosabban ismerjük a légkör kiindulási állapotát leíró meteorológiai elemek

eloszlását, annál megbízhatóbban tudjuk előrejelezni ezek változását. Az ún. *adatasszimiláció* során az előrejelzési tartományt lefedő háromdimenziós rács minden pontjában előállítjuk az állapotváltozók kezdeti értékeit, amihez minden létező meteorológiai információt felhasználunk: különböző típusú megfigyelési adatokat, korábbi időpontból indított modell-előrejelzéseket, valamint ezek egyes jellemzőit.

- A numerikus prognosztika dinamikusan fejlődő területe az éghajlati modellezés, ami hasonló numerikus módszerekre támaszkodik, mint a rövidtávú előrejelzések. Lényeges különbség az időjárás előrejelzéséhez képest, hogy az éghajlati rendszer fejlődését nemcsak a légkör, hanem a teljes földi rendszer folyamatai kormányozzák, ezért az éghajlati szimulációkban a légköri modellekhez óceáni és egyéb numerikus modelleket is csatolnak, ami egyben az előrejelezhetőség fogalmát is átértelmezi.
- A meteorológiai előrejelzések bizonytalansággal terheltek, melyek több forrásból erednek. A rövidtávú előrejelzések esetében elsősorban a kezdeti feltételek bizonytalanságából, valamint az időjárási modellek pontatlanságaiból származnak, éghajlati skálán pedig a klímamodellek közelítő jellegéből és a jövőbeli emberi tevékenység előrejelezhetetlenségéből (kiszámíthatatlanságából) adódnak. A különböző bizonytalanságokat az ún. *ensemble technika* segítségével számszerűsíthetjük, amelynek során nem egyetlen modellkísérletet tekintünk, hanem több szimuláció együttesét.

XIII.8. Irodalomjegyzék

Courant, R., Friedrichs, K.O. and Lewy, H., 1928: Über die Partiellen Differenzengleichungen der Mathematischen Physik. Math. Annalen 100, 32–74.

Courant, R. and Hilbert, D., 1962: Partial differential equations. Methods of mathematical physics, Vol. II, Interscience, New York, pp. 561.

Dévényi D., Horányi A. és, Radnóti G., 1998: Numerikus módszerek az időjárás előrejelzésben. Országos Meteorológiai Szolgálat, Budapest.

Kalnay, E., 2003: Atmospheric modelling, data assimilation and predictability. Cambridge University Press, Cambridge.

Horányi A., Ihász I. és Radnóti G., 1998: Az időjárás számszerű előrejelzése. Természet Világa 129, különszám, 39–42.

Lax, P.D. and Richtmyer, R.D., 1956: Survey of the stability of linear finite difference equations. Comm. Pure Appl. Math. 9, 267–293.

Mesinger, F. and Arakawa, A., 1976: Numerical Methods Used in Atmospheric Models, Volume 1. GARP Publications Series 17.

Radnóti G., 2003: A numerikus előrejelzés alapjai, numerikus módszerek. 29. Meteorológiai Tudományos Napok, beszámolókötet, 25–40.

Robert, A.J., 1981: A stable numerical integration scheme for the primitive meteorological equations. Atmosphere–Ocean 19, 35–46.

Robert, A., Yee, T.L. and Ritchie, H., 1985: A semi-Lagrangian and semi-implicit numerical integration scheme for multilevel atmospheric models. Mon. Wea. Rev. 113, 388–394.

Staniforth, A. and Côté, J., 1991: Semi-Lagrangian Integration Schemes for Atmospheric Models – A Review. Mon. Wea. Rev. 119, 2206–2223.

Köszönetnyilvánítás

Köszönet illeti Horányi András javaslataiért és észrevételeiért, melyek mindig további gondolkodásra készítenek.

II. rész - MEGOLDÁSOK

Tartalom

I. A légköri hidro-termodinamikai egyenletrendszer	264
I.1. Általános mechanikai feladatok	264
I.2. A légkörben ható erők	277
I.3. A vertikális koordinátázás kérdése	284
I.4. A légköri folyamatok nagyságrendi analízise	292
II. A légköri kinematika	298
II.1. A meteorológiai állapothatározók interpolációja	298
II.2. A légkör skalár- és vektormezői, valamint deriváltjaik és integráljaik	302
II.3. Az Einstein-féle jelölérendszer alkalmazása	314
II.3.1. Vektoralgebra	314
II.3.2. Vektoranalízis	319
II.4. A barotróp és a baroklin légkör	330
II.5. Koordináta-rendszer forgatások, a lineáris skalár- és vektormezők felbontása	335
II.6. Véges különbséges módszerek alkalmazása a deriváltak és az invariánsok meghatározásában	345
III. Egyensúlyi és nem-egyensúlyi mozgások a légkörben	355
III.1. A geosztrófikus és a gradiens szél	355
III.2. A termikus szél	360
III.3. Ageosztrófikus áramlás	366
III.4. Az áramvonal és a trajektória	369
IV. A cirkuláció és az örvényesség	374
IV.1. A cirkuláció, az örvényesség és a Bjerknes-féle örvényességi tétel	374
IV.2. Az örvényességi és a divergencia-egyenlet, a potenciális örvényesség és szerepe a légköri folyamatok leírásában	381
V. A légkördinamikai egyenletek felállítása, vizsgálata és megoldása	390
V.1. Kétdimenziós folyadékáramlás	390
V.2. A sekély víz típusú áramlások	400
V.3. Előrejelzési légkörmodellek	404
VI. Diszkontinuitási felületek a légkörben	407
VI.1. Légköri frontok	407
VI.2. A tropopauza	416
VI.3. A sugáráram (jet stream)	420
VII. A légköri turbulencia	422
VII.1. Térbeli és időbeli átlagok	422
VII.2. Alkalmazott egyenletek, főbb egyszerűsítések, lezárási hipotézisek	426
VII.3. A turbulencia Kolmogorov-féle spektrális elmélete	431
VIII. A felszínközeli réteg és a planetáris határréteg	436
VIII.1. A felszínközeli réteg profiljai	436
VIII.2. Monin–Obukhov-féle hasonlósági elmélet és alkalmazásai	440
VIII.3. A felszínközeli réteg turbulencia karakterisztikáinak számítása	452
VIII.4. Az Ekman-spirál	459
VIII.5. A stabil és az instabil keveredési réteg vastagságának számítása	462
VIII.6. A turbulens keveredés, a szennyezőanyag diszperziója	464
IX. Légköri hullámok	470
IX.1. Felületi és térbeli hullámok	470
IX.2. Hanghullámok megoldások	481
IX.3. Tehetetlenségi és gravitációs hullámok	484
X. Légköri energetika	496
X.1. Légköri energiafajták	496
X.3. A felhasználható potenciális energia	514
XI. A szinoptikus skálájú légköri folyamatok dinamikája	522
XI.1. A szinoptikus mozgásrendszerek főbb sajátosságai, matematikai leírásuk	522
XI.2. A tendencia- és az omega-egyenlet	524
XI.3. A vertikális sebesség becslése	525
XII. Különböző típusú és különböző skálájú légköri instabilitások	529
XII.1. A hidrosztatikai instabilitás	529

XII.2. A barotróp instabilitás	534
XII.3. A baroklin instabilitás	537

I. fejezet - A légköri hidro-termodinamikai egyenletrendszer

I.1. Általános mechanikai feladatok

I.1.1. A $v_1 = 5 \text{ m s}^{-1}$ sebességgel induló test $t_1 \approx 0,51 \text{ s}$ múlva kezd visszaesni, amikor is $v_1 = g t$. A test $t_2 \approx 1,02 \text{ s}$ múlva esik le a talajra $z = \frac{g}{2} t_1^2$ magasságból ($z = 1,27 \text{ m}$).

I.1.2. A test összesen $t = t_0 + t_1$ ideig esett. A megtett út: $z = \frac{g}{2} t^2$. Teljesül továbbá, hogy

$$(n+1) \frac{g}{2} t_0^2 = \frac{g}{2} (t_0 + t_1)^2$$

A t_0 -ra másodfokú egyenlet megoldása után, t ismeretében már kiszámítható az esési magasság.

$$z = \frac{g}{2} t^2 = \frac{g}{2} \frac{t_1^2 (1+n+\sqrt{1+n})^2}{n^2}$$

I.1.3. Az ágyúgolyó megtartja horizontális sebességét, ami $v_h = 70,7 \text{ m s}^{-1}$. Szintén ennyi az induló függőleges

sebesség (w). Az ágyúgolyó emelkedési ideje: $t_1 = \frac{w_0}{g} = 7,2 \text{ s}$, emelkedési magassága a hegy lábához viszonyítva: $h = 100 + \frac{g}{2} t_1^2 = 354,8 \text{ m}$. Az esési ideje: $t_2 = (2h/g)^{1/2} = 8,5 \text{ s}$. A földet érés horizontális távolsága $v_h \cdot (t_1 + t_2) \approx 1100 \text{ m}$.

I.1.4. Az asztalon mozgó m_1 tömegű testet körpályán tartó erő: $F_{cp} = m_2 g = m_1 \omega^2 r$. A szögsebesség: $\omega = 10 \text{ s}^{-1}$. Ha a sugár 10 cm-rel csökken, akkor a test sebessége növekszik, hiszen a centripetális erő nem változik, hiszen ugyanaz a súly húzza. A munkavégzés a kinetikus energia növekedésére fordítódik. Az új szögsebesség (ω_1) az $F_{cp} = m_2 g = m_1 \omega_1^2 r_1$ egyenletből számítható, értéke: $\omega_1 = 10,54 \text{ s}^{-1}$. A munkavégzés során az m_1 tömegű test a ráható állandó F_{cp} erő hatására mozdult el az erő irányába 10 cm-t. A munkavégzés: $W = m_2 g (r - r_1) = 10 \text{ J}$.

I.1.5. Az ingatest körpályán mozog (MI.1.1. ábra). Ha a test körmozgást végez, akkor a fonál által kifejtett húzó erő

$$F_f = \frac{mg}{\cos \alpha}$$

és a nehézségi erő

$$F_g = mg$$

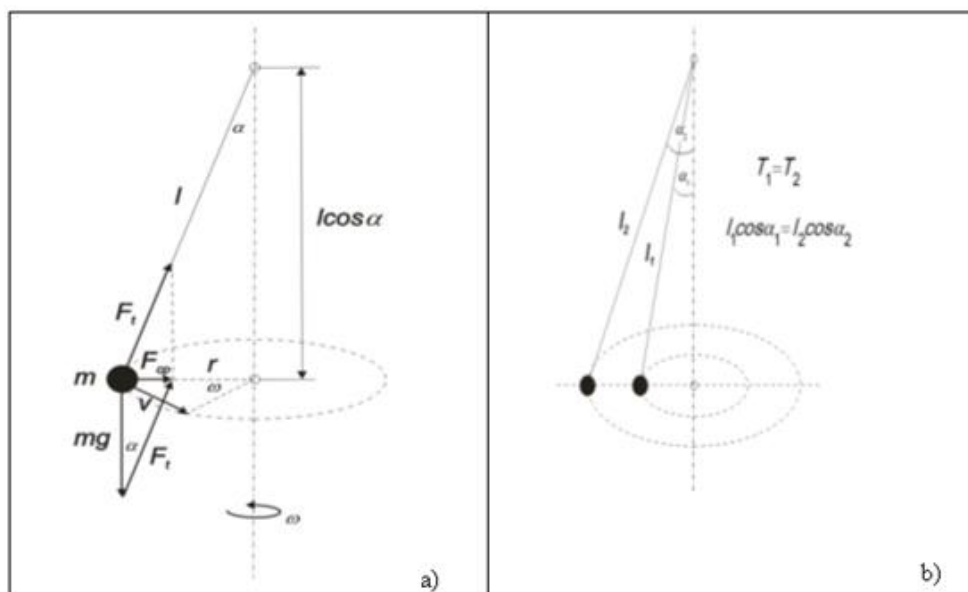
eredője a centripetális erő

$$F_{cp} = m \frac{v^2}{r} = m\omega^2 r$$

Teljesülnie kell, hogy $mg \tan \alpha = m\omega^2 r$, ahol $r = l \sin \alpha$. Az egyenlőség akkor teljesül, ha $\tan \alpha = \frac{l\omega^2}{g} \sin \alpha$. Mivel

$0 < \alpha < 90^\circ$ tartományban $\tan \alpha > \sin \alpha$, ezért az egyenlőség csak akkor teljesülhet, ha $\frac{l\omega^2}{g} > 1$, illetve $\omega^2 > \frac{g}{l}$.

Ellenkező esetben a test nem maradhat körpályán. A fenti egyenletből a keringési idő is megadható: $T = 2\pi \sqrt{\frac{l \cos \alpha}{g}}$.



MI.1.1. ábra. A köringára ható erők sematikus képe (a). A különböző fonálhosszúságú, de azonos magasságú kúpingák keringési ideje megegyezik Huygens törvénye szerint (b).

I.1.6. Mivel a két hasáb közötti súrlódási együttható (μ_1) kisebb, mint a hasáb és a lejtő közötti (μ_2), ezért a két hasáb a lejtőn és egymáson is csúszik (MI.1.2. ábra). A két hasáb közötti súrlódási erő:

$$F_{s1} = \mu_1 m_1 g \cos \alpha,$$

az alsó hasáb és a lejtő közötti súrlódási erő pedig:

$$F_{s2} = \mu_2 (m_1 + m_2) g \cos \alpha.$$

A gyorsulások pedig rendre:

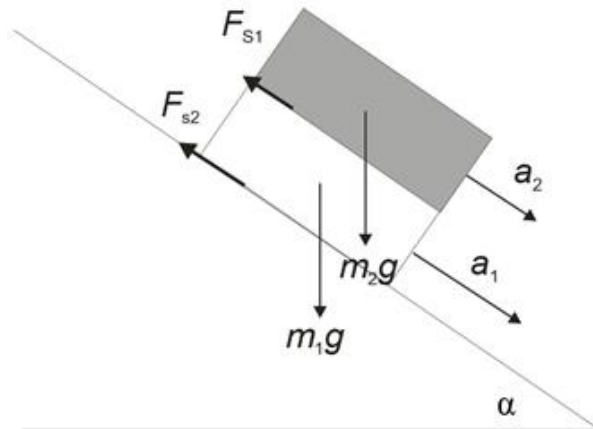
$$a_1 = g(\sin \alpha - \mu_1 \cos \alpha),$$

$$a_2 = g \sin \alpha - \mu_1 \frac{m_1}{m_2} g \cos \alpha - \mu_2 \frac{m_1 + m_2}{m_2} g \cos \alpha$$

$$= g \left(\sin \alpha - \mu_2 \cos \alpha - (\mu_2 - \mu_1) \frac{m_1}{m_2} \cos \alpha \right)$$

Az adatok behelyettesítése után:

$$a_1 = 0,7 \frac{\sqrt{2}}{2} g \approx 0,49g \quad a_2 = \sqrt{2} \left(0,3 - 0,05 \frac{m_1}{m_2} \right) g$$



MI.1.2. ábra. A lejtőn csúszó hasábok.

I.1.7. Az üzemanyaggal együtt m tömegű, v sebességgel haladó rakéta impulzus változása esetén Δt idő alatt Δm üzemanyag elégetése után, a másodrendben kis tagok elhanyagolása után:

$$m \Delta v = -\Delta m u,$$

ahol u a kiáramló gáz sebessége, Δv a rakéta sebességváltozása. Tovább alakítva a véges különbségeket, az időbeli változásra a következő differenciálegyenlet adódik a tolóerő időbeli változására:

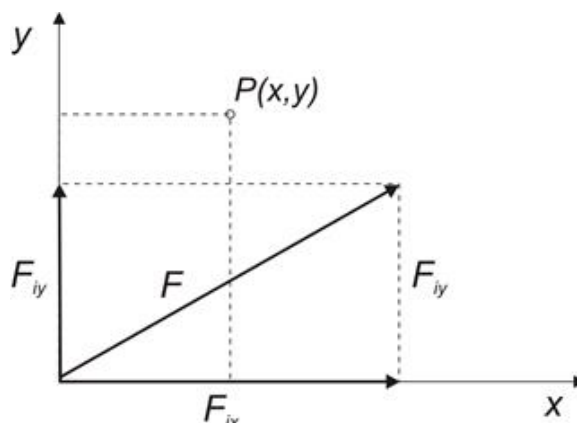
$$m \frac{dv}{dt} = - \frac{dm}{dt} u.$$

A $\frac{dm}{dt} u$ kifejezés adja azt az erőt, amellyel dt idő alatt a dm tömegű gáz u sebességre gyorsítható. A rakéta gyorsulása folyamatosan változik, hiszen csökken a tömege.

I.1.8. Három erő akkor tart egyensúlyt, ha közülük bármely kettő eredője kiegyensúlyozza a harmadikat. Ez nem teljesül a feladat állításában.

I.1.9. Vegyünk az (x, y) koordináta-rendszerben egy $P(x_0, y_0)$ pontot (MI.1.3. ábra)! Legyen az i -edik erő $\mathbf{F}_i$ x és y irányú komponense rendre: F_{ix}, F_{iy} . A P pontra vonatkozó forgatónyomaték:

$$M_i = F_{iy} x_0 - F_{ix} y_0.$$



MI.1.3. ábra. Az $\mathbf{F}_i$ erő P pontra vonatkozó forgatónyomatékának meghatározása.

A teljes erőrendszert tekintve pedig:

$$M = \sum_i M_i = y_0 \sum_i F_{ix} - x_0 \sum_i F_{iy} = y_0 F_x - x_0 F_y,$$

ahol $F_x = \sum_i F_{ix}$, $F_y = \sum_i F_{iy}$ az eredő erő komponensei. A felírásból következik, hogy az erőrendszer nyomatékainak algebrai összege az eredő erő tetszőleges pontjára zérust ad.

I.1.10. Az előző feladat eredményét kihasználva $M = y_0 F_x - x_0 F_y$ és tudva, hogy az eredő erő nulla kapjuk a megoldást.

I.1.11. A merev testet „tömegpontokra bontjuk”, amelyek körpályán mozognak. A forgó test kinetikus energiája a tömegpontok kinetikus energiájának az összege.

$$K = \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i (r_i \omega)^2 = \frac{1}{2} \omega^2 \sum_i m_i r_i^2,$$

A merev test forgástengelyén átmenő tehetetlenségi nyomatéka pedig éppen

$$\Theta = \sum_i m_i r_i^2.$$

I.1.12.

a) Az m tömegű test sugárirányú elmozdulásával nem változik a forgás-mennyiség, vagy impulzusnyomaték $N = \Theta \dot{\phi} = \Theta \omega$, a tehetetlenségi nyomaték azonban igen. A korong tehetetlenségi nyomatéka: 50 kg m^2 . A forgástengelytől 3 m-re levő m tömegű testé pedig $mr^2 = 45 \text{ kg m}^2$. A korong és a rajta levő test tehetetlenségi nyomatéka: 95 kg m^2 , impulzusnyomatéka pedig $285 \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1}$. Az m tömegű testet a forgásközépponttól $r_1 = 1 \text{ m}$ -es távolságra hoztuk; tehetetlenségi nyomaték csökkent ($\Theta_1 = mr_1^2 = 5 \text{ kg m}^2$). A rendszer tehetetlenségi nyomatéka: 55 kg m^2 . A szögsebesség új értéke: $\omega_1 = \Theta \omega / \Theta_1 = 5,18 \text{ s}^{-1}$. A rendszer kinetikus energiájának megváltozása:

$$\Delta K = \frac{1}{2} \Theta_1 \omega_1^2 - \frac{1}{2} \Theta \omega^2 = 310,9 \text{ J}.$$

Ennyi volt a motor munkavégzése.

b) Ha a rendszer úgy fékeződik le a kezdeti szögsebességre, hogy az m tömegű test továbbra is a forgástengelytől 1 m távolságra lesz, akkor a kinetikus energiaváltozás, ami hővé alakul:

$$|\Delta K_1| = \frac{1}{2} \Theta_1 \omega_1^2 - \frac{1}{2} \Theta_1 \omega^2 = 490,4 \text{ J}$$

Az m tömegű test közelebb van a forgástengelyhez, tehát a rendszer kinetikus energiája (azonos szögsebesség mellett) kisebb, mint a kiindulási állapotban volt.

I.1.13. A korongra hat az mg nehézségi gyorsulási erő, a lejtő által kifejtett, a lejtőre merőleges F_k reakció erő, valamint a korongot a lejtővel érintkező pontjában támadó F_z nyugalmi súrlódási erő. F_k -t kiegyensúlyozza a nehézségi erő lejtőre merőleges összetevője ($mg \cos \alpha$), így a mozgás szempontjából csak a súrlódási erő és a nehézségi erő lejtő irányú komponense ($mg \sin \alpha$) lényeges (MI.1.4. ábra).

A korong kerületén ható F_z súrlódási erő helyettesíthető a tömegközéppontban támadó F_z erővel és az $M = Sr$ nyomatékú erőpárral. A tömegközéppont haladó mozgását meghatározó egyenlet:

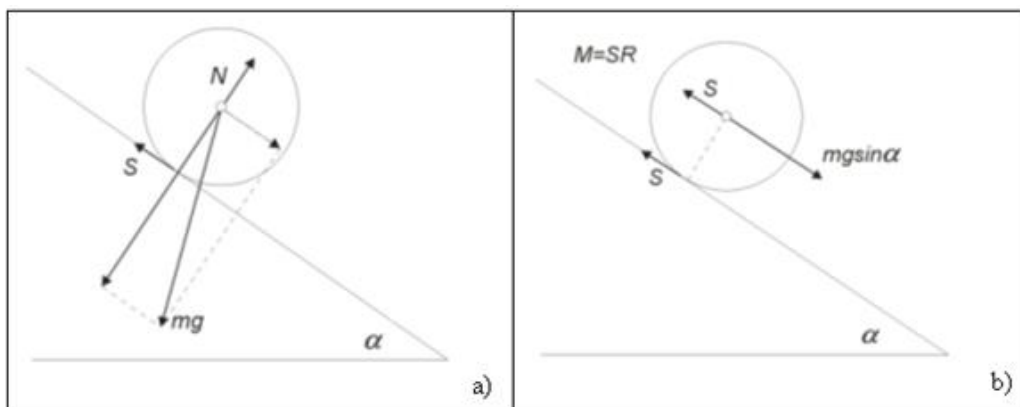
$$ma = mg \sin \alpha = F_z,$$

ahol a a gyorsulás. A súlypont körüli forgás egyenlete: $M = Sr = \Theta \beta$, ahol β a szöggyorsulás. A kényszerfeltételekből következő egyenletek:

$$a = r\beta, \quad \beta = \frac{r \sin \alpha}{\Theta + mr^2} g, \quad a = \frac{r^2 \sin \alpha}{\Theta + mr^2} g, \quad F_z = \frac{\Theta}{\Theta + mr^2} mg \sin \alpha$$

Kihasználva, hogy a korong tehetetlenségi nyomatéka $\Theta = \frac{1}{2} mr^2$:

$$\beta = \frac{2}{3} \frac{g \sin \alpha}{r}, \quad a = \frac{2}{3} g \sin \alpha, \quad F_z = \frac{1}{2} mg \sin \alpha$$



MI.1.4. ábra. A lejtőn leguruló korongra ható erők (a), a mozgás leírása (b).

A munkatétel szerint a lejtő aljára érkező henger kinetikus energiája a potenciális energia változásával egyenlő.

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\Theta\omega^2,$$

amíg a korong nem csúszik, a v sebesség a szögsebességgel arányos:

$$v = \omega r.$$

A szögsebesség pedig:

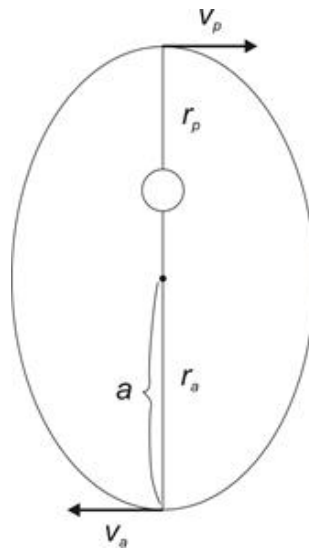
$$\omega = \frac{2}{r}\sqrt{\frac{gh}{3}}.$$

I.1.14. Kepler törvénye alapján a mesterséges hold területi sebessége állandó. A műhold sebessége mind a Földhöz legközelebbi (v_p), mind a legtávolabbi pontban (v_a) merőleges a vezérsugárra (MI.1.5. ábra).

Teljesül, hogy $v_p r_p = v_a r_a$. Az energia-megmaradás törvénye szerint:

$$\frac{1}{2}mv_p^2 + m\Phi_{r_p} = \frac{1}{2}mv_a^2 + m\Phi_{r_a},$$

ahol $\Phi_r = -\frac{\gamma m_F}{r}$ a Föld középpontjától $r > r_F$ távolságban a potenciál, vagyis a tömegegységnyi test helyzeti energiája.



MI.1.5. ábra. A műhold mozgása földközelen és földtávolban.

Azonos átalakítások után, s kihasználva hogy

$$\Phi_{r_F} = -\frac{\gamma m_F}{r_F} = g r_F,$$

illetve hogy a pálya nagytengelye $2a = r_p + r_a$, ahol r_p a műhold távolsága a Föld középpontjától a Földhöz legközelebbi pontban (perigeum), míg r_a a Föld középpontjától vett legtávolabbi pontban (apogeum). Azonos átalakítások után kapjuk a következő összefüggést:

$$v_a^2 = g r_F^2 \frac{r_p}{r_a} \frac{1}{a}$$

Ha a szokásos módon e -vel jelöljük az ellipszis fókuszpontjának a középponttól való távolságát (excentricitás), akkor $a - r_p = r_a - a = e$ és

$$v_a^2 = g r_F^2 \frac{1}{a} \frac{a-e}{a+e}, \quad v_p^2 = g r_F^2 \frac{1}{a} \frac{a+e}{a-e}$$

A pálya tetszőleges pontjában (a Föld középpontjától r távolságra) a sebességet v_a , illetve v_p ismeretében az energiátétel alapján számíthatjuk ki:

$$v^2 = g r_F^2 \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)$$

I.1.15. A geostacionárius műhold együtt mozog az égitesttel. Egyenlítői pályán haladva szögsebessége (ω) megegyezik az égitest szögsebességével ($\omega = \Omega$). A műholdat a nehézségi erő tartja a pályán.

$$g \left(\frac{r_0}{r} \right)^2 = r \Omega^2 \quad h = r - r_0 = \left(g \frac{r_0}{\Omega^2} \right)^{1/3} - r_0$$

ahol g a nehézségi erő az adott égitest felszínén, r a pálya sugara $h = r - r_0$ a felszín feletti magassága, míg Ω az égitest szögsebessége. Az egyes égitestek forgásának szögsebességét és a geostacionárius pálya magasságát a *MI.1.1. táblázatban* közöljük.

MI.1.1. táblázat. Az egyes égitestek szögsebessége és a geostacionárius pálya magassága. A Vénusz és a Merkúr esetén a nagy távolság miatt ennek csak elméleti jelentősége van.

Égitest	Ω [s ⁻¹]	h [km]
Merkúr	12,40 10 ⁻⁷	246 542
Vénusz	-2,992 10 ⁻⁷	1 545 448
Föld	7,292 10 ⁻⁵	35 779
Mars	7,085 10 ⁻⁵	17 325
Jupiter	17,748 10 ⁻⁵	88 209
Szaturnusz	16,754 10 ⁻⁵	50 188
Uránusz	-10,117 10 ⁻⁵	56 058
Neptunusz	10,840 10 ⁻⁵	52 520
Hold	26,620 10 ⁻⁷	86 286

I.1.16. Az előző feladat megoldása alapján a műhold ω szögsebességét a

$$g \left(\frac{r_{\text{geoz}}}{2r_{\text{geoz}}} \right)^2 = 2r_{\text{geoz}} \omega^2$$

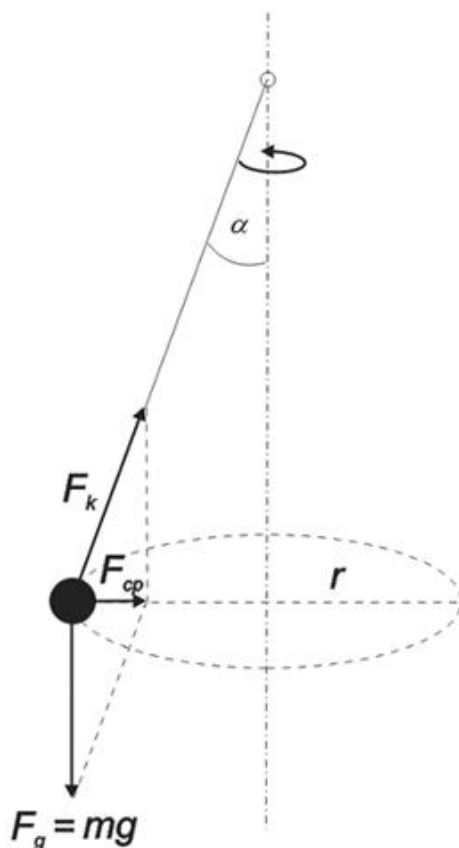
egyenletből számíthatjuk ki. A műholdra ható erő: $mg/4$.

I.1.17. Az elmozduló test súlyát a Coriolis-erő függőleges komponense változtatja meg. Ennek értéke:

$$(F_{Cor})_z = mu(2\Omega \cos \phi),$$

ami a 45 szélességi körön $(F_{Cor})_z = mu \cdot 10^{-4}$. Itt u a szélességi körök menti sebesség; pozitív, ha a test kelet felé halad. A test súlya $(F_{Cor})_z = 0,244 \text{ kg m s}^{-2}$ értékkel változik. Ha kelet fele halad, akkor csökken a súlya (a Coriolis-erő ellentétes a nehézségi erővel), ha nyugat felé (a Föld forgásirányával szemben) halad, akkor növekszik.

I.1.18. Rajzoljuk fel az erőket (MI.1.6. ábra)!



MI.1.6. ábra. A körhintán ülőre ható erők

A gravitációs erő: $F_g = mg$, a köté hűzóereje: F_k . A körhintában űlőt a centripetális erő tartja a pályán: $F_{cp} = m \frac{v^2}{r}$. A feladat szerint fennáll, hogy $F_{cp} = F_k \sin \alpha = 1,1 mg \sin \alpha$. Tudjuk továbbá, hogy $\cos \alpha = F_g / F_k = 1 / 1,1$ ($24,6^\circ$). Számítások után a pálya sugara: $r = 22,25 \text{ m}$.

I.1.19. Az Coriolis-erő hatására a mozgó test eltérül az eredeti irányától. A labdák azonos v sebességgel haladnak egymás felé. $x = 50 \text{ m}$ -es út megtétele után az egyes labdák $s = 2 \text{ cm}$ -rel térülnek el az eredeti irányuktól (éppen nem ütköznek össze). $t = x / v$ idő elteltével találkoznak. Az elmozdulásra merőleges eltérítő erő:

$$F_{Cor} = mfv,$$

ahol f a Coriolis-paraméter: $f = 2\Omega \sin \phi = 0,995 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$. A Coriolis-erő az egyedüli, ami az elmozdulásra merőleges irányba gyorsítja a labdákat. Ennek figyelembevételével:

$$s = \frac{1}{2} \frac{F_{Cor}}{m} t^2 = \frac{1}{2} f v t^2 = \frac{1}{2} f v \frac{x^2}{v^2} = \frac{1}{2} f \frac{x^2}{v}$$

Az adatok behelyettesítése után a labdák sebessége: $6,2 \text{ m s}^{-1}$.

I.1.20. Az előző feladat megoldása alapján dolgozunk: $v = 0,002 \text{ m s}^{-1}$.

I.1.21. Az y irányú mozgásegyenletet:

$$\frac{dv}{dt} = -fu$$

vagyis

$$v = -2\Omega u t \sin \phi$$

E formulát integrálva kapjuk a keresett eltérést:

$$v dt = \int_0^t v dt = \int_y^{\Delta y} dy = -2\Omega \sin \phi \int_0^t t dt$$

Felhasználva, hogy $t = \frac{x}{u}$ azt kapjuk, hogy $\Delta y = -\Omega \left(\frac{x}{u} \right)^2 \sin \phi$.

I.1.22. A Coriolis-erő horizontális komponense:

$$(F_{Cor})_h = mfv$$

ahol v a mozdony sebessége. A sínekre ható oldalirányú erő, ha az egy pontban koncentrálódna: $(F_{Cor})_h = 995 \text{ N}$. A Coriolis-erő vertikális komponense:

$$(F_{Cor})_z = m \cdot 2\Omega \cos \phi \cdot u$$

A mozdony súlyának megváltozása (mivel szélességi kör mentén halad) megegyezik a Coriolis-erő nagyságával. A súly csökken, ha keleti irányba halad a mozdony. A Coriolis-erő pozitív, vagyis ellentétes a nehézségi erővel. $|(F_{Cor})_z| = 1067 \text{ N}$.

I.1.23. Az Egyenlítőn lefele eső testre horizontális irányban csak a Coriolis-erő hat:

$$\frac{du}{dt} = -2\Omega w, \quad \frac{dv}{dt} = 0$$

ahol w a szabadon eső test vertikális sebessége (megjegyezzük, hogy $w < 0$). A felírásból következik, hogy a test kelet felé térül el. Szabadesés esetén:

$$w = -gt$$

s ez alapján

$$u = \Omega g t^2$$

Integrálás után:

$$\int_0^t u dt = \int_0^{\Delta x} dx = \Omega g \int_0^t t^2 dt, \text{ vagyis } \Delta x = \frac{1}{3} \Omega g t^3$$

Mivel

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}, \quad \Delta x = \frac{2}{3} \Omega h \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Behelyettesítés után: ha a test 10 m-ről esik, a horizontális elmozdulás $\approx 0,7 \text{ mm}$, ha 5 000 m-ről esik, akkor $\approx 7,76 \text{ m}$. (Természetesen itt eltekintünk a súrlódástól, a légköri hatásoktól.)

I.1.24. A zonális eltérést a következő egyenletek segítségével határozzuk meg:

$$\frac{du}{dt} = -lw \quad \text{és} \quad \frac{dw}{dt} = -g$$

ahol $l = 2\Omega \cos \phi$. Amíg a golyó felfelé mozog $w = w_0 - gt$, vagyis

$$\frac{du}{dt} = -l(w_0 - gt)$$

Integrálás után:

$$\frac{du}{dt} = -l \left(w_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \right)$$

Abban pillanatban, amikor a golyó eléri a legnagyobb magasságot ($w=0$) a zonális eltérés a fenti egyenlet integrálásával:

$$\Delta x_1 = -l \left(\frac{1}{2} w_0 t^2 - \frac{1}{6} g t^3 \right)$$

Az esési sebesség és az eltelt idő közötti összefüggés figyelembevételével:

$$\Delta x_1 = -l \left(\frac{1}{2} \frac{w_0^3}{g^2} - \frac{1}{6} \frac{w_0^3}{g^2} \right) = -\frac{1}{3} l \frac{w_0^3}{g^2}$$

Esés közben:

$$\frac{du}{dt} = -l g t$$

Mivel $w = -gt$ azt kapjuk, hogy $u = -\frac{1}{2}lg t^2$, így a zonális eltérés az esés során:

$$\Delta x_2 = \frac{1}{6}l \frac{w_0^3}{g^2}$$

A két ellentétes irányú és nagyságú eltérés összege:

$$\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 = -\frac{1}{6}l \frac{w_0^3}{g^2},$$

az eltérés számértéke: $\Delta x = -167 \text{ m}$.

I.1.25.

a) A forgó rendszerhez képest is forgó mozgást végző testre három erő hat. A centrifugális erő:

$$F_{cf} = mr\omega_0^2,$$

ami a forgó rendszerből származó kényszererő; a forgó rendszerhez viszonyított forgásból származó centripetális erő:

$$F_{cp} = m2\omega_0 v = m2\omega_0 \cdot \omega r,$$

továbbá a forgó rendszerbeli elmozdulás miatt fellépő eltérítő erő, vagy Coriolis-erő

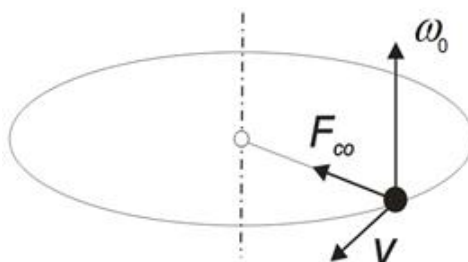
$$F_{Cor} = mr\omega^2 = m \frac{v^2}{r}.$$

A három erő együttes értéke:

$$F = mr\omega_0^2 + 2mr\omega_0\omega + mr\omega^2 = mr(\omega_0 + \omega)^2.$$

Ha ω ellentétes ω_0 -al, akkor a Coriolis-erő a *MI.1.7. ábra* szerint befele mutat.

b) A külső megfigyelő azt észleli, hogy az ω_0 szögsebességgel forgó rendszerhez képest a test ω szögsebességgel forog, vagyis a nyugvó rendszerhez képest a forgómozgás szögsebessége $(\omega_0 + \omega)$. A fonál végén kifejtett centripetális erő: $F = mr(\omega_0 + \omega)^2$.



MI.1.7. ábra. Az ω_0 szögsebességgel forgó rendszerben ω szögsebességgel forgó test.

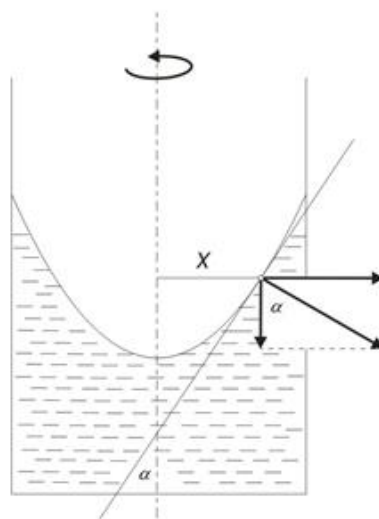
I.1.26.

a) A folyadék felszíne egy forgás-paraboloid lesz, ennek síkmetszete pedig egy parabola (MI.1.8. ábra). Lássuk be ezt a kísérleti fizikából már jól ismert tényt! A folyadék felszínére minden pontban két erő hat: a nehézségi erő ($F_g = mg$) és, forgó rendszerben szemlélődve a centrifugális erő ($F_c = m\omega^2 r$). E két erő eredője a függőlegessel α szöget zár be. Teljesül, hogy:

$$\tan \alpha = \frac{m\omega^2 r}{mg} = \frac{\omega^2 r}{g}$$

Ez a folyadék felületének az irántangense a forgástengelytől r távolságra. Ha ez a sugárral arányos, akkor a

felület egyenlete nem lehet más mint egy másodfokú görbe. Alakja a forgástengelytől r távolságra $z = r^2 \frac{\omega^2}{2g} + z_0$.



MI.1.8. ábra. A folyadék felszíne az ω szögsebességgel forgó hengerben.

b) Nézzük meg a feladat megoldását nyugvó rendszerből szemlélve (I.1.8. ábra)! Egy folyadékelemet vizsgálunk. A centripetális erő a nyomási gradiens erőből származik:

$$\omega^2 r = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r}$$

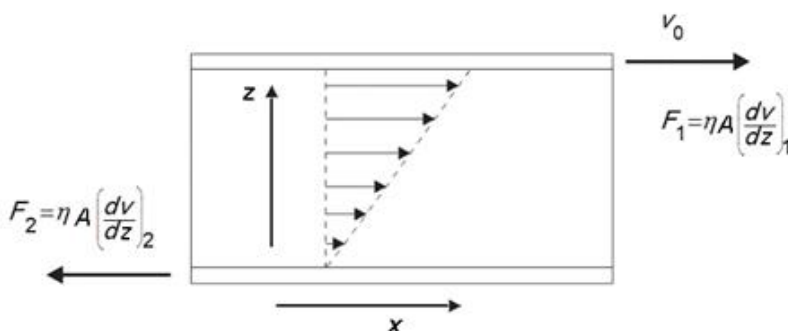
Legyen a folyadékoszlop magassága a forgástengelytől r távolságra h . A nyomás sugárirányú változását az előző egyenlet integrálásával kapjuk.

$$p(r) = \rho g \cdot h(r) = \rho \omega^2 \frac{r^2}{2} + p_0$$

ahol a p_0 a henger közepén (a forgástengelynél) mért nyomás.

I.1.27. Tekintsük a viszkózus folyadékot. Az egyes kiválasztott folyadékelemekben a felső felületen fellépő viszkozitás legyen pozitív értékű. Az alsó határfelületen ébredő viszkózus feszültség – nyírásról lévén szó – ezzel

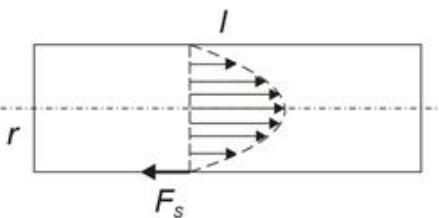
ellentétes irányú. A folyadékelem felső felületén (A) ható felületi erő: $F_1 = \eta A \left(\frac{dv}{dz} \right)_1$. Mivel a folyadékelem nem gyorsul, a felületi feszültségből származó erők eredője nulla, ezért az alsó határon ébredő felületi erő hasonló nagyságú, de ellentétes irányú. A fluxus állandóságából következik, hogy a folyadékban lineáris sebességi mező alakul ki (MI.1.9. ábra). Az alsó – fallal érintkező határfelületen – a sebesség nulla. $v(z) = v_0(1 - z/d)$.



MI.1.9. ábra. Sebességmező két felület közötti réteges áramlásban.

I.1.28. A henger alakú csőben hengerszimmetrikus áramlás alakul ki (MI.1.10. ábra). Maximális sebesség az egyenes cső tengelyében lesz, míg a cső palástjához közeledve a sebesség nullává válik. Írjuk fel a belső súrlódási erőt az l hosszúságú cső belsejében a tengelytől r távolságra levő palástra.

$$F_s = \eta A \frac{dv}{dr} = 2\pi r l \cdot \eta \frac{dv}{dr}$$



MI.1.10. ábra. Folyadékáramlás csőben.

Ha a csőben stacionárius áramlás alakul ki, akkor a belső súrlódási erő a nyomási gradiens erővel tart egyensúlyt:

$$F_{\text{súrlód}} = A \Delta p = r^2 \pi \Delta p$$

Itt Δp az l hosszúságú cső két oldala közötti nyomáskülönbség. Az erőegyensúly ismeretében – kihasználva, hogy a cső falánál a sebesség nulla – már megadható a sebességmező:

$$v(r) = \frac{\Delta p}{4\eta l} (r_0^2 - r^2)$$

A fenti kifejezés integrálásával, pedig megkapjuk a csővön időegység alatt átfolyó anyag térfogatát is:

$$V = \int_0^{r_0} v(r) \cdot 2\pi r dr = \frac{2\pi \Delta p}{4\eta l} \int_0^{r_0} (r_0^2 r - r^3) dr = \frac{\pi \Delta p}{2\eta l} \left[r_0^2 \frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right]_0^{r_0} = \frac{\pi \Delta p}{2\eta l} \frac{r_0^4}{4}$$

I.2. A légkörben ható erők

I.2.1. A Coriolis-paraméter a $47,5^\circ$ szélességen:

$$f = 2 \cdot \sin(47,5^\circ) \cdot 7,292 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1} = 1,08 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$$

A Coriolis-gyorsulás:

$$a_y = \frac{dv}{dt} = -f u_0 = -1,08 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1} \cdot (-300 \text{ m s}^{-1}) = 0,0323 \text{ m s}^{-2}$$

A 90 km megtételéhez szükséges idő 300 m s^{-1} sebességgel 300 s. Ennyi idő alatt a kapott gyorsulással megtett út:

$$s_y = \frac{1}{2} a_y t^2 = 1,45 \text{ km}$$

A rakéta 1,45 kilométert tért el északi irányba.

I.2.2. Egységnyi tömegű héliumra ható felhajtóerő:

$$f_{f\ell} = -g - \frac{1}{\rho_{\text{He}}} \frac{\partial p}{\partial z}$$

A nyomás függőleges irányú gradiensét a légkör hidrosztatikai egyensúlyából számíthatjuk ki:

$$0 = -g - \frac{1}{\rho_{\text{levegő}}} \frac{\partial p}{\partial z}$$

A függőleges nyomási gradiens ebből: $\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho_{\text{levegő}} \cdot g = -12,753 \text{ Pa m}^{-1}$

Az egységnyi tömegű héliumra ható felhajtóerő így: $f_{f\ell} = -g - \frac{1}{\rho_{\text{He}}} \frac{\partial p}{\partial z} = 61,04 \text{ m s}^{-2}$

A léggömbben 5 liter hélium van, ennek tömege 0,9 g. Az egységnyi tömegű héliumra vonatkozó erőt ezzel az értékkel megszorozva megkapjuk a léggömbre ható erőt: $F_{f\ell} = 0,9 \text{ g} \cdot 61,04 \text{ m s}^{-2} = 0,055 \text{ N}$. Ez az erő 5,6 g tömeg felemelésére képes.

I.2.3. Az $m_{\text{mű}}$ tömegű műholdra 800 km magasságban ható gravitációs erő:

$$F_g = m_{\text{mű}} \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2} \frac{5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg}}{(6,37 \cdot 10^6 \text{ m} + 8 \cdot 10^5 \text{ m})^2} = m_{\text{mű}} \cdot 7,75 \text{ m s}^{-2}$$

Nézzük meg, mekkora szögsebesség kell ekkora centrifugális erő létrehozásához:

$$-\omega^2 r = -7,75 \text{ m s}^{-2} \text{ és így } \omega = \sqrt{\frac{7,75}{6,37 \cdot 10^6 + 8 \cdot 10^5}} \text{ s}^{-1} = 1,04 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}$$

Számítsuk ki, mekkora sebességgel halad a műhold: $v = r\omega = 7,45 \text{ km s}^{-1}$.

I.2.4. A Coriolis-erő definíciója: $\mathbf{F}_{Cor} = -2\mathbf{\Omega} \times \mathbf{v}$. A szögsebesség-vektornak a helyhez kötött koordináta-rendszerben északra és felfelé mutató komponense van. A lövedék sebességének csak keletre mutató komponense van. A szorzat értéke:

$$\mathbf{F}_{Cor} = -2 \begin{pmatrix} 0 \\ \Omega_y \\ \Omega_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 0 \\ -u\Omega_z \\ -u\Omega_y \end{pmatrix},$$

tehát a lövedék délre és lefelé térül el. Ezért a lövészek a célponttól északra (balra) és felfelé kell céloznia.

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{\frac{2\pi \cdot 100 \text{ m}}{100 \text{ m s}^{-1}}} = 1 \text{ s}^{-1}$$

I.2.5. A tornádó forgásának szögsebessége:

A centrifugális erő: $F_{cf} = -\omega^2 r = -100 \text{ m s}^{-2}$, iránya az $\mathbf{r}$ irányával egyezik meg.

A Coriolis-erő: $F_{Cor} = f v = 10^{-4} \text{ s}^{-1} \cdot 100 \text{ m s}^{-1} = 10^{-2} \text{ m s}^{-2}$.

I.2.6. a) A test zuhanása merőleges a Föld szögsebesség-vektorára, azaz az Egyenlítőn a Föld szögsebesség-vektorának csak északi irányú komponense van. A Coriolis-erő ebben az esetben, figyelembe véve, hogy szabadesés esetén $\mathbf{w} = -g\mathbf{t}$:

$$\mathbf{F}_{Cor} = -2\mathbf{\Omega} \times \mathbf{v} = -2 \begin{pmatrix} 0 \\ \Omega \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -gt \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} -\Omega gt \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Leolvasható, hogy a Coriolis-erő keleti irányba mutat, nagysága pedig $F_{Cor} = 2\Omega gt$.

A keleti irányba mutató sebességkomponens t idő elteltével:

$$u = \int_0^t 2\Omega gt' dt' = \Omega gt^2$$

Az elmozdulás kiszámításához ezt kell integrálnunk a zuhanás teljes t_z idejére:

$$s_x = \int_0^{t_z} \Omega gt^2 dt = \Omega g \frac{t_z^3}{3}.$$

A zuhanás t_z idejét a szabadesés magasság-idő összefüggéséből kaphatjuk meg:

$$3 \text{ km} = \frac{g}{2} t_z^2$$

A fentiekből $t_z = 24,73 \text{ s}$ alatt keleti irányba történő $s_x = 3,6 \text{ m}$ elmozdulás adódik.

b) A Föld szögsebesség-vektorának a helyi koordináta-rendszerben északi és függőleges irányú komponense van. A Coriolis-erő ebben az esetben, figyelembe véve, hogy szabadesés esetén $\mathbf{w} = -g\mathbf{t}$:

$$\mathbf{F}_{cor} = -2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} = -2 \begin{pmatrix} 0 \\ \Omega_y \\ \Omega_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -gt \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} -\Omega_y gt \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ahol $\Omega_y = \Omega \cos \phi$, $\Omega_z = \Omega \sin \phi$. Leolvasható, hogy a Coriolis-erő ebben az esetben is keleti irányba mutat, nagysága pedig: $f_{cor} = 2\Omega_y gt$.

Az a) résznél bemutatott megoldás alapján az elmozdulás:

$$s_x = \Omega_y g \frac{t_z^3}{3},$$

ahol $t_z = 24,73 \text{ s}$ a zuhanás időtartama. A $\Omega_y = \Omega \cos \phi$ összefüggés behelyettesítésével az elmozdulásra $s_x = 2,4 \text{ m}$ adódik.

I.2.7. Az autóra $98\,100 \text{ N}$ gravitációs erő hat, ezt kell a felfelé ható centrifugális erőnek kiegyenlíteni. A

tömeg egységre ható centrifugális erő: $F_{cf} = -\omega^2 r = -\frac{v^2}{r}$.

Ezt az autó tömegével megszorozva a gravitációs erővel egyenlő nagyságú erőt kell kapnunk:

$-\frac{v^2}{r} \cdot 1000 \text{ kg} = -98100 \text{ N}$. Ebből a sebesség értéke:

$$v = \sqrt{98,1 \cdot 50} \text{ m s}^{-1} = 70,04 \text{ m s}^{-1} = 252 \text{ km h}^{-1}.$$

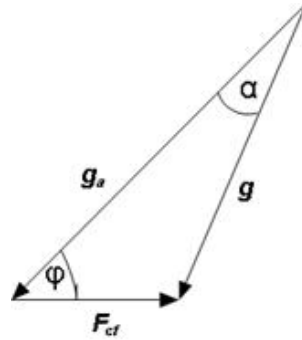
I.2.8. A műholdra ható gravitációs gyorsulást a centrifugális erőnek kell kiegyenlítenie. Mekkora szögsebesség kell a tömeg egységre vett $9,81 \text{ m s}^{-2}$ centrifugális erő létrehozásához?

$$-\omega^2 r = -9,81 \text{ m s}^{-2} \text{ és így } \omega = \sqrt{\frac{9,81}{6,37 \cdot 10^6}} \text{ s}^{-1} = 1,24 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}.$$

A műhold haladási sebessége: $v = r\omega = 7,91 \text{ km s}^{-1}$.

I.2.9. a) és b) A gravitációs vektor az abszolút gravitációs erő és a centrifugális erő vektori összege. Az Egyenlítőn az abszolút gravitációs erő és a centrifugális erő azonos állású, így eredőjük is velük megegyező állású. A pólusokon a centrifugális erő nulla, így a gravitációs vektor megegyezik az abszolút gravitációs erővel. Tehát az a) és b) esetben is a helyes válasz 0° .

c) Legyen a vízszintes irány az Egyenlítő síkja! Az abszolút gravitációs vektor a Föld középpontja felé mutat, ezért a vízszintessel bezárt szöge megegyezik a szélességgel. A centrifugális erő merőleges a Föld forgástengelyére, azaz vízszintes irányú. A két erő vektori összege adja ki a valódi gravitációs vektort az *MI.2.1. ábra* szerint:



MI.2.1. ábra. Az abszolút nehézségi erő és a centrifugális erő.

A keresett α szög a szinustétellel számítható: $\frac{\sin \alpha}{\sin \phi} = \frac{|F_{cf}|}{|g|} = \frac{\Omega^2 r \cos \phi}{g}$. Behelyettesítés után:

$$\sin \alpha = \frac{(7,292 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1})^2 \cdot 6,37 \cdot 10^6 \text{ m} \cdot \cos \phi}{9,81 \text{ m s}^{-2}} \sin \phi = 0,00172637 \cdot \sin 2\phi$$

(Az eredmény tömegegységre vonatkozik.) Látható, hogy mind $\phi = 0^\circ$, mind $\phi = 90^\circ$ esetén az α szög 0° , azaz az abszolút gravitációs erő és a gravitációs vektor az Egyenlítőn és a pólusokon is azonos irányba mutat. Budapesten ($\phi = 47,5^\circ$) a keresett szög $0,0985^\circ$.

I.2.10. Az I.2.9. feladat megoldása alapján az abszolút gravitációs erő és a gravitációs vektor által bezárt α szög a ϕ szélesség függvényében: $\sin \alpha = 0,00172637 \cdot \sin 2\phi$.

Mivel α nem lehet kisebb 0° -nál vagy nagyobb 90° -nál, a szinusz-függvény szigorúan monoton növekvőnek tekinthető, és az α szög maximumhelye megegyezik a $\sin \alpha$ maximumhelyével. A maximumhely megtalálásához a jobb oldalon álló kifejezés deriváltját nullával tesszük egyenlővé: $0 = 0,0034396 \cdot \cos 2\phi_{\max}$.

Figyelembe véve, hogy a ϕ szélesség csak -90° és 90° között van értelmezve, a fenti egyenletből $\phi_{\max} = \pm 45^\circ$ adódik. Az α szög ezeken a helyeken $0,0989^\circ$.

I.2.11. a) A súrlódási erő általános képletében szereplő 9 tagból csak néhányat kell figyelembe vennünk, mivel a megadott esetben a szélességnek csak u komponense van, amely csak a z koordinátától függ:

$$\begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} = \nu \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \end{pmatrix} = \nu \begin{pmatrix} 0 + 0 + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

A súrlódási erő így a sebességprofil második deriváltjaként számítható:

$$f_x = \nu \frac{\partial^2 u(z)}{\partial z^2} = -\nu \frac{u_0}{z^2}$$

Látható, hogy a súrlódási erő értéke nem függ a z_0 konstans megválasztásától. A megadott paraméterekkel 2 m magasságban kapott súrlódási erő: $F_{\alpha} = -2,96 \cdot 10^{-6} \text{ m s}^{-2}$.

$$u = 0,8 \text{ m s}^{-1} \ln\left(\frac{2}{0,05}\right) = 2,95 \text{ m s}^{-1}$$

b) A 2 m magasságban mérhető szélesség:

$$A \text{ Coriolis-erő erre merőlegesen, déli irányba hat: } F_{cor,y} = -fu = -2,95 \cdot 10^{-4} \text{ m s}^{-2}$$

I.2.12. Tekintsük a középponttól 1000 km-re keletre fekvő pontot! A két pont között a nyomáskülönbség 30 hPa.

Az egymástól 1000 km-re fekvő két pontban mérhető nyomásértékek egy egyenesre illeszkednek, a $p(x)$ egyenes meredeksége pedig a nyomáskülönbség és a távolság hányadosaként megállapítható. Ez megegyezik a lineáris

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{30 \text{ hPa}}{1000 \text{ km}} = 3 \cdot 10^{-3} \text{ Pa m}^{-1}$$

függvény deriváltjával, azaz a nyomási gradienssel:

. Az egységnyi tömegű légrészre

$$F_{px} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = -2,31 \cdot 10^{-3} \text{ m s}^{-2}$$

ható erő a nyomási gradiens ismeretében könnyen számítható:

b) Az a) részben kiszámított erő 1000 km távolságon keresztül gyorsítja a légrést. Az általa végzett munka:

$$W = |F_{px}| \cdot 1000 \text{ km} = 2,31 \cdot 10^3 \text{ J kg}^{-1}$$

I.2.13. Az egyszerűség kedvéért tekintsük azt az esetet, amikor a légrést északra halad. Az északi féltekén az alacsony nyomás ekkor töle balra, a magas nyomás töle jobbra helyezkedik el. A nyomási gradiens erőnek ebben az esetben csak x irányú, a sebességnek csak y irányú komponense van.

A két pont között a nyomáskülönbség 40 hPa. Az egymástól 1000 km-re fekvő két pont között lineárisan változik

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{40 \text{ hPa}}{1000 \text{ km}} = 4 \cdot 10^{-3} \text{ Pa m}^{-1}$$

a légnyomás, ezért a nyomási gradiens állandó:

. Az egységnyi tömegű légrészre

$$F_{px} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = -3,07 \cdot 10^{-3} \text{ m s}^{-2}$$

ható nyomási gradiens erő:

$$A \text{ légrészre ható Coriolis-erő: } F_{cor,x} = -fv. \text{ A két erőnek ki kell egyenlítenie egymást: } -fv = -3,07 \cdot 10^{-3} \text{ m s}^{-2}. \text{ Ebből a sebességre } v = 30,7 \text{ m s}^{-1} \text{ adódik.}$$

I.2.14. A testre a Coriolis-erő hat, amely a sebesség irányára mindig merőleges. A körmozgás az a mozgás, amely során az eredő erő, azaz a gyorsulás a sebességre mindig merőleges. Ezért a test körpályán fog haladni, a kör középpontja felé mutató Coriolis-erőt a körmozgás során fellépő centrifugális erő egyenlíti ki. A Coriolis-paraméter értéke:

$$f = 2\Omega \sin 50^\circ = 1,12 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$$

Mivel a sebesség abszolút értéke nem változik, ha elhanyagoljuk a Coriolis-paraméter szélesség szerinti változását, a testre ható Coriolis-erő nagysága is állandó. Ezért az erő nagyságát elegendő az indulás pillanatában kiszámítani, amikor a sebességnek csak északi, a Coriolis-erőnek csak keleti komponense van:

$$|F_{cor}| = fv = 1,12 \cdot 10^{-3} \text{ m s}^{-2}$$

A megadott 10 ms^{-1} kerületi sebesség mellett mekkora sugarú körmozgás esetén lesz egyenlő a centrifugális erő ezzel a Coriolis-erővel?

$$|\mathbf{F}_{cor}| = |\mathbf{F}_{cf}| \text{ és így } 1,12 \cdot 10^{-3} \text{ m s}^{-2} = \omega^2 r = \frac{(10 \text{ m s}^{-1})^2}{r}$$

A fenti egyenletből a sugárra $r = 89,5 \text{ km}$ adódik. A körmozgás periódusideje: $T = \frac{2r\pi}{v} = 56241 \text{ s}$, azaz körülbelül 15,6 óra.

I.2.15. Tekintsük a középponttól pontosan 1000 méterre keletre fekvő pontot! A két pont között a nyomáskülönbség 100 hPa. Feltesszük, hogy a két pont között lineárisan változik a légnyomás, ezért a nyomási gradiens állandó:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{100 \text{ hPa}}{1000 \text{ m}} = 10 \text{ Pa m}^{-1} \quad F_p = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = -7,69 \text{ m s}^{-2}$$

. Az egységnyi tömegű légrészre ható nyomási gradiens erő:

Mekkora sebességű áramlás hoz létre ekkora centrifugális erőt?

Tudjuk, hogy $7,69 \text{ m s}^{-2} = \omega^2 r = \frac{v^2}{r}$. Az egyenletbe $r = 500 \text{ m}$ behelyettesítésével $v = 62 \text{ m s}^{-1}$ adódik. A Coriolis-erő ennél a sebességnél, az egyszerűség kedvéért az észak felé áramló levegőre felírva: $F_{cor} = fv = 6,2 \cdot 10^{-3} \text{ m s}^{-2}$.

I.2.16. Tekintsük a középponttól 500 km-re keletre fekvő pontot! A két pont között a nyomáskülönbség 50 hPa. Az egymástól 500 km-re fekvő két pont között lineárisan változik a légnyomás, ezért a nyomási gradiens állandó:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{50 \text{ hPa}}{500 \text{ km}} = 10^{-2} \text{ Pa m}^{-1}$$

Az egységnyi tömegű légrészre ható nyomási gradiens erő:

$$F_p = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = -7,69 \cdot 10^{-3} \text{ m s}^{-2}$$

Ezt az erőt kell a centrifugális erőnek és a Coriolis-erőnek kiegyenlítenie:

$$F_p = \omega^2 r + fv = \frac{v^2}{r} + fv$$

Ez v -re egy másodfokú egyenlet:

$$\frac{1}{r} v^2 + fv - F_p = 0, \text{ amelynek megoldása: } v = \frac{r}{2} \left(-f \pm \sqrt{f^2 + \frac{4F_p}{r}} \right)$$

A Coriolis-paraméter értéke: $f = 2\Omega \sin 15^\circ = 3,77 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$.

Az északi féltekén a hurrikán keleti oldalán a szél észak felé áramlik, ezért a v -re kapott pozitív eredményt fogadjuk majd el. A v -re felírt egyenletbe a kiszámított f -et, F_p -t, valamint $r = 100 \text{ km}$ -t behelyettesítve a sebességre adódó megoldás: $v = 53,3 \text{ m s}^{-1}$.

A kapott sebességnél a Coriolis-erő: $F_{cor} = fv = 2,01 \cdot 10^{-3} \text{ m s}^{-2}$.

A centrifugális erő: $F_{cf} = \omega^2 r = \frac{v^2}{r} = 5,68 \cdot 10^{-3} \text{ m s}^{-2}$.

A nyomási gradiens erőt kiegyenlítő erőnek tehát megközelítőleg 26%-át teszi ki a Coriolis-erő, és 74%-át a centrifugális erő.

I.2.17. A tengelyszimmetria miatt:

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \omega^2 r = 0 \quad \text{és} \quad -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g = 0$$

ahol r a forgástengelytől vett távolság (a radiális koordináta), z a vertikális koordináta. A nyomás teljes differenciálja a fenti egyenletek segítségével a következő alakban írható fel:

$$dp = \frac{\partial p}{\partial r} dr + \frac{\partial p}{\partial z} dz = \rho \omega^2 r dr - \rho g dz$$

Integrálás után azt kapjuk, hogy:

$$p - p_0 = \rho \omega^2 \frac{r^2}{2} - \rho g z$$

A szabad felület határán $p = p_0$, vagyis:

$$z = \frac{\omega^2 r^2}{2g}$$

A fenti egyenlet alapján meghatározható a felület érintőjének az irányszöge:

$$\tan \alpha = \frac{dz}{dr} = \frac{\omega^2 r}{g}$$

Különböző forgási sebességek esetén a felület alakját az *MI.2.1. interaktív videó* segítségével tanulmányozhatjuk.



MI.2.1. interaktív videó. A forgó tartály problémája. A folyadék felszínének az alakja az ω szögsebesség függvényében.

A tengelyszimmetria miatt:

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \omega^2 r = 0 \quad \text{és} \quad -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g = 0$$

ahol r a horizontális koordináta, z a vertikális koordináta. A nyomás teljes differenciálja a fenti egyenletek segítségével a következő alakban írható fel:

$$dp = \frac{\partial p}{\partial r} dr + \frac{\partial p}{\partial z} dz = \rho \omega^2 r dr - \rho g dz$$

Integrálás után azt kapjuk, hogy:

$$p - p_0 = \rho \omega^2 \frac{r^2}{2} - \rho g z$$

A szabad felület határán $p = p_0$, vagyis:

$$z = \frac{\omega^2 r^2}{2g}$$

A fenti egyenlet alapján meghatározható az érintő dőlésszöge:

$$\tan \alpha = \frac{dz}{dr} = \frac{\omega^2 r}{g}$$

I.3. A vertikális koordinátázás kérdése

I.3.1. Annak szükséges és elégséges feltétele, hogy a z vertikális koordinátáról áttérhessünk az η új vertikális koordinátára, az, hogy z és η között bijektív leképezés, vagyis kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés legyen, vagyis a $z = f(\eta)$ függvénynek szigorúan monotonnak kell lennie.

I.3.2. A két koordináta-rendszerben másképpen futnak az ekvipotenciális ($z = \text{const.}$, $\eta = \text{const.}$) felületek.

I.3.3. Az új vertikális koordináta-rendszert – megkülönböztetve a Descartes-féle (x, y, z, t) rendszertől – jelöljük 1-es alsó indexszel: $(x_1, y_1, z_1 \equiv \eta, t_1)$

$$w = \frac{1}{g} \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial t_1} + \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} u_1 + \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_1} v_1 + \frac{\partial \Phi_1}{\partial z_1} \dot{\eta} \right) = \frac{1}{g} \frac{d\Phi_1}{dt_1},$$

és a másik irányban

$$\dot{\eta} = \frac{d\eta}{dt_1} = \frac{d\eta(x, y, \eta, t)}{dt_1} = \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{dx}{dt_1} + \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{dy}{dt_1} + \frac{\partial \eta}{\partial z} \frac{dz}{dt_1} + \frac{\partial \eta}{\partial t} \frac{dt}{dt_1} = \frac{\partial \eta}{\partial x} u + \frac{\partial \eta}{\partial y} v + \frac{\partial \eta}{\partial z} w + \frac{\partial \eta}{\partial t}$$

I.3.4. A Descartes-féle (x, y, z, t) és az új koordináta-rendszerben $(x_1, y_1, z_1 \equiv \eta, t_1)$ a sebesség definíciója különbözik egymástól (I.3.2. feladat).

Tekintsük a divergencia Descartes-féle koordináta-rendszerbeli

$$\text{div} \mathbf{V}(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

alakját és írjuk át az új $(x_1, y_1, z_1 \equiv \eta, t_1)$ rendszerbe:

A parciális deriváltak átírási szabályai alapján:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} - \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x_1} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x_1},$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_1}{\partial y_1} - \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y_1} = \frac{\partial v_1}{\partial y_1} - \frac{\partial v_1}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y_1}$$

és

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial z}.$$

A $w = \frac{dz}{dt}$ definícióját beírva az utolsó egyenletbe:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial z} &= \frac{\partial \eta}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{dz}{dt} \right) = \frac{\partial \eta}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial z}{\partial t_1} + u_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + v_1 \frac{\partial z}{\partial y_1} + w_1 \frac{\partial z}{\partial \eta} \right) = \\ &= \frac{\partial \eta}{\partial z} \frac{d}{dt_1} \left(\frac{\partial z}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial \eta}{\partial z} \frac{\partial u_1}{\partial \eta} \frac{\partial z}{\partial x_1} + \frac{\partial \eta}{\partial z} \frac{\partial v_1}{\partial \eta} \frac{\partial z}{\partial y_1} + \frac{\partial \eta}{\partial z} \frac{\partial w_1}{\partial \eta} \frac{\partial z}{\partial \eta}, \end{aligned}$$

ahol $\frac{d}{dt_1} = \frac{\partial}{\partial t_1} + u_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + v_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + w_1 \frac{\partial}{\partial \eta}$, $w_1 = \frac{d\eta}{dt}$.

Az egyenlőséget tovább alakítva:

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial \eta}{\partial z} \frac{d}{dt_1} \left(\frac{\partial z}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial u_1}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y_1} + \frac{\partial w_1}{\partial \eta},$$

ahol felhasználtuk, hogy $\frac{\partial \eta}{\partial z} \frac{\partial u_1}{\partial \eta} = \frac{\partial u}{\partial z}$, $\frac{\partial \eta}{\partial z} \frac{\partial v_1}{\partial \eta} = \frac{\partial v}{\partial z}$, és $\frac{\partial \eta}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \eta} = 1$.

Beírva ezeket az összefüggéseket a Descartes koordináta-rendszerben felírt divergenciába:

$$\begin{aligned} \text{div} \mathbf{v} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial y_1} - \frac{\partial v_1}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y_1} + \frac{\partial \eta}{\partial z} \frac{d}{dt_1} \left(\frac{\partial z}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial u_1}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y_1} + \frac{\partial w_1}{\partial \eta} = \\ &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial y_1} + \frac{\partial w_1}{\partial \eta} + \frac{\partial \eta}{\partial z} \frac{d}{dt_1} \left(\frac{\partial z}{\partial \eta} \right). \end{aligned}$$

A fenti deriváltak összevetésével:

$$\text{div} \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial \eta}{\partial z} \frac{d}{dt_1} \left(\frac{\partial z}{\partial \eta} \right) + \text{div} \mathbf{v}_1(\mathbf{r}_1, t),$$

ahol analógiás alapon bevezettük a $\text{div} \mathbf{v}_1(\mathbf{r}_1, t) = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial y_1} + \frac{\partial w_1}{\partial \eta} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial y_1} + \frac{\partial \dot{\eta}}{\partial \eta}$ jelölést.

I.3.5. A kontinuitási egyenlet a Descartes-féle rendszerben

$$\frac{d \ln \rho}{dt} + \operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = 0$$

Kihasználva a teljes derivált invarianciáját és a divergencia **I.3.4. feladatban** nyert alakját, a kontinuitási egyenlet az új koordináta-rendszerben:

$$\frac{d \ln \rho_1}{dt_1} = - \left[\frac{d}{dt_1} \left(\ln \frac{\partial z}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial y_1} + \frac{\partial \dot{\eta}}{\partial \eta} \right]$$

A kontinuitási egyenlet tovább alakítható a sztatika alapegyenletének felhasználásával. (A sztatikus légkör-közelítés hozzávetőlegesen 10 km-es modell rácsfelbontásig alkalmazható sikerrel, ami a nagyskálájú légköri folyamatokat és a mezoskálájú jelenségek egy részét jelenti). Célunk a sűrűség kiküszöbölése, a fenti kontinuitási egyenlet további egyszerűsítése.

A sztatika alapegyenletéből kifejezhető a sűrűség, $\rho = -\frac{1}{g} \frac{\partial p}{\partial z}$. Ezzel a kontinuitási egyenlet

$$\frac{d \ln \left| -\frac{1}{g} \frac{\partial p}{\partial z} \right|}{dt_1} = - \left[\frac{d}{dt_1} \left(\ln \frac{\partial z}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial y_1} + \frac{\partial \dot{\eta}}{\partial \eta} \right]$$

alakra hozható. Beírva a $\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial p_1}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial z}$ összefüggést és felhasználva, hogy általánosan igaz a $\frac{d \ln f}{dt} = \frac{d \ln |f|}{dt} = \frac{1}{f} \frac{df}{dt}$ összefüggés, az egyenlet baloldala átalakítható a következőképpen:

$$\frac{d \ln \left| -\frac{1}{g} \frac{\partial p_1}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial z} \right|}{dt_1} = \frac{1}{\left(\frac{\partial p_1}{\partial \eta} \right)} \frac{d \left(\frac{\partial p_1}{\partial \eta} \right)}{dt_1} + \frac{1}{\left(\frac{\partial \eta}{\partial z} \right)} \frac{d \left(\frac{\partial \eta}{\partial z} \right)}{dt_1}$$

A kontinuitási egyenlet alakja a jobboldali deriválás elvégzése után a

$$\frac{1}{\left(\frac{\partial p_1}{\partial \eta} \right)} \frac{d \left(\frac{\partial p_1}{\partial \eta} \right)}{dt_1} + \frac{1}{\left(\frac{\partial \eta}{\partial z} \right)} \frac{d \left(\frac{\partial \eta}{\partial z} \right)}{dt_1} = - \frac{1}{\left(\frac{\partial z}{\partial \eta} \right)} \frac{d \left(\frac{\partial z}{\partial \eta} \right)}{dt_1} - \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial y_1} + \frac{\partial \dot{\eta}}{\partial \eta} \right)$$

$$\frac{1}{\left(\frac{\partial \eta}{\partial z} \right)} \frac{d \left(\frac{\partial \eta}{\partial z} \right)}{dt_1} = - \frac{1}{\left(\frac{\partial z}{\partial \eta} \right)} \frac{d \left(\frac{\partial z}{\partial \eta} \right)}{dt_1}$$

alakot ölti. Egyszerűen belátható, hogy , hiszen

$$\frac{1}{\left(\frac{\partial \eta}{\partial z} \right)} \frac{d \left(\frac{\partial \eta}{\partial z} \right)}{dt_1} + \frac{1}{\left(\frac{\partial z}{\partial \eta} \right)} \frac{d \left(\frac{\partial z}{\partial \eta} \right)}{dt_1} = \frac{1}{\left(\frac{\partial \eta}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \eta} \right)} \frac{d \left(\frac{\partial \eta}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \eta} \right)}{dt_1} = 0$$

mivel $\frac{\partial \eta}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \eta} = 1$. Következésképpen a kontinuitási egyenlet új alakja

$$\frac{d \ln \left| \frac{\partial p_1}{\partial \eta} \right|}{dt_1} = - \frac{\partial p_1}{\partial \eta} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial y_1} + \frac{\partial \dot{\eta}}{\partial \eta} \right)$$

Látható hogy az egyenlet formailag megegyezik a Descartes-féle koordináta-rendszerbeli alakkal, csak a ρ sűrűség szerepét a $\frac{\partial p_1}{\partial \eta}$ nyomás-derivált veszi át.

Megjegyezzük, hogy a kontinuitási egyenlet ezen alakját egyszerű megfontolásokkal is megkaphatjuk, kihasználva, hogy az elemi térfogat az (x, y, z, t) koordináta-rendszerben: $dV = dx dy dz$, míg az új $(x_1, y_1, z_1 \equiv \eta, t_1)$ koordináta-rendszerben $dV_1 = dx_1 dy_1 d\eta$, s a két elemi térfogat hányadosa:

$$\frac{dV_1}{dV} = \frac{d\eta}{dz} = \frac{\partial \eta}{\partial z}$$

I.3.6. Két nyomási szint között levő elemi légtest $\Delta x \Delta y \Delta p$ tömege állandó, vagyis ebben az értelemben az összenyomhatatlan közeg analógiája. Ezt tükrözi a kontinuitási egyenlet, vagyis a p-rendszerbeli divergencia nulla

volta, hiszen $\frac{\partial p}{\partial \eta} = \frac{\partial p}{\partial p} = 1$, s így

$$0 = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial p},$$

ahol $\omega = \frac{dp}{dt}$ a p-rendszerbeli vertikális sebesség.

I.3.7. A nyomás x és y szerinti parciális deriváltjainak átírásakor – a vertikális mozgásegyenlet alakjától függetlenül – felhasználjuk a sztatika alapegyenletét (sztatikus légkör-közelítés), ami a sűrűségben elhanyagolható – az átlagértéknél legalább 2–3 nagyságrenddel kisebb – hibát okoz.

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p_1}{\partial x_1} - \frac{\partial p_1}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x_1} = \frac{\partial p_1}{\partial x_1} + (\rho_1 g) \frac{1}{g} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} = \frac{\partial p_1}{\partial x_1} + \rho_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1}$$

és hasonlóképpen

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial p_1}{\partial y_1} + \rho_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_1}$$

A vertikális nyomásváltozás és a nehézségi erő átírása:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial \eta}{\partial z} \frac{\partial p_1}{\partial \eta} \quad \text{és} \quad g = \frac{\partial \eta}{\partial z} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta}$$

I.3.8. A horizontális mozgásegyenletek:

$$\frac{du}{dt} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} - RT \frac{\partial \ln p_a}{\partial x} + f_v + \frac{1}{\rho} F_x,$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{\partial \Phi}{\partial y} - RT \frac{\partial \ln p_a}{\partial y} - f_u + \frac{1}{\rho} F_y.$$

A sztatika alapegyenlete:

$$RT = -\frac{\partial \Phi}{\partial \ln \sigma},$$

ahol $\sigma = \frac{p}{p_a}$. Itt kihasználjuk, hogy $\frac{\partial \ln p}{\partial \eta} = \frac{\partial \ln \sigma}{\partial \eta}$.

A kontinuitási egyenlet:

$$\frac{\partial p_a}{\partial t} + u \frac{\partial p_a}{\partial x} + v \frac{\partial p_a}{\partial y} + p_a \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \sigma}{\partial t} \right)$$

A termodinamika I. főtétele:

$$\frac{dT}{dt} - \frac{\kappa-1}{\kappa} \frac{T}{p_a} \frac{dp_a}{dt} - \frac{\kappa-1}{\kappa} \frac{T}{\sigma} \frac{d\sigma}{dt} = \frac{Q}{c_p},$$

Itt kihasználjuk, hogy $\frac{d \ln p}{dt} = \frac{d \ln p}{dt} = \frac{d \ln p_a}{dt} + \frac{d \ln \sigma}{dt}$. A nedvességszállítási egyenlet és az állapotegyenlet formailag nem változik.

I.3.9. A horizontális mozgásegyenletek:

$$\frac{du}{dt} = -\frac{\partial v}{\partial x} + f_v + \frac{1}{\rho} F_x, \quad \frac{dv}{dt} = -\frac{\partial v}{\partial y} - f_u + \frac{1}{\rho} F_y.$$

A nyomási gradiens erő átírásánál kihasználjuk, hogy izentróp felületen $d \ln T = \frac{\kappa-1}{\kappa} d \ln p$.

A teljes derivált alakja: $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + \dot{\Theta} \frac{\partial}{\partial \Theta}$.

A sztatika alapegyenlete:

$$\frac{\partial v}{\partial \Theta} = \Pi$$

A kontinuitási egyenlet:

$$\frac{d}{dt} \left(\ln \frac{\partial p}{\partial \Theta} \right) + \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \dot{\Theta}}{\partial \Theta} \right) = 0$$

$$\sigma = -\frac{\alpha}{\Theta} \frac{\partial \Theta}{\partial p}$$

Az egyenlet tovább alakítható a stabilitási paraméter bevezetésével. (Figyelem, nem azonos a Phillips-rendszer vertikális koordinátájával!)

A termodinamika I. főtétele az izentróp rendszer vertikális sebességét adja meg, ami száraz adiabatikus folyamatok esetén nulla:

$$\frac{d\Theta}{dt} = \frac{\Theta}{T} \frac{dQ}{c_p}$$

I.3.10. Az Exner-függvény alakja: $\Pi = c_p (p/p_0)^{R/c_p}$. Egyszerűvé válik a potenciális hőmérséklet felírása: $\Theta = c_p T / \Pi$. Ha nedves levegővel dolgozunk, akkor Θ helyett a virtuális potenciális hőmérséklettel (Θ_v) kell számolnunk.

A Navier–Stokes-egyenletek alakja vektoriális formába írva:

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\Theta \cdot \nabla \Pi - \mathbf{k} \cdot \mathbf{g} - 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V} + \mathbf{F},$$

ahol a sebesség $\mathbf{V} = (u, v, \dot{\Pi})$, $\mathbf{k}$ a függőleges egységvektor.

Ha hidrosztatikus modellel dolgozunk, akkor a Coriolis-erőnek csak a horizontális összetevőjét kell figyelembe venni, elhanyagoljuk a vertikális sebességkomponens szerepét is.

A termodinamikai egyenlet is leegyszerűsödik:

$$\frac{d\Theta}{dt} = \frac{\Theta}{\Pi} \frac{dQ}{dt}$$

Az Exner-függvény teljes időbeli deriváltja és az állapotegyenlet felhasználásával kapjuk, hogy

$$\frac{d \ln \Pi}{dt} = \frac{R}{c_p} \frac{d \ln p}{dt} = \frac{R}{c_p} \left(\frac{d \ln p}{dt} + \frac{d \ln T}{dt} \right)$$

Ennek felhasználásával a kontinuitási egyenlet új alakja:

$$\frac{d}{dt} \left(\ln \Theta + \left(1 - \frac{c_p}{R} \right) \ln \Pi \right) = \nabla \cdot \mathbf{V},$$

ami tovább alakítható

$$\frac{c_v}{R \Pi} \frac{d \Pi}{dt} + \nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{d \Theta}{dt} = \frac{\Theta}{\Pi} \frac{d Q}{dt}$$

A nyomásváltozás a sebesség divergenciától (összenyomás, kitágulás) és a nem adiabatikus hőközléstől függ.

A $\mathbf{V} = (u, v, \dot{\Pi})$ sebesség a Exner-függvény és a Π potenciális hőmérséklet zárt rendszert alkot, amit kiegészíthetünk a nedvességszállítási egyenlettel. Az állapotegyenletre külön nincs szükségünk. Ez beleépült a kontinuitási egyenlet transzformálásába.

I.3.11. A horizontális mozgásegyenletek:

$$\frac{du}{dt} = -\frac{\partial v}{\partial x} + \Pi \eta \frac{\partial \Theta_a}{\partial x} + f_v + \frac{1}{\rho} F_x,$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{\partial u}{\partial y} - \Pi \eta \frac{\partial \Theta_a}{\partial y} - f_u + \frac{1}{\rho} F_y,$$

ahol Π a korábban definiált (I.3.9. feladat) Exner-függvény. A sztatika alapegyenlete:

$$\frac{\partial v}{\partial \eta} = -(\Theta_f - \Theta_a) \Pi,$$

A kontinuitási egyenlet:

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial p}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(u \frac{\partial p}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(v \frac{\partial p}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\dot{\eta} \frac{\partial p}{\partial \eta} \right) = 0,$$

ahol $\eta = \frac{\Theta_f - \Theta}{\Theta_f - \Theta_a}$ és $\dot{\eta} = \frac{1}{\Theta_f - \Theta_a} (\eta \dot{\Theta}_a - \dot{\Theta})$.

A termodinamika I. főtétele:

$$\frac{dT}{dt} - \frac{\kappa - 1}{\kappa} \frac{T}{p_a} \frac{dp_a}{dt} - \frac{\kappa - 1}{\kappa} \frac{T}{\sigma} \frac{d\sigma}{dt} = \frac{Q}{c_p},$$

Itt kihasználjuk, hogy $\frac{d \ln p}{dt} = \frac{d \ln p_a}{dt} + \frac{d \ln \sigma}{dt}$. A nedvességszállítási egyenlet és az állapotegyenlet formailag nem változik.

I.3.12. A potenciális hőmérséklet értéke a 850, 700, 500 és a 300 hPa-os főizobár szinten rendre: $\Theta_{850} = 288 \text{ K}$, $\Theta_{700} = 293 \text{ K}$, $\Theta_{500} = 301 \text{ K}$ és $\Theta_{300} = 318 \text{ K}$ egész fokokban megadva. A légkör stabilis.

I.3.13. A potenciális hőmérséklet és a nyomás ismeretében megadható a 300 K izentróp szint hőmérséklete:

$$T = \Theta \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{R}{c_p}} = 246 \text{ K}.$$

A geopotenciál értéke $\Phi = g_0 H = 49392 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}$, s így a Montgomery-potenciál értéke: $v = c_p T + \Phi = 296622 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}$.

I.3.14. A megoldáshoz nincs szükség az izentróp felület potenciális hőmérsékletére. Az eltérés $c_p T = 234315 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}$.

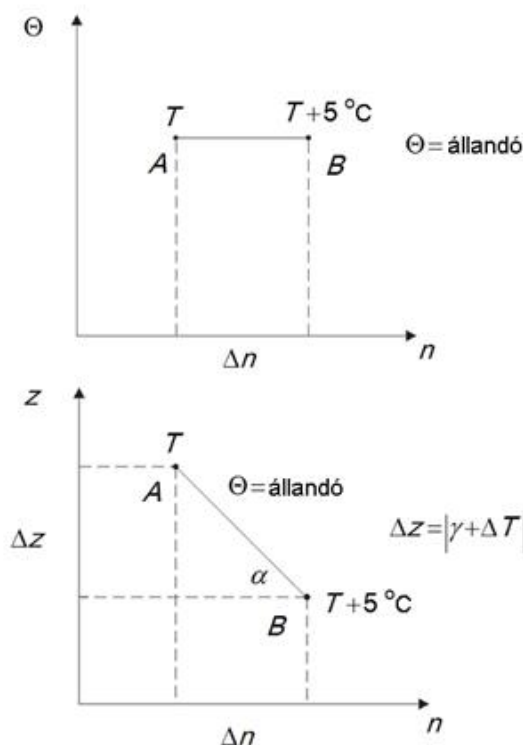
I.3.15. A valóságban $\Delta n = 75 \text{ km}$ -es szakaszon $\Delta T = 5^\circ \text{C}$ -os hőmérséklet emelkedést tapasztaltunk (MI.3.1. ábra). Ha a potenciális hőmérséklet a magassággal 100 m-enként $0,35^\circ \text{C}$ -ot emelkedik, s a száraz adiabatikus hőmérsékleti

gradiens $\Gamma_d = \frac{g}{c_p} = \frac{9,81}{1005} = 0,976^\circ \text{C} / 100 \text{ m}$, akkor a hőmérsékleti gradiens:

$$\gamma = \Gamma_d - \frac{\partial \Theta}{\partial z} = 0,976 - 0,35 = 0,626^\circ \text{C} / 100 \text{ m}.$$

5 °C-os hőmérsékletváltozáshoz hozzávetőlegesen 600 m-es magasságkülönbség tartozik.

Az izentróp felület lejtése: $\alpha = \arctg \frac{\Delta z}{\Delta n} = \frac{600}{75000} \approx 0,51^\circ$



MI.3.1. ábra. A hőmérsékleti vonalak futása az izentróp felületen (a). Az A pontból a B pont felé „haladva” csökken a magasság és nő a nyomás.

I.3.16. Kiindulási egyenletünk a $\frac{d\Theta}{dt} = \frac{\Theta}{T} \frac{Q}{c_p}$ termodinamikai egyenlet. A légtest hűlése jó közelítéssel izobárikus folyamatnak tekinthető, így

$$Q = -c_p \cdot 8 / (6 \cdot 3600) = -c_p \cdot 2,08 \cdot 10^{-4} \text{ K s}^{-1}$$

A becsült vertikális sebesség: $\frac{d\Theta}{dt} = -2,08 \cdot 10^{-4} \text{ K s}^{-1} = 1,33 \text{ K h}^{-1}$

I.3.17. A fázisátalakulás során az időegység alatt felszabaduló hő $Q = \frac{L\Delta q}{\Delta t} = \frac{2,5 \cdot 10^6 \cdot 3 \cdot 10^{-3}}{4 \cdot 3600} = 0,52 \text{ J kg}^{-1} \text{ s}^{-1}$. A képletben q a specifikus nedvesség, L a fázisátalakulási hő. A becsült vertikális sebesség: $\frac{d\Theta}{dt} = 5,2 \cdot 10^{-4} \text{ K s}^{-1} = 1,9 \text{ K h}^{-1}$

I.4.18. A légréteg 21,25 s alatt emelkedik 8,5 m-t. Nyomása 1 hPa-t csökken, vertikális sebessége: $\dot{p} = -4,7 \text{ Pa s}^{-1}$

I.4. A légköri folyamatok nagyságrendi analízise

I.4.1. Abban az esetben, ha a vertikális gyorsulás, illetve a Coriolis-erő vertikális komponense nem játszik szerepet a vizsgált folyamatosztály fejlődésében, azaz hidrosztatikus közelítéssel élünk, akkor a vertikális mozgásegyenletben megmaradó két tag a nyomási gradiens erő és a nehézségi erő 10^1 m s^{-2} . A horizontális mozgásegyenletben a Coriolis-erő és a nyomási gradiens erő karakterisztikus értéke szinoptikus skálán 10^{-3} m s^{-2} . Ezek a legnagyobb tagok. Nincs vertikális gyorsulás, nincs kapcsolat a horizontális és a vertikális mozgások között.

I.4.2. Tekintsük a térben és időben változó nyomási és sűrűségi mezőt! A nyomás és a sűrűség átlagos értéke csak a magasságtól függ (mélykonvekciós közelítés).

$$p(x, y, z, t) = \bar{p}(z) + p'(x, y, z, t), \quad \rho(x, y, z, t) = \bar{\rho}(z) + \rho'(x, y, z, t).$$

Az átlagértékekre minden időpillanatban fennáll a sztatika alapegyenlete:

$$\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} = -g.$$

Tudjuk, hogy $\frac{p'}{\bar{p}} \ll 1$ és $\frac{\rho'}{\bar{\rho}} \ll 1$.

A sűrűség és a nyomás pillanatnyi értékére felírt statika alapegyenlete két részre bomlik.

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial (\bar{p} + p')}{\partial z} - g = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\rho'}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} - \frac{\partial p'}{\partial z} \right) = -\frac{1}{\rho} \left(\rho' g - \frac{\partial p'}{\partial z} \right) = 0,$$

vagyis a fluktuációs mezők is hidrosztatikai egyensúlyban vannak. Az átírásnál kihasználtuk az átlagértékekre felírt sztatika alapegyenletét.

I.4.3. Az állapotegyenlet diagnosztikai összefüggés, így a hőmérsékleti mező szerkezete is követi a nyomási és a sűrűségi mező szerkezetét (lásd az **I.4.2. feladat** megoldását is), vagyis

$$T(x, y, z, t) = \bar{T}(z) + T'(x, y, z, t).$$

Az átlagértékekre vonatkozó egyenlet a Reynolds-átlagolás alapján:

$$\bar{p} = R(\bar{T}\bar{\rho} + \overline{\rho' T'}).$$

A sűrűségi és a hőmérsékleti fluktuációk két nagyságrenddel kisebbek, mint az átlagértékek (a hőmérsékletet K-

ben mérjük), $\bar{T}\bar{\rho} \gg \overline{\rho' T'}$, így teljesül az átlagértékekre vonatkozó állapotegyenlet: $\frac{\bar{p}}{\bar{\rho}} = R\bar{T}$.

A fluktuációkra vonatkozó egyenletet az állapotegyenlet logaritmus alakjának

$$\ln p = \ln R + \ln T + \ln \rho$$

megváltozásából kapjuk, ahol az egyes állapotjelzők változása ($dp, dT, d\rho$) nem más, mint a perturbációs mező, vagyis az adott helyen és időpontban megfigyelt fluktuáció (p', T', ρ'). Az egyenlet alakja:

$$\frac{p'}{p} = \frac{T'}{T} + \frac{\rho'}{\rho}$$

A légköri folyamatokat elemezve a makroskálától a mikroskáláig teljesül, hogy $\frac{p'}{p} \ll \frac{T'}{T} \approx \frac{\rho'}{\rho}$. A horizontális nyomási perturbációk szinoptikus skálán sem haladják meg a néhány 10 hPa-t ($P_0 = 1000 \text{ hPa}$), míg a hőmérsékleti perturbációk 10 K karakterisztikus értékűek ($T_0 = 285 \text{ K}$). Tehát kapcsolat van a sűrűség és a hőmérsékleti fluktuáció között.

$$\frac{T'}{T} \approx -\frac{\rho'}{\rho}$$

I.4.4. Szinoptikus skálájú mozgások esetén a felszínközeli nyomás-perturbáció (δp) karakterisztikus értéke:

$$\frac{\partial p'}{\partial z} \approx \frac{\Delta \rho}{D} \approx \frac{\delta \rho}{H} \approx 10^{-1} \text{ m s}^{-1}, \text{ vagyis } \delta p \approx 10^3 \text{ Pa},$$

ahol D a szinoptikus skála függőleges kiterjedése (a troposzféra vastagsága), illetve H a homogén légkör vastagsága ($H \approx 9 \text{ km}$). Ez az érték természetesen megegyezik a sűrűségfluktuációk nagyságrendjével:

$$\frac{\rho' g}{\rho} \approx 10^{-1} \text{ m s}^{-1} \text{ vagyis } \rho' \equiv \delta \rho \approx 10^{-2} \text{ kg m}^{-3}$$

Ismét hangsúlyozzuk, hogy hidrosztatikus közelítés esetén a vertikális sebességet – a kontinuitási egyenletből kiindulva – egy diagnosztikai egyenlet segítségével határozzuk meg. Ez a kvázisztatikus közelítés, vagyis a vertikális sebességi mező adaptálódik a horizontális sebességi mezőhöz. A szinoptikus folyamatok leírása „megtűri” az adott magassági, illetve nyomási szinten kialakuló áramlási mező vizsgálatát.

I.4.5. A kontinuitási egyenlet nagyságrendi analízise szerint:

$$\frac{d \ln \rho}{dt} = \frac{\partial \ln \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \ln \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \ln \rho}{\partial y} + w \frac{\partial \ln \rho}{\partial z} = -\text{div } V$$

$10^{-6} \quad 10^{-7} \quad 10^{-6} \quad 10^{-6} \quad 10^{-6} \quad 10^{-6}$

A horizontális sebesség Helmholtz tétele alapján felbontható egy divergenciamentes ($\mathbf{V}_{h\Psi}$) és egy örvénymentes rész ($\mathbf{V}_{h\chi}$) összegére: $\mathbf{V}_h = \mathbf{V}_{h\Psi} + \mathbf{V}_{h\chi}$. A horizontális divergencia nagyságrendje nem lehet nagyobb 10^{-6} s^{-1} -nél:

$$\text{div } \mathbf{V}_h = \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \rightarrow \frac{\Delta u_z}{L} + \frac{\Delta v_z}{L} \rightarrow 1 \text{ m s}^{-1}$$

, ebből következik, hogy, $V_{h\chi}$ nagyságrendje is 1 m s^{-1} , míg a horizontális

sebesség nagyságrendje a szabad légkörben 10 m s^{-1} , vagyis $\mathbf{V}_{h\Psi} \sim \mathbf{V}_{h\chi} \sim 10 \text{ m s}^{-1}$. $\frac{V_{h\Psi}}{V_{h\chi}} \sim 10$

I.4.6. Az 1–100 km-es mérettartományt átfogó mezo- β és mezo- γ tartomány számos különböző folyamatostályt tartalmaz eltérő karakterisztikus értékekkel. Az egyes jelenségek becslésénél pontosítani kell az egyes állapothatározók és deriváltjaik nagyságrendjét.

Az x_z irányú mozgásegyenlet:

$$\frac{\partial u_z}{\partial t} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial x_z} + v_z \frac{\partial u_z}{\partial y_z} + w_z \frac{\partial u_z}{\partial z_z} = -2\Omega w_z \cos \varphi + 2\Omega v_z \sin \varphi - \frac{u_z w_z}{r_F} + \frac{u_z v_z}{r_F} \tan \varphi - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_z} + S_{x_z}$$

$$\frac{V^2}{L} \quad \frac{V^2}{L} \quad \frac{V^2}{L} \quad \frac{WV}{D} \quad Wl \quad Vl \quad \frac{VW}{r_F} \quad \frac{VV}{r_F} \quad \frac{\delta p|_z}{L} \quad \frac{vV}{D^2},$$

ahol $l = 2\Omega \cos \varphi \sim 10^{-4} \text{ s}^{-1}$, $f = 2\Omega \sin \varphi \sim 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ a két Coriolis-paraméter, $r_F = 5 \cdot 10^6 \text{ m}$ a Föld sugarának nagyságrendje, $\nu \sim 10^{-5} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ molekuláris diffúziós együttható.

$$\frac{V^2}{L} \sim 10^{-3} - 10^{-1} \text{ m s}^{-2}, \quad \frac{WV}{D} \sim 10^{-5} - 10^{-2} \text{ m s}^{-2}, \quad \frac{VW}{D} \sim 10^{-5} - 10^{-2} \text{ m s}^{-2},$$

$$Wl \sim 10^{-6} - 10^{-3} \text{ m s}^{-2}, \quad Vl \sim 10^{-3} \text{ m s}^{-2}, \quad \frac{VW}{r_F} \sim 2 \cdot 10^{-8} - 2 \cdot 10^{-5} \text{ m s}^{-2},$$

$$\frac{VV}{r_F} \sim 2 \cdot 10^{-5} \text{ m s}^{-2}, \quad \frac{\delta p|_z}{\Delta L} \sim 10^{-3} - 10^{-1} \text{ m s}^{-2}, \quad \frac{vV}{D^2} \sim 10^{-12} \text{ m s}^{-2},$$

Az y_z irányú mozgásegyenlet:

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + u_z \frac{\partial v_z}{\partial x_z} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial y_z} + w_z \frac{\partial v_z}{\partial z_z} = -2\Omega u_z \sin \varphi - \frac{v_z w_z}{r_F} - \frac{u_z^2}{r_F} \tan \varphi - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y_z} + S_{y_z}$$

$$\frac{V^2}{L} \quad \frac{V^2}{L} \quad \frac{V^2}{L} \quad \frac{WV}{D} \quad Uf \quad \frac{VW}{r_F} \quad \frac{VV}{r_F} \quad \frac{\delta p|_z}{L} \quad \frac{vV}{D^2},$$

Az z_z irányú vertikális mozgásegyenlet:

$$\frac{\partial w_z}{\partial t} + u_z \frac{\partial w_z}{\partial x_z} + v_z \frac{\partial w_z}{\partial y_z} + w_z \frac{\partial w_z}{\partial z_z} = +2\Omega u_z \cos \varphi + \frac{u_z^2}{r_F} + \frac{v_z^2}{r_F} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z_z} - g + S_{z_z}$$

$$\frac{WV}{L} \quad \frac{VW}{L} \quad \frac{VW}{L} \quad \frac{WW}{D} \quad Ul \quad \frac{VV}{r_F} \quad \frac{VV}{r_F} \quad \frac{\delta p|_z}{D} \quad g \quad \frac{vW}{D^2},$$

ahol

$$g \sim 10^1 \text{ m s}^{-2}, \quad \frac{WV}{L} \sim 10^{-6} - 10^{-1} \text{ m s}^{-2}, \quad \frac{WW}{D} \sim 10^{-8} - 10^{-2} \text{ m s}^{-2},$$

$$\frac{\delta p|_z}{D} \sim 10^1 \text{ m s}^{-2}, \quad \frac{vW}{D^2} \sim 10^{-15} - 10^{-12}.$$

I.4.7. A nyomás lokális változását a sztatika alapegyenletének h és a $\square$ magasság között integrált alakjának

$$p(h) = \int_h^{\infty} \rho g dz$$

időszerinti deriváltjából határozzuk meg a kontinuitási egyenlet felhasználásával.

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -g \int_h^\infty \rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dz - g \int_h^\infty \left(u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} \right) dz + (g \rho w)_h$$

A lokális nyomásváltozás három hatás összegeként fejezhető ki. A jobb oldal első tagja a horizontális divergencia integrált hatását adja meg, a második tag mutatja az integrált sűrűség-advekción, míg a 3. tag a vertikális sebesség hatását. A jobb oldal első és második tagja egy-egy integrál. Ennek nem tudjuk megadni a nagyságrendi becslését, hiszen nem tudunk semmit az advekción és a divergencia profiljáról.

$\frac{\delta p}{\delta t}$ nagyságrendje: $1-3 \cdot 10^{-2} \text{ Pa s}^{-1}$. A horizontális divergencia 10^{-5} s^{-1} , a horizontális sűrűség advekción $10^{-7} \text{ kg m}^{-3} \text{ s}^{-1}$, a jobboldal harmadik tagja pedig még egy kis 10^{-2} m s^{-1} nagyságú vertikális sebesség esetén is $10^{-1} \text{ Pa s}^{-1}$ nagyságrendű. A jobboldal három nagy tagjának az összegeként egy kis értékű nyomási tendencia adatot kell kapnunk, ami megnehezíti az egyenlet alkalmazását.

I.4.8. A Rossby-szám megadja a horizontális gyorsulás és a Coriolis-erő közötti arányt. Szinoptikus skálán:

$$Ro = \frac{V}{fL} \sim 0,1, \text{ mezo-}\beta \text{ és mezo-}\gamma \text{ skálán a vizsgált jelenségtől függően: } Ro \sim 10^{-1} - 100.$$

I.4.9. a) $Ro \sim 10$, b) $Ro \sim 10^4$.

I.4.10. Normáljuk a horizontális mozgásegyenletet a Coriolis-erő abszolút értékével ($|fV_h|$)!

$$\frac{dV_h}{dt} = \frac{-1}{\rho} \nabla_h p - \mathbf{k} \times \frac{fV_h}{|fV_h|},$$

Az egyes tagok nagyságrendje:

$$Ro = \frac{V}{fL} = \frac{\delta p}{\rho fVL} - 1$$

Ha $Ro \ll 1$, akkor a geostrofikus szélegyenletet kapjuk, a Coriolis-erő és a nyomási gradiens erő megegyezik. $Ro \sim 0,1$ érték jellemzi a szinoptikus skálájú folyamatokat. $Ro = 1$ estén a gyorsulás, a Coriolis-erő és a nyomási gradiens erő egyaránt fontos. Ha állandó sebességű forgómozgásról van szó, akkor ez a gradiens áramlás egyensúlya lesz. $Ro \gg 1$ akkor a gyorsulást a nyomási gradiens erő okozza. Ilyen a ciklosztrófikus áramlás, illetve az alacsony szélességeken az Euler-féle áramlás.

I.4.11. Határozzuk meg a $\frac{\Delta p}{\Delta n}$ nyomási gradiens nagyságát! A térképről leolvashatjuk a Δn távolságot: az *A* pontban $\sim 175 \text{ km}$, a *B* pontban 85 km , a *C* pontban pedig 50 km . A *D* pontban nem határozható meg a nyomási gradiens, értéke nulla körüli, tehát geosztrófikus szél sincs. A másik három pontban a geosztrófikus szélegyenlet alkalmazásával:

$V_\varepsilon = \frac{1}{\rho \cdot f} \frac{\Delta p}{\Delta n}$. Számítások után: $(V_\varepsilon)_A \sim 15 \text{ m s}^{-1}$, $(V_\varepsilon)_B \sim 31 \text{ m s}^{-1}$, $(V_\varepsilon)_C \sim 52,5 \text{ m s}^{-1}$. Irreálisan magas szélesebségek adódtak. (Megjegyezzük, hogy a ciklonban kialakuló gradiens szél kisebb mint a geosztrófikus szél, míg az anticiklonban nagyobb.)

I.4.12. A Brunt-Vaisala frekvencia (N) a hidrosztatikai stabilitás mérőszáma. A vertikális mozgásegyenlet felírható a

$$\frac{dw}{dt} = -N^2 z$$

alakban, ahol z a légréteg kiindulási helyzetétől vett távolság, ami a harmonikus rezgőmozgás egyenlete. (Megjegyezzük, hogy itt a felhajtó erő a nyomási gradiens erő és a nehézségi erő különbsége.) A felhajtóerő meghatározásából következik, hogy

$$N^2 = \frac{g}{T}(\Gamma - \gamma),$$

ahol γ a környezet hőmérsékleti gradiense, míg Γ a száraz (Γ_d), vagy nedves adiabatikusan (Γ_s) emelkedő légréteg individuális hőmérsékleti gradiense. A hőmérséklet nagyságrendje 250 K, $\Gamma_d - \gamma \sim 3,5 \cdot 10^{-2} \text{ K m}^{-1}$, így N^2 karakterisztikus értéke 10^{-4} s^{-2} , ami nem függ a skálaválasztástól.

I.4.13. a) a Tekintsük a metrikus és az inerciális gyorsulás hányadosát! A metrikus gyorsulást a $\frac{uv}{r_F} \text{tg } \phi$ tag reprezentálja, nagyságrendje: $\frac{V^2}{r_F}$, míg az inerciális gyorsulás becslése az időskála $\frac{L}{V}$ és a karakterisztikus sebességváltozás V alapján a metrikus és az inerciális gyorsulás hányadosa: $\frac{L}{r_F}$.

b) A homogén légkörben a sztatika alapegyenlete: $p(z) = p_0 - \rho g z$, ahol p_0 a felszíni nyomás, z a felszín feletti magasság. A légkör H vastagsága: $H = \frac{p_0}{\rho g}$. Ha $\gamma > 0$ hőmérsékleti gradienssel rendelkező politróp légkört vizsgálunk, akkor $H = \frac{T_0}{\gamma}$, ahol T_0 a felszíni hőmérséklet. A vertikális skálaparaméter a definíció szerint $\frac{D}{H}$.

c) A vertikális rétegződés skálaparamétere: $\frac{N^2 H}{g}$.

d) A horizontális gyorsulás karakterisztikus értéke: $\frac{V^2}{L}$, aktuális becslése: $\frac{dV_h}{dt} \sim \frac{V}{T}$, ahol T a sebességváltozás karakterisztikus ideje. A dinamikus időskála dimenzió nélküli alakja: $\frac{VT}{L}$.

I.4.14. A feladat eredményét a MI.4.1. táblázatban adjuk meg.

MI.4.1. táblázat. Dimenzió nélküli mennyiségek karakterisztikus értékei három különböző jelenségben (három különböző skálán).

Skála	Dimenzió nélküli mennyiség				
	$\frac{L}{r_F}$	$Ro = \frac{V}{fL}$	$\frac{UT}{L}$	$\frac{N^2 H}{L}$	$\frac{D}{H}$
Ciklon, szinoptikus	≤ 1	$\ll 1$	~ 1	≤ 1	≤ 1
Parti szél, mezo	$\ll 1$	~ 1	~ 1	< 1	$\ll 1$
Cumulus, mikro	$\ll 1$	$\gg 1$	≤ 1	≤ 1	$\ll 1$

I.4.15. A számítások során $D_E = 10^3 \text{ m}$, $K_M = 10^1 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$, $\nu = 10^{-5} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$. Az eredményeket a *MI.4.2. táblázat* tartalmazza.

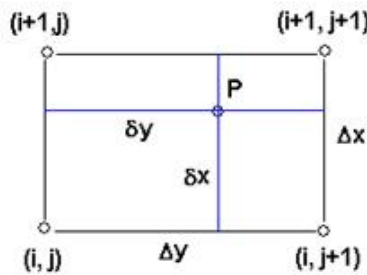
MI.4.2. táblázat. Gyakran alkalmazott dimenzió nélküli számok karakterisztikus értéke három különböző jelenségben (három különböző méretskálán).

Skála	Dimenzió nélküli mennyiség				
	$Eu = \frac{\delta p}{\rho_0 V^2}$	$Ro = \frac{V}{fL}$	$Fr_h = \frac{V^2}{Lg}$	$Ek = \frac{K_m}{fD_E^2}$	$Re = \frac{VL}{\nu}$
Ciklon, szinoptikus	10	10^{-1}	10^{-5}	10^{-1}	10^{-12}
Parti szél, mezo	10	10^0	$2 \cdot 10^{-5}$	10^{-1}	10^{-10}
Cumulus, mikro	10	10^1	$5 \cdot 10^{-5}$	10^{-1}	$2 \cdot 10^{-8}$

II. fejezet - A légköri kinematika

II.1. A meteorológiai állapothatározók interpolációja

II.1.1. Tekintsünk egy téglalap alakú rácsot, $\Delta x \neq \Delta y$ rácsávolsággal (III.2.1. ábra)! A meteorológia állapotjelzők értékei az egyes rácspontokban rendre $f_{i,j}$, $f_{i,j+1}$, $f_{i+1,j}$, $f_{i+1,j+1}$.



III.1.1. ábra. A téglalap alakú rács bilineáris interpolációhoz. (Az alkalmazott koordináta-rendszer tengelyeinek az irányát a feladat jellege határozza meg.)

A munkaformula:

$$f_P = \{ [f_{i+1,j}(\Delta y - \delta y) + f_{i,j+1}(\delta y)](\delta x) + [f_{i,j}(\Delta y - \delta y) + f_{i,j+1}(\delta y)](\Delta x - \delta x) \} / (\Delta x \cdot \Delta y)$$

II.1.2. A P pontban az interpolált hőmérséklet $7,4^\circ\text{C}$.

II.1.3.

a) A távolsággal fordítottan arányos súlyozás esetén:

$$f_P = \frac{f_1(d_2 + d_3) + f_2(d_1 + d_3) + f_3(d_1 + d_2)}{2(d_1 + d_2 + d_3)} = 52 \text{ mm}$$

b) A távolság reciprokával arányos súlyozás mellett:

$$f_P = \frac{f_1 \frac{1}{d_1} + f_2 \frac{1}{d_2} + f_3 \frac{1}{d_3}}{\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} + \frac{1}{d_3}} = \frac{f_1 d_2 d_3 + f_2 d_1 d_3 + f_3 d_1 d_2}{d_1 d_3 + d_1 d_2 + d_2 d_3} = 54 \text{ mm}$$

c) A távolság négyzetével fordítottan arányos súlyozás mellett:

$$f_P = \frac{f_1(d_2^2 + d_3^2) + f_2(d_1^2 + d_3^2) + f_3(d_1^2 + d_2^2)}{2(d_1^2 + d_2^2 + d_3^2)} = 54 \text{ mm}$$

d) A távolság négyzetének reciprokával arányos súlyozás mellett:

$$f_p = \frac{f_1 \frac{1}{d_1^2} + f_2 \frac{1}{d_2^2} + f_3 \frac{1}{d_3^2}}{\frac{1}{d_1^2} + \frac{1}{d_2^2} + \frac{1}{d_3^2}} = \frac{f_1 d_2^2 d_3^2 + f_2 d_1^2 d_3^2 + f_3 d_1^2 d_2^2}{d_2^2 d_3^2 + d_1^2 d_3^2 + d_1^2 d_2^2} = 57 \text{ mm}$$

A négy interpolációs módszerrel kapott csapadékadatok között akár 5 mm-es eltérés is lehet, ami már közel 10%-os különbség.

II.1.4. A számításba bevont négy szint: $z_i = 100 \text{ m}, 150 \text{ m}, 250 \text{ m}$ és 300 m . Kihasználva, hogy

$$l_i(z = 200 \text{ m}) = \frac{\varpi(z)}{(z - z_i) \cdot \frac{d}{dz_i} \varpi(z_i)},$$

ahol

$$\varpi(z = 200 \text{ m}) = (z - z_1) \cdot (z - z_2) \cdot \dots \cdot (z - z_4) = 2,5 \cdot 10^7,$$

az interpolációs súlyok (III.1.1. táblázat):

III.1.1. táblázat. A harmadfokú Lagrange-féle interpoláció súlyai.

$z_i \text{ [m]}$	100	150	250	300
$\frac{d\varpi(z_i)}{dz_i}$	$-1,5 \cdot 10^6$	$7,5 \cdot 10^5$	$-7,5 \cdot 10^5$	$1,5 \cdot 10^6$
$l_i(z)$	$-0,1666$	$0,6666$	$0,6666$	$-0,1666$

A Lagrange-féle interpolációs polinom ismeretében az interpolált érték:

$$P(z) = \sum_{i=1}^n y_i l_i(z) = -\frac{1}{6} \cdot 7,9 + \frac{2}{3} \cdot 7,6 + \frac{2}{3} \cdot 7,3 - \frac{1}{6} \cdot 5,9 = 7,63$$

II.1.5. Három pontra legfeljebb másodfokú polinomot illeszthetünk. A Lagrange-féle alappolinomok:

$$l_1(x) = \frac{(x-2) \cdot (x-4)}{(1-2) \cdot (1-4)} = \frac{x^2 - 6x + 8}{3}, \quad l_2(x) = \frac{(x-1) \cdot (x-4)}{(2-1) \cdot (2-4)} = \frac{x^2 - 5x + 4}{-2},$$

$$l_3(x) = \frac{(x-1) \cdot (x-2)}{(4-1) \cdot (4-2)} = \frac{x^2 - 3x + 2}{6}.$$

Így a másodfokú interpolációs polinom alakja:

$$\begin{aligned} P(x) &= 6l_1(x) + 8l_2(x) + 12l_3(x) = 3(x^2 - 6x + 8) - 4(x^2 - 5x + 4) + 2(x^2 - 3x + 2) = \\ &= 3(x^2 - 6x + 8) - 4(x^2 - 5x + 4) + 2(x^2 - 3x + 2) = x^2 - 4x + 12. \end{aligned}$$

II.1.6. A megoldás (lásd Barabás, 2012): $P(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x - 20$.

II.1.7. Mivel egységnyi szakaszokon határozzuk meg a polinom együtthatóit, vezessük be az i -edik szakaszon az $u = (x - x_i)$ jelölést, s így minden esetben a $(0, 1)$ intervallumban kell dolgozni, ahol a következő alakú polinomot használjuk:

$$Y_i(u) = a_i + b_i u + c_i u^2 + d_i u^3$$

Legyen $n+1$ az adatpontok és $i = 1, 2, \dots, n$ intervallumok száma. A polinomról tudjuk, hogy

$$Y_i(u=0) = y_i = a_i \text{ és } Y_i(u=1) = y_{i+1} = a_i + b_i + c_i + d_i$$

Az együtthatók kiszámításához két további egyenlet szükséges. Ehhez az első deriváltat használjuk fel, ami a töréspontokban folytonos. Legyen a vizsgált szakasz kezdő és végpontjában az első derivált értéke rendre

$$\left(\frac{dY}{du}\right)_{u=0} = Y'_i(u=0) = D_i = y_i = a_i \quad \text{és} \quad \left(\frac{dY}{du}\right)_{u=1} = Y'_i(u=1) = D_{i+1} = y_i = b_i + 2c_i + 3d_i$$

A fenti 4 egyenlet már megoldható a spline i -edik szakaszán:

$$a_i = y_i, \quad b_i = D_i, \quad c_i = 3(y_{i+1} - y_i) - 2D_i - D_{i+1}, \quad d_i = 2(y_i - y_{i+1}) + D_i + D_{i+1}$$

Abban az esetben, ha ismerjük, vagy valamilyen közelítő módszerrel meghatározzuk a két határon a deriváltak értékét, akkor szakaszonként meghatározhatjuk a polinom együtthatóit. Ez a Hermite-interpoláció.

A mi feladatunk azonban nem ez. Tudjuk a polinomunk alakját, ami harmadfokú, s tudjuk, hogy a második deriváltak is folytonosan mennek át az intervallumok határán. Minden intervallumban a polinom 4 együtthatóját kell meghatározni. Az ismeretlenek száma $4n$.

Teljesül, hogy $Y_{i-1}(1) = y_i$ ami egyenértékű azzal, hogy $Y_i(0) = y_i$. Az első és a második deriváltakra igaz, hogy $Y_{i-1}'(1) = Y_i'(0)$ és $Y_{i-1}''(1) = Y_i''(0)$. Legyen továbbá $Y_0(0) = y_0$ és $Y_{n-1}(1) = y_n$. Így tehát $4(n-1) + 2 = 4n - 2$ feltételünk van, amiből $4n$ ismeretlent kell meghatározni. A természetes köbös spline esetén megvan a két hiányzó feltétel: a két végpontban a második derivált értéke nulla.

A természetes köbös spline a Hermite-interpoláció speciális esetének tekinthető, így tovább egyszerűsödik a számítás. A második deriváltak azonossága miatt a belső töréspontokban

$$Y_{i-1}''(1) = Y_i''(0),$$

ami harmadfokú polinom esetén azt jelenti, hogy

$$2c_{i-1} + 6d_{i-1} = 2c_i$$

Ide helyettesítve az első deriváltak segítségével c_i, c_{i-1}, d_{i-1} együtthatókra kapott korábbi egyenleteket, kapjuk, hogy

$$2[3(y_i - y_{i-1}) - 2D_{i-1} - D_i] + 6[2(y_{i-1} - y_i) + D_{i-1} + D_i] = 2[3(y_{i+1} - y_i) - 2D_i - D_{i+1}]$$

A fenti kifejezés rendezése után:

$$D_{i-1} + 4D_i + D_{i+1} + D_i = 3(y_{i+1} - y_{i-1}).$$

$n-1$ belső pontunk van, s ez ugyanennyi egyenletet jelent. Tudjuk továbbá, hogy a második derivált értéke a görbe kezdőpontjában 0. Ebből következik, hogy

$$c_0 = 0 \text{ és így } 2D_0 + D_1 = 3(y_1 - y_0).$$

A második derivált – kikötésünk szerint – a görbe másik végpontjában is nulla, így itt:

$$D_{n-1} + 2D_n = 3(y_n - y_{n-1}).$$

Így tehát $n+1$ ismeretlenünk és $n+1$ egyenletünk van.

$$n+1 \begin{pmatrix} 2 & 1 & & & & \\ 1 & 4 & 1 & & & \\ & 1 & 4 & 1 & & \\ & & & & & \\ & & & & 1 & 4 & 1 \\ & & & & & 1 & 4 & 1 \\ & & & & & & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} D_0 \\ D_1 \\ D_2 \\ \vdots \\ D_{m-2} \\ D_{m-1} \\ D_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3(y_1 - y_0) \\ 3(y_2 - y_0) \\ 3(y_3 - y_1) \\ \vdots \\ 3(y_{m-1} - y_{m-3}) \\ 3(y_m - y_{m-2}) \\ 3(y_m - y_{m-1}) \end{pmatrix},$$

ami már megoldható. Könnyen tudunk felső háromszög mátrixot kapni. Az első deriváltak $D_0, D_1, \dots, D_n$ ismeretében már megadhatók az interpolációs spline polinomok együtthatói az egyes szakaszokban.

II.1.8. Az interpolációs polinomot

$$f_i(x) = a_i x^3 + b_i x^2 + c_i x + d_i \quad (i = 1, 2)$$

alakban keressük. Az együtthatók meghatározására szolgáló egyenletrendszer alakja, kihasználva a belső pontban az első, illetve a második derivált azonosságát, továbbá a két határon a második deriváltak nulla voltát:

$$a_1 - b_1 + c_1 - d_1 = 1, \quad a_2 + b_2 + c_2 + d_2 = 1,$$

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 0,$$

$$b_1 = b_2,$$

$$2c_1 = 2c_2, \quad 2c_1 - 6d_2 = 0, \quad 2c_1 + 6d_2 = 0.$$

Az egyenletrendszer megoldása után a két részintervallum spline függvénye:

$$f_1(x) = \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2, \quad x \in [-1, 0],$$

$$f_2(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2, \quad x \in [0, 1],$$

(Lásd ezt és az ehhez hasonló feladatokat Bozsik és Krebsz (2010); Mészáros (2011) valamint Barabás (2012) jegyzeteiben.)

II.2. A légkör skalár- és vektormezői, valamint deriváltjaik és integráljaik

II.2.1.

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = 1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6 = 32$$

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 6 - 3 \cdot 5 \\ 3 \cdot 4 - 1 \cdot 6 \\ 1 \cdot 5 - 2 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{u} \circ \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = u_i v_j = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 4 & 1 \cdot 5 & 1 \cdot 6 \\ 2 \cdot 4 & 2 \cdot 5 & 2 \cdot 6 \\ 3 \cdot 4 & 3 \cdot 5 & 3 \cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \\ 12 & 15 & 18 \end{pmatrix}$$

$$\det(\mathbf{A}) \equiv |\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = -2$$

II.2.2. Magasabbrendű $n \times n$ -es mátrixok determinánsát pl. az alacsonyabb $(n-1)$ rendű előjeles aldeterminánsok ismeretében határozhatjuk meg. A kifejtést az első sor szerint végezzük az ún. „sakktábla előjelezés szerint.

$$\det(\mathbf{B}) \equiv |\mathbf{B}| = 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 1 \cdot (3) - 2 \cdot (-6) + 3 \cdot (-3) = 0$$

Nem létezik a $\mathbf{B}$ mátrix inverze. A determináns nulla voltára következtethetünk a Gauss-elimináció alkalmazásával is. Ha az első sort kivonjuk a mátrix 2., illetve a 3. sorából, akkor az így kapott két új sor elemei (csupa hármas, illetve csupa hatos) egymás kétszeresei, vagyis a két sor lineárisan nem független egymástól.

$$\det(\mathbf{C}) \equiv |\mathbf{C}| = 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 10 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 10 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 1 \cdot (2) - 2 \cdot (-2) + 3 \cdot (-3) = -3$$

Ha egy mátrix sorait és oszlopait felcseréljük (a főtengelekre tükrözzük), akkor a *transzponált mátrix*hoz jutunk. A transzponált mátrixot a ^{T} szimbólummal jelöljük:

$$\mathbf{B}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 10 \end{pmatrix}$$

A négyzetes mátrix ($\mathbf{M}$) adjungáltjának nevezzük a mátrix előjeles aldeterminánsaiból képzett mátrix ($\tilde{\mathbf{M}}$) transzponáltját

$$\text{adj}(\mathbf{M}) = (\tilde{\mathbf{M}})^T$$

Az adjungálás tehát olyan operáció, mely mátrixhoz mátrixot rendel.

$$\tilde{\mathbf{B}} \equiv \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 6 & -3 \\ 6 & -12 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix}$$

Mivel $\tilde{\mathbf{B}}$ szimmetrikus (tükrös), ezért $\tilde{\mathbf{B}} = (\tilde{\mathbf{B}})^T = \text{adj}(\mathbf{B})$. Mivel $\tilde{\mathbf{B}}$ két sora (illetve két oszlopa) megegyezik, determinánsa nulla. (Nem létezik $\mathbf{B}$ inverze).

$$\tilde{\mathbf{C}} \equiv \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 10 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 10 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 10 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 10 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 4 & -11 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix}$$

A négyzetes mátrix ($\mathbf{M}$) inverze ($\mathbf{M}^{-1}$) az adjungált mátrix és a mátrix determinánsának a hányadosa:

$$\mathbf{M}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{M})} \text{adj}(\mathbf{M})$$

A feladat szerint:

$$\mathbf{C}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{C})} \text{adj}(\mathbf{C}) = \frac{1}{|\mathbf{C}|} (\tilde{\mathbf{C}})^T = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 4 & -11 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix}$$

II.2.3. Próbáljuk előállítani az $\mathbf{x}$ vektort három, már ismert vektor lineáris kombinációjaként! E három vektor (nem feltétlenül egymásra merőlegesek) a feladat megfogalmazásából adódóan legyen: $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$. Ekkor:

$$\mathbf{x} = \alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b} + \gamma (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$$

Ezt behelyettesítve a megoldásra váró $0 = \mathbf{x} \times \mathbf{x} \times \mathbf{a} - \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ vektoregyenletbe:

$$0 = \alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b} + \gamma (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) + (\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b} + \gamma (\mathbf{a} \times \mathbf{b})) \times \mathbf{a} - \mathbf{a} \times \mathbf{b}$$

Felhasználva, hogy

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{a} = -\mathbf{a} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}) \mathbf{b}, \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = a^2 \quad \text{és} \quad \mathbf{a} \times \mathbf{a} = 0,$$

kapjuk hogy

$$[\alpha - \gamma(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})]\mathbf{a} + [\beta + \gamma a^2]\mathbf{b} + [\gamma - \beta - 1](\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 0.$$

Abban az esetben, ha $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ vektorok lineárisan függetlenek, a fenti egyenletben a szögletes zárójelben álló kifejezések mindegyike nulla kell, hogy legyen, ahonnan:

$$\alpha = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{1 + a^2}, \quad \beta = \frac{-a^2}{1 + a^2}, \quad \gamma = \frac{1}{1 + a^2}.$$

Abban az esetben ha a három vektor nem lineárisan független, vagyis $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = 0$, a megoldásra váró egyenlet leegyszerűsödik:

$$0 = \mathbf{x} + \mathbf{x} \times \mathbf{a}.$$

Ennek az egyenletnek viszont csak az $\mathbf{x} = 0$ triviális megoldása létezik, hiszen nincs olyan nullától különböző vektor, amely önmagára merőleges lenne (lásd a vektorszorzatot az egyenletben).

II.2.4. Oldjuk meg a következő vektoregyenleteket

a) A vektorszorzás tulajdonságai miatt (a vektorszorzás eredményeként kapott vektor ($\mathbf{b}$) merőleges mindkét vektorra ($\mathbf{a}$, $\mathbf{x}$) teljesülnie kell, hogy $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$, ekkor a megoldás

$$\mathbf{x} = \frac{1}{a^2}(\mathbf{b} \times \mathbf{a}) + \lambda \mathbf{a},$$

ahol λ tetszőleges állandó.

b) A megoldhatóság feltétele az a) feladat szerint $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$. A vegyes vektorszorzat tulajdonságai miatt $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{a}) = 0$, így a feladat megoldása:

$$\mathbf{x} = \frac{1}{a^2}(\mathbf{b} \times \mathbf{a}) + \frac{\alpha}{a^2} \mathbf{a}.$$

c) A megoldhatóság feltétele az a) feladat szerint $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$, ami kiegészül még az $\alpha = 0$ kikötéssel, hiszen a vektorszorzás miatt az $\mathbf{x}$ vektort nem eshet a $\mathbf{b}$ vektor egyenesébe. E két feltétel teljesülése esetén a megoldás megegyezik az a.) pontbelivel:

$$\mathbf{x} = \frac{1}{a^2}(\mathbf{b} \times \mathbf{a}) + \lambda \mathbf{a},$$

ahol λ tetszőleges állandó.

II.2.5. Az első oszlopot kivéve, minden oszlopból levonva a mögötte levő x_1 -szeresét:

$$\det(\mathbf{V}_n) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & x_2 - x_1 & x_2(x_2 - x_1) & \dots & x_2^{n-2}(x_2 - x_1) \\ 1 & x_3 - x_1 & x_3(x_3 - x_1) & \dots & x_3^{n-2}(x_3 - x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n - x_1 & x_n(x_n - x_1) & \dots & x_n^{n-2}(x_n - x_1) \end{vmatrix} = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \dots (x_n - x_1) \det(\mathbf{V}_{n-1})$$

Ezt az előállítást ismételve:

$$\det(\mathbf{V}_n) = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \dots (x_n - x_1) \\ (x_3 - x_1) \dots (x_n - x_1) \\ \vdots \\ (x_n - x_1) = \prod_{i,j} (x_i - x_j).$$

$\det(\mathbf{V}_n) = 0$, ha bármely két x_i, x_j ($i \neq j$) megegyezik.

II.2.6.

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ -b_2 & a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ -(b_1 + b_2) & a_1 + a_2 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ -b_2 & a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_3 & b_3 \\ -b_3 & a_3 \end{pmatrix},$$

ahol

$$a_3 = a_1 a_2 - b_1 b_2 \\ b_3 = a_1 b_2 + a_2 b_1.$$

II.2.7. Az egyenletrendszert a Gauss-elimináció módszerével oldjuk meg. Az egyenletek egyes soraiból egy másik sor számszorosát vonjuk ki úgy, hogy háromszög-mátrixot kapjunk a bal oldalon. Innen visszafelé haladva már kiszámíthatjuk az ismeretleneket. A kapott eredményt az egyenletrendszerbe történő visszahelyettesítéssel ellenőrizzük.

A megoldás: $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3, x_4 = 4$.

II.2.8. A mátrixos alakban felírt

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 & -3 \\ 3 & -2 & 0 \\ 4 & 2 & \lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

egyenletrendszernek akkor és csak akkor van a triviálistól ($x=0, y=0, z=0$) különböző megoldása, ha a mátrix determinánsa nulla értékű. Ez akkor teljesül, ha

$$\begin{vmatrix} 5 & 4 & -3 \\ 3 & -2 & 0 \\ 4 & 2 & \lambda \end{vmatrix} = -10\lambda + 0 - 18 - (24 + 0 + 12\lambda) = -22\lambda - 42 = 0, \quad \lambda = -\frac{21}{11}.$$

II.2.9. A keresett metszéspont koordinátája $(1, 2, 1)$. A megoldás a II.2.7. feladat mintájára történik.

II.2.10. A sajátértékek és a sajátvektorok kiszámításához az $|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}| = 0$ egyenletet kell megoldani. Ennek alakja:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ -1 & 1-\lambda & 3 \\ 0 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

amiből az

$$(1-\lambda) \cdot [(1-\lambda) \cdot (2-\lambda) - 6] = 0$$

harmadfokú egyenlet adódik, melynek megoldásai: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 4$. A három normált sajátvektor $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$, $\mathbf{n}_3$ meghatározása rendre:

$$\text{a) } \lambda_1 = 1 \text{ esetén: } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ -x + 3z = 0 \\ 2y + 1z = 0 \end{cases},$$

$$\mathbf{n}_1 = \frac{1}{\sqrt{41}} \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

az egyenletrendszer megoldásával kapott normált egységvektor:

$$\text{b) } \lambda_2 = -1 \text{ esetén: } \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} 2x = 0 \\ -x + 2y + 3z = 0 \\ 2y + 3z = 0 \end{cases},$$

$$\mathbf{n}_2 = \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

az egyenletrendszer megoldásával kapott normált egységvektor:

$$\text{c) } \lambda_3 = 4 \text{ esetén: } \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 3 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} -3x = 0 \\ -1x - 3y + 3z = 0 \\ 2y - 2z = 0 \end{cases},$$

$$\mathbf{n}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

az egyenletrendszer megoldásával kapott normált egységvektor:

II.2.11. Kihhasználjuk, hogy $\sin^2 \frac{\vartheta}{2} + \cos^2 \frac{\vartheta}{2} = 1$, illetve, $\cos \vartheta = \cos^2 \frac{\vartheta}{2} - \sin^2 \frac{\vartheta}{2}$ s felhasználva a $\lambda = 4 \sin^2 \frac{\vartheta}{2}$ jelölést, a karakterisztikus egyenlet alakja:

$$\det(\mathbf{M} - \lambda \mathbf{E}) = D_n(\lambda) = \begin{vmatrix} 2 \cos \vartheta & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 \cos \vartheta & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 \cos \vartheta & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \cos \vartheta & -1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \cos \vartheta \end{vmatrix}.$$

A determináns értékét rekurzív technikával határozzuk meg. Az első sorban két nem nulla elem van, így

$$D_n = 2 \cos \vartheta \cdot D_{n-1} - D_{n-2}$$

$$n=1 \text{ esetén } D_1 = 2 \cos \vartheta,$$

$$n=2 \text{ esetén } D_2 = 4 \cos^2 \vartheta - 1.$$

$$n=3 \text{ esetén: } D_3 = 2 \cos \vartheta \cdot D_{n-1} - D_{n-2} = 2 \cos \vartheta \cdot (4 \cos^2 \vartheta - 1) - 2 \cos \vartheta.$$

Kihasználva, hogy $\sin(x \pm y) = \sin x \cdot \cos y \pm \cos x \cdot \sin y$ és ebből következőleg:

$$\sin[(n+1)\vartheta] + \sin[(n-1)\vartheta] = 2 \cos \vartheta \cdot \sin(n\vartheta),$$

és így

$$\sin[(n+1)\vartheta] = 2 \cos \vartheta \cdot \sin(n\vartheta) - \sin[(n-1)\vartheta],$$

hiszen $\cos \vartheta = -\cos(-\vartheta)$ és $\sin \vartheta = \sin(-\vartheta)$. Fennáll továbbá, hogy

$$-(-1)^n \frac{\sin[(n+1)\vartheta]}{\sin \vartheta} = 2 \cos[(-1)^{n-1} \vartheta] \cdot \frac{\sin(n\vartheta)}{\sin \vartheta} + (-1)^{n-2} \frac{\sin[(n-1)\vartheta]}{\sin \vartheta}.$$

A keresett mátrix determinánsa tehát:

$$D_n = -(-1)^n \frac{\sin[(n+1)\vartheta]}{\sin \vartheta},$$

ami teljesül $n=1, 2, \dots, n$ esetén. A sajátérték feladat tehát a

$$\sin[(n+1)\vartheta] = 0$$

egyenlet megoldása. D_n felírásából következik, hogy $\vartheta \neq \pm k\pi$, ($k=0, 1, 2, \dots, n$), hiszen akkor a nevező nullává válna. A megoldás tehát:

$$\vartheta_k = \frac{\pi}{n+1} k \quad (k=0, 1, 2, \dots, n)$$

A normált sajátvektorok pedig:

$$n_k = \sqrt{\frac{2}{n+1}} \begin{pmatrix} \sin \frac{k\pi}{n+1} \\ \sin \frac{2k\pi}{n+1} \\ \vdots \\ \sin \frac{nk\pi}{n+1} \end{pmatrix} \quad (k=0, 1, 2, \dots, n)$$

II.2.12.

$$\text{a) } \operatorname{grad} f(\mathbf{r}) = \operatorname{grad}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}) = \nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}) = (\mathbf{a} \nabla) \mathbf{r} + (\mathbf{r} \nabla) \mathbf{a} + \mathbf{a} \times (\nabla \times \mathbf{r}) + \mathbf{r} \times (\nabla \times \mathbf{a}) = (\mathbf{a} \nabla) \mathbf{r} = \mathbf{a},$$

ahol kihasználjuk, hogy tetszőleges vektorállandó deriváltja nulla, továbbá, a helyvektorok kijelölte vektortér

$$\nabla \times \mathbf{r} = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

rotációmentes, azaz

Bemutatunk egy egyszerűbb megoldást is az Eistein-féle jelölés alkalmazásával (lásd részletesebben a II.3. fejezetet):

$$\operatorname{grad} f(\mathbf{r}) = [\operatorname{grad}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})]_i = \partial_i a_k r_k = a_k \partial_i r_k + r_k \partial_i a_k = a_k \partial_i r_k = a_k \delta_{ik} = a_i.$$

$$\text{b) } \operatorname{grad} f(\mathbf{r}) = \operatorname{grad} g(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}) = \nabla[g(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})] = g'[(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})] \cdot \mathbf{a}.$$

$$\text{c) } \operatorname{grad} f(\mathbf{r}) = \operatorname{grad}(r^k) = \nabla(r^k) = k r^{k-1} \nabla(r) = k r^{k-1} \frac{\mathbf{r}}{r}.$$

Kihasználjuk, hogy

$$\nabla r = \operatorname{grad} r = \begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} \\ \frac{\partial r}{\partial y} \\ \frac{\partial r}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{\partial x} \\ \frac{\partial \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{\partial y} \\ \frac{\partial \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{r} \\ \frac{y}{r} \\ \frac{z}{r} \end{pmatrix} = \frac{\mathbf{r}}{r}.$$

$$\operatorname{grad} f(\mathbf{r}) = [\operatorname{grad}(r^k)]_i = \partial_i (r^k) = k r^{k-1} \partial_i r = k r^{k-1} \frac{r}{r} = k r^{k-2} \mathbf{r}.$$

$$\text{d) } \operatorname{grad} f(\mathbf{r}) = \operatorname{grad} |\mathbf{r} - \mathbf{a}| = \nabla |\mathbf{r} - \mathbf{a}| = \nabla \left(\sqrt{(\mathbf{r} - \mathbf{a})^2} \right) = \frac{1}{2\sqrt{(\mathbf{r} - \mathbf{a})^2}} \nabla (\mathbf{r} - \mathbf{a})^2$$

Kihasználva, hogy $\operatorname{grad}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) = 2[(\mathbf{v} \operatorname{grad}) \mathbf{v} + \mathbf{v} \times \operatorname{rot} \mathbf{v}]$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\sqrt{(\mathbf{r} - \mathbf{a})^2}} \nabla (\mathbf{r} - \mathbf{a})^2 &= \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}|} \{[(\mathbf{r} - \mathbf{a}) \nabla](\mathbf{r} - \mathbf{a}) + (\mathbf{r} - \mathbf{a}) \times [\nabla \times (\mathbf{r} - \mathbf{a})]\} = \\ &= \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}|} [(\mathbf{r} - \mathbf{a}) \nabla] \mathbf{r} = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{a}}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}|}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} f(\mathbf{r}) &= [\operatorname{grad} |\mathbf{r} - \mathbf{a}|]_i = \partial_i \sqrt{(\mathbf{r} - \mathbf{a})^2} = \frac{1}{2\sqrt{(\mathbf{r} - \mathbf{a})^2}} \partial_i (\mathbf{r} - \mathbf{a})^2 = \\ &= \frac{1}{2|\mathbf{r} - \mathbf{a}|} \partial_i (r_j r_j - 2r_j a_j + a_j a_j) = \frac{1}{2|\mathbf{r} - \mathbf{a}|} (2r_j \delta_{ij} - 2a_j \delta_{ij}) = \frac{r_i - a_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}|} = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{a}}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}|}. \end{aligned}$$

$$\text{e) } \operatorname{grad} f(\mathbf{r}) = \operatorname{grad} |\mathbf{r} - \mathbf{a}|^k = \nabla |\mathbf{r} - \mathbf{a}|^k = k |\mathbf{r} - \mathbf{a}|^{k-2} (\mathbf{r} - \mathbf{a}).$$

f) A számolás előtt egyszerűsítsük az $f(\mathbf{r}) = |\mathbf{a} \times \mathbf{r}|^2$ kifejezést!

$$\begin{aligned} f(\mathbf{r}) &= |\mathbf{a} \times \mathbf{r}|^2 = (\mathbf{a} \times \mathbf{r}) \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{r}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{r}) \cdot [\mathbf{a} \times \mathbf{r}] = \mathbf{a} \cdot [\mathbf{r} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{r})] = \mathbf{a} \cdot [(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})\mathbf{a} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}] = \\ &= a^2 r^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})^2, \end{aligned}$$

Megjegyezzük, hogy a $[\]$ zárójel jelölés a hármas szorzás szabályainak alkalmazását teszi szemléletessé. Más funkciója itt nincs.

Indexes jelölésmód mellett:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{r}) &= |\mathbf{a} \times \mathbf{r}|^2 = (\mathbf{a} \times \mathbf{r})_i \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{r})_i = \varepsilon_{ijk} a_j r_k \cdot \varepsilon_{ilm} a_l r_m = (\delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl}) \cdot (a_j r_k a_l r_m) = \\ &= \delta_{jl} a_j a_l \cdot \delta_{km} r_k r_m - \delta_{jm} a_j r_m \cdot \delta_{kl} r_k a_l = (a_i)^2 (r_i)^2 - (a_i r_i)^2 = a^2 r^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})^2. \end{aligned}$$

A fenti levezetésnél kihasználtuk, hogy: $\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ilm} = (\delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl})$. (Lásd a **I.3.1. fejezet 2. feladatát** is.)

$$\text{grad } f(\mathbf{r}) = \text{grad } |\mathbf{a} \times \mathbf{r}|^2 = \nabla [a^2 r^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})^2] = 2a^2 \mathbf{r} - 2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})\mathbf{a}$$

$$\text{g) } \text{grad } f(\mathbf{r}) = \text{grad } |\mathbf{a} \times \mathbf{r}|^k = k |\mathbf{a} \times \mathbf{r}|^{k-2} [a^2 \mathbf{r} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})\mathbf{a}].$$

II.2.13.

$$\text{a) } \text{div } \mathbf{V}(\mathbf{r}) = \text{div}(r^n \mathbf{r}) = \nabla \cdot (r^n \mathbf{r}) = r^n \nabla \cdot \mathbf{r} + \mathbf{r} \cdot \nabla r^n = r^n \nabla \cdot \mathbf{r} + n r^{n-1} \mathbf{r} \cdot \nabla r$$

Kihasználjuk, hogy

$$\nabla \cdot \mathbf{r} = \text{div } \mathbf{r} = \begin{pmatrix} \partial / \partial x \\ \partial / \partial y \\ \partial / \partial z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 3$$

$$\text{és } \text{div } \mathbf{V}(\mathbf{r}) = \text{div}(r^n \mathbf{r}) = r^n \nabla \cdot \mathbf{r} + n r^{n-1} \mathbf{r} \cdot \nabla r = (3+n)r^n$$

$$\text{rot } \mathbf{V}(\mathbf{r}) = \text{rot}(r^n \mathbf{r}) = \nabla \times (r^n \mathbf{r}) = r^n \nabla \times \mathbf{r} + \nabla r^n \times \mathbf{r} = r^n \nabla \times \mathbf{r} + n r^{n-1} \nabla r \times \mathbf{r} =$$

$$= r^{n-1} \left(r \nabla \times \mathbf{r} + n \frac{\mathbf{r}}{r} \times \mathbf{r} \right) = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{r} = \begin{pmatrix} \partial / \partial x \\ \partial / \partial y \\ \partial / \partial z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

Kihasználtuk, hogy és $\mathbf{r} \times \mathbf{r} = 0$.

$$\text{b) } \text{div } \mathbf{V}(\mathbf{r}) = \text{div}(r^n \mathbf{a}) = n r^{n-2} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}), \quad \text{rot } \mathbf{V}(\mathbf{r}) = \text{rot}(r^n \mathbf{a}) = n r^{n-2} (\mathbf{r} \times \mathbf{a}).$$

$$\text{c) } \text{div } \mathbf{V}(\mathbf{r}) = \text{div}(\mathbf{a} \times \mathbf{r}) = \nabla \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{r}) = \mathbf{r} \cdot \nabla \times \mathbf{a} - \mathbf{a} \cdot \nabla \times \mathbf{r} = 0$$

$$\text{rot}\mathbf{V}(\mathbf{r}) = \text{rot}(\mathbf{a} \times \mathbf{r}) = \nabla \times (\mathbf{a} \times \mathbf{r}) = \mathbf{a} \nabla \cdot \mathbf{r} - (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{r} + (\mathbf{r} \cdot \nabla) \mathbf{a} - \mathbf{r} \nabla \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a} \nabla \cdot \mathbf{r} - (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{r} = 2\mathbf{a}$$

(Az $\mathbf{a}$ szögsebességgel forgó merev test rotációja.)

$$\text{d) } \text{div}\mathbf{V}(\mathbf{r}) = \text{div}[r^n(\mathbf{a} \times \mathbf{r})] = \nabla \cdot [r^n(\mathbf{a} \times \mathbf{r})] = \nabla(r^n) \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{r}) + r^n \nabla \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{r}) = 0, \text{ hiszen } \nabla(r^n)$$

párhuzamos $\mathbf{r}$ vektorral.

$$\text{rot}\mathbf{V}(\mathbf{r}) = \text{rot}[r^n(\mathbf{a} \times \mathbf{r})] = \nabla \times [r^n(\mathbf{a} \times \mathbf{r})] = r^n \nabla \times (\mathbf{a} \times \mathbf{r}) - \nabla r^n \times (\mathbf{a} \times \mathbf{r}) =$$

$$= 2r^n \mathbf{a} - (\mathbf{r} \nabla r^n) \mathbf{a} + (\mathbf{a} \cdot \nabla r^n) \mathbf{r} = (2-n)r^n \mathbf{a} + nr^{n-2}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{r}$$

$$\text{e) } \text{div}\mathbf{V}(\mathbf{r}) = \text{div}[r^n(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}] = \nabla \cdot [r^n(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}] = (4+n)r^n(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}),$$

$$\text{rot}\mathbf{V}(\mathbf{r}) = \text{rot}[r^n(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}] = \nabla \times [r^n(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}] = r^n(\mathbf{a} \times \mathbf{r})$$

$$\text{f) } \text{div}\mathbf{V}(\mathbf{r}) = \text{div}(\mathbf{a} \ln r) = \nabla \cdot (\mathbf{a} \ln r) = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}}{r^2},$$

$$\text{rot}\mathbf{V}(\mathbf{r}) = \text{rot}(\mathbf{a} \ln r) = \nabla \times (\mathbf{a} \ln r) = \frac{1}{r^2}(\mathbf{a} \times \mathbf{r})$$

$$\text{g) } \text{div}\mathbf{V}(\mathbf{r}) = \text{div}(\mathbf{r} \ln r) = \nabla \cdot (\mathbf{r} \ln r) = \ln r \nabla \cdot \mathbf{r} + \mathbf{r} \cdot \nabla \ln r = 3 \ln r + \mathbf{r} \cdot \frac{\nabla r}{r} = 3 \ln r + 1,$$

$$\text{rot}\mathbf{V}(\mathbf{r}) = \text{rot}(\mathbf{r} \ln r) = \nabla \times (\mathbf{r} \ln r) = \ln r (\nabla \times \mathbf{r}) + \nabla \ln r \times \mathbf{r} =$$

$$= \ln r (\nabla \times \mathbf{r}) + \left(\frac{\nabla r}{r} \right) \times \mathbf{r} = \ln r (\nabla \times \mathbf{r}) + \left(\frac{\mathbf{r}}{r^2} \right) \times \mathbf{r} = 0$$

$$\text{h) } \text{div}\mathbf{V}(\mathbf{r}) = \text{div}[\mathbf{a} \sin(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})] = \nabla \cdot [\mathbf{a} \sin(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})] = \sin(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}) \nabla \cdot \mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot \nabla [\sin(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})] =$$

$$= \mathbf{a} \cdot \nabla [\sin(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})] = \mathbf{a} \cdot \cos(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}) \cdot \nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}) \cos(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}) = a^2 \cos(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}),$$

$$\text{rot}\mathbf{V}(\mathbf{r}) = \text{rot}[\mathbf{a} \sin(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})] = \nabla \times [\mathbf{a} \sin(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})] = \sin(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}) \nabla \times \mathbf{a} + \nabla [\sin(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})] \times \mathbf{a} =$$

$$= \nabla [\sin(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})] \times \mathbf{a} = \cos(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}) [\nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})] \times \mathbf{a} = (\mathbf{a} \times \mathbf{a}) \cos(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}) = 0$$

Megjegyezzük, hogy a $\nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})$ kifejezés kifejtve 4 tagból áll, amiből 3 nulla.

$$\text{i) } \text{div}\mathbf{V}(\mathbf{r}) = \text{div}(\mathbf{a} \sin r) = \nabla \cdot (\mathbf{a} \sin r) = \sin r \nabla \cdot \mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot \nabla \sin r =$$

$$= \mathbf{a} \cdot \nabla \sin r = \mathbf{a} \cdot \cos r \cdot \nabla r = \cos r \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}}{r},$$

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \mathbf{V}(\mathbf{r}) &= \operatorname{rot}(\mathbf{a} \sin r) = \nabla \times (\mathbf{a} \sin r) = \sin r \nabla \times \mathbf{a} + \nabla(\sin r) \times \mathbf{a} = \\ &= \nabla(\sin r) \times \mathbf{a} = \cos r \nabla r \times \mathbf{a} = \cos r \frac{\mathbf{r} \times \mathbf{a}}{r}.\end{aligned}$$

j) $\operatorname{div} \mathbf{V}(\mathbf{r}) = \operatorname{div}[\mathbf{r} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{r})] = \nabla[\mathbf{r} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{r})] = -2\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}$

$$\operatorname{rot} \mathbf{V}(\mathbf{r}) = \operatorname{rot}[\mathbf{r} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{r})] = \nabla \times [\mathbf{r} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{r})] = 3(\mathbf{r} \times \mathbf{a}).$$

A feladatokban $\mathbf{r}$ a helyvektor, $\mathbf{a}$ pedig egy vektorállandó.

II.2.14. a) $\nabla \cdot [\nabla \times V(r)] = 0$, vagyis $\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{V}(\mathbf{r}) = 0$, b) $(\nabla \times \nabla) \cdot V(r) = 0$, a nabla operátor kettős tulajdonsága miatt. Két egymásra merőleges vektor skaláris szorzata, illetve két egymással párhuzamos vektor vektoriális szorzata egyaránt nulla.

c) Kihasználjuk, hogy $\nabla \times [\nabla \times \mathbf{V}(\mathbf{r})] = \nabla[\nabla \cdot \mathbf{V}(\mathbf{r})] - (\nabla \cdot \nabla) \mathbf{V}(\mathbf{r}) \neq 0$.

II.2.15. A $\mathbf{v}$ vektor harmadik komponense: v_3 .

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 4x - y - z + z - 2y + \frac{\partial v_3}{\partial z} = 4x - 3y + \frac{\partial v_3}{\partial z} = 0,$$

A differenciálegyenlet megoldása: $v_3 = 4xz - 3yz + f(x, y)$, ahol $f(x, y)$, x és y tetszőleges függvénye.

II.2.16. A forgástengelytől $\mathbf{r}$ távolságra a sebesség: $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$.

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \mathbf{v} &= (\operatorname{rot} \mathbf{v})_i = \varepsilon_{ijk} \partial_j v_k = \varepsilon_{ijk} \partial_j (\varepsilon_{klm} \omega_l r_m) = \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm} \omega_l \delta_{jm} = \\ &= (\delta_{il} \delta_{jj} - \delta_{ij} \delta_{jl}) \omega_l = 3\omega_i - \omega_i = 2\omega_i.\end{aligned}$$

A kapott eredmény általánosságban is érvényes: egy $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ sebességmezővel jellemzett mozgás esetén az $\mathbf{r}$ pontba helyezett légrész forgását megadó szögsebesség vektor: $\frac{1}{2} \operatorname{rot} \mathbf{v}(\mathbf{r})$.

II.2.17. A feladat a hármas vektorszorzás kifejtése alapján igazolható.

II.2.18. A rotáció vektor $\mathbf{y}$ irányú, s természetesen merőleges a sebesség irányára.

a) $\operatorname{rot}[u(z) \cdot \mathbf{i}] = \frac{\partial(a \ln z + b)}{\partial z} \mathbf{j} = \frac{a}{z} \mathbf{j}$

b) $\operatorname{rot}[u(z) \cdot \mathbf{i}] = baz^{b-1} \mathbf{j}$

c) $\operatorname{rot}[u(z) \cdot \mathbf{i}] = \left(\frac{a}{z} + b \right) \mathbf{j}$,

d) $\operatorname{rot}[u(z) \cdot \mathbf{i}] = a \mathbf{j}$.

II.2.19. Írjuk fel a $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ vektor-vektor függvényt. Kihasználjuk, hogy a sebességmező az $\mathbf{r}$ sugarú körpálya érintője, vagyis

$$\frac{1}{r} \mathbf{r} \times \mathbf{k} = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} y \\ -x \\ 0 \end{pmatrix}$$

irányú. Megjegyezzük, hogy ebben a felírásban a porördög az óramutató járásával megegyező irányban, tehát anticiklonálisan forog. Ez az esetek kisebb részében jellemzi a porördögöket. (Az örvényesség negatív előjelű.)

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \begin{cases} \frac{v_0}{R} (\mathbf{r} \times \mathbf{k}), & (r \leq R) \\ \frac{v_0 R}{r^2} (\mathbf{r} \times \mathbf{k}), & (r > R) \end{cases}$$

A **II.2.16. feladat** megoldása szerint az R sugarú „porördög” belsejében ($r \leq R$) az örvényesség állandó, vagyis

úgy tekinthető, mint egy $\omega = \frac{v_0}{R}$ szögsebességgel forgó merev test. Az örvényesség abszolút értéke $\zeta = 2\omega = \frac{2v_0}{R}$. A „porördögön” kívül az örvényesség nulla. Ezt könnyen beláthatjuk. Kihasználva, hogy

$$\text{rot}(\mathbf{u}\mathbf{v}) = \mathbf{u} \text{rot } \mathbf{v} + \text{grad } \mathbf{u} \times \mathbf{v}$$

kapjuk, hogy

$$\text{rot } \mathbf{v}(\mathbf{r}) = \nabla \times \left(\frac{v_0 R}{r^2} (\mathbf{r} \times \mathbf{k}) \right) = \frac{v_0 R}{r^2} \nabla \times (\mathbf{r} \times \mathbf{k}) + \nabla \left(\frac{v_0 R}{r^2} \right) \times (\mathbf{r} \times \mathbf{k}) = 0,$$

hiszen:

$$\frac{v_0 R}{r^2} \nabla \times (\mathbf{r} \times \mathbf{k}) = \frac{v_0 R}{r^2} [(\mathbf{k} \cdot \nabla) \mathbf{r} - \mathbf{k}(\nabla \mathbf{r})] = -2 \frac{v_0 R}{r^2} \mathbf{k}$$

és

$$\nabla \left(\frac{v_0 R}{r^2} \right) \times (\mathbf{r} \times \mathbf{k}) = \left(\frac{-2}{r^3} v_0 R \nabla r \right) \times (\mathbf{r} \times \mathbf{k}) = \left(\frac{-2}{r^4} v_0 R \right) \mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{k}) = - \left(\frac{-2}{r^4} v_0 R \right) r^2 \mathbf{k} = \frac{2v_0 R}{r^2} \mathbf{k}$$

II.2.20. A hajón levő barométer a nyomás teljes időbeli változását méri: $\frac{dp}{dt} = -0,5 \text{ hPa/óra}$. A hajó v sebességgel halad. Kihasználva, hogy

$$1 \text{ m s}^{-1} = 3,6 \text{ km h}^{-1} \approx 2 \text{ csomó},$$

az „advektációs tag”: $v \frac{\partial p}{\partial s} = \frac{27}{200} \text{ hPa/óra}$, ahol s a hajó által megtett út (a haladási irányban). A nyomás teljes és lokális időbeli megváltozása közötti kapcsolatot a

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + v \frac{\partial p}{\partial s}$$

egyenlet írja le. A nyomástendencia értéke tehát: $\frac{\partial p}{\partial t} \approx -1,9 \text{ hPa/3 óra}$, ami már jelentős nyomássüllyedés.

II.2.21. Száraz adiabatikus elmozdulás során (MII.2.1. ábra) a légréteg potenciális hőmérséklete konzervatív

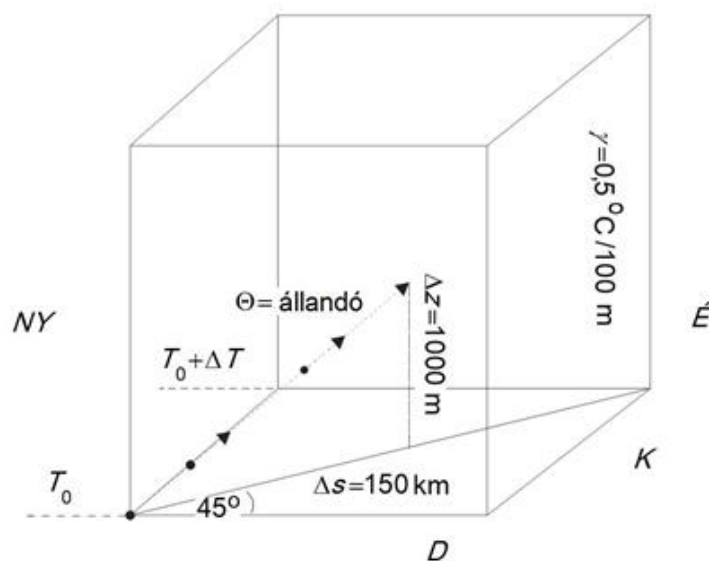
tulajdonság: $\frac{d\Theta}{dt} = 0$ és $\Delta\Theta = 0$. A száraz adiabatikus hőmérsékleti gradiens jó közelítéssel $1^\circ\text{C}/100 \text{ m}$. Ismerve a légkör hőmérsékleti gradiensét $\gamma = 0,5^\circ\text{C}/100 \text{ m}$ megadható a potenciális hőmérséklet magasság szerinti változása is: $\frac{\partial\Theta}{\partial z} \approx 0,5^\circ\text{C}/100 \text{ m}$. A potenciális hőmérséklet megváltozására kapott összefüggés szerint:

$$0 = \frac{d\Theta}{dt} = \frac{\partial\Theta}{\partial t} + \frac{\partial\Theta}{\partial s} \Delta s + \frac{\partial\Theta}{\partial z} \Delta z,$$

ahol az egyszerűség kedvéért a horizontális elmozdulás (horizontálisan homogén kezdeti rétegződést feltételezve)

$\frac{\partial\Theta}{\partial s} = 0$. Az egyenlőség átrendezésével:

$$\frac{\partial\Theta}{\partial s} = -\frac{\partial\Theta}{\partial t} \frac{\Delta t}{\Delta s} - \frac{\partial\Theta}{\partial z} \frac{\Delta z}{\Delta s}.$$



MII.2.1. ábra. A potenciális hőmérséklet teljes és parciális megváltozásai közötti kapcsolat. A hőmérsékleti gradiens meghatározása.

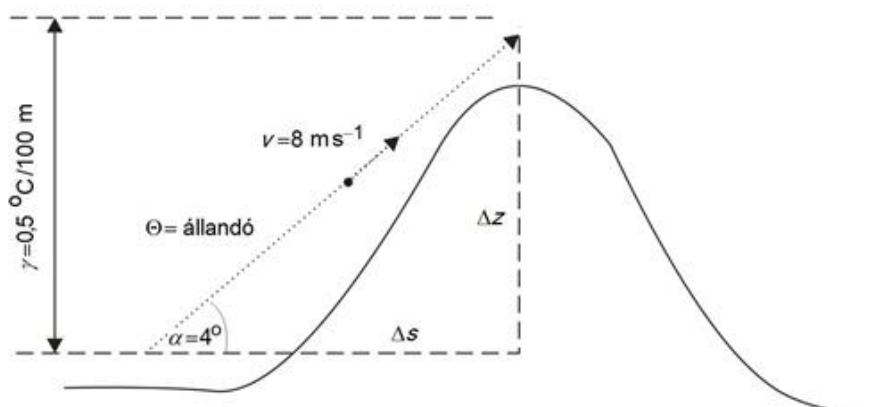
Az adatok behelyettesítése után:

$$\frac{\partial\Theta}{\partial s} = -\frac{5}{150} - \frac{3}{150} = -\frac{8}{150}^\circ\text{C/km} \approx 5,3^\circ\text{C}/100 \text{ km} \frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

Mivel a hőmérséklet a feladat szerint északi irányba nő, s az elmozdulás és a hőmérsékletemelkedés iránya 45

fokos szöget zár be egymással. Ezért a hőmérsékleti gradiens értéke: $\text{grad}_s T = \sqrt{2} \frac{\partial\Theta}{\partial s} \approx 7,5^\circ\text{C}/100 \text{ km}$, ami nagy érték. A hőmérsékleti gradiens iránya az alacsonyabb hőmérséklet felől a magasabb hőmérséklet felé mutat, merőleges az izotermákra.

II.2.22. A hőmérsékletcsökkenés $\approx 4^\circ\text{C}$. (Lásd az *MII.2.2. ábrát* is.)



MII.2.2. ábra. A hegyen átkelő levegő.

II.3. Az Einstein-féle jelölésrendszer alkalmazása

II.3.1. Vektoralgebra

II.3.1.1. A Kronecker delta értéke 1, ha két indexe megegyezik. Az Einstein konvenció értelmében az azonos indexeket az 1, 2, 3 számokon kell végigfuttatni.

II.3.1.2. Az első index összegező index, tehát az

$$\varepsilon^{prz} \varepsilon_{pzm} = \varepsilon^{1rz} \varepsilon_{1zm} + \varepsilon^{2rz} \varepsilon_{2zm} + \varepsilon^{3rz} \varepsilon_{3zm}$$

háromtagú összeget kell kiszámítani. Ez az összeg a Levi–Civita-szimbólum definíciójának értelmében csak akkor nem zérus, ha

$$r = l \text{ és } s = m, \text{ vagy } r = m \text{ és } s = l \text{ és } l \neq m.$$

A háromtagú összegben ekkor csak az egyik tag nem zérus, mert akárhogyan választunk az 1, 2, 3 számok közül kettőt, csak egyetlen tagban szerepelhet a Levi–Civita-szimbólum indexei között három különböző szám.

Ugyanakkor az első esetben ($r = l \text{ és } s = m$) a nem zérus tagban szereplő szorzatban vagy mindkét tényező ciklikus sorrendű indexkombinációt, vagy mindkettő anticiklikus sorrendű indexkombinációt tartalmaz, így értéke +1. Az $r = m \text{ és } s = l$ esetén van nem zérus tag. A két tényező egyike ciklikus, a másik pedig az anticiklikus indexkombinációt tartalmaz, így a szorzat értéke –1.

Nyilvánvaló, hogy a determináns kifejtéséből adódó Kronecker deltákból álló $\delta_i^r \delta_m^z - \delta_m^r \delta_i^z$ kifejezés ugyanerre az eredményre vezet.

II.3.1.3. Az előző *II.3.1.2. feladat*

$$\varepsilon^{prz} \varepsilon_{pzm} = \delta_i^r \delta_m^z - \delta_m^r \delta_i^z$$

eredményében egybeejtve az r és l indexeket, adódik, hogy

$$\varepsilon^{prz} \varepsilon_{prz} = \delta_r^r \delta_z^z - \delta_z^r \delta_r^z = 3\delta_z^z - \delta_z^z = 2\delta_z^z.$$

II.3.1.4. A II.3.1.2. feladat

$$\varepsilon^{prz} \varepsilon_{prz} = 2\delta_z^z$$

eredményében az z és m indexet egybeejtve azt kapjuk, hogy

$$\varepsilon^{prz} \varepsilon_{prz} = 2\delta_z^m = 6.$$

II.3.1.5. Fejtsük ki a determinánst az első sora szerint!

$$\begin{vmatrix} \delta_1^p & \delta_1^r & \delta_1^z \\ \delta_2^p & \delta_2^r & \delta_2^z \\ \delta_3^p & \delta_3^r & \delta_3^z \end{vmatrix} = \delta_1^p (\delta_2^r \delta_3^z - \delta_2^z \delta_3^r) + \delta_1^r (\delta_2^z \delta_3^p - \delta_2^p \delta_3^z) + \delta_1^z (\delta_2^p \delta_3^r - \delta_2^r \delta_3^p)$$

A determináns értéke zérus, ha prz permutációja nem 1, 2, 3 permutációja, hiszen ekkor a determinánsnak van legalább két azonos oszlopa.

A determináns értéke 1, ha prz az 1, 2, 3 ciklikus permutációja. Ekkor ugyanis a háromtagú összegben a szorzásokat elvégezve a kapott pozitív előjelű tagok egyikében a Kronecker-delták alsó és felső indexei azonosak kell legyenek, hiszen prz , zpr vagy rzp egyike megegyezik az 1, 2, 3 permutációval. Így a determináns kifejtésében szereplő hattagú összegben egyetlen tagban az összeszorandó Kronecker-delták értéke 1. A többi tagban a Kronecker-delták alsó és felső indexei nem azonosak, ezért ezek a tagok zérusok.

A determináns értéke -1 , ha prz az 1, 2, 3 anticiklikus permutációja. Ekkor rps , srp vagy psr egyike megegyezik az 1, 2, 3 permutációval. Így a determinánst meghatározó hattagú összeg egyik negatív tagjában a Kronecker-delták alsó és felső indexei megegyeznek, a szorzat értéke 1. A többi tagban valamelyik Kronecker-delta zérus. Így a determináns értéke -1 .

II.3.1.6. Írjuk fel a vektoriális szorzatot kovariáns bázisvektorokkal reprezentált formában:

$$(A \times B) = A^m a_m \times B^n a_n = \begin{vmatrix} a_2 \times a_3 & a_3 \times a_1 & a_1 \times a_2 \\ A^1 & A^2 & A^3 \\ B^1 & B^2 & B^3 \end{vmatrix} = \sqrt{g} \begin{vmatrix} a^1 & a^2 & a^3 \\ A^1 & A^2 & A^3 \\ B^1 & B^2 & B^3 \end{vmatrix},$$

ahol $\sqrt{g} = (a_1, a_2, a_3)$. Hasonlóképpen:

$$(A \times B) = A_m a^m \times B_n a^n = \begin{vmatrix} a^2 \times a^3 & a^3 \times a^1 & a^1 \times a^2 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{g}} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix}.$$

II.3.1.7. A hármas vektorszorzat az

$$[A \times (B \times C)]_i = \varepsilon_{ijk} A^j \varepsilon^{klm} B_l C_m = \varepsilon_{ijk} \varepsilon^{klm} A^j B_l C_m$$

alakban is felírható. A Levi-Civita-szimbólumok szorzata a II.3.2. feladat szerint kifejezhető Kronecker-deltákkal:

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon^{ilm} A^j B_i C_m = \varepsilon_{kij} \varepsilon^{ilm} A^j B_i C_m = (\delta_i^l \delta_j^m - \delta_i^m \delta_j^l) A^j B_i C_m.$$

Elvégezve a beszorzást és a Kronecker-delták által kijelölt indexegyebejtéseket:

$$[A \times (B \times C)]_i = \delta_i^j \delta_j^m A^j B_i C_m - \delta_i^m \delta_j^j A^j B_i C_m = A^m C_m B_i - C_i A^j B_j.$$

Az eredményben i a független index, így a vektorjelölésre visszatérve azt kapjuk, hogy

$$A \times (B \times C) = B(A \cdot C) - C(A \cdot B),$$

ami megegyezik a jól ismert kifejtési szabállyal. Megjegyezzük, hogy a formális műveletek eredményét csak azért tekinthetjük helyesnek, mert a vektorműveletekről tudjuk, hogy eredményüknek függetlennek kell lenni a koordináta-rendszerrel.

II.3.1.8. A kontravariáns bázisvektor rendszer definíció szerint

$$a^i = \frac{a_i \times a_j}{(a_1, a_2, a_3)} \quad \varepsilon_{ikl} = +1 \quad (i = 1, 2, 3).$$

Példaként megmutatjuk, hogy

$$b = \frac{a^2 \times a^3}{(a^1, a^2, a^3)} = a_1,$$

azaz $a^1 \cdot b = 1$, vagyis b , az a^1 reciprok vektora. Fejezzük ki a b -t alkotó keresztszorzat számlálójában a felső indexes bázisvektorokat alsó indexekkel.

$$b = \frac{a^2 \times a^3}{(a^1, a^2, a^3)} = \frac{1}{(a_1, a_2, a_3)^2} \frac{(a_3 \times a_1) \times (a_1 \times a_2)}{(a^1, a^2, a^3)}.$$

Alkalmazzuk a négyes vektorszorzatra a kifejtési tételt:

$$(a_3 \times a_1) \times (a_1 \times a_2) = a_1 [a_2 (a_3 \times a_1)] - a_2 [a_1 (a_3 \times a_1)] = a_1 (a_1, a_2, a_3),$$

mivel a második tagban szereplő hármas vegyes szorzat zérus. Figyelembe véve, hogy $(a^1, a^2, a^3) = \frac{1}{(a_1, a_2, a_3)}$, adódik, hogy $b = a_1$. A bizonyítás hasonlóan végezhető el a többi bázisvektorokra.

II.3.1.9. Helyettesítsük be a (a^1, a^2, a^3) hármas vegyes szorzatba a felül indexes (kontravariáns) bázisvektorok definíciós egyenleteit:

$$(a^1, a^2, a^3) = \frac{a_2 \times a_3}{(a_1, a_2, a_3)} \cdot \left(\frac{a_3 \times a_1}{(a_1, a_2, a_3)} \times \frac{a_1 \times a_2}{(a_1, a_2, a_3)} \right).$$

Az előző **II.3.1.8. feladat** megoldásában beláttuk, hogy $(a_3 \times a_1) \times (a_1 \times a_2) = a_1 (a_1, a_2, a_3)$, következésképpen

$$(a^1, a^2, a^3) = \frac{(a_2 \times a_3) \cdot a_1(a_1, a_2, a_3)}{(a_1, a_2, a_3)^3} = \frac{1}{(a_1, a_2, a_3)}.$$

II.3.1.10 A szorzat az Einstein-féle szimbolika segítségével

$$(A \times D) \cdot (B \times C) = \varepsilon_{ijk} A^j D^k \varepsilon^{ilm} B_l C_m = \varepsilon_{ijk} \varepsilon^{ilm} A^j D^k B_l C_m.$$

Kronecker-deltákkal átírva és a Kronecker-deltákkal előírt indexegybejtéseket végrehajtva:

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon^{ilm} A^j D^k B_l C_m = (\delta_j^i \delta_k^m - \delta_j^m \delta_k^i) A^j D^k B_l C_m = A^j B_i D^m C_m - A^m C_m D^j B_i.$$

Visszatérve a vektoriális jelölésre:

$$(A \times D) \cdot (B \times C) = (A \cdot B)(D \cdot C) - (A \cdot C)(D \cdot B).$$

II.3.1.11. A hármas vegyes szorzat az Einstein szimbolikával az

$$C \cdot (A \times B) = C^i a_i \cdot (A^m a_m \times B^n a_n)$$

alakban írható fel. A **I.3.2.6. feladat**

$$A^m a_m \times B^n a_n = \sqrt{g} \begin{vmatrix} a^1 & a^2 & a^3 \\ A^1 & A^2 & A^3 \\ B^1 & B^2 & B^3 \end{vmatrix}$$

eredményét felhasználva a keresett

$$C \cdot (A \times B) = \sqrt{g} \begin{vmatrix} C^1 & C^2 & C^3 \\ A^1 & A^2 & A^3 \\ B^1 & B^2 & B^3 \end{vmatrix}$$

eredmény már adódik.

II.3.1.12. A szorzat az Einstein-féle szimbolika segítségével

$$[(A \times D) \times (B \times C)]_z = \varepsilon_{xyz} \varepsilon^{ijk} A_j D_k \varepsilon^{ilm} B_l C_m = \varepsilon_{xyz} \varepsilon^{ilm} \varepsilon^{ijk} A_j D_k B_l C_m.$$

Kronecker-deltákkal kifejtve az első két Levi-Civita-szimbólum szorzatát, majd elvégezve a kijelölt indexegybejtéseket:

$$\varepsilon_{xyz} \varepsilon^{ilm} \varepsilon^{ijk} A_j D_k B_l C_m = (\delta_z^i \delta_l^m - \delta_z^m \delta_l^i) \varepsilon^{ijk} A_j D_k B_l C_m = \varepsilon^{ijk} A_j D_k B_z C_m - \varepsilon^{ijk} A_j D_k B_l C_z.$$

A jobboldali két tagban az z a független index, így az első tag, B a második C irányú vektor, míg a többi tényezőkből rendre a (C, A, D) , illetve (B, A, D) hármas vegyes szorzatok alkothatók. Ennek megfelelően vektorjelölésre visszatérve:

$$(A \times D) \times (B \times C) = B(C, A, D) - C(B, A, D).$$

Megjegyzés: Ha az indexes alakban az első és harmadik Levi–Civita-szimbólum szorzatát fejtjük ki Kronecker-deltákkal, akkor a kijelölt indexek egybeesése után

$$\varepsilon_{rjm} \varepsilon^{ijk} A_j D_k B_i C_m = (\delta_r^j \delta_z^k - \delta_r^k \delta_z^j) \varepsilon^{rjm} A_j D_k B_i C_m = \varepsilon^{jrm} A_j D_z B_i C_m - \varepsilon^{zjm} A_j D_r B_i C_m$$

adódik, ami az

$$(A \times D) \times (B \times C) = D(A, B, C) - A(D, B, C)$$

alakban írható vissza vektoriális formára. Az olvasóra bízunk annak belátását, hogy a két eredmény ugyanazt a vektort adja. (Az Einstein szimbolika azonossága egyébként önmagában is bizonyító erejű, de érdemes elemi úton is belátni az azonosságot.)

II.3.1.13. A **II.3.1.6. feladat** megoldásában beláttuk, hogy

$$(A \times B) = A_m a^m \times B_n a^n = \begin{vmatrix} a^2 \times a^3 & a^3 \times a^1 & a^1 \times a^2 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{g}} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix}.$$

Ennek alapján

$$(A \times B) \cdot C = A \cdot (B \times C) = A_m a^m \cdot \frac{1}{\sqrt{g}} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{g}} \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix},$$

felhasználva továbbá, hogy $A_m = A \cdot a_m$

$$(A \times B) \cdot C = A \cdot (B \times C) = \frac{1}{\sqrt{g}} \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{g}} \begin{vmatrix} A \cdot a_1 & A \cdot a_2 & A \cdot a_3 \\ B \cdot a_1 & B \cdot a_2 & B \cdot a_3 \\ C \cdot a_1 & C \cdot a_2 & C \cdot a_3 \end{vmatrix},$$

amiből a bizonyítandó

$$(A, B, C)(a_1, a_2, a_3) = \begin{vmatrix} A \cdot a_1 & A \cdot a_2 & A \cdot a_3 \\ B \cdot a_1 & B \cdot a_2 & B \cdot a_3 \\ C \cdot a_1 & C \cdot a_2 & C \cdot a_3 \end{vmatrix}$$

állítás $\sqrt{g} = (a_1, a_2, a_3)$ miatt azonnal következik.

II.3.1.14. Amennyiben (D, E, F) nem zérus, akkor a D, E, F , vektorok is választhatók bázisvektornak, tehát az állítás az előző feladat eredményéből már következik. (A gondolatmenetben kihasználtuk, hogy a hármas vegyes szorzat eredménye független a koordináta-rendszertől.)

II.3.1.15. Az állítás az előző feladat eredményéből következik, hiszen

$$\det g_{ij} = \begin{vmatrix} a_1 \cdot a_1 & a_1 \cdot a_2 & a_1 \cdot a_3 \\ a_2 \cdot a_1 & a_2 \cdot a_2 & a_2 \cdot a_3 \\ a_3 \cdot a_1 & a_3 \cdot a_2 & a_3 \cdot a_3 \end{vmatrix} = (a_1, a_2, a_3)(a_1, a_2, a_3).$$

II.3.2. Vektoranalízis

II.3.2.1. A q^i kontravariáns hely/koordináta gradiense:

$$\nabla q^i = q^j \frac{\partial q^i}{\partial q^j} = q^j \delta_j^i = q^i$$

II.3.2.2. A helyvektor deriválttenzora az egységtenzor, hiszen

$$\nabla \circ \mathbf{r} = q^j \circ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^j} = q^j \circ \mathbf{q}_j$$

II.3.2.3. A lokális koordináta-vektorok $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^j} = \mathbf{q}_j$ definícióját, valamint a vegyes parciális deriváltak egyenlőségét felhasználva:

$$\frac{\partial \mathbf{q}_i}{\partial q^j} = \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial q^i \partial q^j} = \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial q^j \partial q^i} = \frac{\partial \mathbf{q}_j}{\partial q^i}$$

II.3.2.4. Képezzük a kovariáns metrikus tenzor elemeinek deriváltját a kovariáns koordináták szerint:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{ik}}{\partial q^j} &= \frac{\partial \mathbf{q}_i \cdot \mathbf{q}_k}{\partial q^j} = \frac{\partial \mathbf{q}_i}{\partial q^j} \cdot \mathbf{q}_k + \frac{\partial \mathbf{q}_k}{\partial q^j} \cdot \mathbf{q}_i, \\ \frac{\partial g_{jk}}{\partial q^i} &= \frac{\partial \mathbf{q}_j \cdot \mathbf{q}_k}{\partial q^i} = \frac{\partial \mathbf{q}_j}{\partial q^i} \cdot \mathbf{q}_k + \frac{\partial \mathbf{q}_k}{\partial q^i} \cdot \mathbf{q}_j, \\ \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k} &= \frac{\partial \mathbf{q}_i \cdot \mathbf{q}_j}{\partial q^k} = \frac{\partial \mathbf{q}_i}{\partial q^k} \cdot \mathbf{q}_j + \frac{\partial \mathbf{q}_j}{\partial q^k} \cdot \mathbf{q}_i. \end{aligned}$$

A II.3.2.1 feladatban bebizonyított azonossággal a harmadik egyenlet az

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k} = \frac{\partial \mathbf{q}_i \cdot \mathbf{q}_j}{\partial q^k} = \frac{\partial \mathbf{q}_k}{\partial q^i} \cdot \mathbf{q}_j + \frac{\partial \mathbf{q}_k}{\partial q^j} \cdot \mathbf{q}_i$$

Adjuk össze az első két egyenletet és vonjuk ki belőle a harmadik egyenletnek az átalakított formáját:

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial q^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial q^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k} = \frac{\partial \mathbf{q}_i}{\partial q^j} \cdot \mathbf{q}_k + \frac{\partial \mathbf{q}_j}{\partial q^i} \cdot \mathbf{q}_k = 2 \frac{\partial \mathbf{q}_i}{\partial q^j} \cdot \mathbf{q}_k$$

Innen

$$\frac{\partial \mathbf{q}_i}{\partial q^j} \cdot \mathbf{q}_k = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial q^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial q^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k} \right)$$

Vezessük be a

$$\Gamma_{ijk} = \frac{\partial \mathbf{q}_i}{\partial q^j} \cdot \mathbf{q}_k = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial q^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial q^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k} \right)$$

jelölést (elsőfajú Christoffel-szimbólum) és képezzük a

$$\frac{\partial q_i}{\partial q^j} \cdot (q_k \circ q^l) = \Gamma_{jk}^i q^l$$

diadikus szorzatot, majd ejtsük egybe az l és k indexet. Mivel $q_i \circ q^i = \mathbf{E}$, azt kapjuk, hogy

$$\frac{\partial q_i}{\partial q^j} = \Gamma_{jk}^i q^k = g^{kl} \Gamma_{jl}^i q_k = \Gamma_{jl}^i q_k$$

II.3.2.5. A **II.3.2.4. feladatban** (bár más indexezéssel) megmutattuk, hogy

$$\frac{\partial q_j}{\partial q^k} = \Gamma_{jk}^i q_i$$

Szorozzuk az egyenletet skalárisan q^i -vel.

$$\frac{\partial q_j}{\partial q^k} \cdot q^i = \Gamma_{jk}^i q_i \cdot q^i = \Gamma_{jk}^i \delta_i^i = \Gamma_{jk}^i$$

II.3.2.6. A kontravariáns (felül indexes) bázisvektorok kontravariáns koordináták szerinti $\frac{\partial q^i}{\partial q^j}$ deriváltjának a meghatározásához induljunk ki a Kronecker-delta deriváltjából:

$$0 = \frac{\partial \delta_j^i}{\partial q^k} = \frac{\partial q^i}{\partial q^k} \cdot q_j = \frac{\partial q^i}{\partial q^k} \cdot q_j + \frac{\partial q_j}{\partial q^k} \cdot q^i$$

Innen $\Gamma_{jk}^i = \frac{\partial q_j}{\partial q^k} \cdot q^i = -\frac{\partial q^i}{\partial q^k} \cdot q_j$, azaz $\frac{\partial q^i}{\partial q^k} \cdot q_j = -\Gamma_{jk}^i$. Szorozzuk be az utóbbi egyenletet diadikusan q^l -lel és ejtsük egybe a j és l indexet:

$$\frac{\partial q^i}{\partial q^k} \cdot (q_j \circ q^j) = -\Gamma_{jk}^i q^j$$

Figyelembe véve, hogy $q_i \circ q^i = \mathbf{E}$, azt kapjuk, hogy

$$\frac{\partial q^i}{\partial q^k} = -\Gamma_{jk}^i q^j$$

II.3.2.7. Első lépésként állítsuk elő a $\nabla \circ \mathcal{A} = q^j \circ \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial q^j}$ tenzort és vezessük be az összefüggésbe a $q^j = \frac{q_k \times q_i}{(q_1, q_2, q_3)} = \frac{1}{\sqrt{g}} (q_k \times q_i) \varepsilon_{jki} = +1$ ($i=1, 2, 3$) reciprok vektorokat.

$$\nabla \circ \mathcal{A} = \frac{1}{\sqrt{g}} \left[(q_2 \times q_3) \circ \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial q^1} + (q_3 \times q_1) \circ \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial q^2} + (q_1 \times q_2) \circ \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial q^3} \right]$$

illetve

$$\nabla \circ \mathbf{A} = \frac{1}{\sqrt{g}} \left[\frac{\partial}{\partial q^1} (\mathbf{q}_2 \times \mathbf{q}_3 \circ \mathbf{A}) + \frac{\partial}{\partial q^2} (\mathbf{q}_3 \times \mathbf{q}_1 \circ \mathbf{A}) + \frac{\partial}{\partial q^3} (\mathbf{q}_1 \times \mathbf{q}_2 \circ \mathbf{A}) \right] - \frac{1}{\sqrt{g}} \left[\frac{\partial}{\partial q^1} (\mathbf{q}_2 \times \mathbf{q}_3) + \frac{\partial}{\partial q^2} (\mathbf{q}_3 \times \mathbf{q}_1) + \frac{\partial}{\partial q^3} (\mathbf{q}_1 \times \mathbf{q}_2) \right] \circ \mathbf{A}.$$

A $\frac{\partial \mathbf{q}_i}{\partial q^j} = \frac{\partial \mathbf{q}_j}{\partial q^i}$ összefüggés felhasználásával könnyen belátható, hogy a fenti összefüggés jobboldalának második tagja zérus. Ezután cseréljük fel a diadikus szorzást skalár szorzásra, azaz képezzük a divergenciát:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{\sqrt{g}} \left[\frac{\partial}{\partial q^1} (\mathbf{q}_2 \times \mathbf{q}_3 \cdot \mathbf{A}) + \frac{\partial}{\partial q^2} (\mathbf{q}_3 \times \mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{A}) + \frac{\partial}{\partial q^3} (\mathbf{q}_1 \times \mathbf{q}_2 \cdot \mathbf{A}) \right].$$

Helyettesítsük be ide az $\mathbf{A} = A^i \mathbf{q}_i$ kifejezést és vegyük észre, hogy a skalárszorzást elvégezve minden tagban három, hármass vegyes szorzat keletkezik, azonban ezek közül csak az az egy különbözik zérustól, amelyben három különböző bázisvektor szerepel. Ennek a nem eltűnő hármass vegyes szorzatnak az értéke minden tagban $\sqrt{g}$. Tehát

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{\sqrt{g}} \left[\frac{\partial}{\partial q^1} (\sqrt{g} A^1) + \frac{\partial}{\partial q^2} (\sqrt{g} A^2) + \frac{\partial}{\partial q^3} (\sqrt{g} A^3) \right] = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial q^j} (\sqrt{g} A^j)$$

a megoldás.

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \mathbf{q}^j \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial q^j}$$

A megoldást közvetlenül a definíciós egyenlet alapján is kidolgozhatjuk. Behelyettesítve az $\mathbf{A} = A^i \mathbf{q}_i$ kifejezést és a deriválást elvégezve azt kapjuk, hogy

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \mathbf{q}^j \cdot \frac{\partial A^i \mathbf{q}_i}{\partial q^j} = \mathbf{q}^j \cdot \mathbf{q}_i \frac{\partial A^i}{\partial q^j} + A^i \mathbf{q}^j \cdot \frac{\partial \mathbf{q}_i}{\partial q^j} = \delta_i^j \frac{\partial A^i}{\partial q^j} + A^i \mathbf{q}^j \cdot \frac{\partial \mathbf{q}_i}{\partial q^j} = \frac{\partial A^i}{\partial q^i} + A^i \mathbf{q}^j \cdot \frac{\partial \mathbf{q}_i}{\partial q^j}.$$

A II.3.2.5. feladatban megmutattuk, hogy $\frac{\partial \mathbf{q}_j}{\partial q^k} = \Gamma_{jk}^i \mathbf{q}_i$, azaz a fenti kifejezés a

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A^i}{\partial q^i} + A^i \mathbf{q}^j \cdot \Gamma_{ij}^i \mathbf{q}_i = \frac{\partial A^i}{\partial q^i} + A^i \Gamma_{ii}^i$$

alakra hozható. Beírva ide a másodfajú Christoffel-szimbólumok definíciója alapján adódó

$$\Gamma_{ii}^i = g^{jk} \Gamma_{ik}^j = \frac{1}{2} g^{jk} \left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial q^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial q^j} - \frac{\partial g_{ji}}{\partial q^k} \right)$$

kifejezést, amelyről vegyük észre, hogy a második két tagból adódó

$$g^{jk} \left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial q^i} - \frac{\partial g_{ji}}{\partial q^k} \right) = g^{jk} \frac{\partial g_{jk}}{\partial q^i} - g^{jk} \frac{\partial g_{ji}}{\partial q^k}$$

összeg zérus, hiszen ha a k és l indexeket felcseréljük, az összeg első tagjában, akkor $g^{\bar{k}} = g^{\bar{k}l}$ felhasználásával az első tag $g^{\bar{k}l} \frac{\partial g_{\bar{l}}}{\partial q^{\bar{k}}}$ alakra hozható, ami megegyezik a második taggal. Következésképpen:

$$\nabla \cdot A = \frac{\partial A^i}{\partial q^i} + A^i \frac{1}{2} g^{\bar{k}} \frac{\partial g_{\bar{k}}}{\partial q^i}$$

Az $\frac{1}{2} g^{\bar{k}} \frac{\partial g_{\bar{k}}}{\partial q^i}$ tényező pedig megegyezik $\sqrt{g} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial q^i}$ -vel, hiszen

$$\frac{\partial \sqrt{g}}{\partial q^i} = \frac{1}{2\sqrt{g}} \frac{\partial g}{\partial g_{\bar{k}}} \frac{\partial g_{\bar{k}}}{\partial q^i}$$

A metrikus tenzor determinánsának kifejtéséből adódóan azonban látható, hogy $\frac{\partial g}{\partial g_{\bar{k}}} = g g^{\bar{k}}$, tehát

$$\frac{\partial \sqrt{g}}{\partial q^i} = \frac{\sqrt{g}}{2} g^{\bar{k}} \frac{\partial g_{\bar{k}}}{\partial q^i}$$

Ily módon

$$\nabla \cdot A = \frac{\partial A^i}{\partial q^i} + A^i \frac{1}{\sqrt{g}} g^{\bar{k}} \frac{\partial g_{\bar{k}}}{\partial q^i} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g} A^i}{\partial q^i}$$

II.3.2.8. A térbeli polárkoordináta-rendszer metrikus tenzora:

$$g_{\bar{j}} = \begin{pmatrix} q_1 \cdot q_1 & 0 & 0 \\ 0 & q_2 \cdot q_2 & 0 \\ 0 & 0 & q_3 \cdot q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r^2 \cos^2 \varphi & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad g = \det g_{\bar{j}} = r^4 \cos^2 \varphi$$

illetve

$$g^{\bar{j}} = \begin{pmatrix} q^1 \cdot q^1 & 0 & 0 \\ 0 & q^2 \cdot q^2 & 0 \\ 0 & 0 & q^3 \cdot q^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r^2 \cos^2 \varphi} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \det g^{\bar{j}} = \frac{1}{g} = \frac{1}{r^4 \cos^2 \varphi}$$

A Christoffel-szimbólumok

$$\Gamma_{\bar{i}\bar{j}}^{\bar{n}} = g^{\bar{n}\bar{k}} \Gamma_{\bar{i}\bar{j}\bar{k}} = \frac{1}{2} g^{\bar{n}\bar{k}} \left(\frac{\partial g_{\bar{i}\bar{j}}}{\partial q^{\bar{k}}} + \frac{\partial g_{\bar{k}\bar{i}}}{\partial q^{\bar{j}}} - \frac{\partial g_{\bar{i}\bar{k}}}{\partial q^{\bar{j}}} \right)$$

definíciója alapján megállapítható, hogy a szimbólum alsó két indexében szimmetrikus, azaz a két index felcserélhető. Látható továbbá, hogy a szimbólumokat négy csoportba sorolhatjuk.

Amikor az ^{nij} indexhármásban mindegyik index különböző, amikor $i = j \neq n$, amikor $n = i$, vagy $n = j$, de $i \neq j$ és végül, ha ^{nij} mindegyike azonos.

Komoly egyszerűsítést jelen továbbá, hogy a metrikus tenzor diagonális. Emiatt a $\mathcal{E}^{nk}$ szorzóban $n = k$. Ez olyan egyszerűsítést jelent, hogy érdemes az Einstein konvenciót a továbbiakban felfüggeszteni. Ennek hangsúlyozására a továbbiakban a konkrét indexek esetén az $^1, 2, 3$ indexek helyett a $^{\lambda\varphi r}$ indexhármast használjuk. A következőkben csoportonként meghatározzuk a nem zérus Christoffel-szimbólumokat.

Az ^{nij} indexhármásban mindegyik index különböző. Ekkor nem kaphatunk zérustól különböző szimbólumot, mert $n = k$, de $i \neq j$ és $n \neq i$, $n \neq j$ miatt az alul indexes metrikus tenzor elemek mindegyike zérus.

Ha $i = j \neq n$ akkor $n = k$, $i = j$ és $n \neq i$, $n \neq j$, azaz a Christoffel-szimbólum a

$$\Gamma_{ii}^n = -\frac{1}{2} g^{nn} \frac{\partial g_{ii}}{\partial q^n}$$

alakra egyszerűsödik. Ez konkrétan az egyes indexekre:

$$\Gamma_{\varphi\varphi}^{\lambda} = -\frac{1}{2} g^{\lambda\lambda} \frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial \lambda} = 0, \quad \Gamma_{rr}^{\lambda} = -\frac{1}{2} g^{\lambda\lambda} \frac{\partial g_{rr}}{\partial \lambda} = 0,$$

$$\Gamma_{\lambda\lambda}^{\varphi} = -\frac{1}{2} g^{\varphi\varphi} \frac{\partial g_{\lambda\lambda}}{\partial \varphi} = \frac{1}{r^2} r^2 \cos \varphi \sin \varphi = \cos \varphi \sin \varphi \quad \Gamma_{rr}^{\varphi} = -\frac{1}{2} g^{\varphi\varphi} \frac{\partial g_{rr}}{\partial \varphi} = 0$$

$$\Gamma_{\lambda\lambda}^r = -\frac{1}{2} g^{rr} \frac{\partial g_{\lambda\lambda}}{\partial r} = -r \cos^2 \varphi \quad \Gamma_{\varphi\varphi}^r = -\frac{1}{2} g^{rr} \frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial r} = -r$$

Ha $n = i$, vagy $n = j$, de $i \neq j$, akkor a Christoffel-szimbólum a

$$\Gamma_{ni}^n = \Gamma_{ni}^n \frac{1}{2} g^{nn} \frac{\partial g_{ni}}{\partial q^i}$$

alakot ölti. Konkrétan:

$$\Gamma_{\lambda\varphi}^{\lambda} = \Gamma_{\varphi\lambda}^{\lambda} = \frac{1}{2} g^{\lambda\lambda} \frac{\partial g_{\lambda\lambda}}{\partial \varphi} = -\frac{1}{r^2 \cos^2 \varphi} r^2 \cos \varphi \sin \varphi = -\tan \varphi,$$

$$\Gamma_{\lambda r}^{\lambda} = \Gamma_{r\lambda}^{\lambda} = \frac{1}{2} g^{\lambda\lambda} \frac{\partial g_{\lambda\lambda}}{\partial r} = \frac{1}{r^2 \cos^2 \varphi} r \cos^2 \varphi = \frac{1}{r},$$

$$\Gamma_{\varphi\lambda}^{\varphi} = \Gamma_{\lambda\varphi}^{\varphi} = \frac{1}{2} g^{\varphi\varphi} \frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial \lambda} = 0 \quad \Gamma_{\varphi r}^{\varphi} = \Gamma_{r\varphi}^{\varphi} = \frac{1}{2} g^{\varphi\varphi} \frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial r} = \frac{1}{r^2} r = \frac{1}{r},$$

$$\Gamma_{r\lambda}^r = \Gamma_{\lambda r}^r = \frac{1}{2} g^{rr} \frac{\partial g_{rr}}{\partial \lambda} = 0, \quad \Gamma_{\varphi r}^r = \Gamma_{r\varphi}^r = \frac{1}{2} g^{rr} \frac{\partial g_{rr}}{\partial r} = 0.$$

Ha ^{nij} mindegyike azonos, akkor a Christoffel-szimbólum:

$$\Gamma_{nn}^n = \frac{1}{2} g^{nn} \frac{\partial g_{nn}}{\partial q^n},$$

azaz

$$\Gamma_{\lambda\lambda}^\lambda = \frac{1}{2} g^{\lambda\lambda} \frac{\partial g_{\lambda\lambda}}{\partial q^\lambda} = 0, \quad \Gamma_{\varphi\varphi}^\varphi = \frac{1}{2} g^{\varphi\varphi} \frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial q^\varphi} = 0 \quad \text{és} \quad \Gamma_{rr}^r = \frac{1}{2} g^{rr} \frac{\partial g_{rr}}{\partial q^r} = 0$$

alakban adható meg.

II.3.2.9. a) Elsőként a térbeli polárkoordináta-rendszer kovariáns és kontravariáns bázisvektorait határozzuk meg.

A térbeli polárkoordináta-rendszer általános koordinátaival az $\mathbf{r}(x, y, z)$ helyvektor koordinátái az

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi \cos \lambda, \\ y &= r \cos \varphi \sin \lambda, \\ z &= r \sin \varphi \end{aligned}$$

alakban adhatók meg. Tudjuk, hogy a kovariáns bázisvektorok $\mathbf{q}_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^i}$ formában adhatók meg. Ennek megfelelően a bázisvektorok oszlopvektorokként mátrixba rendezve a következők:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{q}_1 & \mathbf{q}_2 & \mathbf{q}_3 \\ -r \cos \varphi \sin \lambda & -r \sin \varphi \cos \lambda & \cos \varphi \cos \lambda \\ r \cos \varphi \cos \lambda & -r \sin \varphi \sin \lambda & \cos \varphi \sin \lambda \\ 0 & r \cos \varphi & \sin \varphi \end{pmatrix}.$$

A mátrix oszlopai az eredeti ortonormált $\mathbf{e}_i$ bázisvektor rendszerben tartalmazzák az új bázisvektorok koordinátáit. A kovariáns bázisvektorokat definíció szerint a

$$\mathbf{q}^i = \varepsilon^{ijk} \frac{\mathbf{q}_j \times \mathbf{q}_k}{(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3)} \quad (\varepsilon^{ijk} = 1)$$

összefüggéssel határozhatjuk meg.

$$\begin{aligned} \mathbf{q}^1 &= \frac{\mathbf{q}_2 \times \mathbf{q}_3}{(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3)} = \frac{1}{(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3)} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ -r \sin \varphi \cos \lambda & -r \sin \varphi \sin \lambda & r \cos \varphi \\ \cos \varphi \cos \lambda & \cos \varphi \sin \lambda & \sin \varphi \end{vmatrix} = \\ &= \frac{1}{(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3)} (-r \sin \lambda \mathbf{e}_1 + r \cos \lambda \mathbf{e}_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{q}^2 &= \frac{\mathbf{q}_3 \times \mathbf{q}_1}{(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3)} = \frac{1}{(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3)} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \cos \varphi \cos \lambda & \cos \varphi \sin \lambda & \sin \varphi \\ -r \cos \varphi \sin \lambda & r \cos \varphi \cos \lambda & 0 \end{vmatrix} = \\ &= \frac{1}{(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3)} (-r \sin \varphi \cos \varphi \cos \lambda \mathbf{e}_1 - r \sin \varphi \cos \varphi \sin \lambda \mathbf{e}_2 + r \cos^2 \varphi \mathbf{e}_3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q^3 &= \frac{q_1 \times q_2}{(q_1, q_2, q_3)} = \frac{1}{(q_1, q_2, q_3)} \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -r \cos \varphi \sin \lambda & r \cos \varphi \cos \lambda & 0 \\ -r \sin \varphi \cos \lambda & r \sin \varphi \sin \lambda & r \cos \varphi \end{vmatrix} = \\ &= \frac{1}{(q_1, q_2, q_3)} (r^2 \cos^2 \varphi \cos \lambda e_1 + r^2 \cos^2 \varphi \sin \lambda e_2 + r^2 \cos \varphi \sin \varphi e_3) \end{aligned}$$

b) A következő lépésként meghatározzuk a bázisvektor rendszerek által kifeszített paralelepipedon térfogatát. A bázisvektorok hármasszorzatát a

$$\begin{pmatrix} -r \cos \varphi \sin \lambda & -r \sin \varphi \cos \lambda & \cos \varphi \cos \lambda \\ r \cos \varphi \cos \lambda & -r \sin \varphi \sin \lambda & \cos \varphi \sin \lambda \\ 0 & r \cos \varphi & \sin \varphi \end{pmatrix}$$

mátrix transzponáltjának determinánsa adja, ami megegyezik az eredeti mátrix determinánsával, azaz

$$(q_1, q_2, q_3) = \begin{vmatrix} -r \cos \varphi \sin \lambda & -r \sin \varphi \cos \lambda & \cos \varphi \cos \lambda \\ r \cos \varphi \cos \lambda & -r \sin \varphi \sin \lambda & \cos \varphi \sin \lambda \\ 0 & r \cos \varphi & \sin \varphi \end{vmatrix} = r \cos^2 \varphi.$$

Visszaírva ezt az eredményt a kovariáns bázisvektorokra kapott formulákba és a kovariáns bázisvektorokat oszlopvektorként mátrixba rendezve:

$$\frac{1}{r^2 \cos \varphi} \begin{pmatrix} q^1 & q^2 & q^3 \\ -r \sin \lambda & -r \sin \varphi \cos \varphi \cos \lambda & r^2 \cos^2 \varphi \cos \lambda \\ r \cos \lambda & -r \sin \varphi \cos \varphi \sin \lambda & r^2 \cos^2 \varphi \sin \lambda \\ 0 & r \cos^2 \varphi & r^2 \cos \varphi \sin \varphi \end{pmatrix}$$

eredményt kapjuk. A kovariáns bázisvektor rendszer által kifeszített paralelepipedon térfogata

$$(q^1, q^2, q^3) = \left(\frac{1}{r^2 \cos \varphi} \right)^3 \begin{vmatrix} -r \sin \lambda & -r \sin \varphi \cos \varphi \cos \lambda & r^2 \cos^2 \varphi \cos \lambda \\ r \cos \lambda & -r \sin \varphi \cos \varphi \sin \lambda & r^2 \cos^2 \varphi \sin \lambda \\ 0 & r \cos^2 \varphi & r^2 \cos \varphi \sin \varphi \end{vmatrix} = \frac{1}{r^2 \cos \varphi}$$

(Az $\frac{1}{r^2 \cos \varphi}$ tényező azért került harmadik hatványra, mert a mátrixszorzás szabályai szerint a konstans szorzóval minden mátrix elemet meg kell szorozni, a determináns tagjai pedig mindig három mátrix elem szorzatát tartalmazzák.) A kovariáns és kontravariáns bázisvektorokról egyszerűen látható, hogy rendre párhuzamosak egymással, irányuk rendre azonos, csak hosszúságuk különbözik.

c) végezetül a bázisvektor rendszerek ortogonalitását mutatja, hogy

$$q_i \cdot q_j = 0 \text{ és } q^i \cdot q^j = 0 \text{ ha } i \neq j.$$

II.3.2.10 A II.3.2.1. feladatban meghatároztuk a rendszer bázisvektorait és beláttuk, hogy mind a kovariáns, mind a kontravariáns bázisvektor rendszer ortogonális, következésképpen a metrikus tenzorok diagonálisak. A

$$\begin{matrix} q_1 & q_2 & q_3 \\ \begin{pmatrix} -r \cos \varphi \sin \lambda & -r \sin \varphi \cos \lambda & \cos \varphi \cos \lambda \\ r \cos \varphi \cos \lambda & -r \sin \varphi \sin \lambda & \cos \varphi \sin \lambda \\ 0 & r \cos \varphi & \sin \varphi \end{pmatrix} \end{matrix}$$

bázisvektorokkal:

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} q_1 \cdot q_1 & 0 & 0 \\ 0 & q_2 \cdot q_2 & 0 \\ 0 & 0 & q_3 \cdot q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r^2 \cos^2 \varphi & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Látható, hogy

$$\det g_{ij} = r^4 \cos^2 \varphi = (q_1, q_2, q_3)^2.$$

A kontravariáns

$$\frac{1}{r^2 \cos \varphi} \begin{pmatrix} q^1 & q^2 & q^3 \\ -r \sin \lambda & -r \sin \varphi \cos \varphi \cos \lambda & r^2 \cos^2 \varphi \cos \lambda \\ r \cos \lambda & -r \sin \varphi \cos \varphi \sin \lambda & r^2 \cos^2 \varphi \sin \lambda \\ 0 & r \cos^2 \varphi & r^2 \cos \varphi \sin \varphi \end{pmatrix}$$

bázisvektorokkal:

$$g^{ij} = \begin{pmatrix} q^1 \cdot q^1 & 0 & 0 \\ 0 & q^2 \cdot q^2 & 0 \\ 0 & 0 & q^3 \cdot q^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r^2 \cos^2 \varphi} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

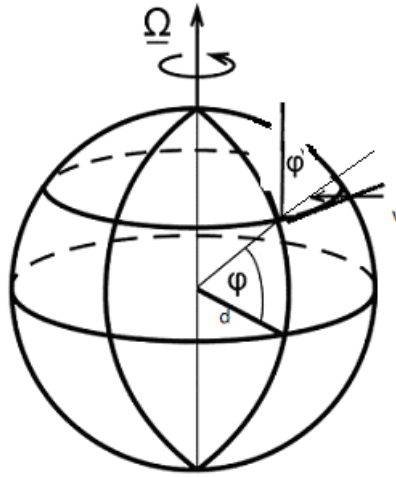
Látható, hogy

$$\det g^{ij} = \frac{1}{r^4 \cos^2 \varphi} = (q^1, q^2, q^3)^2.$$

A reciprok rendszer definíciójából pedig következik, hogy

$$g_i^j = q_i \cdot q^j = \delta_i^j.$$

II.3.2.11. A tér pontjai a Föld tengelye körül forognak és sebességük nagysága $v = d\Omega$, ahol d a vizsgált pont tengelytől mért távolsága. A sebesség a pont által leírt körpálya érintőjébe esik és az *III.3.2.1. ábrának* megfelelően keleti irányú. Mivel a forgás nyugatról keletre irányul, a szögsebesség vektor észak felé mutat.



MII.3.2.1. ábra. A kovariáns és a kontravariáns sebesség komponensek meghatározása a Földdel együtt forgó térben.

Az MII.3.2.1 ábra alapján leolvasható, hogy az $\mathbf{r}$ helyvektorú pont sebessége

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r},$$

ami az $\mathbf{e}_i$ koordináta-rendszerben kifejtve

$$\mathbf{v} = \varepsilon_{ijk} \Omega_j x_k \mathbf{e}_i = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ 0 & 0 & \Omega \\ x & y & z \end{vmatrix} = -y\Omega \mathbf{e}_1 + x\Omega \mathbf{e}_2.$$

(Természetesen ebben az ortonormált koordináta-rendszerben a megfelelő alsó és felső indexes mennyiségek azonosak, megkülönböztetésüknek nincs értelme.)

A kovariáns és kontravariáns sebességkomponensek definíció szerint rendre a

$$v_i = \mathbf{v} \cdot \mathbf{q}_i \text{ és } v^i = \mathbf{v} \cdot \mathbf{q}^i$$

összefüggésekkel adhatók meg. Visszaidézve a kovariáns bázisvektorokra vonatkozó

$$\begin{matrix} & \mathbf{q}_1 & \mathbf{q}_2 & \mathbf{q}_3 \\ \begin{pmatrix} -r \cos \varphi \sin \lambda & -r \sin \varphi \cos \lambda & \cos \varphi \cos \lambda \\ r \cos \varphi \cos \lambda & -r \sin \varphi \sin \lambda & \cos \varphi \sin \lambda \\ 0 & r \cos \varphi & \sin \varphi \end{pmatrix} \end{matrix}$$

alakot, valamint a polárkoordináták és a Descartes-féle koordináták közötti

$$x = r \cos \varphi \cos \lambda \text{ és } y = r \cos \varphi \sin \lambda$$

összefüggéseket felhasználva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
 v_1 &= (-y\Omega e_1 + x\Omega e_2) \cdot (-r \cos \varphi \sin \lambda e_1 + r \cos \varphi \cos \lambda e_2) = \\
 &= (r^2 \cos^2 \varphi \cos^2 \lambda + r^2 \cos^2 \varphi \cos^2 \lambda) \Omega = \Omega r^2 \cos^2 \varphi \\
 v_2 &= (-y\Omega e_1 + x\Omega e_2) \cdot (-r \sin \varphi \cos \lambda e_1 - r \sin \varphi \sin \lambda e_2 + r \cos \varphi e_3) = 0 \\
 v_3 &= (-y\Omega e_1 + x\Omega e_2) \cdot (\cos \varphi \cos \lambda e_1 + \cos \varphi \sin \lambda e_2 + \sin \varphi e_3) = 0
 \end{aligned}$$

vagyis

$$v = v_1 q^1 = \Omega r^2 \cos^2 \varphi$$

Hasonlóképpen a sebesség kontravariáns komponensei a

$$\frac{1}{r^2 \cos \varphi} \begin{pmatrix} q^1 & q^2 & q^3 \\ -r \sin \lambda & -r \sin \varphi \cos \varphi \cos \lambda & r^2 \cos^2 \varphi \cos \lambda \\ r \cos \lambda & -r \sin \varphi \cos \varphi \sin \lambda & r^2 \cos^2 \varphi \sin \lambda \\ 0 & r \cos^2 \varphi & r^2 \cos \varphi \sin \varphi \end{pmatrix}$$

kontravariáns bázisvektorokkal kifejezve:

$$\begin{aligned}
 v^1 &= (-y\Omega e_1 + x\Omega e_2) \cdot \frac{1}{r^2 \cos \varphi} (-r \sin \lambda e_1 + r \cos \lambda e_2) = (\sin^2 \lambda + \cos^2 \lambda) \Omega = \Omega, \\
 v^2 &= (-y\Omega e_1 + x\Omega e_2) \cdot \frac{1}{r^2 \cos \varphi} (-r \sin \varphi \cos \varphi \cos \lambda e_1 - r \sin \varphi \cos \varphi \sin \lambda e_2 + r \cos^2 \varphi e_3) = 0, \\
 v^3 &= (-y\Omega e_1 + x\Omega e_2) \cdot \frac{1}{r^2 \cos \varphi} (r^2 \cos^2 \varphi \cos \lambda e_1 + r^2 \cos^2 \varphi \sin \lambda e_2 + r^2 \cos \varphi \sin \varphi e_3) = 0.
 \end{aligned}$$

Tehát:

$$v = v^1 q_1 = \Omega q_1.$$

Megjegyezzük, hogy a számítások elvégzése nélkül a fizikai szemlélet alapján is kitalálhatók ezek az eredmények, hiszen a sebességvektort a Descartes-féle koordináta-rendszerben tudjuk, iránya nyilvánvalóan a lokális koordináta-rendszer q_1 tengelyének irányába mutat, a sebességkomponens nagysága pedig kitalálható abból, hogy a sebességvektor abszolút értéke koordináta-rendszertől független (invariáns) mennyiség, tehát

$$|v| = |\Omega r \cos \varphi e_1| = |v^1 q_1| = |v_1 q^1|.$$

Mivel

$$|q_1| = \sqrt{g_{11}} = r \cos \varphi \text{ és } |q^1| = \sqrt{g^{11}} = \frac{1}{r \cos \varphi},$$

adódik, hogy

$$v_1 = \Omega r^2 \cos^2 \varphi \text{ és } v^1 = \Omega.$$

II.3.2.12. A gömbi polárkoordináta-rendszer kovariáns és kontravariáns bázisvektorait – amelyben a $q^3 = r$ koordinátát a nyomásra cseréltük – a térbeli polárkoordináta-rendszerből származtatjuk. Az eredeti Descartes-féle koordináta-rendszer koordinátái a jól ismert

$$\begin{aligned}x &= r \cos \varphi \cos \lambda, \\y &= r \cos \varphi \sin \lambda, \\z &= r \sin \varphi.\end{aligned}$$

összefüggésekkel adhatók meg. Az alkalmazott koordináta-transzformációban a

$$\begin{aligned}q^1 &= \lambda_p, \quad q^2 = \varphi_p, \quad q^3 = p, \\ \lambda &= \lambda_p, \quad \varphi = \varphi_p, \quad r = r(\lambda_p, \varphi_p, p), \\ x &= x(\lambda, \varphi, r) = x(\lambda_p, \varphi_p, r(\lambda_p, \varphi_p, p)), \\ y &= y(\lambda, \varphi, r) = y(\lambda_p, \varphi_p, r(\lambda_p, \varphi_p, p)), \\ z &= z(\lambda, \varphi, r) = z(\lambda_p, \varphi_p, r(\lambda_p, \varphi_p, p))\end{aligned}$$

változókat és függvénykapcsolatokat használjuk. A p index azt jelenti, hogy az adott változó szerint deriválva a nyomást állandónak tartjuk. Ennek megfelelően a kovariáns bázisvektorok a szokott módon, egy mátrix oszlopvektoraiként megadva:

$$\begin{array}{ccc}q_1 & q_2 & q_3 \\ \frac{\partial x}{\partial \lambda_p} & \frac{\partial x}{\partial \varphi_p} & \frac{\partial x}{\partial p} \\ \frac{\partial y}{\partial \lambda_p} & \frac{\partial y}{\partial \varphi_p} & \frac{\partial y}{\partial p} \\ \frac{\partial z}{\partial \lambda_p} & \frac{\partial z}{\partial \varphi_p} & \frac{\partial z}{\partial p}\end{array}.$$

A fenti deriváltak a

$$\begin{array}{ll}\frac{\partial x}{\partial \lambda_p} = \frac{\partial x}{\partial \lambda} + \frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial \lambda_p} & \frac{\partial x}{\partial \varphi_p} = \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial \varphi_p} \\ \frac{\partial y}{\partial \lambda_p} = \frac{\partial y}{\partial \lambda} + \frac{\partial y}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial \lambda_p} & \frac{\partial y}{\partial \varphi_p} = \frac{\partial y}{\partial \varphi} + \frac{\partial y}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial \varphi_p} \\ \frac{\partial z}{\partial \lambda_p} = \frac{\partial z}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial \lambda_p} & \frac{\partial z}{\partial \varphi_p} = \frac{\partial z}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial \varphi_p}\end{array}$$

általános transzformációs formulákat alkalmazva a térbeli polárkoordináta-rendszer definíciós egyenleteire, az alábbi alakra hozhatók

$$\begin{array}{ccc}q_1 & q_2 & q_3 \\ \left(\begin{array}{ccc} -r \cos \varphi \sin \lambda + \cos \varphi \cos \lambda \frac{\partial r}{\partial \lambda} & -r \sin \varphi \cos \lambda + \cos \varphi \sin \lambda \frac{\partial r}{\partial \varphi} & \cos \varphi \cos \lambda \frac{\partial r}{\partial p} \\ r \cos \varphi \cos \lambda + \cos \varphi \sin \lambda \frac{\partial r}{\partial \lambda} & -r \sin \varphi \sin \lambda + \cos \varphi \sin \lambda \frac{\partial r}{\partial \varphi} & \cos \varphi \sin \lambda \frac{\partial r}{\partial p} \\ \sin \varphi \frac{\partial r}{\partial \lambda} & r \cos \varphi + \sin \varphi \frac{\partial r}{\partial \varphi} & \sin \varphi \frac{\partial r}{\partial p} \end{array} \right)\end{array}.$$

II.4. A barotróp és a baroklin légkör

II.4.1. Az összenyomhatatlan homogén légkör közelítésében a levegő *összenyomhatatlan folyadék* tulajdonságaival rendelkezik. Ebben a közegben a sűrűség állandó, sem a nyomásnak, sem más változónak nem függvénye, ennek megfelelően a barotropitási együttható értéke nulla. Az összenyomhatatlan közelítésben az elmozduló légréteg (folyadékrész) sűrűsége nem változik, ezért a piezotropitási együttható szintén nulla. Mivel a barotropitási és a piezotropitási együttható a légkör minden pontjában megegyezik, az összenyomhatatlan homogén légkör autobarotróp közeg. Hangsúlyozzuk, hogy itt nem gázzól, hanem folyadékról van szó. Gondoljunk csak a sekély víz egyenletekre.

II.4.2. A nyugalomban lévő homogén légkörben a sűrűség állandó, barotropitási együtthatója nulla. A közeg azonban összenyomható, ezért felfelé történő elmozdulása során a nyomás csökkenésével párhuzamosan a sűrűsége is csökken. A száraz adiabatikusan felfele mozgó légrétegben a hőmérséklet változása:

$$T(z) = T_0 \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{R}{c_p}},$$

ahol T és p a z magasságban mérhető, míg T_0 és p_0 a felszíni hőmérséklet és nyomás, R a specifikus gázállandó, c_p pedig az állandó nyomáson vett fajhő. Az ideális gáz állapotegyenletével a hőmérsékletváltozás a sűrűség megváltozására váltható át:

$$\frac{p}{\rho R} = \frac{p_0}{\rho_0 R} \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{R}{c_p}}.$$

A fenti egyenlet megadja a felemelkedő levegő sűrűségének nyomásfüggését:

$$\rho = \rho_0 \cdot \left(\frac{p}{p_0} \right)^{1 - \frac{R}{c_p}}.$$

A formulát p szerint deriválva megkapjuk a piezotropitási együtthatót:

$$B = \frac{d\rho}{dp} = \frac{\rho_0}{p_0} \left(1 - \frac{R}{c_p} \right) \left(\frac{p}{p_0} \right)^{-\frac{R}{c_p}}.$$

A piezotropitási együttható a $p = p_0$ helyen, kihasználva az ideális gáz állapotegyenletét és az $R = c_p - c_v$ összefüggést:

$$B = \frac{\rho_0}{p_0} \left(1 - \frac{R}{c_p} \right) = \frac{1}{R T_0} \frac{c_v}{c_p}.$$

Mivel a barotropitási együttható nem egyezik meg a piezotropitási együtthatóval, a kezdetben fennálló barotróp rétegződést a függőlegesen elmozduló légrétegek megbontják, azaz a közeg feltételesen barotróp.

II.4.3. Az adiabatikus légkörben a hőmérsékleti rétegződés megegyezik a száraz adiabatikusan elmozduló légréteg hőmérsékleti profiljával. A légrétegek elmozdulása nem változtatja meg a rétegződést, a kezdeti barotropitás megmarad, ezért a közeg autobarotróp. A barotropitási és a piezotropitási együttható a **II.4.2. feladatban** bemutatott módon számítható:

$$b = B = \frac{1}{RT_0} \frac{c_v}{c_p}$$

II.4.4. Az izoterm légkörben a hőmérséklet minden szinten állandó T_0 értékű (egy adott időpillanatban). A nyomás és a sűrűség kapcsolatát ebben az esetben az ideális gáz állapotegyenlete írja le:

$$p = \rho RT_0$$

A barotropitási együtthatót a sűrűség nyomás szerinti deriváltjaként kapjuk:

$$b = \frac{\partial \rho}{\partial p} = \frac{1}{RT_0}$$

Az izoterm légkörben feláramló levegő a száraz adiabatikus hőmérsékleti profil szerint hűl. A légréteg elmozdulására vonatkozó piezotropitási együttható a **II.4.2. feladatban** bemutatott módon számítható, értéke:

$$B = \frac{1}{RT_0} \frac{c_v}{c_p}$$

Mivel a barotropitási és a piezotropitási együttható nem egyezik meg, a kezdetben barotróp rétegződés a vertikális elmozdulások során megbomlik, azaz a közeg feltételeesen barotróp.

II.4.5. A baroklinitási vektor a nyomás és a hőmérséklet ismeretében a következő módon számítható:

$$\mathbf{N} = -\nabla T \times \left(\frac{R}{p} \nabla p \right)$$

A hőmérséklet gradiense:

$$\nabla T = \begin{pmatrix} -A \\ -C \\ D(Ax + Cy) \end{pmatrix} T_0 \exp(-Dz)$$

Megjegyezzük, hogy a hőmérsékleti gradienst (s a nyomási gradienst is) felírhatjuk a szokásos koordináta-egységvektorok alkalmazásával is a következőképpen:

$$\nabla T = T_0 \exp(-Dz) \cdot [-A\mathbf{i} - C\mathbf{j} + D(Ax + Cy)\mathbf{k}]$$

A légnyomás gradiense:

$$\nabla p = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -k \end{pmatrix} p_0 \exp(-kz)$$

Az izobárok és az izotermák szöge megegyezik a rájuk merőleges gradiensek által bezárt szöggel. A két gradiens vektor θ szöge a skaláris szorzatuk segítségével számítható:

$$\nabla T \cdot \nabla p = |\nabla T| \cdot |\nabla p| \cdot \cos \theta,$$

amiből

$$\cos \theta = \frac{D(Ax + Cy)T_0 p_0 \exp(-Dz) \exp(-kz)}{\sqrt{A^2 + C^2 + D^2(Ax + Cy)^2} T_0 \exp(-Dz) k p_0 \exp(-kz)} = \frac{D(Ax + Cy)}{k \sqrt{A^2 + C^2 + D^2(Ax + Cy)^2}}.$$

A légnyomás gradiense függőleges irányba mutat, ezért a rá merőleges baroklinitási vektor a vízszintes síkban fekszik majd. A két gradiens vektor keresztszorzata:

$$\begin{aligned} \mathbf{N} &= -\nabla T \times \left(\frac{R}{p} \nabla p \right) = -\frac{RT_0 p_0}{p_0 \exp(-kz)} \exp(-kz - Dz) \begin{pmatrix} -A \\ -C \\ D(Ax + Cy) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -k \end{pmatrix} = \\ &= -RT_0 \exp(-Dz) \begin{pmatrix} kC \\ kA \\ 0 \end{pmatrix} = -kRT_0 \exp(-Dz) \begin{pmatrix} C \\ A \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Megjegyezzük, hogy a fenti vektorszorzást felírhatjuk egy mátrix determinánsaként is:

$$\begin{pmatrix} -A \\ -C \\ D(Ax + Cy) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -k \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -A & -C & D(Ax + Cy) \\ 0 & 0 & -k \end{vmatrix}.$$

A baroklinitási vektor valóban a vízszintes síkban fekszik, iránya állandó, nagysága pedig csak a magasságtól függ. Az északi iránnyal bezárt α szög a következőképpen számítható:

$$\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \frac{A}{C},$$

amiből az α szögre az

$$\alpha = \arctg\left(\frac{C}{A}\right)$$

kifejezés adódik.

A baroklinitási vektor nagysága:

$$|\mathbf{N}| = -kRT_0 \exp(-Dz) \sqrt{C^2 + A^2},$$

amely csak a magasság függvénye.

II.4.6. A baroklinitási vektor a nyomás és a hőmérséklet ismeretében a következő módon számítható:

$$\mathbf{N} = -\nabla T \times \left(\frac{R}{p} \nabla p \right).$$

A hőmérséklet gradiense:

$$\nabla T = \begin{pmatrix} -A \\ -C \\ -D \end{pmatrix} T_0$$

A légnyomási mező megállapításához az ideális gáz állapotegyenletének felhasználásával kifejezzük a nyomás magasság szerinti megváltozását a nyomás és a hőmérséklet függvényeként:

$$dp = -\rho g dz = -\frac{p}{RT} g dz,$$

majd ezt a differenciálegyenletet szétválasztjuk és integráljuk:

$$\frac{dp}{p} = -\frac{g dz}{RT},$$

$$\int_{p_0}^p \frac{dp'}{p'} = \int_0^z -\frac{g dz'}{RT_0(-Ax - Cy - Dz')},$$

$$\ln \frac{p}{p_0} = \frac{g}{DRT_0} \ln \left(\frac{-Ax - Cy - Dz}{-Ax - Cy} \right),$$

$$p = p_0 \left(\frac{-Ax - Cy - Dz}{-Ax - Cy} \right)^{\frac{g}{DRT_0}} = p_0 \left(1 + \frac{Dz}{Ax + Cy} \right)^{\frac{g}{DRT_0}}.$$

Az így kapott nyomási mező gradiense:

$$\nabla p = \begin{pmatrix} -A \\ -C \\ Ax + Cy \end{pmatrix} \frac{gp_0}{DRT_0} \left(1 + \frac{Dz}{Ax + Cy} \right)^{\frac{g}{DRT_0}-1} \frac{D}{(Ax + Cy)^2}.$$

Az izobárok és izotermák szöge megegyezik a rájuk merőleges gradiensek által bezárt szöggel. A két gradiens vektor θ szöge a skaláris szorzatuk segítségével számítható:

$$\nabla T \cdot \nabla p = |\nabla T| \cdot |\nabla p| \cdot \cos \theta,$$

amiből

$$\cos \theta = \frac{A^2 + C^2 + D(Ax + Cy)^2}{\sqrt{(A^2 + C^2 + D^2) \cdot (A^2 + C^2 + (Ax + Cy)^2)}}.$$

A két gradiens vektor keresztszorzata:

$$\mathbf{N} = -\nabla T \times \left(\frac{R}{p} \nabla p \right) = -\frac{R}{p} \frac{gp_0}{DRT_0} \left(1 + \frac{Dz}{Ax + Cy} \right)^{\frac{g}{DRT_0}-1} \frac{D}{(Ax + Cy)^2} T_0 \begin{pmatrix} -A \\ -C \\ -D \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -A \\ -C \\ Ax + Cy \end{pmatrix} =$$

$$= - \frac{R}{p_0 \left(1 + \frac{Dz}{Ax + Cy}\right)^{\frac{\varepsilon}{DR T_0}}} \frac{g p_0}{DR T_0} \left(1 + \frac{Dz}{Ax + Cy}\right)^{\frac{\varepsilon}{DR T_0} - 1} \frac{D}{(Ax + Cy)^2} T_0 \begin{pmatrix} -A \\ -C \\ -D \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -A \\ -C \\ Ax + Cy \end{pmatrix} =$$

$$= - \frac{1}{\left(1 + \frac{Dz}{Ax + Cy}\right) (Ax + Cy)^2} \frac{g}{(Ax + Cy)^2} \begin{pmatrix} -A \\ -C \\ -D \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -A \\ -C \\ Ax + Cy \end{pmatrix} = \frac{g}{(Ax + Cy + Dz)(Ax + Cy)} \begin{pmatrix} ACx + C^2y + CD \\ A^2x + ACy + AD \\ 0 \end{pmatrix}$$

A baroklinitási vektor tehát a vízszintes síkban fekszik, iránya pedig csak a horizontális koordinátáktól függ. Az északi iránnyal bezárt szöge a következőképpen számítható:

$$\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \frac{ACx + C^2y + CD}{A^2x + ACy + AD},$$

amiből a szögre az

$$\alpha = \operatorname{arctg} \left(\frac{A^2x + ACy + AD}{ACx + C^2y + CD} \right)$$

kifejezés adódik.

II.4.7. A piezotropitási együttható:

$$B = \frac{d\rho(x, y, z, t)}{dp(x, y, z, t)}$$

A nedves adiabatikus hőmérsékleti gradiens: $-\frac{dT}{dz} = \Gamma_s$.

Az ideális gáz állapotegyenletéből:

$$T = \frac{p}{\rho R},$$

$$dT = \frac{dp}{\rho R} - \frac{p}{\rho^2 R} d\rho$$

Ezt behelyettesítve a hőmérsékleti gradiens kifejezésébe:

$$-\frac{\frac{dp}{\rho R} - \frac{p}{\rho^2 R} d\rho}{dz} = \Gamma_s$$

A hidrosztatikus nyomás-magasság összefüggésből következik, hogy:

$$dz = \frac{-1}{\rho g} dp$$

Ezt a kifejezést is behelyettesítjük a hőmérsékleti gradiens egyenletébe:

$$\frac{\frac{dp}{\rho R} - \frac{p}{\rho^2 R} d\rho}{dp} = \frac{1}{\rho g} \Gamma_z$$

Az egyszerűsítéseket elvégezve: $\frac{1}{R} - \frac{p}{\rho R} \frac{d\rho}{dp} = \frac{\Gamma_z}{g}$

Az egyenletben megjelent a piezotropitási együttható. Átrendezés után, valamint az ideális gáz állapotegyenletének újbóli felhasználásával a következő eredmény adódik:

$$B = \frac{d\rho}{dp} = \frac{1}{RT} - \frac{\Gamma_z}{gT}$$

II.4.8. A piezotropitási együttható ismert: $B = \frac{d\rho}{dp}$

A sűrűséget a nyomás ismeretében hőmérsékletre, a nyomást magasságra kell átszámítanunk, hogy megkapjuk a hőmérsékleti gradienst. Az ideális gáz állapotegyenletéből:

$$\rho = \frac{p}{RT} \quad \text{és} \quad dp = \frac{dp}{RT} - \frac{p}{RT^2} dT$$

A hidrosztatikus nyomás-magasság összefüggés: $dp = -\rho g dz$

A sűrűség és a nyomás megváltozására vonatkozó kifejezéseket behelyettesítve a piezotropitási együttható képletébe:

$$B = \frac{d\rho}{dp} = \frac{\frac{dp}{RT} - \frac{p}{RT^2} dT}{-\rho g dz} = \frac{1}{RT} + \frac{p}{\rho g RT^2} \frac{dT}{dz}$$

A vertikális hőmérsékleti gradiens ismert B piezotropitási együttható esetén, az ideális gáz állapotegyenletét ismételten felhasználva:

II.5. Koordináta-rendszer forgatások, a lineáris skalár- és vektormezők felbontása

II.5.1. A sajátértékek meghatározásához oldjuk meg a $\begin{vmatrix} 7-\lambda & 3 \\ 1 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0$ egyenletet! Ebből adódik a két sajátérték: $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 8$. Kihasználva, hogy

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{s}_i = \lambda_i \mathbf{s}_i, \text{ vagyis } \begin{pmatrix} 7-\lambda_i & 3 \\ 1 & 5-\lambda_i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (s_x)_i \\ (s_y)_i \end{pmatrix} = 0,$$

a normált sajátvektorok alakja:

$$\mathbf{s}_1 = \frac{1}{[(-1)^2 + 1^2]^{1/2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{s}_2 = \frac{1}{[(3)^2 + 1^2]^{1/2}} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

II.5.2. A forgatás mátrixa: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos \vartheta & \sin \vartheta \\ -\sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix}$. Kihasználva, hogy

$$\text{a) } \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ és } \sin 30^\circ = \frac{1}{2}, \quad \mathbf{V}' = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 \\ \sqrt{3} - \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

$$\text{b) } \cos(-120^\circ) = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2} \text{ és } \sin 120^\circ = -\sin 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\mathbf{V}' = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} - \sqrt{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \end{pmatrix}.$$

II.5.3. A 3-dimenziós forgatást két egymás utáni 2 dimenziós forgatással végezzük el. (A két forgatás sorrendje mindegy, a forgatás szögei azonban függenek a sorrendtől, vagyis nem ugyanaz a két forgatás két-két megfelelő forgatás mátrixa.)

Először az (x, y) síkban forgatjuk el a koordináta-rendszert az óramutató járásával ellentétesen az ottani négyzet átlójának az irányába ($\phi = 45^\circ$). A forgatás mátrixa:

$$\mathbf{A}_\phi = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ekkor kapjuk az (x', y', z') koordináta-rendszert. Természetesen itt $z' \equiv z$. Ezután az (x', z') síkban forgatunk.

Az x'' koordináta irány a kocka átlója lesz. A négyzet átlója ($a_{\text{négyzet}} = \sqrt{2}$) és a kocka átlója ($a_{\text{kocka}} = \sqrt{3}$) által bezárt szög (λ), s így $\sin \lambda = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\cos \lambda = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$. A forgatás mátrixa:

$$\mathbf{A}_\lambda = \begin{pmatrix} \cos \lambda & 0 & \sin \lambda \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \lambda & 0 & \cos \lambda \end{pmatrix}.$$

Ekkor kapjuk az (x'', y'', z'') koordináta-rendszert. Itt $y'' \equiv y'$. A 3-dimenziós forgatás mátrixa:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_\lambda \cdot \mathbf{A}_\phi = \begin{pmatrix} \cos \lambda & 0 & \sin \lambda \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \lambda & 0 & \cos \lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

ahol az $\mathbf{A}$ mátrix elemei rendre:

$$a_{11} = \cos \lambda \cdot \cos \phi, \quad a_{12} = \cos \lambda \cdot \sin \phi, \quad a_{13} = \sin \lambda,$$

$$a_{21} = -\sin\phi, \quad a_{22} = \cos\phi, \quad a_{23} = 0,$$

$$a_{31} = -\sin\lambda \cdot \cos\phi, \quad a_{32} = -\sin\lambda \cdot \sin\phi, \quad a_{33} = \cos\lambda.$$

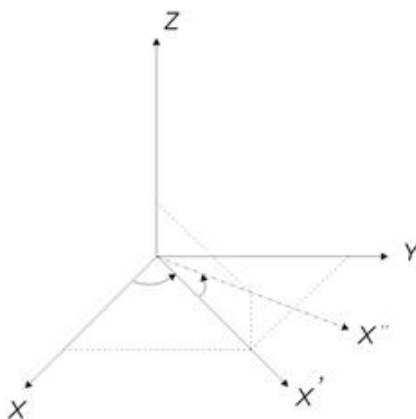
Megjegyezzük, hogy $\mathbf{A}_\lambda \cdot \mathbf{A}_\phi \neq \mathbf{A}_\phi \cdot \mathbf{A}_\lambda$.

II.5.4. Ha először forgatnánk el az y tengely változatlanul hagyásával a z és az x tengelyt λ szöggel, akkor még egyik új tengely sem esne a kijelölt új irányba, vagyis nem lenne elég a koordináta-rendszer transzformációhoz egy további 2-dimenziós forgatás.

II.5.5. A mátrix sajátértékei és sajátvektorai rendre: $\lambda_1 = 2$, $\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\lambda_2 = -1$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\lambda_3 = 1$, $\mathbf{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Az egységvektorok iránya ismerős (lásd a **II.5.2. feladat** megoldását). Az új koordináta irányokkal megadott rendszer nem ortogonális. Az új rendszerből az eredeti rendszerbe az $\mathbf{A}^{-1}$ operátor visz át.

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}.$$

II.5.6. a) A háromdimenziós forgatás mátrixát két 2-dimenziós forgatás segítségével írjuk le. Négy állapotátározónk van (u, v, w, T) , s így 4×4 -es mátrixot kapunk. Természetesen a hőmérséklet (skalár) értéke nem függ a koordináta-rendszer választásától. A **II.5.3. feladat** megoldását követjük. Először az (x, y) síkban forgatjuk el a koordináta-rendszer x tengelyét, megkapjuk az (x', y', z) rendszert, ahol $z' \equiv z$. A forgatás szöge az **III.5.1. ábra** alapján ϕ .



III.5.1 ábra. A koordináta-rendszer x tengelyének beforgatása az átlagos szélesség irányába (x'').

Az átlagos sebesség komponensek előjele alapján az egyes sík-negyedekben egyszerűen felírhatjuk a szinusz és koszinusz függvény értékét is:

$$\sin\phi = \frac{\bar{v}}{v_h}, \quad \cos\phi = \frac{\bar{u}}{v_h} \quad (v_h \neq 0),$$

ahol $\bar{v}_h = \sqrt{\bar{u}^2 + \bar{v}^2}$ a horizontális sebesség. A második λ szöggel történő forgatás után kapjuk az (x'', y'', z'') rendszert, ahol $y'' \equiv y'$. A szögfüggvények:

$$\sin \lambda = \frac{\bar{w}}{\bar{v}}, \quad \cos \phi = \frac{\bar{v}_h}{\bar{v}} \quad (\bar{v}_h \neq 0),$$

ahol $\bar{v} = \sqrt{\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + \bar{w}^2}$ az átlagos mért áramlási sebesség. A forgatás után azt feltételezzük, hogy az átlagos vertikális sebesség nulla ($\bar{w}_F = 0$), vagyis az (x'', y'') sík a „valódi” horizontot adja. A szögfüggvények ismeretében már megadható a két egymás utáni forgatás $\mathbf{A}_\phi$ és $\mathbf{A}_\lambda$, s ezek szorzataként a keresett forgatás mátrixa ($\mathbf{A} = \mathbf{A}_\lambda \cdot \mathbf{A}_\phi$).

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_\lambda \cdot \mathbf{A}_\phi = \begin{pmatrix} \cos \lambda & 0 & \sin \lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \lambda & 0 & \cos \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Az $\mathbf{A}$ mátrix elemeit a mátrix szorzás szabályai szerint kapjuk, ahol egyezően a **II.5.3. feladat** megoldásával:

$$a_{11} = \cos \lambda \cdot \cos \phi, \quad a_{12} = \cos \lambda \cdot \sin \phi, \quad a_{13} = \sin \lambda,$$

$$a_{21} = -\sin \phi, \quad a_{22} = \cos \phi, \quad a_{23} = 0,$$

$$a_{31} = -\sin \lambda \cdot \cos \phi, \quad a_{32} = -\sin \lambda \cdot \sin \phi, \quad a_{33} = \cos \lambda.$$

b) Az új rendszerbeli fluktuációk kifejezhetők az eredeti rendszerbeli fluktuációk alapján:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u' \\ v' \\ w' \\ T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}u' + a_{12}v' + a_{13}w' \\ a_{21}u' + a_{22}v' + a_{23}w' \\ a_{31}u' + a_{32}v' + a_{33}w' \\ T \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} u_F' \\ v_F' \\ w_F' \\ T_F' \end{pmatrix}.$$

A horizontális impulzus vertikális árama az elforgatott rendszerben:

$$(\overline{w'v_h'})_F = \sqrt{(\overline{w'u'})_F^2 + (\overline{w'v'})_F^2}.$$

A sebességfluktuációk szorzatátlagát számítjuk ki. Kihasználva, hogy $a_{23} = 0$:

$$\begin{aligned} & + (a_{11} \cdot a_{33} + a_{13} \cdot a_{31}) \cdot \overline{u'w'} + a_{12} \cdot a_{32} \cdot \overline{v'v'} + (a_{12} \cdot a_{33} + a_{13} \cdot a_{32}) \cdot \overline{v'w'} + a_{13} \cdot a_{33} \cdot \overline{w'w'} \\ & \overline{v_F'w_F'} = \overline{(a_{21}u' + a_{22}v' + a_{23}w') \cdot (a_{31}u' + a_{32}v' + a_{33}w')} = \overline{(a_{21}u' + a_{22}v') \cdot (a_{31}u' + a_{32}v' + a_{33}w')} \\ & = a_{21} \cdot a_{31} \cdot \overline{u'u'} + (a_{21} \cdot a_{32} + a_{22} \cdot a_{31}) \cdot \overline{u'v'} + a_{21} \cdot a_{33} \cdot \overline{u'w'} + a_{22} \cdot a_{32} \cdot \overline{v'v'} + a_{22} \cdot a_{33} \cdot \overline{v'w'} \end{aligned}$$

s így már felírható a keresett kifejezés.

c) A vertikális hőmérsékleti áram az elforgatott rendszerben:

$$\overline{T'_F w'_F} = \overline{T' \cdot (a_{31}u' + a_{32}v' + a_{33}w')} = a_{31} \cdot \overline{T' u'} + a_{32} \cdot \overline{T' v'} + a_{33} \cdot \overline{T' w'}$$

d) A transzformáció során nem változik a hőmérsékleti fluktuáció értéke, így a hőmérséklet varianciája (szórásnégyzete) sem.

e) A sebességkomponensek varianciája az elforgatott koordináta-rendszerben:

$$\begin{aligned} \overline{u'_F u'_F} &= \overline{(a_{11}u' + a_{12}v' + a_{13}w') \cdot (a_{11}u' + a_{12}v' + a_{13}w')} = \\ &= (a_{11})^2 \cdot \overline{u' u'} + 2 \cdot a_{11} \cdot a_{12} \cdot \overline{u' v'} + 2 \cdot a_{11} \cdot a_{13} \cdot \overline{u' w'} + (a_{12})^2 \cdot \overline{v' v'} + 2 \cdot a_{12} \cdot a_{13} \cdot \overline{v' w'} + (a_{13})^2 \cdot \overline{w' w'}, \\ \overline{v'_F v'_F} &= \overline{(a_{21}u' + a_{22}v' + a_{23}w') \cdot (a_{21}u' + a_{22}v' + a_{23}w')} = (a_{21}u' + a_{22}v') \cdot (a_{21}u' + a_{22}v') = (a_{21})^2 \cdot \overline{u' u'} + 2 \cdot a_{21} \cdot a_{22} \cdot \overline{u' v'} + (a_{22})^2 \cdot \overline{v' v'}, \\ \overline{w'_F w'_F} &= \overline{(a_{31}u' + a_{32}v' + a_{33}w') \cdot (a_{31}u' + a_{32}v' + a_{33}w')} = (a_{31})^2 \cdot \overline{u' u'} + 2 \cdot a_{31} \cdot a_{32} \cdot \overline{u' v'} + 2 \cdot a_{31} \cdot a_{33} \cdot \overline{u' w'} + \\ &+ (a_{32})^2 \cdot \overline{v' v'} + 2 \cdot a_{32} \cdot a_{33} \cdot \overline{v' w'} + (a_{33})^2 \cdot \overline{w' w'}. \end{aligned}$$

II.5.7. Nézzük az egyes deriváltak alakját az eredeti és az új koordináta-rendszerben. A deriváltak átírásánál két dologra kell figyelemmel lennünk. Változnak a koordináta-irányok és változik az adott vektor reprezentációja is.

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \cos \vartheta \frac{\partial u}{\partial x'} - \sin \vartheta \frac{\partial u}{\partial y'} = \cos \vartheta \left(\cos \vartheta \frac{\partial u'}{\partial x'} - \sin \vartheta \frac{\partial v'}{\partial x'} \right) - \sin \vartheta \left(\cos \vartheta \frac{\partial u'}{\partial y'} - \sin \vartheta \frac{\partial v'}{\partial y'} \right), \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \sin \vartheta \frac{\partial u}{\partial x'} + \cos \vartheta \frac{\partial u}{\partial y'} = \sin \vartheta \left(\cos \vartheta \frac{\partial u'}{\partial x'} - \sin \vartheta \frac{\partial v'}{\partial x'} \right) + \cos \vartheta \left(\cos \vartheta \frac{\partial u'}{\partial y'} - \sin \vartheta \frac{\partial v'}{\partial y'} \right), \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= \cos \vartheta \frac{\partial v}{\partial x'} - \sin \vartheta \frac{\partial v}{\partial y'} = \cos \vartheta \left(\sin \vartheta \frac{\partial u'}{\partial x'} + \cos \vartheta \frac{\partial v'}{\partial x'} \right) - \sin \vartheta \left(\sin \vartheta \frac{\partial u'}{\partial y'} + \cos \vartheta \frac{\partial v'}{\partial y'} \right), \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= \sin \vartheta \frac{\partial v}{\partial x'} + \cos \vartheta \frac{\partial v}{\partial y'} = \sin \vartheta \left(\sin \vartheta \frac{\partial u'}{\partial x'} + \cos \vartheta \frac{\partial v'}{\partial x'} \right) + \cos \vartheta \left(\sin \vartheta \frac{\partial u'}{\partial y'} + \cos \vartheta \frac{\partial v'}{\partial y'} \right). \end{aligned}$$

Kihasználva az invariáns mennyiségek előállítását, vagyis a D divergencia, a ζ örvényesség, illetve a deformáció ($\text{Def} = A^2 + B^2$) felírását:

$$\begin{aligned} D &= \frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'}, \quad \zeta = \frac{\partial v'}{\partial x'} - \frac{\partial u'}{\partial y'}, \\ A &= \frac{\partial u'}{\partial x'} - \frac{\partial v'}{\partial y'}, \quad B = \frac{\partial v'}{\partial x'} + \frac{\partial u'}{\partial y'}, \end{aligned}$$

teljesül, hogy:

$$\frac{\partial u'}{\partial x'} = \frac{1}{2}(D+A), \quad \frac{\partial v'}{\partial y'} = \frac{1}{2}(D-A), \quad \frac{\partial v'}{\partial x'} = \frac{1}{2}(\zeta+B), \quad \frac{\partial u'}{\partial y'} = \frac{1}{2}(-\zeta+B),$$

s innen már felírható a megoldás.

II.5.8. A lineáris sebességi mező felbontása a **II.5.7. feladat** alapján:

$$du \approx \frac{1}{2}(D+A)dx + \frac{1}{2}(B-\zeta)dy, \quad dv \approx \frac{1}{2}(\zeta+B)dx + \frac{1}{2}(D-A)dy$$

A megoldásra váró két-két egyenlet:

$$\begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ -0,5 & 0,5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 10^{-6} \\ 1 \cdot 10^{-6} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0,5 & -0,5 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B \\ \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 10^{-6} \\ 7 \cdot 10^{-6} \end{pmatrix}$$

A számítások után: $A = 4 \cdot 10^{-6} \text{ s}^{-1}$, $D = 2 \cdot 10^{-6} \text{ s}^{-1}$ (divergencia), $B = 8 \cdot 10^{-6} \text{ s}^{-1}$, $\zeta = 6 \cdot 10^{-6} \text{ s}^{-1}$ (örvényesség). A deformáció értéke: $\text{Def} = A^2 + B^2 = 8 \cdot 10^{-11} \text{ s}^{-2}$.

II.5.9. A lineáris sebességi mező felbontása miatt deformáció mentes mezőben:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0,5D, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 0,5D, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0,5\zeta, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -0,5\zeta,$$

ami alapján már felírható a lineáris sebességi mező.

II.5.10. Legyen adott a $\mathbf{D}$ deriválttenzor és $\mathbf{D}^T$ transzponáltja. Tekintsük a következő felbontást:

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\mathbf{D} + \mathbf{D}^T) + \frac{1}{2}(\mathbf{D} - \mathbf{D}^T) = \mathbf{D}_s + \mathbf{D}_a$$

Mivel egy mátrix transzponáltját az elemeinek a főtengelekre vonatkozó tükrözésével kapjuk, így a felbontás első tagja szimmetrikus, míg a második tagja antiszimmetrikus mátrix lesz. A felbontás egyértelmű, így bizonyítottuk az állítást.

II.5.11. A deriválttenzor a sebességmező megfelelő deriváltjaival adható meg.

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ay^2 & 2axy & 0 \\ 0 & bz^2 & 2byz \\ 2cxz & 0 & cx^2 \end{pmatrix},$$

értéke a P pontban

$$\mathbf{D}(P) = \begin{pmatrix} a & 2a & 0 \\ 0 & b & 2b \\ 2c & 0 & c \end{pmatrix}$$

A deriválttenzor szimmetrikus (skalár invariánsokat tartalmazó) része:

$$\mathbf{D}_s = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ay^2 & axy & cxz \\ axy & bz^2 & byz \\ cxz & byz & cx^2 \end{pmatrix}$$

A szimmetrikus mátrix értéke a P pontban:

$$\mathbf{D}_s(P) = \begin{pmatrix} a & a & c \\ a & b & b \\ c & b & c \end{pmatrix}$$

A deriválttenzor antiszimmetrikus (vektor invariánsokat tartalmazó) része:

$$\mathbf{D}_a = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) & 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) & -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \right) & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & axy & -cxz \\ -axy & 0 & byz \\ cxz & -byz & 0 \end{pmatrix}$$

A szimmetrikus mátrix értéke a P pontban:

$$\mathbf{D}_a = \begin{pmatrix} 0 & a & -c \\ -a & 0 & b \\ c & -b & 0 \end{pmatrix}$$

II.5.12. A deriválttenzort felírhatjuk diadikus szorzatként:

$$\mathbf{D} = \mathbf{V} \circ \nabla$$

Megjegyezzük, hogy ez a felírás formailag helyes, de a Nabla-vektor kettős tulajdonsága miatt természetesen a mátrix elemeinek megadásakor a Nabla, mint vektor egyes komponensei (parciális deriválás) hatnak a $\mathbf{V}$ vektor megfelelő komponenseire.

Henger koordináta-rendszerben:

és

$$\mathbf{V} = v_r(r, z) \mathbf{i}_r + v_z(r, z) \mathbf{i}_z$$

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial r} \mathbf{i}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} \mathbf{i}_\phi + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{i}_z$$

A diadikus szorzás tulajdonságait kihasználva, a deriválttenzort felírhatjuk az egyes egységvektorok szerinti diadikus szorzatok összegeként:

$$v_r(r, z)\mathbf{i}_r \circ \nabla = \frac{\partial v_r}{\partial r}\mathbf{i}_r \circ \mathbf{i}_r + \frac{\partial v_r}{\partial z}\mathbf{i}_r \circ \mathbf{i}_z + v_r \frac{1}{r}\mathbf{i}_\phi \circ \mathbf{i}_\phi,$$

hiszen $\frac{\partial \mathbf{i}_r}{\partial \phi} = \mathbf{i}_\phi$ és

$$v_z(r, z)\mathbf{i}_z \circ \nabla = \frac{\partial v_z}{\partial r}\mathbf{i}_z \circ \mathbf{i}_r + \frac{\partial v_z}{\partial z}\mathbf{i}_z \circ \mathbf{i}_z.$$

A deriválttenzor diadikus alakja:

$$\mathbf{D} = \mathbf{V} \circ \nabla = \left(\frac{\partial v_r}{\partial r}\mathbf{i}_r + \frac{\partial v_z}{\partial r}\mathbf{i}_z \right) \circ \mathbf{i}_r + \left(\frac{v_r}{r}\mathbf{i}_\phi \right) \circ \mathbf{i}_\phi + \left(\frac{\partial v_r}{\partial z}\mathbf{i}_r + \frac{\partial v_z}{\partial z}\mathbf{i}_z \right) \circ \mathbf{i}_z,$$

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_r}{\partial r} & 0 & \frac{\partial v_r}{\partial z} \\ 0 & \frac{v_r}{r} & 0 \\ \frac{\partial v_z}{\partial r} & 0 & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix}$$

ami kifejtve:

A deriválttenzor szimmetrikus része:

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\mathbf{D} + \mathbf{D}^T) = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_r}{\partial r} & 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r}\right) \\ 0 & \frac{v_r}{r} & 0 \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r}\right) & 0 & \frac{v_r}{r} \end{pmatrix}.$$

A deriválttenzor antiszimmetrikus része:

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\mathbf{D} - \mathbf{D}^T) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r}\right) \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r}\right) & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

II.5.13. Legyen az elemi gömb sugara r , a három egymásra merőleges főirány, ahol csak nyújtást, vagy zsugorítást látunk ($\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$). Ide helyezzük a Descartes-féle koordináta-rendszer (x, y, z) tengelyét! Tekintsük az elemi gömb felületén levő P ponthoz tartozó $\mathbf{r}_P = (x_P, y_P, z_P)$ helyvektort. Ekkor –a gömb egyenlete miatt – teljesül, hogy

$$r_P^2 = x_P^2 + y_P^2 + z_P^2.$$

Legyen az alakváltozás során az $\mathbf{r}_P$ helyvektor végpontjának az elmozdulása a merev testszerű forgás nélkül (hiszen az nem okoz alakváltozást): $d\mathbf{r}_P = \mathbf{A} \cdot \mathbf{r}_P$. Legyen a főtengelyek irányába eső nyújtást, vagy zsugorítást leíró tenzor alakja:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}.$$

Az elmozdulás során a P pont helyzete is megváltozik (P'). Az új helyvektor ($\mathbf{r}_{P'} = (x_{P'}, y_{P'}, z_{P'})$): $\mathbf{r}_{P'} = \mathbf{r}_P + d\mathbf{r}_P$, ami az $\mathbf{A}$ tenzor felhasználásával

$$\mathbf{r}_{P'} = (\mathbf{E} + \mathbf{A}) \cdot \mathbf{r}_P, \text{ illetve } \begin{pmatrix} x_{P'} \\ y_{P'} \\ z_{P'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 + \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \varepsilon_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_P \\ y_P \\ z_P \end{pmatrix}, \mathbf{E}$$

az egység tenzor.

Az $\mathbf{r}_{P'}$ helyvektor ellipszoid felületén lesz, hiszen teljesül, hogy $x_{P'} = \frac{x_P}{1 + \varepsilon_1}$, $y_{P'} = \frac{y_P}{1 + \varepsilon_2}$, $z_{P'} = \frac{z_P}{1 + \varepsilon_3}$, amit visszahelyettesítve az eredeti helyvektor nagyságát leíró egyenletbe megkapjuk az ellipszoid egyenletét:

$$\frac{x_{P'}^2}{(1 + \varepsilon_1)^2} + \frac{y_{P'}^2}{(1 + \varepsilon_2)^2} + \frac{z_{P'}^2}{(1 + \varepsilon_3)^2} = \text{állandó}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$$

II.5.14. Az nem antiszimmetrikus tenzor skalár invariánsai:

$$A_I = A_{11} + A_{22} + A_{33} = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3,$$

$$A_{II} = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_{11} & A_{13} \\ A_{31} & A_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_{22} & A_{23} \\ A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} = \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3 + \lambda_2 \lambda_3,$$

$$A_{III} = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3.$$

a) Az $\mathbf{A}$ deriválttenzor skalár invariánsai:

$$A_I = 75 \cdot 10^{-6} \text{ s}^{-1}, A_{II} = -6,25 \cdot 10^{-9} \text{ s}^{-2}, A_{III} = -0,375 \cdot 10^{-12} \text{ s}^{-3}.$$

A $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sajátértékeket az

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{s}_i = \lambda_i \mathbf{s}_i$$

sajátérték-sajátvektor feladat megoldásával kapjuk.

b) A karakterisztikus egyenlet alakja:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = \begin{vmatrix} A_{11} - \lambda & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} - \lambda & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

A megoldásra váró harmadfokú egyenlet:

$$0 = \lambda^3 - A_I \lambda^2 + A_{II} \lambda - A_{III}$$

c) Az adatok behelyettesítése után: $\lambda_1 = 100 \cdot 10^{-6} \text{ s}^{-1}$, $\lambda_2 = 50 \cdot 10^{-6} \text{ s}^{-1}$, $\lambda_3 = -75 \cdot 10^{-6} \text{ s}^{-1}$.

d) Az $\mathbf{A}$ mátrix szimmetrikus, így az antiszimmetrikus mátrix a null mátrix.

e) A deriválttenzornak ebben az esetben nincs vektor invariánsa.

f) A deriválttenzor szimmetrikus része felírható tiszta nyírás

$$\det(\mathbf{A} - \varepsilon \mathbf{E}) = \begin{vmatrix} A_{11} - \varepsilon & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} - \varepsilon & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} - \varepsilon \end{vmatrix} = 0$$

és az $\varepsilon \mathbf{E}$ izotróp dilatáció összegeként, ahol $\varepsilon = \frac{1}{3}(A_{11} + A_{22} + A_{33})$.

Az adatok behelyettesítése után: $\varepsilon = \frac{1}{3} A_I = 25 \cdot 10^{-6} \text{ s}^{-1}$.

II.5.15. A II.5.14.d feladat megoldása alapján

a) a három skalárinvariáns:

$$A_I = 3 \cdot 10^{-6} \text{ s}^{-1}, A_{II} = -10 \cdot 10^{-12} \text{ s}^{-2}, A_{III} = -24 \cdot 10^{-18} \text{ s}^{-3}$$

b) A karakterisztikus egyenlet alakja: $0 = \lambda^3 - D_I \lambda^2 + D_{II} \lambda - D_{III}$.

c) Az adatok behelyettesítése után:

$$\lambda_1 = 400 \cdot 10^{-8} \text{ s}^{-1}, \lambda_2 = 200 \cdot 10^{-8} \text{ s}^{-1}, \lambda_3 = -300 \cdot 10^{-8} \text{ s}^{-1}$$

A három normált sajátvektor:

$$\mathbf{s}_1 = \mathbf{k}, \quad \mathbf{s}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(\mathbf{i} - 2\mathbf{j}), \quad \mathbf{s}_3 = \mathbf{s}_1 \times \mathbf{s}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2\mathbf{i} + \mathbf{j}),$$

ahol $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ a Descartes-rendszerbeli egységvektorok.

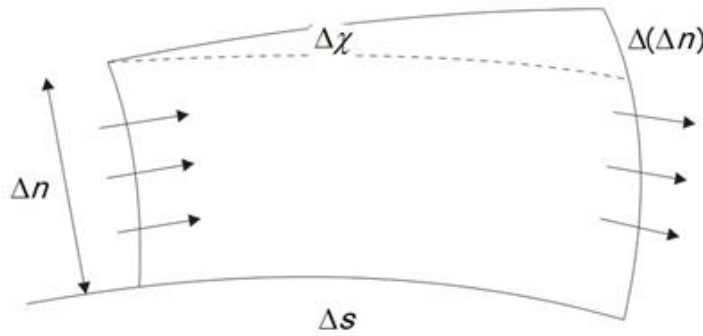
II.6. Véges különbséges módszerek alkalmazása a deriváltak és az invariánsok meghatározásában

II.6.1. A levezetés során kihasználjuk, hogy a sebesség párhuzamos az áramvonalakkal. Tekintsünk két egymáshoz közeli áramvonalat. Nézzük a $\Delta F = \Delta s \Delta n$ elemi felületet a természetes koordináta-rendszerben.

A *divergencia* invariáns definíciója szerint (III.6.1. ábra):

$$\operatorname{div} \mathbf{V} = \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta F} \oint_{\Delta G} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{n} = \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta s \Delta n} (-\Delta n V + (\Delta n + \Delta(\Delta n)) \cdot (V + \Delta V))$$

ahol $d\mathbf{n}$ az elemi elmozdulásra merőleges kifelé mutató normálvektor.



III.6.1. ábra. A *divergencia* meghatározása természetes koordináta-rendszerben.

Kihasználva, hogy $\Delta n > \Delta(\Delta n)$ és $V > \Delta V$, továbbá a másodrendben kis tag $(\Delta(\Delta n) \cdot \Delta V)$ elhanyagolása után, tudva, hogy $\Delta(\Delta n) = \Delta s \cdot \Delta \chi$:

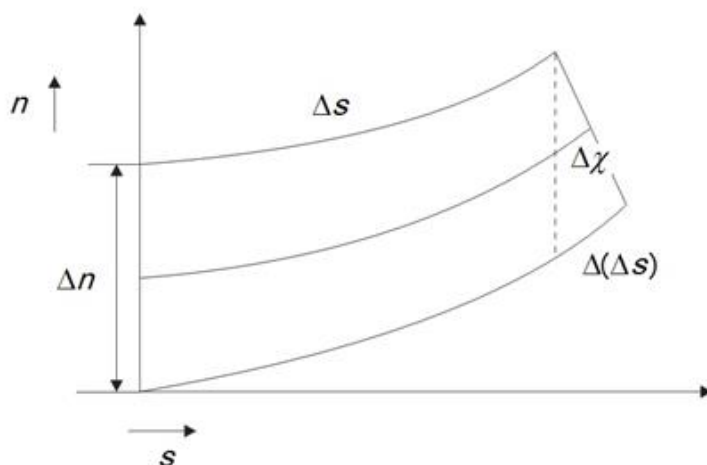
$$\operatorname{div} \mathbf{V} = \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta s \cdot \Delta n} \Delta s \cdot \Delta n \cdot \left(\frac{\Delta V}{\Delta s} + v \frac{\Delta \chi}{\Delta n} \right) = \frac{\partial v}{\partial s} + v \frac{\partial \chi}{\partial n}$$

II.6.2. Az örvényesség invariáns előállítására szerint (III.6.2. ábra):

$$\operatorname{rot} \mathbf{V} \cdot \mathbf{k} = \zeta = \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta F} \mathbf{k} \cdot \oint_{\Delta G} d\mathbf{s} \times \mathbf{V} = \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta s \Delta n} (v \Delta s - (\Delta s + \Delta(\Delta s)) \cdot (v + \Delta v))$$

A másodrendben kis tag elhagyása után, kihasználva, hogy $\Delta(\Delta s) = -\Delta n \cdot \Delta \chi$, ahol a negatív előjel azt jelenti, hogy pozitív szögelfordulás esetén csökken az ívhossz:

$$\zeta = \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta s \cdot \Delta n} (-\Delta s \cdot \Delta v - v \cdot \Delta(\Delta s)) = \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta s \cdot \Delta n} \cdot \Delta s \cdot \Delta n \cdot \left(-\frac{\Delta v}{\Delta n} + v \frac{\Delta \chi}{\Delta s} \right) = -\frac{\partial v}{\partial n} + v \frac{\partial \chi}{\partial s}$$



MII.6.2. ábra. Az örvényesség meghatározása természetes koordináta-rendszerben.

II.6.3. A ciklon örvényességére kapott munkaformula

$$\zeta = \frac{v_{\theta r}}{r} + \frac{\Delta v_{\theta r}}{\Delta r}$$

alapján $\zeta = \frac{11}{8,5 \cdot 10^5} + \frac{2}{10^5} = 3,3 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$

II.6.4. Az anticiklon örvényességét adó két tag azonos nagyságú, de ellentétes előjelű. A szélesség nagysága csökken a középponttól kifelé haladva. A gradiens nagysága:

$$\left| \frac{\Delta v_{\theta r}}{\Delta r} \right| = 5 \cdot 10^{-6} \text{ s}^{-1}$$

II.6.5. Az áramvonalak közötti távolság nem változik, így a divergencia alakja: $D = \frac{\partial v}{\partial s}$, értéke: $D = 0,6 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$.

II.6.6. Írjuk fel a sebességkomponenseket az egyes rácspontokban!

$$u_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 8 \text{ m s}^{-1}, \quad v_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 8 \text{ m s}^{-1},$$

$$u_2 = -\frac{1}{2} \cdot 9 \text{ m s}^{-1}, \quad v_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 9 \text{ m s}^{-1},$$

$$u_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 7 \text{ m s}^{-1}, \quad v_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 7 \text{ m s}^{-1},$$

$$u_4 = -\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 6 \text{ m s}^{-1}, \quad v_4 = \frac{1}{2} \cdot 6 \text{ m s}^{-1}.$$

Centrális másodrendű sémát használva a divergencia:

$$D = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{u_1 - u_3}{2\Delta x} + \frac{v_2 - v_4}{2\Delta y} = 0,68 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$$

$$\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{v_1 - v_3}{2\Delta x} - \frac{u_2 - u_4}{2\Delta y} = 1,8 \cdot 10^{-8} \text{ s}^{-1}$$

vagyis az áramlás jó közelítéssel örvénymetes. A deformáció alakja:

$$\text{defV} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 = \left(\frac{u_1 - u_3}{2\Delta x} - \frac{v_2 - v_4}{2\Delta y} \right)^2 + \left(\frac{v_1 - v_3}{2\Delta x} + \frac{u_2 - u_4}{2\Delta y} \right)^2 = 0,90 \cdot 10^{-10} \text{ s}^{-1}$$

A számítások során kihasználtuk, hogy $\Delta x = \Delta y = r = 3 \cdot 10^5 \text{ m}$.

II.6.7. Írjuk fel a sebességkomponenseket az egyes rácspontokban!

$$u_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 9 \text{ m s}^{-1}, \quad v_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 9 \text{ m s}^{-1}$$

$$u_2 = -\frac{1}{2} \cdot 7 \text{ m s}^{-1}, \quad v_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 7 \text{ m s}^{-1}$$

$$u_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 10 \text{ m s}^{-1}, \quad v_3 = -\frac{1}{2} \cdot 10 \text{ m s}^{-1}$$

$$u_4 = -12 \text{ m s}^{-1}, \quad v_4 = 0 \text{ m s}^{-1}$$

Centrális másodrendű sémát használva a divergencia: $D = -0,75 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$, az örvényesség: $\zeta = -1,97 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$, a planetáris örvényesség: $f(\varphi = 45^\circ) = 10^{-4} \text{ s}^{-1}$, így az abszolút örvényesség: $\zeta_a = \zeta + f = 8,03 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$. A rendszert divergencia és erős anticiklonális áramlás (negatív örvényesség) jellemzi.

II.6.8. a) A három ismert pontban a sebesség komponensek:

$$u_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 11 \text{ m s}^{-1}, \quad v_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 11 \text{ m s}^{-1}$$

$$u_3 = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 9 \text{ m s}^{-1}, \quad v_3 = -\frac{1}{2} \cdot 9 \text{ m s}^{-1}$$

$$u_4 = \frac{1}{2} \cdot 8 \text{ m s}^{-1}, \quad v_4 = -\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 8 \text{ m s}^{-1}$$

A divergencia és az örvényesség véges különbséges alakjából indulunk ki. Kihasználjuk, hogy ekvidisztans rácson dolgozunk. A divergencia nulla voltából következik, hogy

$$u_1 = u_3 - v_2 + v_4 = 8,6 \text{ m s}^{-1}$$

Az örvényesség nulla volta miatt: $v_1 = v_3 + u_2 - u_4 = -0,7 \text{ m s}^{-1}$.

A II.6.5a. ábra szerint az 1. pontbeli érték nélkül egy anticiklonális örvényességű mezőt látunk. Ahhoz, hogy az örvényesség nulla legyen az 1. pontban a szélvektornak csak kis értékű délies összetevője lehet. A deformáció értéke:

$$\text{def}\nabla = \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 = \left(\frac{u_1 - u_3}{2\Delta x} - \frac{v_2 - v_4}{2\Delta y} \right)^2 + \left(\frac{v_1 - v_3}{2\Delta x} + \frac{u_2 - u_4}{2\Delta y} \right)^2 = 1,67 \cdot 10^{-10} \text{ s}^{-2}$$

b) A három ismert pontban (1, 2, 4) a sebesség komponensek a II.6.5b ábra alapján:

$$u_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 11 \text{ m s}^{-1}, \quad v_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 11 \text{ m s}^{-1},$$

$$u_2 = \frac{1}{2} \cdot 8 \text{ m s}^{-1}, \quad v_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 8 \text{ m s}^{-1},$$

$$u_4 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 11 \text{ m s}^{-1}, \quad v_4 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 11 \text{ m s}^{-1}$$

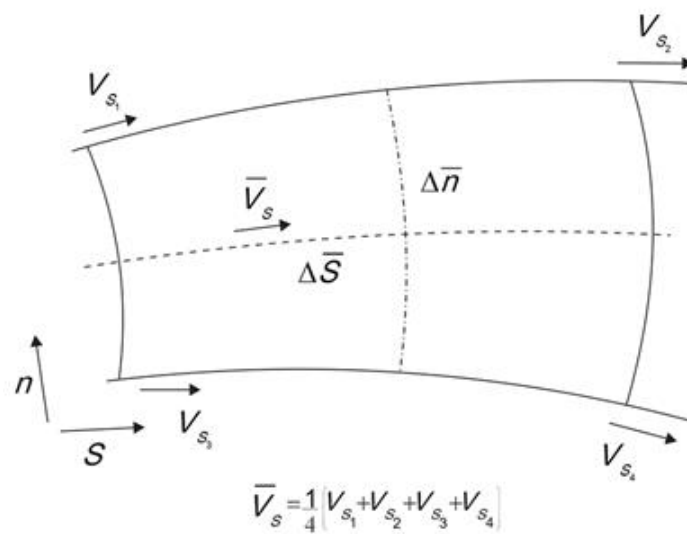
A divergencia nulla voltából következik, hogy

$$u_3 = u_1 + v_2 - v_4 = 8,6 \text{ m s}^{-1}$$

Az örvényesség nulla volta miatt: $v_3 = v_1 - u_2 + u_4 = -4,0 \text{ m s}^{-1}$.

A deformáció értéke: $\text{def}\nabla = 1,85 \cdot 10^{-10} \text{ s}^{-2}$.

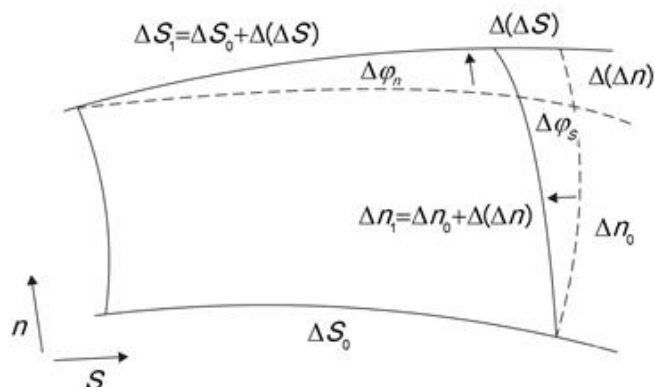
II.6.9. Nézzük a II.6.6a. ábrán látható áramlási képet! Határozzuk meg a természetes koordináta-rendszerben az egyes deriváltakat (III.6.3. és III.6.4. ábra)!



MII.6.3. ábra. A $\frac{\partial v_z}{\partial s} \approx \frac{\Delta \bar{v}_z}{\Delta s} = \frac{(v_{z_2} + v_{z_4}) - (v_{z_1} + v_{z_3})}{2\Delta s}$ és a $\frac{\partial v_z}{\partial n} \approx \frac{\Delta \bar{v}_z}{\Delta n} = \frac{(v_{z_2} + v_{z_1}) - (v_{z_3} + v_{z_4})}{v\Delta n}$ derivált kiszámítása a vizsgált térrész közepén.

A II.6.6a. és az MII.6.3. ábra alapján:

$$\frac{\partial v_z}{\partial s} \approx \frac{\Delta \bar{v}_z}{\Delta s} = \frac{8,5 - 12,5}{650 \cdot 10^3} = -0,62 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}, \quad \frac{\partial v_z}{\partial n} \approx \frac{\Delta \bar{v}_z}{\Delta n} = \frac{(13 + 8) / 2 - (12 + 9) / 2}{300 \cdot 10^3} = 0 \text{ s}^{-1}$$



MII.6.4. ábra. A $\Delta\phi_s$ és a $\Delta\phi_n$ szög meghatározása.

A II.6.6a és az MII.6.4. ábra alapján:

$$\Delta\phi_s = \arctg \frac{-\Delta(\Delta s)}{\Delta n} \approx \frac{-(\Delta s_1 - \Delta s_0)}{\Delta n} = \frac{100 \cdot 10^3}{300 \cdot 10^3} = \frac{1}{3},$$

$$\Delta\phi_n = \arctg \frac{\Delta(\Delta n)}{\Delta s} \approx \frac{(\Delta n_1 - \Delta n_0)}{\Delta s} = \frac{200 \cdot 10^3}{650 \cdot 10^3} = \frac{4}{13}.$$

Az MII.3.2. ábra szerint mindkét szög ($\Delta\phi_s, \Delta\phi_n$) pozitív. Ennek felhasználásával a keresett deriváltak véges különbséges közelítése:

$$\frac{\partial \phi_s}{\partial s} \approx \frac{\Delta \phi_s}{\Delta s} = \frac{0,33}{650 \cdot 10^3} = 5,01 \cdot 10^{-7} \text{ s}^{-1}, \quad \frac{\partial \phi_n}{\partial n} \approx \frac{\Delta \phi_n}{\Delta n} = \frac{0,31}{300 \cdot 10^3} = 10,3 \cdot 10^{-7} \text{ s}^{-1}$$

A vizsgált térrészre jellemző átlagos szélesség: $\bar{v}_z = \frac{1}{4}(12 + 9 + 8 + 13) = 10,5 \text{ m s}^{-1}$

A divergencia alakja:

$$D = \frac{\partial v_z}{\partial s} + v_z \frac{\partial \phi_n}{\partial n} \approx -0,62 \cdot 10^{-5} + 10,5 \cdot 10,3 \cdot 10^{-7} \approx 0,46 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$$

Az örvényesség értéke:

$$\zeta = v_z \frac{\partial \phi_s}{\partial s} - \frac{\partial v_z}{\partial n} \approx 10,5 \cdot 5,01 \cdot 10^{-7} - 0 \approx 0,53 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$$

a 60 szélességi körön $f(60^\circ) = 2\Omega \sin 60^\circ = 1,22 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$, így az abszolút örvényesség:

$$\zeta_a = \zeta + f = 0,05 \cdot 10^{-4} + 1,22 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1} = 1,27 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$$

Itt a planetáris örvényesség (f) két nagyságrenddel nagyobb mint az örvényesség (v. relatív örvényesség).

A deformáció számítása: $A = \frac{\partial v_z}{\partial s} - v_z \frac{\partial \phi_n}{\partial n} \approx -0,62 \cdot 10^{-5} - 10,5 \cdot 10,3 \cdot 10^{-7} \approx -1,70 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$,

$$B = v_z \frac{\partial \phi_s}{\partial s} + \frac{\partial v_z}{\partial n} \approx 10,5 \cdot 5,01 \cdot 10^{-7} + 0 \approx 0,53 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}, \text{ s így } \text{Def}V_z = A^2 + B^2 \approx 3,18 \cdot 10^{-10} \text{ s}^{-2}$$

Nézzük a II.6.6b. ábrán látható áramlási képet! A természetes koordináta-rendszerben az egyes deriváltak:

$$\frac{\partial v_z}{\partial s} \approx \frac{\Delta \bar{v}_z}{\Delta s} = \frac{7-9}{650 \cdot 10^3} = -0,31 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}, \quad \frac{\partial v_z}{\partial n} \approx \frac{\Delta \bar{v}_z}{\Delta n} = \frac{(11+8)/2 - (7+6)/2}{450 \cdot 10^3} = 0,67 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$$

$$\Delta \phi_s = \arctg \frac{-\Delta(\Delta s)}{\Delta n} \approx -\frac{100 \cdot 10^3}{450 \cdot 10^3} = -0,22 \quad \Delta \phi_n = \arctg \frac{\Delta(\Delta n)}{\Delta s_1} \approx \frac{100 \cdot 10^3}{650 \cdot 10^3} = 0,15$$

Ennek felhasználásával a keresett tagok véges különbséges közelítése:

$$v_z \frac{\partial \phi_s}{\partial s} \approx \bar{v}_z \frac{\Delta \phi_s}{\Delta s} \approx 8 \frac{-0,22}{650 \cdot 10^3} \approx -2,71 \cdot 10^{-6} \text{ s}^{-1}, \quad v_z \frac{\partial \phi_n}{\partial n} \approx \bar{v}_z \frac{\Delta \phi_n}{\Delta n} \approx 8 \frac{0,15}{450 \cdot 10^3} = 2,67 \cdot 10^{-6} \text{ s}^{-1}$$

A vizsgált térrészre jellemző átlagos szélesség: $\bar{v}_z = \frac{1}{4}(7+6+8+11) = 8 \text{ m s}^{-1}$

A divergencia alakja:

$$D = \frac{\partial v_z}{\partial s} + v_z \frac{\partial \phi_n}{\partial n} \approx -0,31 \cdot 10^{-5} + 0,27 \cdot 10^{-5} \approx -0,4 \cdot 10^{-6} \text{ s}^{-1},$$

az örvényesség értéke:

$$\zeta = v_z \frac{\partial \phi_s}{\partial s} - \frac{\partial v_z}{\partial n} \approx -2,71 \cdot 10^{-6} - 6,7 \cdot 10^{-6} \approx -9,41 \cdot 10^{-6} \text{ s}^{-1},$$

a 60. szélességi körön az abszolút örvényesség: $\zeta_a = \zeta + f = 1,13 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$.

A deformáció számítása:

$$A = \frac{\partial v_z}{\partial s} - v_z \frac{\partial \phi_n}{\partial n} \approx -0,31 \cdot 10^{-5} - 0,27 \cdot 10^{-5} \approx -0,58 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1},$$

$$B = v_z \frac{\partial \phi_s}{\partial s} + \frac{\partial v_z}{\partial n} \approx -2,71 \cdot 10^{-6} + 6,7 \cdot 10^{-6} \approx 3,99 \cdot 10^{-6} \text{ s}^{-1}, \text{ s így } \text{Def}V_z = A^2 + B^2 \approx 0,50 \cdot 10^{-10} \text{ s}^{-2}$$

Megjegyzés: végezzük el a számításokat a deriváltak más véges különbséges közelítésével, pl. $\overline{\Delta n}, \overline{\Delta s}$ helyett a $\Delta n_0, \Delta s_0$ távolságok használatával. Mennyire térnek el az eredmények, mennyire fontos az optimális véges különbséges közelítő séma megtalálása?

II.6.10. Nézzük a II.6.6a. ábrán látható áramlási képet! A négy vonallal határolt felület közelítő területe a trapéz analógiájára: $\Delta F \approx 3 \cdot 10^5 \cdot 6,5 \cdot 10^5 = 19,5 \cdot 10^{10} \text{ m}^2$.

A divergencia integrál alakja:

$$D = \frac{1}{\Delta F} \oint_{\Delta G} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{s}_{\perp} = \frac{1}{19,5 \cdot 10^{10}} [-12,5 \cdot 2 \cdot 10^5 + 8,5 \cdot 4 \cdot 10^5] = 0,46 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$$

Az örvényességet a cirkuláción keresztül határozzuk meg. Itt $d\mathbf{s}_{\perp} \equiv d\mathbf{n}$ vektor normálvektor irányú, hossza pedig ds . Az integrál előállítás:

$$\zeta = \frac{1}{\Delta F} \oint_{\Delta G} d\mathbf{s}_{\perp} \times \mathbf{V} = \frac{1}{\Delta F} \oint_{\Delta G} \mathbf{V}_s \cdot d\mathbf{s} = \frac{1}{19,5 \cdot 10^{10}} [10,5 \cdot 7 \cdot 10^5 - 10,5 \cdot 6 \cdot 10^5] = 0,54 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$$

Nézzük a II.6.6b. ábrán látható áramlási képet! A négy vonallal határolt felület közelítő területe: $\Delta F \approx 4,5 \cdot 10^5 \cdot 6,5 \cdot 10^5 = 29,25 \cdot 10^{10} \text{ m}^2$.

A divergencia integrál alakja:

$$D = \frac{1}{\Delta F} \oint_{\Delta G} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{s}_{\perp} = \frac{1}{29,25 \cdot 10^{10}} [-9 \cdot 4 \cdot 10^5 + 7 \cdot 5 \cdot 10^5] = -0,3 \cdot 10^{-6} \text{ s}^{-1}$$

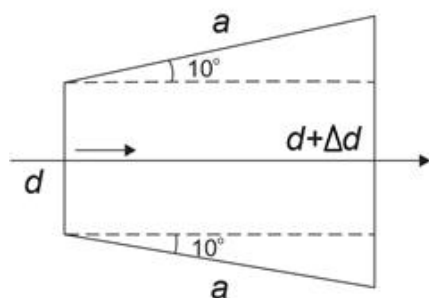
Az örvényességet a cirkuláción keresztül határozzuk meg. Az integrál előállítás:

$$\zeta = \frac{1}{\Delta F} \oint_{\Delta G} d\mathbf{s}_{\perp} \times \mathbf{V} = \frac{1}{\Delta F} \oint_{\Delta G} \mathbf{V}_s \cdot d\mathbf{s} = \frac{1}{29,25 \cdot 10^{10}} [6,5 \cdot 6 \cdot 10^5 - 9,5 \cdot 7 \cdot 10^5] = -0,91 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$$

A II.6.9. és a II.6.10 feladat megoldásai – a hibahatáron belül – megegyeznek.

II.6.11. A divergencia értéke, $D = -1,5 \cdot 10^{-6} \text{ s}^{-1}$, az örvényesség $\zeta = 8,5 \cdot 10^{-6} \text{ s}^{-1}$, a deformáció: $\text{Def } \mathbf{v}_z = A^2 + B^2 \approx 1,55 \cdot 10^{-10} \text{ s}^{-2}$.

II.6.12. A feladat által leírt legegyszerűbb áramvonal képet (trapéz) az M.II.6.5. ábra szemlélteti.



M.II.6.5. ábra. Divergencia-mentes áramlás, széttartó áramvonalak esetén.

A két áramvonal közötti távolság a beáramlási oldalon d , a kiáramlási oldalon (ahol a divergencia mentes áramlás miatt a sebesség lecsökken $d + \Delta d$). Teljesül, hogy

$$\Delta d = 2a \sin 10^\circ,$$

ahol $a = 600 \text{ km}$ az áramvonal hossza. $\Delta d = 208,4 \text{ km}$. Mivel a két áramvonal között az átlagos távolság 400 km , ezért a belépő oldal hossza $d = 400 - \Delta d/2 = 295,8 \text{ km}$, a kilépő oldal hossza $400 + \Delta d/2 = 504,2 \text{ km}$. A kontinuitási egyenlet alapján a belépő és a kilépő sebesség aránya megegyezik a kilépő és a belépő oldalhossz arányával. A sebesség $58,6\%$ -ot csökken az áramvonal mentén.

II.6.13. Elég, ha megadjuk a $g(x, y)$ függvény parciális deriváltjainak az előállítását, hiszen ennek analógiájára fel tudjuk írni a sebesség komponensek deriváltjait, s a keresett mennyiségeket is. A deriváltak felírásakor vegyük

figyelembe, hogy az egyes pontok x és y tengelyre eső vetületei az origóban, vagy attól $\pm \frac{\sqrt{2}}{2}r$ és $\pm 1 \cdot r$ távolságra van.

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{1}{4r} \left[g_1 - g_3 + \frac{1}{\sqrt{2}} (g_5 - g_6 + g_8 - g_7) \right],$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{1}{4r} \left[g_2 - g_4 + \frac{1}{\sqrt{2}} (g_5 - g_6 + g_8 - g_7) \right].$$

II.6.14. Az r sugarú körön elhelyezkedő 8 pontos séma alapján számított hőmérsékleti gradiens értéke $1,18^\circ \text{C}/100 \text{ m}$, az x -tengellyel bezárt szög $\sim 76^\circ$.

II.6.15. A Taylor-sorfejtés alapján az 1-es pontbeli értékek és deriváltak ismeretében:

$$g_0 = g_1 - \left(\frac{\partial g}{\partial x} \right)_1 \Delta x + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \right)_1 \Delta x^2 - O_0 \Delta x^3,$$

$$g_2 = g_1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x} \right)_1 \Delta x + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \right)_1 \Delta x^2 + O_2 \Delta x^3,$$

ahol $\Delta x > 0$, az O_0, O_2 ordo-függvény a sorfejtés magasabb tagjainak az összegzett hatását mutatja, s véges értékű.

A két egyenletet egymásból kivonva, s $\left(\frac{\partial g}{\partial x} \right)_1$ kifejezésre rendezve:

$$\left(\frac{\partial g}{\partial x} \right)_1 = \frac{g_2 - g_0}{2\Delta x} - O\Delta x^2,$$

ahol $O = O_2 + O_0$, s így beláttuk az állítást.

II.6.16. a) Nyolcpontos négyzetes séma:

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{1}{6r} [(g_1 - g_3) + (g_5 - g_6) + (g_8 - g_7)],$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{1}{6r} [(g_2 - g_4) + (g_5 - g_8) + (g_6 - g_7)]$$

Megjegyezzük, hogy a vizsgát rácsnégyzetben a két-két szélső pontpárt 1-től különböző súlytényezővel is figyelembe lehetne venni, de ez már a numerikus analízis témaköre.

b) Nyolcpontos 45°-os szögben elforgatott négyzetes séma:

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{1}{3r} \left[(g_1 - g_3) + \frac{1}{2}(g_5 - g_6) + \frac{1}{2}(g_8 - g_7) \right],$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{1}{3r} \left[(g_2 - g_4) + \frac{1}{2}(g_5 - g_8) + \frac{1}{2}(g_6 - g_7) \right].$$

c) Hatpontos háromszög rács 45°-os szögben elforgatott négyzetekből felépítve:

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{1}{6r} [(g_1 - g_3) + (g_5 - g_4) + 2(g_6 - g_2)],$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{3}r} [(g_1 - g_5) + (g_2 - g_4)]$$

d) Szabályos hatszög rács:

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{1}{2r} [(g_1 - g_4)],$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{1}{2r} \frac{[(g_2 + g_3) - (g_5 + g_6)]}{2}$$

Megjegyezzük, hogy itt is alkalmazhatunk más (nem lineáris közelítéssel kapott) súlytényezőket a véges különbséges módszerrel történő differenciál hányados számításánál, ezek meghatározása már az alkalmazott matematika feladata.

II.6.17. A három pont nem eshet egy egyenesbe.

II.6.18. a) Négyzetes rácshálózat, ekvidisztáns ráctávolsággal $r = \Delta x = \Delta y$:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = \frac{1}{r^2} [g_1 + g_3 - 2g_0], \quad \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = \frac{1}{r^2} [g_2 + g_4 - 2g_0], \quad \nabla^2 g = \frac{1}{r^2} [g_1 + g_2 + g_3 + g_4 - 4g_0]$$

b) Hatpontos 45°-os szögben elforgatott négyzetekből felépített háromszög rács (lásd a **II.6.16. feladat c részét** és a **II.6.11c. ábrát**):

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = \frac{1}{r^2} [g_3 + g_6 - 2g_0], \quad \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = \frac{1}{r^2} \left[-2g_0 + \frac{2}{3}g_1 + \frac{2}{3}g_2 - \frac{1}{3}g_3 + \frac{2}{3}g_4 + \frac{2}{3}g_5 - \frac{1}{3}g_6 \right],$$

$$\nabla^2 g = \frac{1}{r^2} [4(\bar{g} - g_0)],$$

ahol $\bar{g} = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^6 g_i$ középpontot körülvevő hat rácsponti függvényérték átlaga.

c.) Szabályos hatszög rácsra (lásd a **II.6.16. feladat d részét** és a **II.6.11d. ábrát** is):

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = \frac{1}{r^2} [g_1 + g_4 - 2g_0], \quad \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = \frac{1}{3r^2} [2g_2 + 2g_3 + 2g_5 - g_1 - g_4 - 6g_0],$$

$$\nabla^2 g = \frac{2}{3r^2} [6(\bar{g} - g_0)] = \frac{1}{r^2} [4(\bar{g} - g_0)],$$

ahol $\bar{g} = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^6 g_i$ középpontot körülvevő hat rácsponti függvényérték átlaga.

Formailag hasonló kifejezést kaptunk a Laplace-operátorra is mindhárom esetben.

II.6.19. Elsőként határozzuk meg $\nabla^2 H$ értékét!

$$\nabla^2 H = \frac{1}{r^2} [H_1 + H_2 + H_3 + H_4 - 4H_0] = \frac{300}{(3,5 \cdot 10^5)^2} = 2,45 \cdot 10^{-9} \text{ gpm m}^{-2}$$

A geosztrófikus örvényesség alakja: $\zeta_{\varepsilon} = \frac{g}{f} \nabla^2 H = 2,4 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$, ami nagyon erős közép-troposzférikus örvényességre utal.

II.6.20. A feladat szerinti anticiklonban a nyomás Laplace operátora:

$$\nabla^2 p = \frac{4}{r^2} [\bar{p} - p_0], \quad \text{ahol } \bar{p} = \frac{1}{4} [p_1 + p_2 + p_3 + p_4] = 103,25 \text{ hPa},$$

s így

$$\nabla^2 p = \frac{4}{(5 \cdot 10^5)^2} [99325 - 100100] = -1,24 \cdot 10^{-8} \text{ Pa m}^{-2}$$

II.6.21. Elsőként a nyomás Laplace-operátorát határozzuk meg:

$$\nabla^2 p = \frac{4}{r^2} [\bar{p} - p_0] = \frac{4 \cdot 500}{(3,5 \cdot 10^5)^2} = 1,63 \cdot 10^{-8} \text{ hPa m}^{-2}$$

A 40° szélességi körön a Coriolis-paraméter: $f = 10^{-4} \frac{\sin 40^\circ}{\sin 45^\circ} = 9,1 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$, így a geosztrófikus örvényesség becslése a felszíni szinoptikus térkép adatai alapján:

$$\zeta_{\varepsilon} = \frac{1}{\rho f} \nabla^2 p = \frac{1}{1,2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-5}} \cdot 1,63 \cdot 10^{-8} = 1,45 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1},$$

ami erős mezoskálájú ciklonális örvénylésre utal.

III. fejezet - Egyensúlyi és nem-egyensúlyi mozgások a légkörben

III.1. A geosztrófikus és a gradiens szél

III.1.1. A gradiens szél sebessége anticiklonban:

$$V_{gr} = -\frac{fr}{2} + \sqrt{\frac{f^2 r^2}{4} - r\alpha \left| \frac{\partial p}{\partial r} \right|}$$

Látható, hogy ha a gyökjel alatt negatív szám áll, akkor az egyenletnek nincs megoldása, azaz nem alakulhat ki gradiens szél. A gradiens szél kialakulásának feltétele:

$$\frac{f^2 r^2}{4} \geq r\alpha \left| \frac{\partial p}{\partial r} \right|,$$

amiből a nyomási gradiensre a következő feltételt kapjuk:

$$\left| \frac{\partial p}{\partial r} \right| \leq \frac{f^2 r \rho}{4}$$

Ennél nagyobb nyomási gradiens esetén a befelé mutató Coriolis-erő nem képes ellensúlyozni a kifelé mutató nyomási gradiens erő és centrifugális erő együttes hatását, és az egyensúly felbomlik.

A gradiens szél ciklonban:

$$V_{gr} = -\frac{fr}{2} + \sqrt{\frac{f^2 r^2}{4} + r\alpha \frac{\partial p}{\partial r}}$$

Mivel ebben az esetben a gyökjel alatt mindig pozitív szám áll (a nyomás a ciklonban kifelé mindig emelkedik), ezért a ciklonban tetszőleges nyomási gradiens mellett kialakulhat gradiens szél.

A kapott eredmény szemléletesen is megérthető, ha figyelembe vesszük az erők egyensúlyát. Anticiklonban befelé a Coriolis-erő, kifelé a nyomási gradiens erő hat. A kettő közül a Coriolis-erő a nagyobb abszolút értékű. A sebesség növekedésével a Coriolis-erő lineárisan, a centrifugális erő négyzetesen nő, amiből következik, hogy nagy sebességeknél a centrifugális erő *(anticiklonnal együtt forgó rendszerből szemlélve, illetve a centripetális erő, ha a Földdel együtt forgó rendszerből szemléljük az anticiklont)* meghaladja a Coriolis-erőt. Mivel a nyomási gradiens erő is a centrifugális erőt „támogatja”, így biztosan felborul az egyensúly.

Ciklonban a nyomási gradiens erő, ami tetszőleges lehet, a rendszer középpontja felé mutat. A Coriolis-erő a sebességgel arányos, míg a nyomási gradiens erő nagysága és a Coriolis-erő nagysága közötti különbség (pozitív) a sebesség négyzetével arányos. Ebben az esetben mindig fennáll az egyensúly. Minden nyomási gradiens erőhöz találunk egy egyensúlyi gradiens áramlást, ahol a szél a kör alakú izobárok érintőjével párhuzamos lesz (megjegyezzük, hogy ebben az egyszerűsített modellben eltekintünk a sűrűség és a Coriolis-paraméter szélességi körök szerinti változásától).

III.1.2. A gradiens szél ciklonban:

$$V_{gr} = -\frac{fr}{2} + \sqrt{\frac{f^2 r^2}{4} + r\alpha \frac{\partial p}{\partial r}},$$

anticiklonban pedig:

$$V_{\text{sz}} = -\frac{fr}{2} + \sqrt{\frac{f^2 r^2}{4} - r\alpha \left| \frac{\partial p}{\partial r} \right|}$$

Azonos nyomási gradiens, f , r és α esetén az egyenletekben az egyes tagok abszolút értéke megegyezik. Mivel f és r mindig pozitív, ezért az első tag mindkét egyenletben negatív.

Anticiklon esetén a gyökjel alatt két pozitív szám különbsége szerepel, amiből levonható a következtetés, hogy a gyökös kifejezés értéke csak 0 és $\frac{fr}{2}$ között lehet. Ciklonban a gyökjel alatt tetszőlegesen nagy nemnegatív szám szerepelhet. A két pozitív szám összegéről az azonban leolvasható, hogy a gyökös kifejezés értéke legalább $\frac{fr}{2}$.

A fentiek alapján a gradiens szél értéke anticiklonban $-\frac{fr}{2}$ és 0 közötti, ciklonban 0-nál nagyobb, felső határa nincs.

III.1.3. A levegő sűrűsége a hőmérséklet és a nyomás ismeretében kiszámítható. A légnyomásnak az átlagos 502 hPa-t feltételezve:

$$\rho = \frac{p}{RT} = \frac{50200}{287 \cdot 248} \text{ kg m}^{-3} = 0,71 \text{ kg m}^{-3}$$

A geostrofikus szél egyenlete:

$$v_{\text{sz}} = \frac{1}{\rho f} \frac{\partial p}{\partial n} = \frac{1}{0,71 \cdot 10^{-4}} \frac{400}{2 \cdot 10^5} = 28,2 \text{ m s}^{-1}$$

III.1.4. A ciklon sugara 5° . Mivel egy szélességi fok megközelítőleg 111,1 km-nek felel meg, a ciklon sugara 555,5 km, azaz megközelítőleg $5,56 \cdot 10^5 \text{ m}$.

A nyomási gradiens értéke:

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{1,5 \text{ hPa}}{100 \text{ km}} = 1,5 \cdot 10^{-3} \text{ Pa m}^{-1}$$

A ciklonra vonatkozó gradiens szél egyenlete:

$$V_{\text{sz}} = -\frac{fr}{2} + \sqrt{\frac{f^2 r^2}{4} + r\alpha \frac{\partial p}{\partial r}}$$

amelybe behelyettesítve:

$$V_{\text{sz}} = -\frac{10^{-4} \cdot 5,56 \cdot 10^5}{2} + \sqrt{\frac{10^{-8} \cdot 3,09 \cdot 10^{11}}{4} + \frac{5,56 \cdot 10^5}{1,2} \cdot 1,5 \cdot 10^{-3}} = 10,5 \text{ m s}^{-1}$$

Az anticiklonra vonatkozó gradiens szél egyenlete:

$$V_{\text{sz}} = -\frac{fr}{2} + \sqrt{\frac{f^2 r^2}{4} - r\alpha \left| \frac{\partial p}{\partial r} \right|}$$

amelybe behelyettesítve:

$$V_{\text{gr}} = -\frac{10^{-4} \cdot 5,56 \cdot 10^5}{2} + \sqrt{\frac{10^{-8} \cdot 3,09 \cdot 10^{11}}{4} - \frac{5,56 \cdot 10^5}{1,2} \cdot 1,5 \cdot 10^{-3}} = -19 \text{ m s}^{-1}$$

A két szélsősebesség nagyságának különbsége tehát $8,5 \text{ m s}^{-1}$.

III.1.5. A ciklon sugara 10° . Mivel egy szélességi fok megközelítőleg $111,1 \text{ km}$ -nek felel meg, a ciklon sugara 1111 km , azaz megközelítőleg $1,11 \cdot 10^6 \text{ m}$.

A nyomási gradiens értéke:

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{20}{1110} = 1,8 \cdot 10^{-3} \text{ Pa m}^{-1}$$

A ciklonra vonatkozó gradiens szél egyenlete:

$$V_{\text{gr}} = -\frac{fr}{2} + \sqrt{\frac{f^2 r^2}{4} + r \alpha \frac{\partial p}{\partial r}},$$

amelybe behelyettesítve:

$$V_{\text{gr}} = -\frac{10^{-4} \cdot 1,11 \cdot 10^6}{2} + \sqrt{\frac{10^{-8} \cdot 1,23 \cdot 10^{12}}{4} + \frac{1,11 \cdot 10^6}{1,2} \cdot 1,8 \cdot 10^{-3}} = 13,4 \text{ m s}^{-1}$$

Az anticiklonra vonatkozó gradiens szél egyenlete:

$$V_{\text{gr}} = -\frac{fr}{2} + \sqrt{\frac{f^2 r^2}{4} - r \alpha \left| \frac{\partial p}{\partial r} \right|},$$

amelybe behelyettesítve:

$$V_{\text{gr}} = -\frac{10^{-4} \cdot 1,11 \cdot 10^6}{2} + \sqrt{\frac{10^{-8} \cdot 1,23 \cdot 10^{12}}{4} - \frac{1,11 \cdot 10^6}{1,2} \cdot 1,8 \cdot 10^{-3}} = -17,9 \text{ m s}^{-1}$$

A két szélsősebesség nagysága között a különbség $4,5 \text{ m s}^{-1}$.

III.1.6. A ciklon sugara 10° . Mivel egy szélességi fok megközelítőleg $111,1 \text{ km}$ -nek felel meg, a ciklon sugara 1111 km , azaz megközelítőleg $1,11 \cdot 10^6 \text{ m}$.

A nyomási gradiens értéke:

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{20}{1110} \text{ hPa km}^{-1} = 1,8 \cdot 10^{-3} \text{ Pa m}^{-1}$$

A Coriolis-paraméter értéke 35° , illetve 55° -on:

$$f_{35} = 2 \cdot 7,292 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1} \cdot \sin 35^\circ = 0,836 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1},$$

$$f_{55} = 2 \cdot 7,292 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1} \cdot \sin 55^\circ = 1,194 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}.$$

A levegő sűrűsége az állapotegyenlet alapján számítható mindkét helyre:

$$\rho_{35} = \frac{p_{35}}{RT_{35}} = \frac{101500}{287 \cdot 298} = 1,19 \text{ kg m}^{-3},$$

$$\rho_{55} = \frac{p_{55}}{RT_{55}} = \frac{101500}{287 \cdot 288} = 1,23 \text{ kg m}^{-3}.$$

A ciklonra vonatkozó gradiens szél egyenlete:

$$V_{\vec{r}} = -\frac{fr}{2} + \sqrt{\frac{f^2 r^2}{4} + r \alpha \frac{\partial p}{\partial r}};$$

amelybe behelyettesítve: $V_{\vec{r}35} = 15,5 \text{ m s}^{-1}$, $V_{\vec{r}55} = 11,3 \text{ m s}^{-1}$, a különbség tehát $4,2 \text{ m s}^{-1}$.

III.1.7. Nézzük meg, hogy mekkora a gradiens és a geosztrófikus szél maximális lehetséges aránya anticiklonban. A gradiens szél egyenlete anticiklonban:

$$V_{\vec{r}} = -\frac{fr}{2} + \sqrt{\frac{f^2 r^2}{4} - r \alpha \left| \frac{\partial p}{\partial r} \right|}.$$

Mivel az első tag mindig negatív, a gyökös kifejezés pedig nemnegatív és $\frac{fr}{2}$ -nél kisebb, a szélsősebesség akkor lesz maximális, ha a gyökjel alatt álló kifejezés nulla, azaz

$$V_{\vec{r}} = -\frac{fr}{2}.$$

Ebben az esetben a nyomási gradiens:

$$\frac{\partial p}{\partial r} = -\frac{\rho f^2 r}{4}.$$

A geosztrófikus szél egyenletébe behelyettesítve a kapott nyomási gradienst:

$$v_{\text{geosztrófikus}} = \frac{1}{\rho f} \frac{\partial p}{\partial r} = -\frac{fr}{4},$$

ami fele a gradiens szélnek.

III.1.8. A geosztrófikus szélkomponensek:

$$u_{\vec{r}} = -\frac{1}{f} \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{g}{f} \frac{\partial z}{\partial y}, \quad v_{\vec{r}} = \frac{1}{f} \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{g}{f} \frac{\partial z}{\partial x}.$$

A divergencia kiszámításakor az x -től egyedül a geopotenciál, az y -től azonban a geopotenciál és a Coriolis-paraméter is függ:

$$\frac{\partial u_{\vec{r}}}{\partial x} + \frac{\partial v_{\vec{r}}}{\partial y} = -\frac{g}{f} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{g}{f} \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} - \frac{g}{f^2} \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial x}.$$

A kifejezés első két tagja a deriváltak felcserélhetőségére vonatkozó Young-tétel értelmében egyenlő, azaz kiejtik egymást. A harmadik tagban megjelenik a geosztrófikus szél második komponense:

$$\frac{\partial u_{\varepsilon}}{\partial x} + \frac{\partial v_{\varepsilon}}{\partial y} = -\frac{1}{f} \frac{\partial f}{\partial y} v_{\varepsilon} = -\frac{\beta}{f} v_{\varepsilon},$$

ahol $\beta = \frac{\partial f}{\partial y}$ a Coriolis-paraméter szélesség szerinti megváltozása. A β paraméter nagyságrendje megközelítőleg $10^{-11} \text{ s}^{-1} \text{ m}^{-1}$, a szélessége 10 m s^{-1} , a Coriolis-paraméteré 10^{-4} s^{-1} . Ennek alapján a divergencia nagyságrendje 10^{-6} s^{-1} .

III.1.9. A geosztrófikus szélkomponensek:

$$u_{\varepsilon} = -\frac{1}{f\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad v_{\varepsilon} = \frac{1}{f\rho} \frac{\partial p}{\partial x}.$$

A divergencia kiszámításakor az x -től a nyomás és a sűrűség, az y -től azonban a nyomás, a sűrűség és a Coriolis-paraméter is függ:

$$\frac{\partial u_{\varepsilon}}{\partial x} + \frac{\partial v_{\varepsilon}}{\partial y} = -\frac{1}{\rho f} \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y} + \frac{1}{\rho^2 f} \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{1}{\rho f} \frac{\partial^2 p}{\partial y \partial x} - \frac{1}{\rho^2 f} \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial \rho}{\partial y} - \frac{1}{\rho f^2} \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y}.$$

A kifejezés első és harmadik tagja a deriváltak felcserélhetőségére vonatkozó Young-tétel értelmében egyenlő, azaz kiejtik egymást. A megmaradó tagokban megjelenik a geosztrófikus szél valamelyik komponense:

$$\frac{\partial u_{\varepsilon}}{\partial x} + \frac{\partial v_{\varepsilon}}{\partial y} = -\frac{1}{f} \frac{\partial f}{\partial y} v_{\varepsilon} - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} u_{\varepsilon} + \frac{\partial \rho}{\partial y} v_{\varepsilon} \right) = -\frac{\beta}{f} v_{\varepsilon} - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} u_{\varepsilon} + \frac{\partial \rho}{\partial y} v_{\varepsilon} \right),$$

ahol $\beta = \frac{\partial f}{\partial y}$ a Coriolis-paraméter szélesség szerinti megváltozása. A második tag a sűrűségadvekcio hatását írja le.

A β paraméter nagyságrendje megközelítőleg $10^{-11} \text{ s}^{-1} \text{ m}^{-1}$, a szélessége 10 m s^{-1} , a Coriolis-paraméteré 10^{-4} s^{-1} , a horizontális sűrűséggradiensé $10^{-8} \text{ kg m}^{-4}$. Ennek alapján a divergencia első tagjának nagyságrendje 10^{-6} s^{-1} , a sűrűségadvekcioé 10^{-7} s^{-1} .

III.1.10. A geosztrófikus szélkomponensek:

$$u_{\varepsilon} = -\frac{1}{f} \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{g}{f} \frac{\partial z}{\partial y}, \quad v_{\varepsilon} = \frac{1}{f} \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{g}{f} \frac{\partial z}{\partial x}.$$

Az örvényesség kiszámításakor az x -től egyedül a geopotenciál, az y -től azonban a geopotenciál és a Coriolis-paraméter is függ:

$$\frac{\partial v_{\varepsilon}}{\partial x} - \frac{\partial u_{\varepsilon}}{\partial y} = \frac{g}{f} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{g}{f} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \frac{g}{f^2} \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial y}.$$

A kifejezés első két tagjában megjelenik a geopotenciál Laplace-a, a harmadik tagban pedig a geosztrófikus szél első komponense:

$$\frac{\partial v_{\varepsilon}}{\partial x} - \frac{\partial u_{\varepsilon}}{\partial y} = \frac{g}{f} \nabla_p^2 z - \frac{g}{f^2} \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{g}{f} \nabla_p^2 z + \frac{\beta}{f} u_{\varepsilon},$$

ahol $\beta = \frac{\partial f}{\partial y}$ a Coriolis-paraméter szélesség szerinti megváltozása.

A β paraméter nagyságrendje megközelítőleg $10^{-11} \text{ s}^{-1} \text{ m}^{-1}$, a szélesebbé 10 m s^{-1} , a Coriolis-paraméteré 10^{-4} s^{-1} . A $\nabla_p^2 z$ kifejezés nagyságrendje megközelítőleg 10^{-10} m^{-1} . Ennek alapján az örvényesség első tagjának nagyságrendje 10^{-5} s^{-1} , a második tagé 10^{-6} s^{-1} .

III.1.11. A geosztrófikus szélkomponensek:

$$u_{\varepsilon} = -\frac{1}{f\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad v_{\varepsilon} = \frac{1}{f\rho} \frac{\partial p}{\partial x}.$$

Az örvényesség kiszámításakor az x -től a nyomás és a sűrűség, az y -től azonban a nyomás, a sűrűség és a Coriolis-paraméter is függ:

$$\frac{\partial v_{\varepsilon}}{\partial x} - \frac{\partial u_{\varepsilon}}{\partial y} = \frac{1}{\rho f} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{1}{\rho^2 f} \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho f} \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} - \frac{1}{\rho^2 f} \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{1}{\rho f^2} \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial y}.$$

A kifejezés első és harmadik tagjában megjelenik a nyomás Laplace-operátora, a többi tagban pedig a geosztrófikus szél komponensei:

$$\frac{\partial v_{\varepsilon}}{\partial x} - \frac{\partial u_{\varepsilon}}{\partial y} = \frac{g}{f} \nabla_p^2 z - \frac{g}{f^2} \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} u_{\varepsilon} - \frac{\partial \rho}{\partial y} v_{\varepsilon} \right) = \frac{g}{f} \nabla_p^2 z + \frac{\beta}{f} u_{\varepsilon} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} u_{\varepsilon} - \frac{\partial \rho}{\partial y} v_{\varepsilon} \right),$$

ahol $\beta = \frac{\partial f}{\partial y}$ a Coriolis-paraméter szélesség szerinti megváltozása. Az utolsó tag a sűrűségadvekcio hatását fejezi ki.

A β paraméter nagyságrendje megközelítőleg $10^{-11} \text{ s}^{-1} \text{ m}^{-1}$, a szélesebbé 10 m s^{-1} , a Coriolis-paraméteré 10^{-4} s^{-1} . A $\nabla_p^2 z$ kifejezés nagyságrendje megközelítőleg 10^{-10} m^{-1} , a horizontális sűrűséggradiensé $10^{-8} \text{ kg m}^{-4}$. Ennek alapján az örvényesség első tagjának nagyságrendje 10^{-5} s^{-1} , a második tagé 10^{-6} s^{-1} , a sűrűségadvekcioé 10^{-7} s^{-1} .

III.2. A termikus szél

III.2.1. A barotróp légkörben nincs szélnyírás, azaz nincsen termikus szél. Ez egyszerűen következik abból, hogy barotróp légkörben a sűrűség csak egy állapotjelző függvénye:

$$\rho = \rho(p), \text{ illetve } T = T(p).$$

Így a hőmérsékleti gradiens a láncszabály szerint átírható a nyomási gradiens felhasználásával:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{dT}{dp} \frac{\partial p}{\partial x} = +\rho f v_{\varepsilon} \frac{dT}{dp},$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{dT}{dp} \frac{\partial p}{\partial y} = -\rho f u_{\varepsilon} \frac{dT}{dp},$$

$$\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{dT}{dp} \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \frac{dT}{dp}.$$

Az átalakítások során kihasználtuk a geosztrófikus szélegyenletet:

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + f v_{\varepsilon},$$

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - f u_{\varepsilon}.$$

Beírva a fent kapott összefüggéseket a szélnyírásra kapott

$$\frac{\partial u_{\varepsilon}}{\partial z} = -\frac{g}{fT} \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{u_{\varepsilon}}{T} \frac{\partial T}{\partial z}, \quad \frac{\partial v_{\varepsilon}}{\partial z} = \frac{g}{fT} \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{v_{\varepsilon}}{T} \frac{\partial T}{\partial z}$$

egyenletekbe, adódik, hogy

$$\frac{\partial u_{\varepsilon}}{\partial z} = -\frac{g}{fT} \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{u_{\varepsilon}}{T} \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\rho g u_{\varepsilon}}{T} \frac{dT}{dp} - \frac{\rho g u_{\varepsilon}}{T} \frac{dT}{dp} = 0,$$

$$\frac{\partial v_{\varepsilon}}{\partial z} = \frac{g}{fT} \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{v_{\varepsilon}}{T} \frac{\partial T}{\partial z} = \rho f v_{\varepsilon} \frac{g}{fT} \frac{dT}{dp} - \frac{v_{\varepsilon}}{T} \rho g \frac{dT}{dp} = 0.$$

III.2.2. A termikus szél egyenletei:

$$\frac{\partial u_{\varepsilon}}{\partial z} = -\frac{g}{fT} \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{u_{\varepsilon}}{T} \frac{\partial T}{\partial z}, \quad \frac{\partial v_{\varepsilon}}{\partial z} = \frac{g}{fT} \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{v_{\varepsilon}}{T} \frac{\partial T}{\partial z}.$$

A légkörben horizontálisan a hőmérséklet 1°C -os megváltozása hozzávetőleg 100 km-es távolságon történik meg, ezért a horizontális hőmérsékleti gradiensek 10^{-5} K m^{-1} -nek becsülhetők. A vertikális hőmérsékleti gradiens a száraz adiabatikus hűlés mértékével, 10^{-2} K m^{-1} értékkel közelíthető. Kihasználva, hogy $g \approx 10 \text{ m s}^{-2}$, $f \approx 10^{-4} \text{ s}^{-1}$, $T \approx 250 \text{ K}$ és $u_{\varepsilon} \approx 10 \text{ m s}^{-1}$, a nagyságrendekre a következő adódik:

$$\frac{g}{fT} \frac{\partial T}{\partial x} \approx -\frac{g}{fT} \frac{\partial T}{\partial y} \approx 4 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1},$$

$$\frac{v_{\varepsilon}}{T} \frac{\partial T}{\partial z} \approx \frac{u_{\varepsilon}}{T} \frac{\partial T}{\partial z} \approx 4 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1},$$

Azaz a horizontális hőmérsékleti gradiens hatása egy nagyságrenddel nagyobb a vertikális hőmérsékleti gradiensénél.

III.2.3. A termikus szél egyenletei nyomási rendszerben:

$$\frac{\partial u_{\varepsilon}}{\partial \ln p} = + \frac{R}{f} \frac{\partial T}{\partial y},$$

$$\frac{\partial v_{\varepsilon}}{\partial \ln p} = - \frac{R}{f} \frac{\partial T}{\partial x}.$$

A szélnyírási vektor kiszámításához ezeket integráljuk a két szint között:

$$\mathbf{v}_T = \mathbf{v}_{\varepsilon 1} - \mathbf{v}_{\varepsilon 0} = \int_{p_0}^{p_1} \frac{\partial \mathbf{v}_{\varepsilon}}{\partial \ln p} d \ln p.$$

Az integrálás során a hőmérsékletek a rétegre vonatkozó átlagos hőmérsékletekké alakulnak. A komponensenként való integrálás eredménye:

$$u_T = - \frac{R}{f} \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \ln \left(\frac{p_0}{p_1} \right),$$

$$v_T = \frac{R}{f} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} \ln \left(\frac{p_0}{p_1} \right).$$

Felhasználva a geopotenciálra vonatkozó összefüggést:

$$\Phi_1 - \Phi_0 = R \bar{T} \ln \left(\frac{p_0}{p_1} \right),$$

a termikus szélre a következő eredmény adódik:

$$u_T = - \frac{1}{f} \frac{\partial}{\partial y} (\Phi_1 - \Phi_0),$$

$$v_T = \frac{1}{f} \frac{\partial}{\partial x} (\Phi_1 - \Phi_0).$$

Vektori alakban:

$$\mathbf{v}_T = - \frac{1}{f} \mathbf{k} \times \nabla_p (\Phi_1 - \Phi_0).$$

III.2.4. A termikus szél véges rétegvastagságra vonatkozó egyenletei nyomási rendszerben:

$$\Delta u \approx \frac{R}{f} \frac{\Delta \bar{T}}{\Delta y} \Delta \ln p, \quad \Delta v \approx - \frac{R}{f} \frac{\Delta \bar{T}}{\Delta x} \Delta \ln p.$$

A feladat által leírt helyzetben a hőmérsékleti gradiens értéke:

$$\frac{\Delta \bar{T}}{\Delta x} = -3 \cdot 10^{-5} \text{ K m}^{-1}, \quad \frac{\Delta \bar{T}}{\Delta y} = 0.$$

A termikus szélnek eszerint csak y irányú komponense van, amelynek értéke:

$$\Delta u_{850-500} = 0,$$

$$\Delta v_{850-500} \approx -\frac{R}{f} \frac{\Delta \bar{T}}{\Delta x} \Delta \ln p = \frac{287 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}}{10^{-4} \text{ s}^{-1}} \cdot 3 \cdot 10^{-5} \text{ K m}^{-1} \ln \left(\frac{500}{850} \right) = -45,69 \text{ m s}^{-1}$$

A geostrofikus szél 850 hPa-on:

$$u_{g850} = -20 \text{ m s}^{-1} \cos 45^\circ = -14,14 \text{ m s}^{-1}, \quad v_{g850} = 20 \text{ m s}^{-1} \sin 45^\circ = 14,14 \text{ m s}^{-1}$$

Az 500 hPa-os geostrofikus szelet a 850 hPa-os szél és a termikus szél összegeként számíthatjuk:

$$u_{g500} = u_{g850} + \Delta u_{850-500} = -14,14 \text{ m s}^{-1}, \quad v_{g500} = v_{g850} + \Delta v_{850-500} = -31,55 \text{ m s}^{-1}$$

A szél iránya a nyugati iránytól vett α szöggel kifejezve:

$$\operatorname{tg} \alpha_{500} = \frac{v_{g500}}{u_{g500}} = 2,23;$$

amiből $\alpha_{500} = 66^\circ$, azaz a meteorológiában megszokott módon az észak-déli iránytól mért szélirányra 24° adódik. A szél eszerint 850 hPa-on délkeleti, 500 hPa-on észak-északkeleti. Ez tükrözi azt a megállapítást, miszerint hidegadvекció esetén a szél a magassággal balra fordul. A szélesebesség:

$$|v_{g500}| = \sqrt{u_{g500}^2 + v_{g500}^2} = 25,1 \text{ m s}^{-1}$$

III.2.5. A termikus szél véges rétegvastagságra vonatkozó egyenletei nyomási rendszerben:

$$\Delta u \approx \frac{R}{f} \frac{\Delta \bar{T}}{\Delta y} \Delta \ln p,$$

$$\Delta v \approx -\frac{R}{f} \frac{\Delta \bar{T}}{\Delta x} \Delta \ln p$$

A feladat által leírt helyzetben a hőmérsékleti gradiens értéke:

$$\frac{\Delta \bar{T}}{\Delta x} = -2 \cdot 10^{-5} \text{ K m}^{-1},$$

$$\frac{\Delta \bar{T}}{\Delta y} = 0$$

A termikus szélnek eszerint csak y irányú komponense van, amelynek értéke:

$$\Delta u_{700-500} = 0,$$

$$\Delta v_{700-500} \approx -\frac{R}{f} \frac{\Delta \bar{T}}{\Delta x} \Delta \ln p = \frac{287 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}}{10^{-4} \text{ s}^{-1}} \cdot 2 \cdot 10^{-5} \text{ K m}^{-1} \ln \left(\frac{500}{700} \right) = -19,3 \text{ m s}^{-1}$$

A geosztrófikus szél 500 hPa-on:

$$u_{g500} = 20 \text{ m s}^{-1} \cos 45^\circ = 14,14 \text{ m s}^{-1}, \quad v_{g500} = -20 \text{ m s}^{-1} \sin 45^\circ = -14,14 \text{ m s}^{-1}$$

Az 500 hPa-os geosztrófikus szelet a 700 hPa-os szél és a termikus szél összegeként írhatjuk fel:

$$u_{g500} = u_{g700} + \Delta u_{700-500}, \quad v_{g500} = v_{g700} + \Delta v_{700-500},$$

amiből a 700 hPa-os geosztrófikus szélre a következő adódik:

$$u_{g700} = u_{g500} - \Delta u_{700-500} = 14,14 \text{ m s}^{-1}, \quad v_{g700} = v_{g500} - \Delta v_{700-500} = -5,17 \text{ m s}^{-1}$$

A szél iránya a nyugati iránytól vett α szöggel kifejezve:

$$\operatorname{tg} \alpha_{700} = \frac{v_{g700}}{u_{g700}} = -0,36,$$

amiből $\alpha_{700} = -20^\circ$, azaz a meteorológiában megszokott módon az észak-déli iránytól mért szélirányra 290° adódik. A szél eszerint 700 hPa-on 290° , 500 hPa-on 315° irányból fúj. Ez tükrözi azt a megállapítást, miszerint melegadvekcio esetén a szél a magassággal jobbra fordul. A szélesebesség:

$$|v_{g700}| = \sqrt{u_{g700}^2 + v_{g700}^2} = 15,1 \text{ m s}^{-1}$$

III.2.6. Előzetesen megállapítható, hogy a szél a magassággal balra fordul, azaz hidegadvekcioát várunk. A 700 hPa-on fújó geosztrófikus szél:

$$u_{g700} = 15 \text{ m s}^{-1} \cos 45^\circ = 10,61 \text{ m s}^{-1}, \quad v_{g700} = 15 \text{ m s}^{-1} \sin 45^\circ = 10,61 \text{ m s}^{-1}$$

Az 500 hPa-on fújó geosztrófikus szél:

$$u_{g500} = 20 \text{ m s}^{-1}, \quad v_{g500} = 0$$

A 700–500 hPa közötti rétegben fújó átlagos szél:

$$\bar{u} = \frac{u_{g700} + u_{g500}}{2} = 15,3 \text{ m s}^{-1}, \quad \bar{v} = \frac{v_{g700} + v_{g500}}{2} = 5,3 \text{ m s}^{-1}$$

A 700–500 hPa-os szintek közötti termikus szél a szélkomponensek különbsége:

$$\Delta u_{700-500} = u_{g500} - u_{g700} = 9,4 \text{ m s}^{-1}, \quad \Delta v_{700-500} = v_{g500} - v_{g700} = -10,6 \text{ m s}^{-1}$$

A termikus szél ismeretében kiszámítható a hőmérsékleti gradiens:

$$\Delta u_{700-500} = \frac{R}{f} \frac{\Delta \bar{T}}{\Delta y} \Delta \ln p, \quad \Delta v_{700-500} = -\frac{R}{f} \frac{\Delta \bar{T}}{\Delta x} \Delta \ln p$$

Átrendezés után a következő adódik:

$$\frac{\Delta \bar{T}}{\Delta y} = \frac{f}{R} \frac{\Delta u_{700-500}}{\Delta \ln p} = \frac{10^{-4} \text{ s}^{-1}}{287 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}} \cdot \frac{9,4 \text{ m s}^{-1}}{\ln\left(\frac{700}{500}\right)} = 9,7 \cdot 10^{-6} \text{ K m}^{-1} ;$$

$$\frac{\Delta \bar{T}}{\Delta x} = -\frac{f}{R} \frac{\Delta v_{700-500}}{\Delta \ln p} = -\frac{10^{-4} \text{ s}^{-1}}{287 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}} \cdot \frac{-10,6 \text{ m s}^{-1}}{\ln\left(\frac{700}{500}\right)} = 1,1 \cdot 10^{-5} \text{ K m}^{-1} ,$$

azaz a hőmérséklet kelet felé 100 km-enként 1,1 °C-ot, észak felé 100 km-enként 0,97 °C-ot emelkedik. Az átlagos hőmérsékleti advekcziót a hőmérsékleti gradiens és az átlagos szél skalár szorzatából kapjuk:

$$-\bar{v} \nabla T = -\bar{u} \frac{\Delta \bar{T}}{\Delta x} - \bar{v} \frac{\Delta \bar{T}}{\Delta y} =$$

$$= -15,3 \text{ m s}^{-1} \cdot 1,1 \cdot 10^{-5} \text{ K m}^{-1} - 5,3 \text{ m s}^{-1} \cdot 9,7 \cdot 10^{-6} \text{ K m}^{-1} = -2,2 \cdot 10^{-4} \text{ K s}^{-1} ,$$

azaz a hőmérséklet átlagosan 0,8 °C-ot csökken óránként. Ez egybevág a kezdeti feltételezésünkkel, hogy a magassággal balra forduló szél hidegadvekczió esetén valósulhat meg.

III.2.7. A 700 hPa-on fújó geosztrófikus szél:

$$u_{g700} = 10 \text{ m s}^{-1} \cos 70^\circ = 3,4 \text{ m s}^{-1} , \quad v_{g700} = 10 \text{ m s}^{-1} \sin 70^\circ = 9,4 \text{ m s}^{-1} .$$

Az 400 hPa-on fújó geosztrófikus szél:

$$u_{g400} = 19 \text{ m s}^{-1} \cos 110^\circ = -6,5 \text{ m s}^{-1} , \quad v_{g400} = 19 \text{ m s}^{-1} \sin 110^\circ = 17,85 \text{ m s}^{-1} .$$

A 700–400 hPa közötti rétegben fújó átlagos szél:

$$\bar{u} = \frac{u_{g700} + u_{g400}}{2} = -1,5 \text{ m s}^{-1} , \quad \bar{v} = \frac{v_{g700} + v_{g400}}{2} = 13,6 \text{ m s}^{-1} .$$

A 700–400 hPa-os szintek közötti termikus szél a szélkomponensek különbsége:

$$\Delta u_{700-400} = u_{g400} - u_{g700} = -9,9 \text{ m s}^{-1} , \quad \Delta v_{700-400} = v_{g400} - v_{g700} = 8,45 \text{ m s}^{-1} .$$

A termikus szél ismeretében kiszámítható a hőmérsékleti gradiens:

$$\Delta u_{700-400} = \frac{R}{f} \frac{\Delta \bar{T}}{\Delta y} \Delta \ln p , \quad \Delta v_{700-400} = -\frac{R}{f} \frac{\Delta \bar{T}}{\Delta x} \Delta \ln p .$$

Átrendezés után a következő adódik:

$$\frac{\Delta \bar{T}}{\Delta y} = \frac{f}{R} \frac{\Delta u_{700-400}}{\Delta \ln p} = \frac{10^{-4} \text{ s}^{-1}}{287 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}} \cdot \frac{-9,9 \text{ m s}^{-1}}{\ln\left(\frac{700}{400}\right)} = -6,2 \cdot 10^{-6} \text{ K m}^{-1} ,$$

$$\frac{\Delta \bar{T}}{\Delta x} = -\frac{f}{R} \frac{\Delta v_{700-400}}{\Delta \ln p} = -\frac{10^{-4} \text{ s}^{-1}}{287 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}} \cdot \frac{8,45 \text{ m s}^{-1}}{\ln\left(\frac{700}{400}\right)} = -5,3 \cdot 10^{-6} \text{ K m}^{-1}$$

azaz a hőmérséklet kelet felé 100 km-enként 0,62 °C-ot, észak felé 100 km-enként 0,53 °C-ot csökken. Az átlagos hőmérsékleti advekciót a hőmérsékleti gradiens és az átlagos szél skalárszorzatából kapjuk:

$$\begin{aligned} -\bar{v} \nabla T &= -\bar{u} \frac{\Delta \bar{T}}{\Delta x} - \bar{v} \frac{\Delta \bar{T}}{\Delta y} = \\ &= -1,5 \text{ m s}^{-1} \cdot 5,3 \cdot 10^{-6} \text{ K m}^{-1} + 1,6 \text{ m s}^{-1} \cdot 6,2 \cdot 10^{-6} \text{ K m}^{-1} = 1,9 \cdot 10^{-6} \text{ K s}^{-1} \end{aligned}$$

azaz a hőmérséklet átlagosan 0,007 °C-ot emelkedik óránként, gyakorlatilag nem változtatva az 500 hPa-os szint hőmérsékletét. A kapott alacsony, de pozitív érték egybevág azzal a feltételezésünkkel, hogy gyenge melegadvekciót várunk, mivel a 700 és 400 hPa-os szintek között a szélirány kismértékben jobbra fordul. Látható azonban, hogy a szélfordulás a 700–500 hPa közötti szinteken sokkal jelentősebb, míg az 500–400 hPa-os szintek között ellenkező irányú, ami hidegadvekciót feltételez. Ennek alapján a kapott átlagos érték igen rossz becslés a 700–400 hPa közötti réteg egészére nézve.

III.2.8. A feladatban a termikus szélegyenletet, mint diagnosztikus egyenletet használhatjuk. A megadott adatok alapján a hőmérsékleti gradiens az 500 hPa-os szintre könnyen származtathatók:

$$\frac{\Delta T}{\Delta x} = \frac{-0,4}{50000} \text{ K m}^{-1} = -8 \cdot 10^{-6} \text{ K m}^{-1}, \quad \frac{\Delta T}{\Delta y} = \frac{-0,4}{100000} \text{ K m}^{-1} = -4 \cdot 10^{-6} \text{ K m}^{-1}$$

A 450–500 hPa-os réteg átlagos hőmérsékleti gradiensét közelíthetjük az 500 hPa-ra vonatkozó értékekkel. A hőmérsékleti gradiens ismeretében a termikus szél kiszámítható:

$$\begin{aligned} \Delta u_{500-450} &= \frac{R}{f} \frac{\Delta \bar{T}}{\Delta y} \Delta \ln p = -\frac{287 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}}{10^{-4} \text{ s}^{-1}} \cdot 4 \cdot 10^{-6} \text{ K m}^{-1} \ln\left(\frac{500}{450}\right) = -1,2 \text{ m s}^{-1} \\ \Delta v_{500-450} &= -\frac{R}{f} \frac{\Delta \bar{T}}{\Delta x} \Delta \ln p = \frac{287 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}}{10^{-4} \text{ s}^{-1}} \cdot 8 \cdot 10^{-6} \text{ K m}^{-1} \ln\left(\frac{500}{450}\right) = 2,4 \text{ m s}^{-1} \end{aligned}$$

amelyből a 450 hPa-os szél könnyen megkapható:

$$u_{\varepsilon 450} = u_{\varepsilon 500} + \Delta u_{500-450} = -16,2 \text{ m s}^{-1}, \quad v_{\varepsilon 500} = v_{\varepsilon 500} + \Delta v_{500-450} = 10,4 \text{ m s}^{-1}$$

III.3. Ageosztrófikus áramlás

III.3.1. A mozgásegyenlet ageosztrófikus széllal kifejezett alakjából adódik, hogy

$$u_{\alpha \varepsilon} = -\frac{1}{f} \frac{dv}{dt} \quad \text{és} \quad v_{\alpha \varepsilon} = \frac{1}{f} \frac{du}{dt}$$

Közelítsük a fenti formulák totális időderiváltjaiban a szelet a geosztrófikus széllal, és fejtjük ki a totális időderiváltakat a vertikális sebesség elhanyagolásával:

$$u_{a\mathcal{E}} = -\frac{1}{f} \left(\frac{\partial v_{\mathcal{E}}}{\partial t} + \mathbf{v}_h \cdot \nabla \mathbf{v}_{\mathcal{E}} \right) \text{ és } v_{a\mathcal{E}} = \frac{1}{f} \left(\frac{\partial u_{\mathcal{E}}}{\partial t} + \mathbf{v}_h \cdot \nabla \mathbf{u}_{\mathcal{E}} \right)$$

Az időderiváltba írjuk be a geosztrófikus szél

$$u_{\mathcal{E}} = -\frac{1}{f\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad v_{\mathcal{E}} = \frac{1}{f\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$$

definícióját:

$$u_{a\mathcal{E}} = -\frac{1}{f^2\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial p}{\partial t} \right) - \frac{1}{f} \left(u \frac{\partial u_{\mathcal{E}}}{\partial x} + v \frac{\partial u_{\mathcal{E}}}{\partial z} \right) \text{ és } v_{a\mathcal{E}} = -\frac{1}{f^2\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial p}{\partial t} \right) + \frac{1}{f} \left(u \frac{\partial v_{\mathcal{E}}}{\partial x} + v \frac{\partial v_{\mathcal{E}}}{\partial z} \right)$$

A baloldalra beírva az ageosztrófikus szél definíciós egyenleteit, átrendezve adódik az állítás.

III.3.2. A ciklonban a nyomási gradiens erő befelé, a centrifugális és a Coriolis-erő kifelé mutat (*Ez a ciklonnal együtt forgó koordináta-rendszerben igaz. Ha a Földhöz rögzített koordináta-rendszerből szemléljük a ciklon forgását, akkor a nyomási gradiens erő és a Coriolis-erő különbsége a ciklon középpontja felé mutató centripetális erő.*). Így tehát, a Coriolis-erő kisebb, mint a nyomási gradiens erő, azaz a szélesség kisebb a geosztrófikus szélnél. Az ageosztrófikus szél a valódi szél és a geosztrófikus szél különbsége, ami ebben az esetben az áramlással szembe mutat.

Másik megközelítés: tudjuk, hogy az északi féltekén a légrész gyorsulása mindig 90°-kal jobbra tér el az ageosztrófikus széltől. Mivel ciklonban az áramlás az óramutató járásával ellentétesen forog, a gyorsulás pedig befelé mutat, az ageosztrófikus szélnél az áramlás irányával ellentétesnek kell lennie.

III.3.3. Az anticiklonban a nyomási gradiens erő és a centrifugális erő kifelé, a Coriolis-erő befelé mutat (*Az anticiklonnal együtt forgó koordináta-rendszerben dolgozunk.*) Anticiklonban a Coriolis-erő nagyobb a nyomási gradiens erőnél, azaz a szélesség nagyobb a geosztrófikus szélnél. Az ageosztrófikus szél a valódi szél és a geosztrófikus szél különbsége, ami ebben az esetben az áramlással azonos irányba mutat.

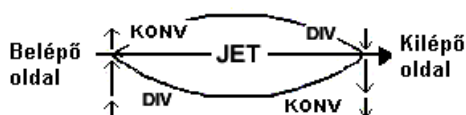
Másik megközelítés: tudjuk, hogy az északi félgömbön a légrész gyorsulása mindig 90°-kal jobbra tér el az ageosztrófikus széltől. Mivel anticiklonban az áramlás az óramutató járásával megegyezően forog, a gyorsulás pedig befelé mutat, az ageosztrófikus szélnél az áramlás irányába kell mutatnia.

III.3.4. Az északi félgömbön a légrész gyorsulása mindig 90°-kal jobbra tér el az ageosztrófikus széltől. Ebből következik, hogy a jet-mag belépő oldalán az ageosztrófikus szél az áramláshoz képest balra, azaz a magas nyomástól az alacsony nyomás felé mutat. A déli félgömbön az irányok természetesen fordítottak, de ott is igaz, hogy a jet-mag belépő oldalán az ageosztrófikus szél a nyomási gradienssel azonos irányú.

III.3.5. Az északi félgömbön a légrész gyorsulása mindig 90°-kal jobbra tér el az ageosztrófikus széltől. Ebből következik, hogy a jet-mag kilépő oldalán az ageosztrófikus szél az áramláshoz képest jobbra, azaz az alacsony nyomástól a magas nyomás felé mutat. A déli félgömbön az irányok természetesen fordítottak, de ott is igaz, hogy a jet-mag kilépő oldalán az ageosztrófikus szél a nyomási gradienssel ellentétes irányú.

III.3.6. A jet-mag kilépő oldalán, azaz „elején” az előrehaladó jet-mag eléri a korábban lassabb légréseket, ezért a levegő gyorsuló mozgást végez. A jet-mag belépő oldalán, azaz „hátsóján” az előrehaladó jet-mag hagyja a korábban gyorsabb légréseket, ezért a levegő lassuló mozgást végez. Mivel a gyorsulások ebben az esetben fordítottak, a **III.3.4.** és a **III.3.5.** kérdésre adott válaszok is felcserélődnek.

III.3.7. Mivel a divergenciát kizárólag az ageosztrófikus szél divergenciája idézi elő, ezért csak az utóbbi térbeli változását kell figyelembe vennünk. A **III.3.3.** és a **III.3.4.** feladatban kapott eredmények: a jet-mag belépő oldalán az ageosztrófikus szél az áramláshoz képest balra, a kilépő oldalán az áramláshoz képest jobbra mutat.



III.3.1. ábra. A jet-mag mentén fellépő ageosztrofikus szél (nyilakkal), valamint a divergens és konvergens zónák.

A jet-mag középvonalától (ahol a legnagyobb a sebesség) az áramlásra merőleges irányban balra haladva a sebesség csökken, ennek megfelelően az ageosztrofikus szélkomponens is csökken. A jet-mag kilépő oldalán az ageosztrofikus szél jobbra mutat, azaz a kilépő bal oldalon divergencia lép fel (III.3.1. ábra). A belépő oldalon az ageosztrofikus szél balra mutat, azaz baloldalon konvergencia lép fel. Hasonló gondolatmenet szerint a jobb kilépő oldalon konvergencia, a jobb belépő oldalon divergencia tapasztalható.

III.3.8. Mutasson a szél az x irányba! Ekkor az ageosztrofikus szélnek csak y irányú, a gyorsulásnak csak x irányú komponense lesz:

$$\frac{du}{dt} = f v',$$

$$\frac{dv}{dt} = -f u' = 0$$

A v' ageosztrofikus szél a megadott adatokból könnyen számítható:

$$v' = -u_g \operatorname{tg} 30^\circ = -20 \text{ m s}^{-1} \operatorname{tg} 30^\circ = -11,55 \text{ m s}^{-1}$$

A gyorsulás:

$$\frac{du}{dt} = f v' = -1,16 \cdot 10^{-3} \text{ m s}^{-2},$$

azaz az áramlással szemben mutat. Szemléletesen ez a következőképpen érthető: az áramlás jobbra, azaz a magas nyomás felé térül el a geosztrofikus szélről. Ez azt jelenti, hogy a Coriolis-erő nagyobb a nyomási gradiens erőnél. A geosztrofia visszaállításához a Coriolis-erőt, ebből következően a sebességet csökkenteni kell, ezért mutat a gyorsulás az áramlással szembe. (Az irányok az északi félgömbre vonatkoznak.)

III.3.9. A sebesség komponensei:

$$u = 10 \text{ m s}^{-1} \cos 45^\circ = 7,1 \text{ m s}^{-1},$$

$$v = 10 \text{ m s}^{-1} \sin 45^\circ = 7,1 \text{ m s}^{-1}.$$

A gyorsulás komponensei:

$$\frac{du}{dt} = 10^{-3} \text{ m s}^{-2} \cos 45^\circ = 7,1 \cdot 10^{-4} \text{ m s}^{-2},$$

$$\frac{dv}{dt} = 10^{-3} \text{ m s}^{-2} \sin 45^\circ = 7,1 \cdot 10^{-4} \text{ m s}^{-2}.$$

A gyorsulás segítségével számítható az u' , v' ageosztrófikus szél:

$$\frac{du}{dt} = fv', \quad \frac{dv}{dt} = -fu'$$

amiből

$$u' = -\frac{7,1 \cdot 10^{-4}}{10^{-4}} \text{ m s}^{-1} = -7,1 \text{ m s}^{-1}, \quad v' = \frac{7,1 \cdot 10^{-4}}{10^{-4}} \text{ m s}^{-1} = 7,1 \text{ m s}^{-1}$$

Látható, hogy az ageosztrófikus szél északnyugat felé mutat, azaz az elméletnek megfelelően a gyorsulással 90° -os szöget zár be. A geosztrófikus szél a valódi szél és az ageosztrófikus szél különbségként kapható:

$$u_g = u - u' = 14,2 \text{ m s}^{-1}, \quad v_g = v - v' = 0$$

A geosztrófikus szél tehát nyugatról fúj, amihez képest a valódi szélirány 45° -kal balra tér el. Szemléletesen ez a következőképpen érthető: az áramlás balra, azaz az alacsony nyomás felé térül el a geosztrófikus széltől. Ez azt jelenti, hogy a Coriolis-erő gyengébb a nyomási gradiens erőnél. A geosztrófia visszaállításához a Coriolis-erőt, ebből következően a sebességet növelni kell, ezért gyorsul az áramlás. (Az irányok az északi félgömbre vonatkoznak.)

III.3.10. A nyomás időbeli megváltozásának gradiense délnyugatról északnyugat felé tekintve:

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial t} \approx \frac{\frac{\Delta p_2}{\Delta t} - \frac{\Delta p_1}{\Delta t}}{\Delta x} = \frac{\frac{20 \text{ Pa}}{6300 \text{ s}}}{-10^5 \text{ m} \cdot \cos 45^\circ} = -8 \cdot 10^{-8} \text{ Pa s}^{-1} \text{ m}^{-1}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial t} \approx \frac{\frac{\Delta p_2}{\Delta t} - \frac{\Delta p_1}{\Delta t}}{\Delta y} = \frac{\frac{20 \text{ Pa}}{3600 \text{ s}}}{10^5 \text{ m} \cdot \sin 45^\circ} = 8 \cdot 10^{-8} \text{ Pa s}^{-1} \text{ m}^{-1}$$

Ebből az izallobárikus szél:

$$u' = -\frac{1}{\rho f^2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial p}{\partial t} \right) = \frac{1}{1,2 \cdot 10^{-8}} \cdot 8 \cdot 10^{-8} \text{ m s}^{-1} = 6,7 \text{ m s}^{-1}$$

$$v' = -\frac{1}{\rho f^2} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial p}{\partial t} \right) = -\frac{1}{1,2 \cdot 10^{-8}} \cdot 8 \cdot 10^{-8} \text{ m s}^{-1} = -6,7 \text{ m s}^{-1}$$

Látható, hogy frontok közelében az izallobárikus szél összemérhetővé válik a geosztrófikus széllal. Az izallobárikus szél iránya délnyugati, azaz megfelel várakozásainknak, miszerint az izallobárikus szél mindig a nyomáscsökkenés irányába fúj.

III.4. Az áramvonal és a trajektória

III.4.1. Ha az áramlás stacionárius, azaz időben változatlan, akkor az áramvonalak nem mozdulnak el. Ebben az esetben a szél valóban az áramvonalak mentén fúj, azaz a trajektóriák és az áramvonalak megegyeznek. Görbült áramlásban a C áthelyeződési sebesség stacionárius áramlás esetén nulla, azaz a trajektóriák és az áramvonalak görbületi sugara megegyezik:

$$R_{\text{áramvonal}} = R_{\text{trajektória}} \cdot \left(1 - \frac{C \cdot \cos \gamma}{V} \right) = R_{\text{trajektória}}$$

III.4.2. A görbületi sugár változása:

$$R_{\text{áramvonal}} = R_{\text{trajektória}} \cdot \left(1 - \frac{C \cdot \cos \gamma}{V}\right)$$

arányként kifejezve:

$$\frac{R_{\text{trajektória}}}{R_{\text{áramvonal}}} = \frac{1}{1 - \frac{C \cdot \cos \gamma}{V}} = \frac{1}{1 - \frac{\cos \gamma}{2}}$$

A γ szög a ciklon áthelyeződési iránya és az áramvonalak által bezárt szög, ami a ciklon kerülete mentén változik. A különböző helyekre kapott eredményeket a III.4.1. táblázat mutatja:

III.4.1. táblázat. Az áthelyeződési vektor és az áramvonalak által bezárt szög, illetve az áramvonalak és trajektóriák görbületi sugarainak eltérése a III.4.2. feladat adatai alapján.

Hely	γ	$\frac{R_{\text{trajektória}}}{R_{\text{áramvonal}}}$
Ciklon keleti perem	90°	1
Ciklon nyugati perem	-90°	1
Ciklon északi perem	180°	2/3
Ciklon déli perem	0°	2

Látható, hogy ahol a geosztrófikus szél merőleges az áthelyeződés sebességére, ott a görbületi sugár nem változik. Ha a geosztrófikus szél és az áthelyeződés sebessége egy irányba mutat (déli perem), akkor a trajektóriák „megnyúlnak”, görbületi sugaruk megnő az áramvonalakéhoz képest. Ha a geosztrófikus szél és az áthelyeződés sebessége ellenkező irányba mutat (északi perem), akkor a trajektóriák „lerövidülnek”, görbületi sugaruk csökken az áramvonalakéhoz képest.

III.4.3. A görbületi sugár változása:

$$R_{\text{áramvonal}} = R_{\text{trajektória}} \cdot \left(1 - \frac{C \cdot \cos \gamma}{V}\right);$$

arányként kifejezve:

$$\frac{R_{\text{trajektória}}}{R_{\text{áramvonal}}} = \frac{1}{1 - \frac{C \cdot \cos \gamma}{V}} = \frac{1}{1 - \cos \gamma}$$

A γ szög a ciklon áthelyeződési iránya és az áramvonalak által bezárt szög, ami a ciklon kerülete mentén változik. A különböző helyekre kapott eredményeket a III.4.2. táblázat mutatja:

III.4.2. táblázat. Az áthelyeződési vektor és az áramvonalak által bezárt szög, illetve az áramvonalak és trajektóriák görbületi sugarainak eltérése abban az esetben, ha a geosztrófikus szél és a ciklon áthelyeződési sebessége megegyezik.

Hely	γ	$\frac{R_{\text{trajektória}}}{R_{\text{áramvonal}}}$
Ciklon keleti perem	90°	1

Ciklon nyugati perem	-90°	1
Ciklon északi perem	180°	1/3
Ciklon déli perem	0°	értelmetlen

Ebben az esetben is látható, hogy ahol a geosztrófikus szél merőleges az áthelyeződés sebességére, ott a görbületi sugár nem változik. Ha a geosztrófikus szél és az áthelyeződés sebessége ellenkező irányba mutat (északi perem), akkor a trajektóriák „lerövidülnek”, görbületi sugaruk csökken az áramvonalakéhoz képest. Azonban ha a geosztrófikus szél és az áthelyeződés sebessége egy irányba mutat (déli perem), akkor a levegő együtt mozog a ciklonnal, azaz nem kanyarodik be a görbült izobárok mentén. A trajektória ekkor egyenes lesz, a 0-val való osztás miatt a trajektória sugara végtelenné válik, azaz a mozgás egyenes vonalú.

III.4.4. A centrifugális erő egyenesen arányos a görbületi sugárral, ezért a két mennyiség relatív hibája megegyezik. A görbületi sugár változása:

$$R_{\text{áramvonal}} = R_{\text{trajektória}} \cdot \left(1 - \frac{C \cdot \cos \gamma}{V}\right);$$

arányként kifejezve:

$$\frac{R_{\text{trajektória}}}{R_{\text{áramvonal}}} = \frac{1}{1 - \frac{C \cdot \cos \gamma}{V}}.$$

A γ szög a ciklon áthelyeződési iránya és az áramvonalak által bezárt szög, ami a ciklon kerülete mentén változik. Feladatunk, hogy megállapítsuk a „legrosszabb” esetet, azaz azt a γ szöget, amely esetén az eltérés a maximális.

A feladat feltételezi, hogy az áthelyeződés sebessége kisebb a geosztrófikus szélesebségnél, azaz $\frac{C}{V} < 1$. Mivel C és V mindig pozitív, látható, hogy ebben az esetben az arány akkor lesz maximális, ha $\cos \gamma$ minél nagyobb pozitív szám, azaz $\cos \gamma = 1$, vagyis $\gamma = 0^\circ$. Ez azt jelenti, hogy a legnagyobb eltérés akkor tapasztalható, ha a szél az áthelyeződés irányába fúj. A görbületi sugár változása ekkor:

$$\frac{R_{\text{trajektória}}}{R_{\text{áramvonal}}} = \frac{1}{1 - \frac{C}{V}} \leq 1,05$$

Az egyenlőtlenséget rendezve, és kihasználva, hogy feltételezésünk szerint a nevező nem lehet negatív. $1 - \frac{C}{V} \geq \frac{1}{1,05}$,

amit tovább alakítva $\frac{C}{V} \leq 1 - \frac{1}{1,05}$, amiből a következő feltételt kapjuk: $C \leq 0,048 \cdot V$.

III.4.5. A görbületi sugár változása:

$$R_{\text{áramvonal}} = R_{\text{trajektória}} \cdot \left(1 - \frac{C \cdot \cos \gamma}{V}\right).$$

Látható, hogy a két sugárnak akkor lehet különböző előjele, ha

$$\frac{C \cdot \cos \gamma}{V} > 1.$$

Mivel a $\cos \gamma$ kifejezés nem vehet fel 1-nél nagyobb értéket, ez csak akkor valósulhat meg, ha $\frac{C}{V} > 1$, azaz az áthelyeződési sebesség meghaladja a geosztrófikus szélebséget. Ebben az esetben a ciklon azon pontjain tapasztalható előjelváltás a görbületi sugárban, amelyekre igaz a következő feltétel:

$$\cos \gamma > \frac{V}{C}.$$

Itt is látható, hogy a kifejezésnek csak $C > V$ esetén van megoldása.

III.4.6. Az áramvonalak 12 UTC-kor 45° -os szöget zárnak be a szélességi körökkel. Az áramvonal mentén haladva a légrész egy óra alatt 8 m s^{-1} sebességgel $28,8 \text{ km}$ -t tenne meg. Az origóból induló légrész eszerint az áramvonal mentén az $x = 20,4 \text{ km}$, $y = 20,4 \text{ km}$ pontba érkezne.

A trajektória kiszámításához a szél időbeli változását is figyelembe kell vennünk (homogén szélmezőt feltételezve a helyfüggést elhanyagoljuk):

$$\frac{dx}{dt} = u(t), \quad \frac{dy}{dt} = v(t).$$

Ehhez először meg kell állapítanunk az $u(t)$ és $v(t)$ függvényeket. A kezdeti pillanatban a szélkomponensek:

$$u_0 = 8 \text{ m s}^{-1} \cdot \cos 45^\circ = 5,66 \text{ m s}^{-1}, \quad v_0 = 8 \text{ m s}^{-1} \cdot \sin 45^\circ = 5,66 \text{ m s}^{-1}.$$

Egy óra elteltével a szélkomponensek:

$$u_1 = 10 \text{ m s}^{-1} \cdot \cos 65^\circ = 4,23 \text{ m s}^{-1}, \quad v_1 = 10 \text{ m s}^{-1} \cdot \sin 65^\circ = 9,06 \text{ m s}^{-1}.$$

Egyenletesen változó szelet feltételezve a két végpont alapján felírható a lineáris csökkenés egyenlete:

$$u(t) = 5,66 \text{ m s}^{-1} + \frac{(4,23 - 5,66) \text{ m s}^{-1}}{3600 \text{ s}} \cdot t, \quad v(t) = 5,66 \text{ m s}^{-1} + \frac{(9,06 - 5,66) \text{ m s}^{-1}}{3600 \text{ s}} \cdot t.$$

A trajektóriát leíró egyenletekben a változókat szétválasztva, majd a két egyenletet integrálva:

$$\int_0^{x_1} dx = \int_0^{3600 \text{ s}} u(t) dt, \quad \int_0^{y_1} dy = \int_0^{3600 \text{ s}} v(t) dt.$$

Az integrálási határok megválasztásakor feltételeztük, hogy a légrész az origóból és a 0 időpillanatban indult. A bal oldalon elvégezve az integrálásokat a trajektória x_1 , y_1 végpontjára a következőt kapjuk:

$$x_1 = \int_0^{3600 \text{ s}} u(t) dt = 5,66 \text{ m s}^{-1} \cdot 3600 \text{ s} + \frac{(4,23 - 5,66) \text{ m s}^{-1}}{3600 \text{ s}} \cdot \frac{3600^2 \text{ s}^2}{2} = 17,8 \text{ km},$$

$$y_1 = \int_0^{3600 \text{ s}} v(t) dt = 5,66 \text{ m s}^{-1} \cdot 3600 \text{ s} + \frac{(9,06 - 5,66) \text{ m s}^{-1}}{3600 \text{ s}} \cdot \frac{3600^2 \text{ s}^2}{2} = 26,5 \text{ km}.$$

Az áramvonal mentén való mozgásra kapott eredményekkel ($x = 20,4 \text{ km}$, $y = 20,4 \text{ km}$) összevetve az eltérés:

$$\Delta s = \sqrt{(20,4 - 17,8)^2 + (20,4 - 26,5)^2} \text{ km} = 6,6 \text{ km}$$

III.4.7 A kezdeti pillanatban a szélkomponensek:

$$u_0 = -5 \text{ m s}^{-1}, \quad v_0 = 0$$

Három óra elteltével a szélkomponensek:

$$u_1 = 10 \text{ m s}^{-1} \cdot \cos 130^\circ = -6,43 \text{ m s}^{-1}, \quad v_1 = 10 \text{ m s}^{-1} \cdot \sin 130^\circ = 7,66 \text{ m s}^{-1}$$

Egyenletesen változó szelet feltételezve a két végpont alapján felírható a lineáris csökkenés egyenlete:

$$u(t) = -5 \text{ m s}^{-1} + \frac{(-6,43 + 5) \text{ m s}^{-1}}{3 \cdot 3600 \text{ s}} \cdot t, \quad v(t) = \frac{7,66 \text{ m s}^{-1}}{3 \cdot 3600 \text{ s}} \cdot t$$

A trajektóriát leíró egyenletekben a változókat szétválasztva, majd a két egyenletet integrálva:

$$\int_0^{x_1} dx = \int_0^{3h} u(t) dt, \quad \int_0^{y_1} dy = \int_0^{3h} v(t) dt$$

Az integrálási határok megválasztásakor feltételeztük, hogy a légréteg az origóból és a 0 időpillanatban indult. A bal oldalon elvégezve az integrálásokat a trajektória x_1, y_1 végpontjára a következőt kapjuk:

$$x_1 = \int_0^{3h} u(t) dt = -5 \text{ m s}^{-1} \cdot 3 \cdot 3600 \text{ s} + \frac{(-6,43 + 5) \text{ m s}^{-1}}{3 \cdot 3600 \text{ s}} \cdot \frac{9 \cdot 3600^2 \text{ s}^2}{2} = -61,7 \text{ km}$$

$$y_1 = \int_0^{3600 \text{ s}} v(t) dt = \frac{7,66 \text{ m s}^{-1}}{3 \cdot 3600 \text{ s}} \cdot \frac{9 \cdot 3600^2 \text{ s}^2}{2} = 41,4 \text{ km}$$

tehát a szennyezőanyag-részecske 61,7 km-t mozgott el nyugatra és 41,4 km-t északra.

IV. fejezet - A cirkuláció és az örvényesség

IV.1. A cirkuláció, az örvényesség és a Bjerknes-féle örvényességi tétel

IV.1.1. A z -rendszerben (x, y, z, t) , és az új $(x_\eta, y_\eta, \eta, t_\eta)$ rendszerben $(x = x_\eta, y = y_\eta, t = t_\eta)$ a sebességek rendre (u, v, w) és $(u_\eta = u, v_\eta = v, w_\eta = \bar{\eta})$. A deriváltak átírása, vagyis a sebesség-transzformáció (lásd az **I.3. fejezetet** is):

$$\begin{aligned}\frac{\partial v_\eta}{\partial x_\eta} &= \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x_\eta} + \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x_\eta}, \\ \frac{\partial u_\eta}{\partial y_\eta} &= \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial y_\eta} + \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y_\eta}.\end{aligned}$$

A fenti egyenleteket tovább alakítva és kihasználva, hogy

$$\frac{\partial x}{\partial x_\eta} = 1, \quad \frac{\partial y}{\partial y_\eta} = 1,$$

a következő adódik:

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{\partial v_\eta}{\partial x_\eta} - \frac{\partial v_\eta}{\partial \eta} \frac{1}{\frac{\partial z}{\partial \eta}} \frac{\partial z}{\partial x_\eta} = \frac{\partial v_\eta}{\partial x_\eta} - \frac{\partial v_\eta}{\partial \eta} \frac{1}{\frac{1}{g} \frac{\partial \phi}{\partial \eta}} \frac{1}{g} \frac{\partial \phi}{\partial x_\eta}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial u_\eta}{\partial y_\eta} - \frac{\partial u_\eta}{\partial \eta} \frac{1}{\frac{\partial z}{\partial \eta}} \frac{\partial z}{\partial y_\eta} = \frac{\partial u_\eta}{\partial y_\eta} - \frac{\partial u_\eta}{\partial \eta} \frac{1}{\frac{\partial \phi}{\partial \eta}} \frac{\partial \phi}{\partial y_\eta}.\end{aligned}$$

Az örvényesség:

$$\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v_\eta}{\partial x_\eta} - \frac{\partial u_\eta}{\partial y_\eta} - \left(\frac{\partial \phi_\eta}{\partial \eta} \right)^{-1} \left(\frac{\partial v_\eta}{\partial \eta} \frac{\partial \phi_\eta}{\partial x_\eta} - \frac{\partial u_\eta}{\partial \eta} \frac{\partial \phi_\eta}{\partial y_\eta} \right),$$

ami vektori alakban kiírva:

$$\zeta = \mathbf{k}(\nabla \times \mathbf{V}_\eta) = \mathbf{k}_\eta (\nabla_\eta \times (\mathbf{V}_\eta)_\eta) - \left(\frac{\partial \phi_\eta}{\partial \eta} \right)^{-1} \left(\nabla_\eta \phi_\eta \times \frac{\partial (\mathbf{V}_\eta)_\eta}{\partial \eta} \right),$$

ahol

$$\zeta_\eta = \frac{\partial v_\eta}{\partial x} - \frac{\partial u_\eta}{\partial y} = \mathbf{k}_\eta \cdot (\nabla_\eta \times (\mathbf{V}_\eta)_\eta)$$

az η -rendszerbeli horizontális örvényesség. A két rendszerben az örvényesség közötti különbség a két rendszerbeli horizontális felület egymáshoz képesti eltéréséből ($\nabla_h \Phi_\eta$) származik, hiszen ami az egyik rendszerben „vízszintes”, az a másikban egy görbült felület.

A horizontális divergencia alakja:

$$D = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u_\eta}{\partial x_\eta} + \frac{\partial v_\eta}{\partial y_\eta} - \left(\frac{\partial \Phi_\eta}{\partial \eta} \right)^{-1} \left(\frac{\partial u_\eta}{\partial \eta} \frac{\partial \phi_\eta}{\partial x_\eta} + \frac{\partial v_\eta}{\partial \eta} \frac{\partial \phi_\eta}{\partial y_\eta} \right),$$

ami vektori alakban felírva:

$$D = \nabla \cdot \mathbf{V}_h = \nabla_\eta \cdot (\mathbf{V}_\eta)_h - \left(\frac{\partial \Phi_\eta}{\partial \eta} \right)^{-1} \left(\nabla_h \Phi_\eta \cdot \frac{\partial (\mathbf{V}_\eta)_h}{\partial \eta} \right).$$

A z-rendszerben felírt örvényesség alakja nyomási koordináta-rendszerben:

$$\zeta = \zeta_p + \frac{g}{\alpha} \left(\nabla_p z \times \frac{\partial \mathbf{V}_p}{\partial p} \right),$$

ahol $\zeta_p = \frac{\partial v_p}{\partial x_p} - \frac{\partial u_p}{\partial y_p}$ az örvényesség értéke a nyomási rendszerben. Itt α a specifikus térfogat. A felírásnál a sztatikai alapegyenletét használtuk.

A horizontális divergencia alakja:

$$D = D_p + \frac{g}{\alpha} \left(\nabla_p z \cdot \frac{\partial (\mathbf{V}_p)_h}{\partial p} \right),$$

ahol

$$D_p = \frac{\partial u_p}{\partial x_p} + \frac{\partial v_p}{\partial y_p}$$

a horizontális divergencia a nyomási rendszerben.

A fentiekhez hasonlóan fejezhető ki a z-rendszerbeli örvényesség és horizontális divergencia a potenciális hőmérsékleti (Θ) koordináta-rendszerben, kihasználva, hogy a sztatika alapegyenlete: $\frac{\partial \Phi}{\partial \Theta} = -\alpha \frac{\partial p}{\partial \Theta} = -RT \frac{\partial \ln p}{\partial \Theta}$.

IV.1.2. A geosztrófikus szélegyenlet alakja potenciális hőmérsékleti rendszerben (adott Θ potenciális hőmérsékleti felületen):

$$0 = -\frac{\partial v}{\partial x_\Theta} + f v_\Theta, \quad 0 = -\frac{\partial v}{\partial y_\Theta} - f u_\Theta,$$

ahol $v = c_p T + \Phi$ a Montgomery-potenciál.

A geosztrófikus örvényesség:

$$\zeta_{\oplus} = \frac{1}{f} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_{\oplus}^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y_{\oplus}^2} \right) - \frac{\beta}{f^2} \frac{\partial v}{\partial y_{\oplus}} = \frac{1}{f} \nabla_{\oplus}^2 v - \frac{\beta}{f^2} \frac{\partial v}{\partial y_{\oplus}},$$

ahol $\beta = \frac{\partial f}{\partial y_{\oplus}} = 2\Omega \frac{\partial \sin \phi}{r_F \partial \phi} = \frac{f}{r_F} \operatorname{ctg} \phi$. A potenciális örvényesség nagyságrendje nagyságkálájú folyamatoknál $\zeta_{\oplus} \sim 10^{-5} \text{ s}^{-1}$. Mivel $f(\phi = 45^\circ) = 10^{-4} \text{ s}^{-1}$, $-\frac{1}{f} \frac{\partial v}{\partial y_{\oplus}} = u_{\oplus} \sim 10 \text{ m s}^{-1}$, továbbá a $\beta \sim 10^{-11} \text{ m}^{-1} \text{ s}^{-1}$, a geosztrófikus örvényesség Coriolis-hatástól függő tagja 10^{-6} s^{-1} nagyságrendű, így az első tag nagyságrendje (a közvetett becslés miatt) 10^{-5} s^{-1} , vagyis egy nagyságrenddel nagyobb, mint a jobb oldal második tagja.

IV.1.3. Az örvényesség definíciója alapján a deriválások elvégzése után:

a) $\zeta = -u_0 y$ és így $\zeta = -4 \text{ s}^{-1}$,

b) $\zeta = v_0 - u_0 = -1 \text{ s}^{-1}$,

c) $\zeta = -k \operatorname{vtg} \alpha \approx -1,76$.

IV.1.4. Az örvényesség alakja: $\zeta = \frac{V_z}{r} + \frac{\partial V_z}{\partial r}$. A deriváltat differenciáhányadosal közelítve, behelyettesítés után: $\zeta = 5 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$.

IV.1.5. A hengerkoordináta-rendszer Lamé-féle együtthatói: $r_x = r_r = 1$, $r_y = r_\phi = r$, $r_z = r_z = 1$. A rotáció vektor általános alakjába

$$\operatorname{rot} V_{\ast} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r_{y\ast} r_{z\ast}} \left[\frac{\partial(w_{\ast} r_{z\ast})}{\partial y_{\ast}} - \frac{\partial(v_{\ast} r_{y\ast})}{\partial z_{\ast}} \right] \\ \frac{1}{r_{x\ast} r_{z\ast}} \left[\frac{\partial(u_{\ast} r_{z\ast})}{\partial z_{\ast}} - \frac{\partial(w_{\ast} r_{x\ast})}{\partial x_{\ast}} \right] \\ \frac{1}{r_{x\ast} r_{y\ast}} \left[\frac{\partial(v_{\ast} r_{y\ast})}{\partial x_{\ast}} - \frac{\partial(u_{\ast} r_{x\ast})}{\partial y_{\ast}} \right] \end{pmatrix}$$

történő behelyettesítés után kapjuk a megoldást.

IV.1.6. Jelöljük az inercia-rendszert (az abszolút koordináta-rendszert) $_a$ indexszel! Az elmozduló légrész abszolút rendszerbeli sebessége:

$$V_a = V + \Omega \times r,$$

ahol r a forgástengelytől mért távolság, az adott pont helyvektora. Az abszolút koordináta-rendszerbeli rotáció:

$$\operatorname{rot} V_a = \nabla \times (V + \Omega \times r) = \nabla \times V + \nabla \times (\Omega \times r).$$

A Hamilton-féle differenciál-operátor kettős tulajdonságát kihasználva:

$$\nabla \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) = \nabla \times \left(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} \right) + \nabla \times \left(\mathbf{r} \times \boldsymbol{\Omega} \right) = \left[\boldsymbol{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{r}) - (\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla) \mathbf{r} \right] + \left[(\mathbf{r} \cdot \nabla) \boldsymbol{\Omega} - \mathbf{r} (\nabla \cdot \boldsymbol{\Omega}) \right],$$

ahol a $\Downarrow$ jelöli, hogy a differenciál-operátor éppen melyik tagra hat. Kihasználva, hogy

$$\nabla \cdot \mathbf{r} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) x + \left(\frac{\partial}{\partial y} \right) y + \left(\frac{\partial}{\partial z} \right) z = 3, \quad \nabla \cdot \boldsymbol{\Omega} = 0, \quad (\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla) \mathbf{r} = \boldsymbol{\Omega}$$

kapjuk az eredményt:

$$\text{rot} \mathbf{V}_a = \text{rot} \mathbf{V} + 2\boldsymbol{\Omega}$$

Az abszolút koordináta-rendszerbeli sebesség rotációja tehát két tag összegeként írható fel. Ezek a relatív rendszerbeli rotáció, valamint a koordináta-rendszer forgásából (a mi esetünkben természetesen a Föld forgásából) származó, ún. planetáris örvényesség. E koordináta-rendszerben az invariáns mennyiség természetesen az abszolút örvényesség.

A megoldásból következik, hogy az $\boldsymbol{\Omega}$ szögsebességgel forgó rendszer rotációja $2\boldsymbol{\Omega}$.

IV.1.7. A $\mathbf{V}$ örvény rotációja a forgástengelyen kívül mindenütt nulla, hiszen:

$$\zeta = (\text{rot} \mathbf{V})_z = \frac{1}{r} \frac{\partial(r v_\phi)}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \left(r \frac{K}{r} \right)}{\partial r} = 0.$$

(Lásd a Rankine-örvényre vonatkozó **II.2.19. feladatot** is.) A forgástengelyen az örvénynek szingularitása van, s az örvényesség nem lesz nulla, hiszen az örvénytengely szükségszerűen forog. Az örvényesség végtelenné válik.

$$C = \oint_{\mathcal{S}} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{s}$$

IV.1.8. A sebesség merőleges az a-b és a c-d szakaszra (lásd *IV.1.1. ábrát*). Így a cirkuláció egyenlete alapján az integrál értéke a b–c és a d–a szakaszban tér el a nullától. Tudva, hogy az óramutató járásával ellentétes körüljárás a pozitív:

$$C_{b \rightarrow c} = \frac{K}{r_2} \phi_0 r_2 = K \phi_0, \quad C_{d \rightarrow a} = -\frac{K}{r_1} \phi_0 r_1 = -K \phi_0,$$

a cirkuláció értéke nulla.

IV.1.9. A divergencia alakja a hengerkoordináta-rendszerben:

$$\text{div} \mathbf{V} = \frac{1}{r} \frac{\partial(r v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial v_z}{\partial z}.$$

Elvégezve a deriválást:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(r v_r)}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{2s}{r_0^2} \frac{\partial r^2}{\partial r} = -\frac{4s}{r_0^2}, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} = 0, \quad \frac{\partial v_z}{\partial z} = \frac{4s}{r_0^2}.$$

A sebességmező divergenciája nulla.

A hengerkoordináta-rendszerbeli sebességmező rotációjának (lásd **IV.1.5. feladatot** is) csak z-komponense lesz.

Egyedül a $\frac{\partial(rv_\phi)}{\partial r}$ derivált különbözik nullától:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(rv_\phi)}{\partial r} = -C \frac{\partial \left[1 - \exp\left(-\frac{r^2}{r_0^2}\right) \right]}{\partial r} = -\frac{2C}{r_0^2} \exp\left(-\frac{r^2}{r_0^2}\right).$$

IV.1.10. Kiindulási egyenletünk: $\frac{dC}{dt} = -\oint_S \frac{dp}{\rho}$. Kihasználva, hogy

$$\frac{dp}{\rho} = \frac{p}{\rho} \frac{dp}{p} = RT \cdot d \ln p$$

kapjuk az első bizonyításra váró összefüggést:

$$\frac{dC}{dt} = -R \oint_S T d(\ln p)$$

Tudva, hogy

$$d(\ln p) = \nabla(\ln p) \cdot d\mathbf{s},$$

majd erre alkalmazva Stokes-tételt $\left(\oint_S \mathbf{V} \cdot d\mathbf{s} = \iint_A (\nabla \times \mathbf{V}) \cdot d\mathbf{A} \right)$, kapjuk a második bizonyításra váró összefüggést

$$\frac{dC}{dt} = -R \oint_S T d(\ln p) = -R \oint_S T \nabla(\ln p) \cdot d\mathbf{s} = -R \iint_A (\nabla T \times \nabla(\ln p)) \cdot d\mathbf{A}.$$

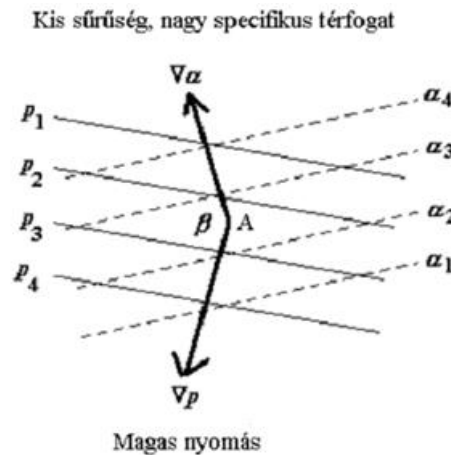
Itt kihasználtuk, hogy

$$\nabla \times [T \nabla(\ln p)] = \nabla T \times \nabla(\ln p) + T \nabla \times \nabla(\ln p) = \nabla T \times \nabla(\ln p),$$

hiszen

$$\nabla \times \nabla \mathbf{V} = 0.$$

IV.1.11. A cirkulációs gyorsulás negatív lesz, a *MIV.1.1. ábrán* vázolt esetben: $-\oint_S \frac{dp}{\rho} < 0$.



MIV.1.1. ábra. A szolenoidális tag keltette cirkuláció. A cirkuláció az óramutató járásával megegyező (anticiklonális). A cirkuláció irányában a nyomási gradiens és a sűrűségi gradiens egymással 180° -nál kisebb szöget ($\beta < 180^\circ$) zár be.

IV.1.12. Tekintsük a ciklon területének az Egyenlítő síkjára eső vetületét! Ennek az időbeli megváltozását kell vizsgálnunk.

$$\frac{dC}{dt} = -2\Omega \frac{dF}{dt} \approx -2\Omega \frac{\Delta F}{\Delta t}$$

A ϕ földrajzi szélességi körön levő A területű ciklon egyenlítői síkra eső vetülete jó közelítéssel $A \sin \phi$.

$$a) \frac{dC}{dt} \approx -2\Omega \frac{\Delta F}{\Delta t} = -2 \cdot 7,292 \cdot 10^{-5} \cdot \frac{10^6 (\sin 50^\circ - \sin 45^\circ)}{18 \cdot 3600} = -1,32 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}$$

Gyengült a ciklonális cirkuláció.

b) Elsőként azt az esetet vizsgáljuk, amikor az elmozdulás során nőtt a ciklon alapterülete, vagyis horizontális divergenciát tapasztalunk.

$$\frac{dC}{dt} \approx -2\Omega \frac{\Delta F}{\Delta t} = -2 \cdot 7,292 \cdot 10^{-5} \cdot \frac{10^6 (1,1 \cdot \sin 50^\circ - \sin 45^\circ)}{18 \cdot 3600} = -3,05 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}$$

Tovább csökkent a ciklonra jellemző cirkuláció. A divergencia (ami csökkenti a ciklonális cirkulációt) tovább erősítette az északra történő ciklonális mozgás cirkulációt gyengítő hatását.

Utolsóként azt az esetet elemezzük, amikor az elmozdulás során – a horizontális konvergencia hatására – csökkent a ciklon felülete, ami növeli a cirkulációt. A két hatás most ellentétes lesz.

$$\frac{dC}{dt} \approx -2\Omega \frac{\Delta F}{\Delta t} = -2 \cdot 7,292 \cdot 10^{-5} \cdot \frac{10^6 (0,9 \cdot \sin 50^\circ - \sin 45^\circ)}{18 \cdot 3600} = 3,96 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}$$

A konvergencia ciklonális cirkulációt generáló hatása meghaladja az északra tolódás gyengítő hatását. Összességében nő a ciklonális területet körülvevő zárt görbe mentén számított cirkuláció. Anticiklon esetén fordított változásokat tapasztalunk. Ha egy anticiklon északra sodródik, akkor erősödik a cirkuláció (nagyobb negatív érték), szintén erősíti az anticiklont a horizontális divergencia.

IV.1.13. A cirkuláció megváltozása a kezdeti $0 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ értékről

$$\Delta C = -2 \cdot \Omega \Delta F = -2 \cdot \Omega \cdot r^2 \pi \cdot [\sin(\pi/2) - \sin(0)] = -2 \cdot 7,292 \cdot 10^{-5} \cdot 3,14 \cdot (10^5)^2 = 4,58 \cdot 10^6 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$$

Gondolatban a pólusra vitt légtest sebessége $r = 100 \text{ km}$ -re a középpontjától:

$$v_\theta = \Delta C / (2r\pi) = -\Omega r \approx -7 \text{ m s}^{-1}$$

A légtestre jellemző örvényesség: $\zeta = \Delta C / F = -2\Omega = 1,458 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$

A légtestnek anticiklonális forgása lesz, vagyis ellentétes a Föld forgásával.

IV.1.14. A sűrűlási erő iránya – első közelítésként – ellentétes a sebességével. A sűrűlási erő hatására gyengül az anticiklon, vagyis a cirkuláció időbeli növekedését detektáljuk.

$$\frac{dC}{dt} = \oint_S \mathbf{F}_s \cdot d\mathbf{s} = 4 \cdot 10^{-4} \cdot 2 \cdot 5 \cdot 10^5 \cdot 3,14 = 1256 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}$$

Az örvényesség változása: $\frac{d\zeta}{dt} = \frac{1}{A} \frac{dC}{dt} = 1,6 \cdot 10^{-9} \text{ s}^{-2}$

IV.1.15. A cirkuláció teljes időbeli megváltozása:

$$\frac{dC}{dt} = \oint_S \frac{dV_h}{dt} \cdot d\mathbf{s} = - \oint_S \alpha \nabla p \cdot d\mathbf{s} - 2 \oint_S (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V}_h) \cdot d\mathbf{s} + \oint_S \mathbf{g} \cdot d\mathbf{s}$$

A Stokes-tétel alapján a vonal menti integrálból áttérünk a felületi integrálokra az egyenlet jobb oldalán. Kihasználjuk a sztatika alapegyenletét. Horizontális síkban dolgozunk.

$$\frac{dC}{dt} = - \iint_F (\nabla_h \alpha \times \nabla_h p) \cdot d\mathbf{F} - 2 \oint_S (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V}_h) \cdot d\mathbf{s}$$

Alkalmazzuk a $-2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V}_h = -\mathbf{k} \times \nabla_h \mathcal{V}_h$ kifejezést, a Stokes-tétel felhasználásával:

$$\frac{dC}{dt} = - \iint_F (\nabla_h \alpha \times \nabla_h p) \cdot d\mathbf{F} - \iint_F [\nabla_h \times (\mathbf{k} \times \mathcal{V}_h)] \cdot d\mathbf{F}$$

A levezetés során az (x, y) síkban vizsgálódunk, így $d\mathbf{F} = \mathbf{k} dF$ és kihasználva, hogy

$$\mathbf{k} \cdot [\nabla_h \times (\mathbf{k} \times \mathcal{V}_h)] = \nabla_h \cdot (\mathcal{V}_h) = f \nabla_h \cdot \mathbf{V}_h + \beta v$$

kapjuk a keresett összefüggést.

$$\frac{dC_z}{dt} \equiv \frac{dC}{dt} = - \iint_F \mathbf{k} \cdot (\nabla_h \alpha \times \nabla_h p) dF - \iint_F f \nabla_h \cdot \mathbf{V}_h dF - \iint_F \beta v dF$$

I.
II.
III.
IV.

Az egyenlet baloldalán az (x, y) síkban vizsgált S görbe menti cirkuláció teljes időbeli változása szerepel (I), ami függ mind a görbe, mind a sebességi mező időbeli változásától. A jobb oldal első tagja a már jól ismert szolenoidális tag (II), ami barotróp légkörben eltűnik. A következő tag (III) a divergencia horizontális cirkulációt generáló hatását

adja meg. Konvergencia a ciklonális, divergencia az anticiklonális fejlődést erősíti. A jobboldal utolsó tagja (IV) a béta hatást (a Coriolis-paraméter szélességi körök szerinti változásából fakadóan) adja meg. A ciklon erősödik, ha dél felé mozdul el, illetve az anticiklon erősödik, ha északra sodródik.

IV.1.16. A 30° szélességi körön vagyunk. Itt $\beta = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2\Omega \cos \phi}{r_F} = 1,98 \cdot 10^{-11} \text{ m}^{-1} \text{ s}^{-1}$. A légtest felülete: $\Delta F = r^2 \pi = 3,14 \cdot 9 \cdot 10^{10} = 2,83 \cdot 10^{11} \text{ m}^2$.

a) A cirkuláció időbeli változása: $\frac{dC_z}{dt} = -\iint_F \beta v dF \approx -\beta v \Delta F = -28 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}$.

b) A cirkuláció értéke 24 óra múlva: $C_z(24 \text{ h}) = C_z(0 \text{ h}) - (\beta v \Delta F) \Delta t = 2,42 \cdot 10^6 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$.

c) A tangenciális sebesség értéke: $v_\phi = C(24 \text{ h}) / (2r\pi) = -\beta v \Delta t r / 2 \approx -1,3 \text{ m s}^{-1}$.

IV.2. Az örvényességi és a divergencia-egyenlet, a potenciális örvényesség és szerepe a légköri folyamatok leírásában

IV.2.1. A teljes deriváltat komponensenként (lokális, advektív és konvektív) kiírva, majd elvégezve a deriválást, s az így kapott 2×7 tag összevonása után:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{dv}{dt} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{du}{dt} \right) &= \frac{d\zeta}{dt} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} = \\ &= \frac{d\zeta}{dt} + \frac{\partial u}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial v}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{d\zeta}{dt} + D\zeta + \nabla_w \times \frac{\partial \mathbf{V}_h}{\partial z}, \end{aligned}$$

ahol $\mathbf{V}_h = (u, v)$.

IV.2.2. Induljunk ki a nyomási rendszerben felírt első két horizontális mozgásegyenletből és deriváljuk őket rendre y , illetve x szerint:

$$\begin{aligned} \frac{du_p}{dt} &= \frac{\partial u_p}{\partial t} + u_p \frac{\partial u_p}{\partial x} + v_p \frac{\partial u_p}{\partial y} + \omega \frac{\partial u_p}{\partial p} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} + f v_p + F_{sx}, \quad \left(-\frac{\partial}{\partial y} \right), \\ \frac{dv_p}{dt} &= \frac{\partial v_p}{\partial t} + u_p \frac{\partial v_p}{\partial x} + v_p \frac{\partial v_p}{\partial y} + \omega \frac{\partial v_p}{\partial p} = -\frac{\partial \Phi}{\partial y} - f u_p + F_{sy}, \quad \left(+\frac{\partial}{\partial x} \right). \end{aligned}$$

Az örvényességi egyenletet a deriváltak összeadásával kapjuk:

$$\begin{aligned} \frac{d(\zeta_p + f)}{dt} &= \frac{\partial(\zeta_p + f)}{\partial t} + u_p \frac{\partial(\zeta_p + f)}{\partial x} + v_p \frac{\partial(\zeta_p + f)}{\partial y} + \omega \frac{\partial(\zeta_p + f)}{\partial p} = \\ &= -(f + \zeta_p) D_p - \left[\frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial v_p}{\partial p} - \frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{\partial u_p}{\partial p} \right] + \left[\frac{\partial F_{sy}}{\partial x} - \frac{\partial F_{sx}}{\partial y} \right]. \end{aligned}$$

Itt $\zeta_p = \frac{\partial v_p}{\partial y_p} - \frac{\partial u_p}{\partial x_p}$, $D_p = \frac{\partial u_p}{\partial x_p} + \frac{\partial v_p}{\partial y_p}$, $\omega_p = \frac{dp}{dt}$ a p -rendszerbeli örvényesség, horizontális divergencia, illetve vertikális sebesség.

A p -rendszerbeli örvényességi egyenlet implicit módon tartalmazza a z -rendszerbeli szolenoidális tag hatását. Ez érthetővé válik, ha arra gondolunk, hogy más a horizontális felület helyzete egy külső szemlélő számára a p -rendszerben mint a z -rendszerben. Más a két rendszerben a horizontális divergencia és az örvényesség alakja:

$$\zeta_p = \zeta + \frac{1}{\rho g} \left[\left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)_{x,y,t} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)_{y,z,t} - \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)_{x,y,t} \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right)_{x,z,t} \right]$$

Jól látható az egyenlet jobb oldalak második tagjában a z -rendszerbeli nyomási gradiens és a vertikális szélnyírás szerepe. A két rendszerben felírt örvényesség eltérő értékében van elrejtve a szolenoidális tag. Másképpen is

gondolkodhatunk. A cirkuláció időbeli változásánál (Bjerknes elmélete) a szolenoidális tag alakja: $-\oint_S \frac{dp}{\rho}$. Ha izobár felületen választjuk az S zárt görbét, akkor az integrál értéke nulla, vagyis ez a felület „úgy viselkedik”, mintha barotróp légkörben lennénk. (Ha a cirkuláció nem változik, akkor az örvényesség sem.)

Potenciális hőmérsékleti (Θ) rendszerben a nyomási gradiens erő szerepét a Montgomery-potenciál ($\nu = c_p T + \Phi$) veszi át. (Raymond B. Montgomery (1928–1988) oceanográfus és meteorológus, aki az elsők között foglalkozott izentróp analízissel.) Izentróp felület (Θ_0) mentén a nyomás és a hőmérséklet, illetve a nyomás és a sűrűség között kölcsönösen egyértelmű függvénykapcsolat van.

$$p = p_0 \left(\frac{\Theta_0}{T} \right)^{-\frac{c_p}{R}},$$

ahol $p_0 = 1000 \text{ hPa}$. Ez a felület is úgy viselkedik mintha barotróp légkörben lennénk a $\frac{dp}{\rho}$ kifejezés itt is teljes derivált.

A Θ -rendszer örvényességi egyenlete formailag hasonló a p -rendszerben felírthoz:

$$\begin{aligned} \frac{d(\zeta_\Theta + f)}{dt} &= \frac{\partial(\zeta_\Theta + f)}{\partial t} + u_\Theta \frac{\partial(\zeta_\Theta + f)}{\partial x} + v_\Theta \frac{\partial(\zeta_\Theta + f)}{\partial y} + w_\Theta \frac{\partial(\zeta_\Theta + f)}{\partial \Theta} = \\ &= -(f + \zeta_\Theta) D_\Theta - \left[\frac{\partial w_\Theta}{\partial x} \frac{\partial v_\Theta}{\partial p} - \frac{\partial w_\Theta}{\partial y} \frac{\partial u_\Theta}{\partial \Theta} \right] + \left[\frac{\partial F_{y_\Theta}}{\partial x} - \frac{\partial F_{x_\Theta}}{\partial y} \right]. \end{aligned}$$

Itt $\zeta_\Theta = \frac{\partial v_\Theta}{\partial y_\Theta} - \frac{\partial u_\Theta}{\partial x_\Theta}$, $D_\Theta = \frac{\partial u_\Theta}{\partial x_\Theta} + \frac{\partial v_\Theta}{\partial y_\Theta}$, $w_\Theta = \frac{d\Theta}{dt}$ rendre a Θ -rendszerbeli örvényesség, horizontális divergencia és vertikális sebesség. Megjegyezzük, hogy száraz adiabatikus folyamatok során a vertikális sebesség nulla, a légréteg entrópiája, s így potenciális hőmérséklete sem változik.

IV.2.3. Kihasználva, hogy

$$(\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = \frac{1}{2} \nabla |\mathbf{V}|^2 + (\nabla \times \mathbf{V}) \times \mathbf{V},$$

a mozgásegyenlet új alakja:

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{2}\boldsymbol{\Omega} + \text{rot} \mathbf{V}) \times \mathbf{V} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nabla \left(\Phi - \frac{|\mathbf{V}|^2}{2} \right) + \frac{\mathbf{F}_z}{\rho}$$

A rotáció időbeli megváltozásának leírásához szorozzuk meg a mozgásegyenletet balról vektoriálisan a nabla operátorral, majd a szolenoidális tag átalakítása után:

$$\frac{\partial \text{rot} \mathbf{V}}{\partial t} + \nabla \times [(\mathbf{2}\boldsymbol{\Omega} + \text{rot} \mathbf{V}) \times \mathbf{V}] = \frac{\nabla \rho \times \nabla p}{\rho^2} + \nabla \times \left(\frac{\mathbf{F}_z}{\rho} \right)$$

Tudva a vektoriális hármasszorzat felbontását és a nabla operátor kettős tulajdonságát felírhatjuk az abszolút örvényesség $\text{rot} \mathbf{V}_a = \mathbf{2}\boldsymbol{\Omega} + \text{rot} \mathbf{V}$ teljes időbeli változását:

$$\frac{d \text{rot} \mathbf{V}_a}{dt} = -\text{rot} \mathbf{V}_a \text{div} \mathbf{V} + (\text{rot} \mathbf{V}_a \cdot \nabla) \mathbf{V} + \frac{\nabla \rho \times \nabla p}{\rho^2} + \nabla \times \left(\frac{\mathbf{F}_z}{\rho} \right)$$

Itt kihasználtuk a planetáris örvényesség állandóságát, vagyis a $\frac{d \text{rot} \mathbf{V}_a}{dt} = \frac{d \text{rot} \mathbf{V}}{dt}$ egyenlőséget.

IV.2.4. A teljes divergencia-egyenletet úgy kapjuk, hogy a mozgásegyenletet balról, skalárisan megszorozzuk a nabla operátorral.

$$\frac{\partial \nabla \cdot \mathbf{V}}{\partial t} + \nabla \cdot [(\mathbf{2}\boldsymbol{\Omega} + \text{rot} \mathbf{V}) \times \mathbf{V}] = -\nabla \cdot \left(\frac{\nabla p}{\rho} \right) - \nabla^2 \left(\frac{|\mathbf{V}|^2}{2} \right) + \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{F}_z}{\rho} \right),$$

ami a ∇ -operátor kettős tulajdonsága, illetve a hármasszorzat szabályai alapján tovább alakítható. Szintén két tagra bontható a szolenoidális tag is (jobb oldal első tagja)

$$\frac{d \text{div} \mathbf{V}}{dt} = (\mathbf{2}\boldsymbol{\Omega} + \text{rot} \mathbf{V}) \cdot \text{rot} \mathbf{V} - (\text{div} \mathbf{V})^2 + \frac{1}{\rho^2} \nabla \rho \cdot \nabla p - \frac{1}{\rho} \nabla^2 p + \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{F}_z}{\rho} \right)$$

A felírásnál kihasználtuk, hogy a planetáris rotáció konstans $\mathbf{2}\boldsymbol{\Omega}$, így $-\mathbf{V} \cdot (\nabla \times \mathbf{2}\boldsymbol{\Omega}) = 0$. A horizontális örvényesség változásában természetesen szerepel a β -tag.

IV.2.5. Végezzük el a divergencia egyenlet nagyságrendi analízisét nagyskálájú folyamatokra!

$$\begin{aligned} \frac{dD}{dt} = \frac{\partial D}{\partial t} + u \frac{\partial D}{\partial x} + v \frac{\partial D}{\partial y} + w \frac{\partial D}{\partial z} = -u \frac{\partial f}{\partial y} + f \zeta - D^2 - \left(\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} \right) - \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \alpha}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial y} \right) + \\ 10^{-11} \quad 10^{-11} \quad 10^{-11} \quad 10^{-11} \quad 10^{-12} \quad 10^{-11} \quad 10^{-9} \quad 10^{-12} \quad 10^{-11} \quad 10^{-11} \quad [s^{-2}] \\ + \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} \right) - \alpha \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \right) + 2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \leq 10^{-11} \quad 10^{-9} \quad 10^{-10} \quad [s^{-2}] \end{aligned}$$

Nézzük pl. a $-\alpha \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \right)$ tagot! Ennek véges különbséges közelítésénél az egyes mennyiségek jellegzetes nagyságrendje: $\alpha = 1 \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1}$, $\Delta x = \Delta y = 10^6 \text{ m}$, $\Delta p = 10^3 \text{ Pa}$, $\Delta(\Delta p) = 10^3 \text{ Pa}$, így a nyomás Laplace-operátorától függő (örvényességi) tag nagyságrendje 10^{-9} s^{-2} .

A 10^{-10} s^{-2} -nál kisebb tagok elhanyagolása után kapjuk az – általánosan alkalmazott – ún. balansz egyenletet, ami azt mutatja, hogy a légköri folyamatokban első közelítésként elhanyagolható a horizontális divergencia időbeli változása.

$$\alpha \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \right) - f \zeta + \beta u - 2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \right) = 0$$

A horizontális szélnyírásból származó tag a Coriolis-paraméter szélességi körök szerinti változásával (β -tag) azonos nagyságrendű (10^{-10} s^{-2}), míg a geosztrófikus örvényesség definíciós egyenletéből származó első két tag (10^{-9} s^{-2}) nagyságrendű, vagyis a fenti diagnosztikai egyenlet még tovább egyszerűsíthető.

A diagnosztikai egyenletek alkalmazása mindig valamilyen „igazodást” jelent a modellekben. A balansz egyenletben például a nyomási mező igazodik a horizontális áramlási és örvényességi mezőhöz. Az

$$\alpha \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \right) - f \zeta = 0$$

egyszerűsített balansz egyenlet esetén pedig – ami nem más, mint a geosztrófikus örvényesség definíciós egyenlete – a nyomási mező igazodik – a geosztrófikus feltételezés mellett – az örvényességi mezőhöz. Ez az ún. kvázigeosztrófikus közelítés. Minden időpillanatban teljesül a geosztrófia.

IV.2.6. A skalár- és a vektorszorzatok felhasználásával a szolenoidális tag alakja az örvényességi egyenletben:

$$-\left[\frac{\partial \alpha}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial \alpha}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial x} \right] = \nabla_{\vec{h}} p \times \nabla_{\vec{h}} \alpha = \cos \alpha \cdot |\nabla_{\vec{h}} p| \cdot |\nabla_{\vec{h}} \alpha| > 0$$

a divergencia egyenletben pedig

$$-\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \alpha}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial y} \right) = -\nabla_{\vec{h}} p \cdot \nabla_{\vec{h}} \alpha = -\sin \alpha \cdot |\nabla_{\vec{h}} p| \cdot |\nabla_{\vec{h}} \alpha| < 0$$

A divergencia és az örvényesség generálódásának az aránya:

$$-\frac{\sin 60^\circ}{\cos 60^\circ} = -\tan 60^\circ = -1,73$$

IV.2.7. A nyírási csavarási tag alakja az örvényességi egyenletben:

$$-\left[\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} \right] = \frac{\partial \mathbf{V}_{\vec{h}}}{\partial z} \times \nabla_{\vec{h}} w$$

a divergencia egyenletben

$$-\left(\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} \right) = -\frac{\partial \mathbf{V}_{\vec{h}}}{\partial z} \cdot \nabla_{\vec{h}} w$$

Ha a vertikális szélnyírás (baroklinitás) és a vertikális szélsébség horizontális gradiense (a legnagyobb változás iránya) egymással párhuzamos, akkor örvényesség nem keletkezik, viszont maximális abszolút értékű a divergencia változása. Ha a két vektor egymásra merőleges, akkor fordított a helyzet. Ha a két vektor által bezárt szög 45° -os akkor a két hatás megegyezik.

IV.2.8. A divergencia és az örvényesség hatása a divergencia egyenletben a $-(f+\zeta)D$ tagban jelenik meg. Ha az abszolút örvényesség $(f+\zeta)$ pozitív, akkor esetünkben $D > 0$, negatív örvényesség keletkezik $\frac{d\zeta}{dt} < 0$, míg ha az abszolút örvényesség negatív, akkor pozitív az örvényesség teljes időbeli változása.

A divergencia egyenletben ezt a hatást a $(f\zeta - D^2)$ tag írja le. Esetünkben a divergencia mező (előjeltől függetlenül) konvergenciát generál, hasonlóan a negatív (anticiklonális) örvényességhez.

IV.2.9. A β -hatást a Coriolis-paraméter horizontális gradiense $(\nabla_h f)$ és a horizontális sebesség (V_h) által bezárt szög határozza meg. Az örvényességi egyenletben, kihasználva, hogy $\frac{df}{dt} = v \frac{\partial f}{\partial y}$, ez a tag $-v \frac{\partial f}{\partial y} = -V_h \cdot \nabla_h f$, míg a divergencia egyenletben $-u \frac{\partial f}{\partial y} = -V_h \times \nabla_h f$.

Nyugati áramlás esetén $(u > 0, v = 0)$ a konvergencia mező fejlődésére, míg északi áramlás esetén $(u = 0, v > 0)$ az anticiklonális örvényesség $\frac{d\zeta}{dt} < 0$ erősödésére számíthatunk. Ez érthető, hiszen északra haladva nő a vizsgált légtömeg egyenlítői vetülete, s így csökken a cirkulációja, ami az örvényesség csökkenését jelenti változatlan felület esetén (lásd a Bjerknes-féle cirkulációs elméletet).

IV.2.10. A súrlódási erő $(F_s = (F_{sx}, 0), F_{sx} < 0)$ örvényesség keltő hatását a $\left[\frac{\partial F_{sy}}{\partial x} - \frac{\partial F_{sx}}{\partial y} \right] = \nabla \times F_s$ tag írja le. Itt a $\frac{\partial F_{sx}}{\partial y} > 0$ súrlódási erő negatív örvényességet generál, hiszen a feladat szerint $\frac{\partial F_{sx}}{\partial y} > 0$. A divergencia egyenletben a súrlódási tag: $+\left(\frac{\partial F_{sx}}{\partial x} + \frac{\partial F_{sy}}{\partial y} \right) = \nabla \cdot F_s$. Mivel $F_{sx} = F_{sx}(y)$, ezért a súrlódási erő itt nem vesz részt a divergencia mező fejlődésében.

IV.2.11. Az örvényességi egyenlet felírásához deriváljuk az x irányú mozgásegyenletet z , a z irányú mozgásegyenletet pedig x szerint, majd vonjuk ki egymásból a két egyenletet!

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + f_v, \quad \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g, \quad \left(-\frac{\partial}{\partial x} \right)$$

Az örvényvektor y komponense (η) :

$$\eta = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x},$$

az (x, z) sík mozgásaiban ugyanazt a szerepet játssza mint a ζ örvényesség az (x, y) síkéiban. Elvégezve a deriválást a mozgásegyenletekben, az összevonások után megkapjuk az örvényességi egyenlet y komponensét:

$$\frac{d\eta}{dt} = -\eta \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) - \left(\frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial z} \right) + f \frac{\partial v}{\partial z}.$$

Kihasználva, hogy a szolenoidális tag átírható a

$$\frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial z} \right) = \frac{1}{\rho T} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\partial T}{\partial z} \frac{\partial p}{\partial x} \right)$$

alakba, s alkalmazva a termikus szélegyenletet:

$$f \frac{\partial v}{\partial z} \approx f \frac{\partial v_\xi}{\partial z} = \frac{R}{p} \left(\frac{\partial T}{\partial z} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial z} \right) = \frac{R}{p} (\nabla T \times \nabla p)_{xz}$$

az örvényességi egyenlet leegyszerűsödik, a jobboldal utolsó két tagja „kieszt” egymást.

IV.2.12. Az abszolút rotáció ($\text{rot} \mathbf{V}_a = \text{rot} \mathbf{V} + 2\boldsymbol{\Omega}$) időbeli változását leíró egyenletből

$$\frac{d \text{rot} \mathbf{V}_a}{dt} = -\text{rot} \mathbf{V}_a \text{div} \mathbf{V} + (\text{rot} \mathbf{V}_a \cdot \nabla) \mathbf{V} + \frac{\nabla \rho \times \nabla p}{\rho^2} + \nabla \times \left(\frac{\mathbf{F}_z}{\rho} \right).$$

A kontinuitási egyenlet felhasználásával

$$-\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = \text{div} \mathbf{V},$$

kiküszöbölhetjük a $\text{div} \mathbf{V}$ divergenciát. Egyszerű átalakítások után:

$$\frac{d \left(\frac{\text{rot} \mathbf{V}_a}{\rho} \right)}{dt} = \left(\frac{\mathbf{V}}{\rho} \cdot \nabla \right) \mathbf{V} + \frac{\nabla \rho \times \nabla p}{\rho^3} + \frac{1}{\rho} \nabla \times \left(\frac{\mathbf{F}_z}{\rho} \right).$$

Ezt az egyenletet kombináljuk az adott (λ) skalárra vonatkozó megmaradási egyenlettel $\frac{d\lambda}{dt} = \psi$. Kihasználva,

hogy $\mathbf{e} \frac{d\nabla \lambda}{dt} = (\mathbf{e} \cdot \nabla) \frac{d\lambda}{dt} - [(\mathbf{e} \cdot \nabla) \mathbf{V}] \cdot \nabla \lambda$, ahol $\mathbf{e}$ tetszőleges vektor már felírhatjuk a skalár megmaradási egyenletet:

$$\mathbf{e} \frac{d\nabla \lambda}{dt} = (\mathbf{e} \cdot \nabla) \psi - [(\mathbf{e} \cdot \nabla) \mathbf{V}] \cdot \nabla \lambda.$$

Az (1) és (2) egyenlet kombinálásával: az (1) egyenletet megszorozva $\nabla \lambda$ értékkel, illetve a (2) egyenletben

$\mathbf{e} = \frac{\text{rot} \mathbf{V}_a}{\rho}$ helyettesítést alkalmazva, majd a két egyenletet összeadva a potenciális örvényesség teljes időbeli változására kapunk egyenletet, hiszen

$$\frac{\text{rot} V_a}{\rho} \cdot \frac{d\nabla \lambda}{dt} + \nabla \lambda \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\text{rot} V_a}{\rho} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\text{rot} V_a}{\rho} \cdot \nabla \lambda \right)$$

A két egyenlet összeadása és azonos átalakítások után:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\text{rot} V_a}{\rho} \cdot \nabla \lambda \right) = \frac{\text{rot} V_a}{\rho} \cdot \nabla \Psi + \nabla \lambda \cdot \left(\frac{\nabla \rho \times \nabla p}{\rho^3} \right) + \frac{\nabla \lambda}{\rho} \cdot \left(\nabla \times \frac{\mathbf{F}_z}{\rho} \right)$$

A teljes potenciális örvényesség általános alakja tehát

$$PV = \frac{\text{rot} V_a}{\rho} \cdot \nabla \lambda$$

Ez a skalár mennyiség, egy-egy légrészre jellemző. Alkalmazása a korszerű dinamikus meteorológiában egyre elterjedtebb a nagyskálájú nem-disszipatív (vagyis nem sűrűdásos) rendszerek dinamikai folyamatainak a leírásában.

IV.2.13. Ahhoz, hogy a potenciális örvényesség konzervatív tulajdonság legyen, feltételezzük, hogy

i) λ is konzervatív mennyiség, vagyis $\Psi = 0$,

ii) elhanyagoljuk a sűrűdési erő hatását: $\mathbf{F} = 0$,

iii) barotróp közeg feltételezésével élünk, ($\nabla \rho \times \nabla p = 0$), vagy, feltesszük, hogy a λ konzervatív mennyiség kifejezhető a nyomás és a sűrűség függvényeként:

$$\nabla \lambda = \frac{\partial \lambda}{\partial p} \nabla p + \frac{\partial \lambda}{\partial \rho} \nabla \rho$$

(λ legyen pl. a potenciális hőmérséklet). Ez utóbbi feltétel esetén a közegnek nem kell barotrópnak lennie.

IV.2.14. A potenciális örvényesség megmaradása szerint a forgó mozgást végző légrészben a vizsgált konzervatív

mennyiség gradienseinek ($\nabla \lambda$) megváltozása és $\frac{\text{rot} V_a}{\rho}$ megváltozása közötti fordított arányosság áll fenn. Az elmozduló légtest (a λ és $\lambda + \delta \lambda$ izofelületek között) abszolút rotációjának (λ) gradiense irányába eső összetevője ($\mathbf{n}$) állandó. Megjegyezzük, hogy itt az abszolút rotáció, a légtest tömege és a λ passzív skalár, mint konzervatív (invariáns) mennyiség szerepel.

IV.2.15. A 4.2.3. ábra értelmezéséhez a potenciális örvényesség Ertel-féle alakját használjuk:

$$PV = \frac{\zeta_\Theta + f}{\left(\frac{\partial p}{\partial \Theta} \right)} = \text{állandó}$$

A sűrűség állandóságával számolunk. A sztatikai stabilitás a potenciális hőmérséklet vertikális koordináta (itt a

nyomás) irányú változásától függ. Alakja Götz és Rákóczi (1981) alapján: $\sigma = -\frac{\alpha}{\Theta} \frac{\partial \Theta}{\partial p}$, s így

$$PV = -(\sigma \Theta \rho) \cdot (\zeta_\Theta + f) = \text{állandó}$$

Stabilis légkörben $\frac{\partial \Theta}{\partial p} < 0$, s így a sztatikai stabilitás $\sigma > 0$. A statikus stabilitás növekedésével (távolodnak egymástól az izentróp felületek) nő az abszolút örvényesség ($\zeta_{\Theta} + f$).

IV.2.16.

a.) Sekély víz közegben a sűrűség állandóságával számolunk. Ha a légtest sugara kétszeresére nő ($2r_0$), akkor vastagsága negyedére csökken ($\delta h = \delta h_0 / 4$).

A potenciális örvényesség konzervatív mennyiség.

$$\left(\frac{f}{\delta h_0} \right)_{t=0} = \left(\frac{f + \zeta_{\Theta}}{\delta h_0 / 4} \right)_{t_0}.$$

Az egyenlet rendezése után: $\zeta_{\Theta} = -3f$. Kihasználva, hogy az északi félgömbön $f(30^\circ) = 7,292 \cdot 10^{-5}$ és $\zeta_{\Theta} = -2,19 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$. Erős anticiklonális örvénylest látunk. A déli félgömbön $f(-30^\circ) = -7,292 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$ szintén anticiklonális örvénylest tapasztalunk, de ott az anticiklon forgási iránya az óramutató járásával megegyező. Kihasználva, hogy

$$\zeta = \frac{1}{A} \oint_S \mathbf{V} \cdot d\mathbf{s} = \frac{1}{4r^2 \pi} 2r \pi V = \frac{V}{2r},$$

ahol A az S zárt görbe által közrezárt terület, s merev test szerű mozgást feltételezve kapjuk az anticiklonális forgás sebességét a középponttól $2r$ távolságra $V = 43,8 \text{ m s}^{-1}$. Az eredmény nem reális.

b) Ha a légtest a 60° -os szélességi körén mozog a platón, akkor a potenciális örvényesség megmaradása miatt:

$$\left(\frac{f}{\delta h_0} \right)_{t=0} = \left(\frac{f + \zeta_{\Theta}}{0,75 \cdot \delta h_0} \right)_{t_0}.$$

A 60° szélességi körön vagyunk: $f(60^\circ) = 1,26 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$, $\zeta_{\Theta} = -0,25f = 3,15 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$.

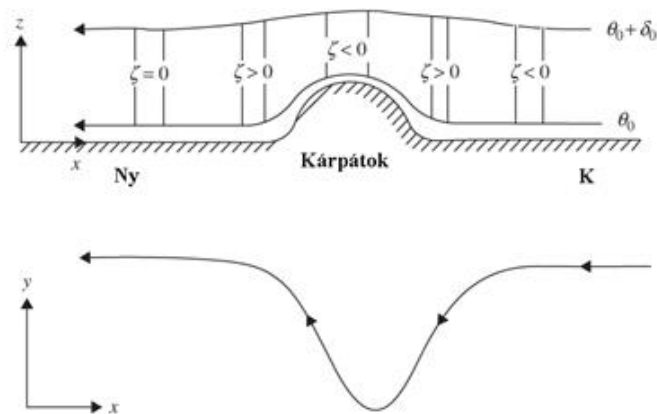
c) Ha a légtest dél felé mozog, akkor csökken a planetáris örvényessége, s ciklonális forgásra tesz szert:

$$\left(\frac{f(60^\circ)}{\delta h_0} \right)_{t=0} = \left(\frac{f(45^\circ) + \zeta_{\Theta}}{\delta h_0} \right)_{t_0}.$$

Számolás után: $\zeta_{\Theta} = 2\Omega \cdot [\sin(60^\circ) - \sin(45^\circ)] = 2,32 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$.

IV.2.17.

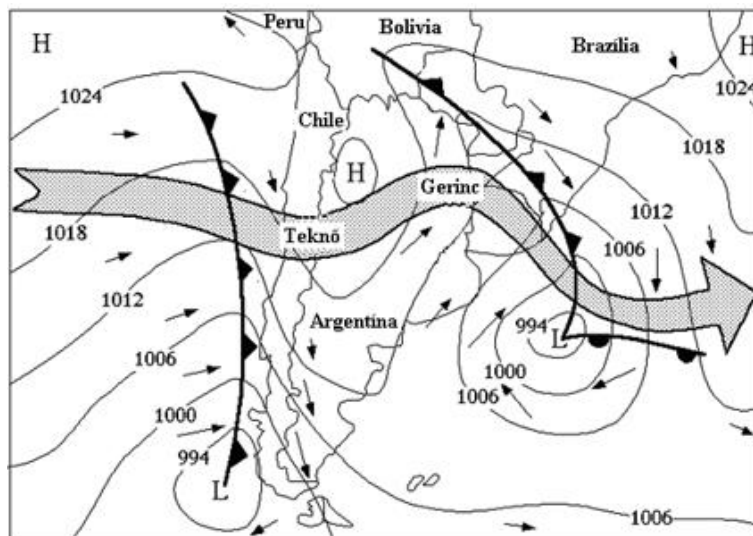
a) A Kárpát-medence térségébe kelet felől besodródó levegő a hegység keleti lejtőjénél délre fordul, vastagsága csökken, s a kezdeti ciklonális görbület után a hegységen átkelve anticiklonális örvényességgel rendelkezik. A hegységen átkelő levegő vastagságának csökkenését nem tudja kompenzálni a planetáris örvényesség csökkenése, így a Kárpát-medencébe érkezve negatív (anticiklonális) örvényességgel fog rendelkezni. A hegységen átkelve a levegő észak felé tart. Növekszik a vastagsága, s az anticiklonális örvényesség ciklonálisra vált. Amikor visszatér az eredeti szélességi körre stabilizálódik, keleties mozgása lesz.



MIV.2.1. ábra. A Kárpátok hegyláncain átkelő és keleties irányú levegő mozgása (A sematikus ábra, Holton (2004) alapján készült.

(http://booksite.elsevier.com/9780123848666/downloads/image_bank/Chapter%204/f04-12-9780123848666.jpg).

b) A déli félgömbön az Andokon átkelő nyugatias áramlás először dél felé térül el, s a hegységen átkelve anticiklonális görbülettel jellemezhető. (A déli félgömbön a teknő anticiklonális áramlást jelez.) A légrész vastagsága csökken. Amikor visszatér az eredeti szélességi körre, délnyugatias áramlással tovább halad észak felé, s így ciklonális görbülete lesz (eredetileg is ciklonális áramlás jellemezte). Újra kialakul egy ciklonális hullámszerűség (MVI.2.2. ábra). Ismét emlékeztetünk, hogy a déli félgömbön a ciklonok az óramutató járásával megegyezően, az északi félgömbön azzal ellentétesen mozognak. Ahol magassági teknőt látunk, ott anticiklonális görbületet tapasztalunk, ahol gerincet, ott ciklonális görbületet látunk. A ciklon tengelye a magasban nyugatabbra van.



MIV.2.2. ábra. Az Andok hegyláncain átkelő levegő mozgása. A magassági nyugatias áramlás hullámot vet és délre fordul (teknő), majd visszatérve újra kialakul egy ciklonális örvény (gerinc). Ezt látjuk a jet mozgásán (300 hPa-os szint szürke pontozott vonal). A felszíni szelet fekete nyilak jelzik. 1995. június 4-i téli időjárási helyzet. (Geerts és Linacre, 2013 ábrája).

V. fejezet - A légkördinamikai egyenletek felállítása, vizsgálata és megoldása

V.1. Kétdimenziós folyadékáramlás

V.1.1. Mivel $\text{grad } p \equiv \nabla p$,

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p$$

Ezután csak a ∇ operátor definícióját kell alkalmaznunk.

a) Descartes-féle koordináta-rendszerben:

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad \frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}$$

b) Szférikus koordináta-rendszerben:

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{\rho \cos \phi} \frac{\partial p}{\partial \lambda}, \quad \frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\rho R_F} \frac{\partial p}{\partial \phi},$$

ahol a szokásos jelölések szerint λ, ϕ a földrajzi hosszúság és szélesség, R_F a Föld sugara.

V.1.2. A rotáció ($\text{rot } \mathbf{v}$) z irányú komponensét az örvényességet a következőképpen határozhatjuk meg. Szorozzuk meg a

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p$$

egyenletet balról vektoriálisan a ∇ operátorral, majd az így kapott eredményt szorozzuk meg skalárisan a $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$ vertikális egységvektorral:

$$\mathbf{k} \cdot \left(\nabla \times \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right) = -\mathbf{k} \cdot \left(\nabla \times \frac{1}{\rho} \nabla p \right)$$

Ha feltételezzük, hogy a sebességi mező sima abban az értelemben, hogy az idő- és térbeli parciális deriváltak felcserélhetők és a sűrűség horizontális változása elhanyagolható, akkor:

$$\mathbf{k} \cdot \left(\frac{d(\nabla \times \mathbf{v})}{dt} \right) = -\mathbf{k} \cdot \left(\frac{1}{\rho} \nabla \times \nabla p \right),$$

ami a $\text{rot grad } s = \nabla \times \nabla s = 0$ (s tetszőleges skálár függvény) azonosság miatt egyenlő nullával, azaz:

$$\mathbf{k} \cdot \left(\frac{d(\nabla \times \mathbf{v})}{dt} \right) = \frac{d[\mathbf{k} \cdot (\nabla \times \mathbf{v})]}{dt} = 0$$

A Stokes-tétel szerint

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} = \iint_F (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} dF,$$

ahol F a tetszőleges Γ zárt görbén kifeszített terület, értelmében:

$$C = \oint_{\Gamma} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} = \text{állandó}$$

V.1.3.

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \Rightarrow \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} - \frac{1}{\rho} \nabla p$$

Felhasználva, hogy

$$\text{grad}(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2) = (\mathbf{v}_1 \cdot \text{grad}) \mathbf{v}_2 + (\mathbf{v}_2 \cdot \text{grad}) \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_1 \times \text{rot} \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_2 \times \text{rot} \mathbf{v}_1,$$

ahol $\mathbf{v}_1$ és $\mathbf{v}_2$ tetszőleges vektor értékű függvények, Válasszuk a $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}$ lehetőséget, és használjuk ki, hogy a kétdimenziós mezőben $\text{rot} \mathbf{v} = \zeta \mathbf{k}$, azt kapjuk, hogy

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \frac{1}{2} \nabla(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) - \mathbf{v} \times \text{rot} \mathbf{v} = \frac{1}{2} \nabla(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) + \zeta \mathbf{k} \times \mathbf{v},$$

így

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\zeta \mathbf{k} \times \mathbf{v} - \frac{1}{2} \nabla(v^2) - \frac{1}{\rho} \nabla p$$

Az előző feladatban is alkalmazott feltétel mellett

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\mathbf{k} \cdot (\nabla \times (\zeta \mathbf{k} \times \mathbf{v}))$$

Kihasználva a

$$\text{rot}(\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2) = (\mathbf{v}_2 \cdot \text{grad}) \mathbf{v}_1 - (\mathbf{v}_1 \cdot \text{grad}) \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1 \text{div} \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_2 \text{div} \mathbf{v}_1$$

azonosságot:

$$\nabla \times (\zeta \mathbf{k} \times \mathbf{v}) = (\mathbf{v} \cdot \nabla) \zeta \mathbf{k} - (\zeta \mathbf{k} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \zeta \mathbf{k} (\nabla \cdot \mathbf{v}) - \mathbf{v} \nabla \cdot (\zeta \mathbf{k})$$

Mivel kétdimenziós ideális folyadékáramlást vizsgálunk, fennáll, hogy $\mathbf{k} \perp \mathbf{v} \Rightarrow \mathbf{k} \cdot \mathbf{v} = 0$, s így a $\mathbf{k}$ -val való skaláris szorzás után:

$$\mathbf{k} \cdot [\nabla \times (\zeta \mathbf{k} \times \mathbf{v})] = (\mathbf{v} \cdot \nabla) \zeta + \zeta (\nabla \cdot \mathbf{v}) = \nabla \cdot (\zeta \mathbf{v})$$

Azaz a végeredmény:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\nabla \cdot (\zeta \mathbf{v})$$

Ez az összefüggés nem más, mint a kétdimenziós örvényességi egyenlet fluxus-alakja.

V.1.4. Mind a **V.1.2.**, mind a **V.1.3. feladat** megoldása során feltettük, hogy a közeg homogén és összenyomhatatlan, azaz $\rho(x, y, t) = \text{állandó}$. A kontinuitási egyenlet alapján ez azt jelenti, hogy $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$, vagyis az **V.1.3. feladatban** a $\zeta \nabla \cdot \mathbf{v}$ tag 0, s így a két feladat megoldása azonos, ami nem más mint az örvényességi egyenlet advektációs alakja.

V.1.5. Nyomási koordináta-rendszerben a kétdimenziós momentum-egyenlet alakja:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\text{grad} \Phi$$

ahol Φ a geopotenciál. Ekkor az **V.1.3. feladatban** bemutatott eljárás szerint, felhasználva a

$$\text{grad}(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2) = (\mathbf{v}_1 \text{ grad}) \mathbf{v}_2 + (\mathbf{v}_2 \text{ grad}) \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_1 \times \text{rot} \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_2 \times \text{rot} \mathbf{v}_1$$

($\mathbf{v}_1$ és $\mathbf{v}_2$ tetszőleges vektor értékű függvény) azonosságot, kapjuk, hogy:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\zeta \mathbf{k} \times \mathbf{v} - \text{grad} \left(\Phi + \frac{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})}{2} \right) = -\zeta \mathbf{k} \times \mathbf{v} - \nabla \left(\Phi + \frac{v^2}{2} \right)$$

V.1.6. A kétdimenziós áramlásra ható Coriolis-erő $\mathbf{F}_{\text{Cor}} = -f \mathbf{k} \times \mathbf{v}$. Ezt behelyettesítve a megfelelő egyenletekbe:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -(\zeta + f) \mathbf{k} \times \mathbf{v} - \frac{1}{2} \nabla (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) - \frac{1}{\rho} \nabla p$$

illetve a nyomási rendszerben

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -(\zeta + f) \mathbf{k} \times \mathbf{v} - \nabla \left(\Phi + \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{2} \right)$$

V.1.7. A számolás teljesen analóg az **V.1.4. feladatban** bemutatott eljárással, s az eredmény:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\nabla \cdot [(\zeta + f) \mathbf{v}]$$

ami, kihasználva a

$$\text{div}(\mathbf{u} \mathbf{v}) = \mathbf{u} \text{div} \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \text{grad} u$$

azonosságot, összenyomhatatlan közegben ($\text{div} \mathbf{v} = 0$) a következő alakra egyszerűsödik:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\mathbf{v} \cdot \nabla(\zeta + f),$$

ami nem más mint az abszolút örvényesség megmaradása: $\frac{d(\zeta + f)}{dt} = 0$.

V.1.8. Mivel $D = \nabla \cdot \mathbf{v}$, a divergencia-egyenlet:

$$\frac{\partial D}{\partial t} = \nabla \cdot \left[-(\zeta + f) \mathbf{k} \times \mathbf{v} - \nabla \left(\Phi + \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{2} \right) \right].$$

Az egyenlet jobb oldalának első tagja tovább alakítható:

$$\nabla \cdot [-(\zeta + f) \mathbf{k} \times \mathbf{v}] = \nabla \cdot [(\zeta + f) \mathbf{v} \times \mathbf{k}] = \mathbf{k} \cdot \nabla \times [(\zeta + f) \mathbf{v}] - (\zeta + f) \mathbf{v} \cdot (\nabla \times \mathbf{k}) = \mathbf{k} \cdot \nabla \times [(\zeta + f) \mathbf{v}].$$

Ezt behelyettesítve a fenti divergencia-egyenletbe már adódik a feladat megoldása, vagyis

$$\frac{\partial D}{\partial t} = \mathbf{k} \cdot \nabla \times [(\zeta + f) \mathbf{v}] - \nabla^2 \left(\Phi + \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{2} \right).$$

V.1.9. A $\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\mathbf{v} \cdot \nabla(\zeta + f)$ egyenlet analóg alakja: $\frac{d(\zeta + f)}{dt} = 0$,

vagyis a $(\zeta + f)$ abszolút örvényesség a kétdimenziós örvények esetén – összenyomhatatlan közegben – konzervatív (megmaradó) mennyiség.

V.1.10.

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\mathbf{v} \cdot \nabla(\zeta + f) = -(\mathbf{k} \times \nabla \Psi) \cdot \nabla(\zeta + f) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \Psi}{\partial x'} & \frac{\partial \Psi}{\partial y'} \\ \frac{\partial(\zeta + f)}{\partial x'} & \frac{\partial(\zeta + f)}{\partial y'} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial(\zeta + f)}{\partial x'} & \frac{\partial(\zeta + f)}{\partial y'} \\ \frac{\partial \Psi}{\partial x'} & \frac{\partial \Psi}{\partial y'} \end{vmatrix} = \mathfrak{A}[(\zeta + f), \Psi].$$

A determinánsokban az x' és y' a két horizontális koordinátát jelöli. A vesszők azt hangsúlyozzák, hogy x' és y' nem feltétlenül a Descartes-féle koordináták, hanem tetszőleges mennyiségek is lehetnek.

V.1.11.

a) Descartes-féle koordináta-rendszer:

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}.$$

b) Szférikus koordináta-rendszer:

$$u = \frac{1}{R_F} \frac{\partial \Psi}{\partial \phi}, \quad v = -\frac{1}{R_F \cos \phi} \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda},$$

ahol R_F a Föld sugara.

V.1.12. A geosztrófikus egyensúly esetén a Coriolis-erő és a nyomási gradiens erő megegyezik egymással, egyensúlyt tart fenn. Ezt a feltételt a nyomási koordináta-rendszerben a következőképpen írhatjuk fel:

$$-f \mathbf{k} \times \mathbf{v} = \nabla \Phi,$$

$$-f \mathbf{k} \times \mathbf{v} = -f \mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \nabla \Psi) = (\mathbf{k} \times \nabla \Psi) \times f \mathbf{k} = \nabla \Psi (f \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}) - \mathbf{k} [\nabla \Psi \cdot (f \mathbf{k})] = f \nabla \Psi \Rightarrow$$

$$\Psi = \frac{1}{f} \Phi + \text{állandó}$$

V.1.13. A divergencia-mentes áramlás sebessége: $\mathbf{v} = \mathbf{k} \times \nabla \Psi \Rightarrow$

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} \iint_{\mathcal{F}} |\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}| dx' dy' = \frac{1}{2} \iint_{\mathcal{F}} (\mathbf{k} \times \nabla \Psi) \cdot (\mathbf{k} \times \nabla \Psi) dx' dy' = \frac{1}{2} \iint_{\mathcal{F}} \nabla \Psi \cdot [(\mathbf{k} \times \nabla \Psi) \times \mathbf{k}] dx' dy' = \\ &= \frac{1}{2} \iint_{\mathcal{F}} \nabla \Psi \cdot [\nabla \Psi (\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}) - \mathbf{k} (\nabla \Psi \cdot \mathbf{k})] dx' dy' = \frac{1}{2} \iint_{\mathcal{F}} (\nabla \Psi)^2 dx' dy' \end{aligned}$$

V.1.14. A rotációmentes áramlás sebessége: $\mathbf{v} = \mathbf{v}_\chi = \nabla \chi \Rightarrow$

$$E = \frac{1}{2} \iint_{\mathcal{F}} |\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}| dx' dy' = \frac{1}{2} \iint_{\mathcal{F}} (\nabla \chi)^2 dx' dy'$$

V.1.15. A Helmholtz-tétel alapján a kétdimenziós áramlás sebessége a divergenciamentes és az örvénymentes rész összegeként is előállítható, azaz:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_\Psi + \mathbf{v}_\chi = \mathbf{k} \times \nabla \Psi + \nabla \chi$$

Felhasználva a kapott összefüggést, továbbá az **V.1.13.** valamint az **V.1.14. feladat** megoldását kapjuk a bizonyítani kívánt egyenlőséget.

V.1.16. A bizonyítandó állítás ekvivalens a $\frac{\partial}{\partial t} \left(\iint_{\mathcal{F}} \zeta dx' dy' \right) = 0$ feltétel teljesülésével. Az **V.1.10. feladat** megoldását figyelembe véve (feltételezve, hogy $f = \text{állandó}$):

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \mathfrak{I}(\zeta, \Psi) \Rightarrow \iint_{\mathcal{F}} \frac{\partial \zeta}{\partial t} dx' dy' = \iint_{\mathcal{F}} \mathfrak{I}(\zeta, \Psi) dx' dy'$$

A ζ mezőről tegyük fel, hogy időben folytonosan differenciálható! Ekkor az idő szerinti deriválás felcserélhető

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\iint_{\mathcal{F}} \zeta dx' dy' \right) = \iint_{\mathcal{F}} \frac{\partial \zeta}{\partial t} dx' dy' = 0$$

a térbeli integrálással, s így

V.1.17. Az enstrofia definíciója alapján:

$$\frac{\partial Z}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\iint_{\mathcal{F}} \frac{1}{2} \zeta^2 dx' dy' \right) = \iint_{\mathcal{F}} \zeta \frac{\partial \zeta}{\partial t} dx' dy' = 0$$

Mivel $\zeta \frac{\partial \zeta}{\partial t} = \zeta \mathfrak{S}(\zeta, \Psi)$, a feladatban szereplő feltételeknek megfelelően:

$$\frac{\partial Z}{\partial t} = \iint_{\bar{F}} \zeta \mathfrak{S}(\zeta, \Psi) dx' dy' = 0$$

V.1.18. Az V.1.13. és V.1.14. feladat megoldása alapján:

$$E = \frac{1}{2} \iint_{\bar{F}} (\nabla \Psi)^2 dx' dy'$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \iint_{\bar{F}} (\nabla \Psi) \frac{\partial \nabla \Psi}{\partial t} dx' dy' = \iint_{\bar{F}} \nabla \left(\Psi \frac{\partial \nabla \Psi}{\partial t} \right) dx' dy' - \iint_{\bar{F}} \Psi \nabla \left(\frac{\partial \nabla \Psi}{\partial t} \right) dx' dy' = - \iint_{\bar{F}} \Psi \left(\frac{\partial \zeta}{\partial t} \right) dx' dy' = 0$$

A számítás második lépésében a parciális integrálás szabályát, majd a Gauss–Ostrogradszkij-tétel következményeként felírható

$$\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{v} dV = 0$$

egyenlőséget használtuk ki.

V.1.19. A Jacobi-determináns véges differencia-közelítésének – a feladat elvárásait kielégítő – egy lehetséges felírási módja a következő:

$$a_{i,j,i+k,j+l} = \sum_{m,n} c_{i,j,k,l,m,n} \Psi_{i+m,j+n}$$

$$\mathfrak{S}_{i,j}(\zeta, \Psi) = \sum_{k,l} a_{i,j,i+k,j+l} \zeta_{i+k,j+l}$$

Szorozzuk meg a fenti egyenlet mindkét oldalát $\zeta_{i,j}$ -vel!

$$\zeta_{i,j} \mathfrak{S}_{i,j}(\zeta, \Psi) = \sum_{k,l} a_{i,j,i+k,j+l} \zeta_{i,j} \zeta_{i+k,j+l}$$

A feladatban leírtak figyelembevételével a fenti egyenlet baloldala az $\frac{1}{2} \zeta_{i,j}^2$ mennyiség időbeli változása az (i, j) pontban. Így tehát az

$$a_{i,j,i+k,j+l} \zeta_{i,j} \zeta_{i+k,j+l}$$

mennyiség az az ensztrófia, amelyet a tér (i, j) pontja ad, vagy kap a tér $(i+k, j+l)$ pontjától. A rendszer energiája akkor marad állandó, ha a tér $(i+k, j+l)$ pontja ugyanakkor ugyanannyi energiát ad, vagy kap a tér (i, j) -edik pontjától, azaz

$$a_{i,j,i+k,j+l} \zeta_{i,j} \zeta_{i+k,j+l} = -a_{i+k,j+l,i,j} \zeta_{i+k,j+l} \zeta_{i,j} \quad \zeta_{i,j} \quad a_{i,j,i+k,j+l} = -a_{i+k,j+l,i,j}$$

és

$$a_{i,j,i,j} = 0$$

V.1.20. Az általános képlet egyik lehetséges felírása:

$$b_{i,j,i+k,j+l} = \sum_{k,l} c_{i,j,k,l,m,n} \zeta_{i+k,j+l}$$

$$\mathfrak{S}_{i,j}(\zeta, \Psi) = \sum_{m,n} b_{i,j,i+m,j+n} \zeta_{i+m,j+n}$$

Szorozzuk meg a fenti egyenletet mindkét oldalát $\Psi_{i,j}$ -vel!

$$\Psi_{i,j} \mathfrak{S}_{i,j}(\zeta, \Psi) = \sum_{m,n} b_{i,j,i+m,j+n} \Psi_{i,j} \zeta_{i+m,j+n}$$

Az **V.1.19. feladat** figyelembevételével az energia akkor marad állandó, ha

$$b_{i+m,j+n,i,j} = -b_{i,j,i+m,j+n} \text{ és } b_{i,j,i,j} = 0.$$

V.1.21.

$$\mathfrak{S}_{m,i}(\zeta, \Psi) = \frac{1}{3} (\mathfrak{S}_{m,i}^{++} + \mathfrak{S}_{m,i}^{x+} + \mathfrak{S}_{m,i}^{+x})$$

ahol

$$\mathfrak{S}_{m,i}^{++} = (2h)^{-2} [(\Psi_{m+1,i} - \Psi_{m-1,i}) \cdot (\zeta_{m,i+1} - \zeta_{m,i-1}) - (\Psi_{m,i+1} - \Psi_{m,i-1}) \cdot (\zeta_{m+1,i} - \zeta_{m-1,i})],$$

$$\mathfrak{S}_{m,i}^{x+} = (2h)^{-2} [\zeta_{m,i+1} (\Psi_{m+1,i+1} - \Psi_{m-1,i-1}) - \zeta_{m,i-1} (\Psi_{m+1,i-1} - \Psi_{m-1,i-1}) - \\ - \zeta_{m+1,i} (\Psi_{m+1,i+1} - \Psi_{m+1,i-1}) + \zeta_{m-1,i} (\Psi_{m+1,i-1} - \Psi_{m-1,i-1})],$$

$$\mathfrak{S}_{m,i}^{+x} = (2h)^{-2} [\Psi_{m+1,i} (\zeta_{m+1,i+1} - \zeta_{m+1,i-1}) - \Psi_{m-1,i} (\zeta_{m-1,i+1} - \zeta_{m-1,i-1}) - \\ - \Psi_{m,i+1} (\zeta_{m+1,i+1} - \zeta_{m-1,i+1}) + \Psi_{m,i-1} (\zeta_{m+1,i-1} - \zeta_{m-1,i-1})],$$

ahol h a horizontális rácsfelbontás.

V.1.22. Kiinduló egyenletünk:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} - \frac{1}{\rho} \nabla p,$$

így a következő felbontást kell alkalmazni: $\mathbf{v} = \bar{\mathbf{v}} + \mathbf{v}'$, $\rho = \bar{\rho} + \rho'$, $p = \bar{p} + p'$.

Behelyettesítés után:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} = -(\bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla) \bar{\mathbf{v}} - \frac{1}{\rho} \nabla \bar{p} - (\bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla) \mathbf{v}' - (\mathbf{v}' \cdot \nabla) \bar{\mathbf{v}} - \frac{1}{\rho} \nabla p' - (\mathbf{v}' \cdot \nabla) \mathbf{v}'$$

ahol a legnagyobb tagok átlagos értékeket tartalmaznak, majd utána következnek a vesszős tagok, majd a két vesszős tag $[(\mathbf{v}' \cdot \nabla) \mathbf{v}']$.

V.1.23. Az **V.1.22. feladat**ban szét tudjuk választani az átlagos sebesség változására és a sebesség fluktuációk időbeli változására vonatkozó egyenletet a nagyságrendi analízis alapján. Tudjuk, hogy a vesszős mennyiségek legalább egy nagyságrenddel kisebbek, mint az átlagértékek. Tehát

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial t} = -(\bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla) \bar{\mathbf{v}} - \frac{1}{\rho} \nabla \bar{p} \quad \text{és} \quad \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} = -(\bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla) \mathbf{v}' - (\mathbf{v}' \cdot \nabla) \bar{\mathbf{v}} - \frac{1}{\rho} \nabla p'$$

Alakítsuk át a $-(\bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla) \mathbf{v}' - (\mathbf{v}' \cdot \nabla) \bar{\mathbf{v}}$ kifejezést, kihasználva a vektorszámítás következő összefüggését (lásd a **2.2. fejezetet** is)

$$\text{grad}(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2) = (\mathbf{v}_1 \cdot \text{grad}) \mathbf{v}_2 + (\mathbf{v}_2 \cdot \text{grad}) \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_1 \times \text{rot} \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_2 \times \text{rot} \mathbf{v}_1$$

ahol $\mathbf{v}_1$ és $\mathbf{v}_2$ tetszőleges vektor értékű függvény:

$$-(\bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla) \mathbf{v}' - (\mathbf{v}' \cdot \nabla) \bar{\mathbf{v}} = -\nabla(\bar{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v}') + \bar{\mathbf{v}} \times \text{rot} \mathbf{v}' + \mathbf{v}' \times \text{rot} \bar{\mathbf{v}}$$

Az örvényesség átlaga és fluktuációja: $\bar{\zeta} = \mathbf{k} \cdot (\nabla \times \bar{\mathbf{v}})$ és a $\zeta' = \mathbf{k} \cdot (\nabla \times \mathbf{v}')$. Kihasználva az inkompresszibilitás feltételét ($\bar{\rho} = \text{állandó}$, $\rho' = 0$) kapjuk, hogy:

$$\frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} = -\nabla(\bar{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v}') + \bar{\mathbf{v}} \times \text{rot} \mathbf{v}' + \mathbf{v}' \times \text{rot} \bar{\mathbf{v}} - \frac{1}{\rho} \nabla p' = \bar{\mathbf{v}} \times \text{rot} \mathbf{v}' + \mathbf{v}' \times \text{rot} \bar{\mathbf{v}} - \nabla \left(\bar{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v}' + \frac{1}{\rho} p' \right)$$

Megszorozva fenti egyenlet mindkét oldalát $\mathbf{k} \cdot (\nabla \times)$ kifejezéssel, majd kihasználva hogy $\text{rot grad} \mathbf{v} = 0$ kapjuk az örvényesség fluktuációjára vonatkozó összefüggést:

$$\frac{\partial \zeta'}{\partial t} = \mathbf{k} \cdot [\nabla \times (\bar{\mathbf{v}} \times \text{rot} \mathbf{v}')] + \mathbf{k} \cdot [\nabla \times (\mathbf{v}' \times \text{rot} \bar{\mathbf{v}})]$$

Mivel kétdimenziós (x, y) áramlási mezőt vizsgálunk, ezért a rotációnak csak vertikális komponense lesz.

$$\frac{\partial \zeta'}{\partial t} = -\mathbf{k} \cdot [\nabla \times (\zeta' \mathbf{k} \times \bar{\mathbf{v}})] - \mathbf{k} \cdot [\nabla \times (\bar{\zeta} \mathbf{k} \times \mathbf{v}')] =$$

Az **V.1.3. feladattal** analóg módon:

$$\frac{\partial \zeta'}{\partial t} = -\nabla(\zeta' \bar{v}) - \nabla(\bar{\zeta} v')$$

Az inkompresszibilitás miatt azonban

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{v}} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{v}' = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \zeta'}{\partial t} = -\bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla \zeta' - \mathbf{v}' \cdot \nabla \bar{\zeta}.$$

V.1.24. A kiinduló egyenletünk az **V.1.6. feladat**ban szereplő

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -(\zeta + f) \mathbf{k} \times \mathbf{v} - \nabla \left(\Phi + \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{2} \right)$$

egyenlet. Ennek alapján a sebességfluktuációra felírt linearizált egyenlet (az első rendben kis tagok megtartásával):

$$\frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} = -(\bar{\zeta} + f) \mathbf{k} \times \mathbf{v}' - \zeta' \mathbf{k} \times \bar{\mathbf{v}} - \nabla (\Phi' + \bar{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v}')$$

A divergencia-egyenlet jobb oldalának egyes tagjait a fenti összefüggés nabla operátorral történő skaláris szorzásával kapjuk a divergencia definíciója szerint. Így az egyes tagok alakja:

$$-\nabla \cdot \nabla (\Phi' + \bar{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v}') = -\nabla^2 (\Phi' + \bar{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v}'),$$

$$\nabla \cdot (-\zeta' \mathbf{k} \times \bar{\mathbf{v}}) = \nabla \cdot [-\mathbf{k} \times (\zeta' \bar{\mathbf{v}})] = \mathbf{k} \cdot [\nabla \times (\zeta' \bar{\mathbf{v}})],$$

$$\nabla \cdot [-(\bar{\zeta} + f) \mathbf{k} \times \mathbf{v}'] = \mathbf{k} \cdot [\nabla \times ((\bar{\zeta} + f) \mathbf{v}')] .$$

Így a divergencia-egyenlet linearizált alakja:

$$\frac{\partial D'}{\partial t} = \mathbf{k} \cdot [\nabla \times ((\bar{\zeta} + f) \mathbf{v}' + \zeta' \bar{\mathbf{v}})] - \nabla^2 (\Phi' + \bar{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v}'), \quad \text{ahol } D = \bar{D} + D',$$

ami éppen az **V.1.8. feladat**ban szereplő egyenlet linearizált alakja.

V.1.25.

$$(\nabla \Psi)^2 = \nabla (\Psi \nabla \Psi) - \Psi \nabla^2 \Psi = \nabla (\Psi \nabla \Psi) - \Psi \zeta.$$

Ha a fenti kifejezést periodikus peremfeltételek mellett integráljuk, akkor a baloldali első tag zérussá válik, azaz

$$\iint_{\bar{F}} (\nabla \Psi)^2 dx' dy' = -\iint_{\bar{F}} \Psi \zeta dx' dy' = -\iint_{\bar{F}} (\Delta^{-1} \zeta) \zeta dx' dy' \quad \Rightarrow \quad \mathbf{M} = -\Delta^{-1} \quad \Rightarrow \quad \langle \zeta, \zeta \rangle = (\zeta, -\Delta^{-1} \zeta).$$

A fenti kifejezésben: $\Psi = \Delta^{-1} \zeta$, Δ^{-1} a Laplace-operátor (Δ) inverze.

V.1.26.

$$(\nabla \chi)^2 = \Delta (\chi \nabla \chi) - \chi \nabla^2 \chi.$$

Hasonlóan az előző feladathoz:

$$\iint_{\bar{F}} (\nabla \chi)^2 dx' dy' = -\iint_{\bar{F}} \chi \nabla^2 \chi dx' dy' \quad \Rightarrow \quad \mathbf{M} = -\Delta \quad \Rightarrow \quad \langle \chi, \chi \rangle = (\chi, \Delta \chi).$$

V.1.27. Az előző két feladat felhasználásával:

$$\mathbf{M} = - \begin{pmatrix} \Delta^{-1} \\ \Delta \end{pmatrix}.$$

V.1.28. A behelyettesítés után elvégezve a deriválásokat:

a.)

$$\left(\frac{d}{dt} + \nu |\mathbf{k}|^2 \right) \mathbf{u}_k = \mathbf{f}_k - i \mathbf{k} p_k,$$

ahol

$$\mathbf{f}_k = -[(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}]_k.$$

Itt $\mathbf{k}$ a hullámszám vektora. Spektrális alakban felírva:

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla)_m = \sum_{j=1}^2 u_{j,m} i \mathbf{k}_j \Rightarrow \mathbf{f}_{ik} = \sum_{j=1}^2 i \mathbf{k}_j \sum_{m+n=k} u_{j,m} u_{i,n}.$$

A nyomási tag meghatározásához az a.) egyenletet szorozzuk meg skalárisan $(i \mathbf{k})$ -val:

b.)

$$\left(\frac{d}{dt} + \nu |\mathbf{k}|^2 \right) i \mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_k = |\mathbf{k}|^2 \hat{p}_k + i \mathbf{k} \cdot \mathbf{f}_k.$$

A

$$\nabla \mathbf{v} = 0$$

feltétel spektrális alakja:

$$i \mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_k = 0.$$

s így a fenti egyenlet a következő alakú lesz:

$$-|\mathbf{k}|^2 \hat{p}_k = i \mathbf{k} \cdot \mathbf{f}_k \Rightarrow \hat{p}_k = -\frac{1}{|\mathbf{k}|^2} i \mathbf{k} \cdot \mathbf{f}_k.$$

A nyomási tag visszahelyettesítésével közvetlenül adódik a bizonyítandó egyenlőség.

V.1.29.

$$E(k) = \sum_k U(k),$$

ahol

$$U(k) = |\mathbf{u}_k|^2 \left(\frac{d}{dt} + 2\nu |\mathbf{k}|^2 \right) E(k) = \left(\mathbf{f}_k - \mathbf{k} \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{f}_k}{|\mathbf{k}|^2} \right) \cdot \mathbf{u}_k^*,$$

ahol a^* most a komplex konjugáltat jelöli.

V.1.30. A nemlineáris tagok teszik lehetővé, hogy az egyes hullámszámok (mérettartományok) között energiaátadás mehessen végbe.

V.1.31. Az *V.1.29. feladat* megoldását átrendezve:

$$\frac{dE(k)}{dt} = \left(f_k - k \frac{k \cdot f_k}{|k|^2} \right) \cdot u_k^* - 2\nu |k|^2 E(k)$$

Mivel ν , $|k|^2 \equiv k^2$ és $E(k)$ pozitív mennyiségek, a súrlódás fokozatosan csökkenti a rendszer energiáját. Emellett a súrlódó energia arányos k^2 -tel. Ez azt jelenti, hogy a disszipáció spektrálisan szelektív, vagyis elsősorban a nagyfrekvenciás zavarokat szűri ki, a ν viszkozitási együtthatónak a $|k|=0$ esetben egyáltalán nincs is hatása.

V.1.32. Mivel

$$u_k = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} v(x_j, t) \exp(-i k \cdot x_j)$$

ahol N a figyelembevett alappontok száma a fizikai térben,

$$u_0 = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} v(x_j, t)$$

Ez azt jelenti, hogy u_0 a $v(x_j, t)$ mező területi átlaga, vagyis u_0 az átlagos- (alap-) áramlást adja meg. Ennek nyomán az előző feladat megoldása azt jelenti, hogy az átlagos áramlásra nem hat a belső súrlódás.

V.1.33. Az *V.1.29. feladat* alapján u_k együttható időbeli fejlődését leíró egyenletben:

$$\nu(-1)^{n+1} \nabla^{2n} v = \nu(-1)^{n+1} (ik)^{2n} u_k = \nu(-1)^{2n+1} k^{2n} u_k = -\nu k^{2n} u_k,$$

vagyis a súrlódás speciális megválasztása biztosítja, hogy valóban disszipáció menjen végbe, s a belső súrlódás csökkenthesse a rendszer kinetikus energiáját. Ugyanis: ha a kapott összefüggés jobb oldalán pozitív előjel állna, akkor a disszipáció a kinetikus energia forrása lenne.

V.2. A sekély víz típusú áramlások

V.2.1. A rétegvastagság (h) időbeli fejlődését nyilván a kontinuitási egyenlet írja le. Ennek az állandó sűrűségű közegre vonatkozó alakja:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iint_F h dF = \iint_F h \mathbf{v} \cdot d\mathbf{\Gamma}$$

ahol $\mathbf{\Gamma}$ az F felületet határoló görbe, dF az elemi felület nagysága, $d\mathbf{\Gamma}$ a felületet határoló görbe ívelem vektora. Innen – a kétdimenziós esetre felírt Gauss–Ostrogradszkij-tétel felhasználásával – a szokásos módon:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\nabla \cdot (h\mathbf{v})$$

V.2.2. A $g = \text{állandó}$ feltétel alapján a kontinuitási egyenlet alternatív alakja:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\nabla(h\Phi) = -\nabla \cdot [\mathbf{v}(\bar{\Phi} + \Phi')] = -\nabla \cdot (\mathbf{v}\Phi') - \bar{\Phi} \nabla \cdot \mathbf{v} = -\nabla \cdot (\mathbf{v}\Phi') - \bar{\Phi} D$$

Mivel $\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{\partial \Phi'}{\partial t}$ ezért $\frac{\partial \Phi'}{\partial t} = -\nabla \cdot (\Phi' \mathbf{v}) - \bar{\Phi} D$

V.2.3.

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\nabla \cdot [(\zeta + f)\mathbf{v}]$$

$$\frac{\partial D}{\partial t} = \mathbf{k} \cdot [\nabla \times (\zeta + f)\mathbf{v}] - \nabla^2 \left(\Phi' + \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{2} \right)$$

$$\frac{\partial \Phi'}{\partial t} = -\nabla \cdot (\Phi' \mathbf{v}) - \bar{\Phi} D, \quad \frac{\partial \Phi'}{\partial t} = -\nabla \cdot (\Phi' \mathbf{v}) - \bar{\Phi} D$$

V.2.4. Mivel $\mathbf{v}(x, y, z) = \mathbf{v}(x, y)$, ezért

$$K = \frac{1}{2} h |\mathbf{v}|^2$$

V.2.5. A kérdéses egyenletet a $\mathbf{v}(x, y, z)$ derivált meghatározásából kapjuk.

$$\frac{\partial K}{\partial t} = \frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 \frac{\partial h}{\partial t} + h \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 \right) = \frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 \frac{\partial h}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot h \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$$

$$\mathbf{v} \cdot h \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\mathbf{v} \cdot h(\zeta \mathbf{k} \times \mathbf{v}) - \mathbf{v} \cdot h \nabla \left(\frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 \right) - \mathbf{v} \cdot h \nabla \Phi = -\zeta \mathbf{k} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{v} \cdot h) - \mathbf{v} \cdot h \nabla \left(\frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 \right) - \mathbf{v} \cdot h \nabla \Phi$$

s így

$$\mathbf{v} \cdot h \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -(\mathbf{v} \cdot h) \cdot \nabla \left(\frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 + \Phi \right)$$

A kinetikus energia lokális időbeli változása:

$$\frac{\partial K}{\partial t} = -\frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 \nabla \cdot (\mathbf{v}h) - \mathbf{v} \cdot h \nabla \left(\frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 \right) - \mathbf{v} \cdot h \nabla \Phi = -\nabla \cdot \left(\frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 \mathbf{v}h \right) - \mathbf{v} \cdot h \nabla \Phi$$

$$\Phi_p = \int_0^h \Phi(z) dz = \int_0^h gz dz = \frac{1}{2} gh^2$$

V.2.6.

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} gh^2 \right) = \Phi \frac{\partial h}{\partial t} = -\Phi \nabla \cdot (\mathbf{v}h)$$

V.2.7.

V.2.8. Az előző feladat megoldásából kiindulva felírhatjuk, hogy

$$\frac{\partial \Phi_p}{\partial t} = -\nabla \cdot (\mathbf{v}h) = -\nabla \cdot (\Phi \mathbf{v}h) + \mathbf{v}h \cdot \nabla \Phi$$

Az így kapott egyenlőség felhasználásával:

$$\frac{\partial (K + \Phi_p)}{\partial t} = -\nabla \cdot \left(\frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 \mathbf{v}h \right) - h\mathbf{v} \cdot \nabla \Phi - \nabla \cdot (\Phi \mathbf{v}h) + h\mathbf{v} \cdot \nabla \Phi = -\nabla \cdot \left(\frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 \mathbf{v}h \right) - \nabla \cdot (\Phi \mathbf{v}h)$$

$$\text{V.2.9. } \frac{\partial}{\partial t} \iiint_F (K + \Phi_p) d\mathbf{x} d\mathbf{y} = - \iiint_F \left[\nabla \cdot \left(\frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 \mathbf{v}h \right) + \nabla \cdot (\Phi \mathbf{v}h) \right] d\mathbf{x} d\mathbf{y} = 0$$

Ha a vizsgált F térrésznek (az adott térfogatnak) nincsenek határai, vagy a határokon keresztül nincs tömegáramlás, akkor

$$\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{v} dV = 0$$

ahol V tetszőleges térfogat. Így tehát a Gauss–Osztrogradszkij-tétel szerint:

$$\iint \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{v} dV = 0$$

V.2.10. Az *V.2.1. feladat* megoldása alapján a momentum-egyenlet:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -(\zeta + f)(\mathbf{k} \times \mathbf{v}) - \nabla \left(\Phi + \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{2} \right),$$

míg

$$hq = (\zeta + f) \Rightarrow \frac{\partial(hq)}{\partial t} = \frac{\partial \zeta}{\partial t}.$$

Így az *V.1.7. feladat* megoldása alapján:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\nabla \cdot [(\zeta + f)\mathbf{v}] = -\nabla \cdot (\mathbf{v}hq)$$

V.2.11. Az előző feladat megoldása alapján:

$$(f + \zeta) = hq \Rightarrow \frac{\partial h}{\partial t} \iiint (\zeta + f) dV = \iint \nabla \cdot (\mathbf{v}hq) dV = 0,$$

hiszen:

$$\iiint \nabla \cdot \mathbf{v} dV = 0$$

V.2.12. Az *V.2.1. feladat* megoldásában is szereplő kontinuitási egyenletet q -val megszorozva kapjuk, hogy:

$$q \frac{\partial h}{\partial t} + q \nabla \cdot (\mathbf{v}h) = 0,$$

így az **V.2.10. feladat** megoldásának felhasználásával felírhatjuk, hogy

$$\frac{\partial q}{\partial t} = \frac{1}{h} \left(\frac{\partial(hq)}{\partial t} - q \frac{\partial h}{\partial t} \right) = \frac{1}{h} (-\nabla \cdot (\mathbf{v} hq) + q \nabla \cdot (\mathbf{v} h)) = -\mathbf{v} \cdot \nabla q$$

V.2.13.

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla q = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dq}{dt} = 0,$$

vagyis a „sekély víz” típusú áramlás esetén a potenciális örvényesség individuális megváltozása nulla, tehát e mennyiség az áramlás konzervatív tulajdonsága.

V.2.14. Vezessük be a $q^* = hq^2$ kifejezést, amire teljesül, hogy

$$\frac{1}{2} \frac{\partial q^*}{\partial t} = \frac{1}{2} q^2 \frac{\partial h}{\partial t} + hq \frac{\partial q}{\partial t}.$$

Az előző feladatból tudjuk, hogy:

$$\frac{1}{2} q^2 \frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{1}{2} q^2 \nabla \cdot (h\mathbf{v}) \quad \text{és} \quad hq \frac{\partial q}{\partial t} = -hq \mathbf{v} \cdot \nabla q = \frac{1}{2} h\mathbf{v} \cdot \nabla q^2.$$

A fenti egyenletek összevetésével:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial q^*}{\partial t} = -\nabla \cdot \left(\frac{1}{2} \mathbf{v} hq^2 \right),$$

ahonnan a Gauss–Ostrogradsij-tétel felhasználásával, tudva, hogy

$$\iiint \nabla \cdot \mathbf{v} dV = 0,$$

következik az

$$\iiint \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} q^* dV = 0$$

összefüggés. Így beláttuk a feladat állítását, vagyis a

$$Q = \frac{1}{2} \iint_{\mathcal{F}} hq^2 dA$$

kifejezéssel definiált teljes potenciális ensztrófia valóban invariáns mennyiség.

A potenciális ensztrófia definíciós egyenlete:

$$Q = \frac{1}{2} \iint_{\mathcal{F}} (\zeta + f)^2 dx' dy' = \frac{1}{2} \iint_{\mathcal{F}} (hq)^2 dx' dy'$$

$$\frac{\partial q'}{\partial t} = hq \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{1}{2} q^2 \frac{\partial h}{\partial t}.$$

Szorozzuk meg hq -val az előző feladatban szereplő egyenletet!

$$\frac{1}{2} q^2 \frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{1}{2} q^2 \nabla \cdot (vh)$$

A fenti egyenletek összevetésével:

$$\frac{\partial q'}{\partial t} = -q h \mathbf{v} \cdot \nabla q - \frac{1}{2} q^2 \nabla \cdot (vh) = -\nabla \cdot \left(\frac{1}{2} v h q^2 \right),$$

Ahonnan a Gauss–Osztrogradszij-tétel felhasználásával, tudva, hogy

$$\iiint \nabla \cdot \mathbf{v} dV = 0,$$

következik a

$$\frac{\partial}{\partial t} \iint q' dx' dy' = 0$$

összefüggés. Így beláttuk a feladat állítását, vagyis a

$$Q = \iint \frac{1}{2} h^2 q dx' dy'$$

kifejezéssel definiált teljes potenciális ensztrófia valóban invariáns mennyiség.

V.3. Előrejelzési légkörmodellek

V.3.1. A két horizontális mozgásegyenletből indulunk ki:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\alpha \frac{\partial p}{\partial x} + f v$$

és

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\alpha \frac{\partial p}{\partial y} - f u$$

Az első egyenletet y -, a másodikat x -szerint deriváljuk, és a két derivált egyenletet kivonjuk egymásból. A következő egyenletre jutunk:

$$\frac{d}{dt} (\zeta + f) = -(\zeta + f) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial y} \right).$$

V.3.2. Az előző feladat megoldását felhasználva az egyenlet jobb oldalának első tagja barotróp, a második és a harmadik, azaz a forgatási és a szolenoidális tag baroklin.

V.3.3. Mivel síkáramlás esetén $w = 0$, és a divergencia-mentesség feltétele miatt a horizontális divergencia nulla,

azaz $D = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$, ezért az **V.3.1. feladat** megoldását felhasználva $\frac{d(\zeta + f)}{dt} = 0$, azaz $\frac{d\zeta}{dt} = 0$. Itt eltekintünk az f Coriolis-paraméter szélességi körök szerinti megváltozásától.

V.3.4. Megfigyelés (mérés) → távközlés → adatellenőrzés → adatasszimiláció → integrálás (az egyenletek numerikus megoldása) + paraméterezés → extrapoláció → a folyamat egy részének ismétlése az integrálástól kezdve a CFL-kritérium szerint → utófeldolgozás → távközlés.

V.3.5. A $\frac{d(\zeta + f)}{dt} = 0$ barotróp abszolút örvényességi egyenlet individuális deriváltjának felbontása után a következő megoldandó egyenletet kapjuk:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v \frac{\partial \zeta}{\partial y} + u \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

A fenti egyenletben figyelembe vettük a Coriolis-paraméter szélességi körök szerinti megváltozását, vagyis

$$\frac{df}{dt} = u \frac{\partial f}{\partial y}$$

A prognosztikai $\frac{\partial \zeta}{\partial t}$ és a diagnosztikai $u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v \frac{\partial \zeta}{\partial y} + u \frac{\partial f}{\partial y}$ tagokat az egyenlet két külön oldalára rendezve azt látjuk, hogy a ζ relatív örvényesség tendenciája, azaz időbeli változása a

$$-\left[u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v \frac{\partial \zeta}{\partial y} + u \frac{\partial f}{\partial y} \right]$$

örvényes advekciótól függ. Vezessük be F -et az örvényes advekció jelölésére, továbbá használjuk az örvényesség és a Ψ áramfüggvény közötti összefüggést, ami szerint $\zeta = \nabla^2 \Psi$! A megoldandó prognosztikai feladat ezek szerint a következő:

$$\frac{\partial(\nabla^2 \Psi)}{\partial t} = F$$

A térbeli és az időbeli differenciálás sorrendjét felcserélve: $\nabla^2 \left[\frac{\partial(\Psi)}{\partial t} \right] = F$. Ezzel az áramfüggvény tendenciájára másodrendű parciális differenciálegyenletet kaptunk. Az egyenlet megoldása után, azaz a tendencia ismeretében extrapolációs eljárással juthatunk el Ψ előrejelzett értékéhez.

V.3.6. A Courant-számot alkalmazva a $C = \frac{v \Delta t}{\Delta s} < 1$ feltételnek kell teljesülni. Mivel $\Delta s = 750\,000 \text{ m}$, és a légkörben a leggyorsabb hullámok terjedési sebessége $v \approx 100 \text{ m s}^{-1}$, ezért a $\Delta t < 7\,500 \text{ s} \approx 2,08 \text{ óra}$ feltétel alapján lehet időlépcsőt választani. A barotróp örvényességi egyenlet viszont csak a $v \approx 10 \text{ m s}^{-1}$ nagyságrendbe eső hullámokat írja le, ezért a modell esetében nagyobb időlépcső is választható. A modellezők először $\Delta t = 1 \text{ óra}$, majd $\Delta t = 2 \text{ óra}$ és $\Delta t = 3 \text{ óra}$ időlépcsővel is kísérleteztek – sikerrel.

V.3.7. A Brook Taylor angol matematikus által 1715-ben kimondott tétel szerint egy alkalmas függvényosztályhoz tartozó $f(x)$ függvény közelíthető a következő hatványsorral:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \dots + R_n$$

ahol R_n az úgynevezett Lagrange-féle maradéktag (reziduum). Bizonyítható, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0$$

$R_n = R_2$ esetén a Taylor-sor a következő alakot ölti:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Ebből átrendezéssel kapjuk $f'(x_0)$ közelítésére a következő, első rendben pontosnak nevezett formulát:

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

V.3.8. A hidrosztatikus modellekben nincs függőleges gyorsulás, ezért a harmadik mozgásegyenlet a hidrosztatika alapegyenletévé egyszerűsödik, vagyis nem prognosztikai, hanem diagnosztikai egyenlet lesz: $dp(z) = g\rho(z)dz$.

Megjegyezzük, hogy a háromdimenziós hidrosztatikus (pontosabban fogalmazva kvázi-hidrosztatikus, vagy kvázisztatikus) modellekben lehet vertikális sebesség, csak gyorsulás nem. A vertikális sebességi mező a kontinuitási egyenlet felhasználásával adaptálódik a horizontális sebességi mezőhöz.

V.3.9. Mivel egy hullám megjelenítéséhez legalább $2\Delta s$ távolság kell, ezért a Föld átlagos kerületét is figyelembe véve $M = 40000 \text{ km} / (2\Delta s) + 2000$.

V.3.10. EPS megjelenítési lehetőségek:

1. valamennyi EPS-tag térképes megjelenítése („bélyegalbum”, stamp charts);
2. a sokasági előrejelzés átlagának térképe (ensemble mean);
3. klaszterek felállítása (klaszterek kialakítása az EPS-tagokból, cluster charts);
4. egy kiválasztott elem néhány értékének térképes megjelenítése valamennyi EPS-tag alapján kontroll-előrejelzéssel, vagy anélkül, sokasági átlaggal vagy anélkül, éghajlati átlaggal vagy anélkül („spagettitérkép”, spaghetti plot);
5. a sokasági előrejelzés szórása; küszöbérték átlépésének valószínűsége;
6. egy kiválasztott elem várható időbeli menetének megjelenítése valamennyi EPS-tag alapján kontroll-előrejelzéssel, vagy anélkül, sokasági átlaggal vagy anélkül, éghajlati átlaggal vagy anélkül („fáklya”, plume);
7. egy adott elem sokasági előrejelzése a 25 és 75%-os kvartilisekkel, a mediánnal, az alap- és a kontroll-előrejelzéssel (EPS-meteogram).

VI. fejezet - Diszkontinuitási felületek a légkörben

VI.1. Légköri frontok

VI.1.1. A tropopauza felett a hőmérséklet változás abszolút értéke legalább 2 km-es rétegben 2 °C km^{-1} értéknél kisebb. A tropopauza szintjében a nyomás kisebb mint 500 hPa. Szintén megáll a hőmérséklet csökkenés a mezoszféra felső határán. Ezt a két réteghatárt a VI.1.2.d ábra szemlélteti. A sztratoszféra tetején áthaladva (sztratopauza) viszont a hőmérséklet növekedés szűnik meg. Ezt szemlélteti a VI.1.2.e ábra.. Ilyen az alakja a hőmérsékleti inverziós rétegződésnek is. A konvektív határréteg felső határán megjelenő hőmérsékleti ugrást a VI.1.2.c ábra, illetve a tipikus hideg- vagy melegfronti hőmérsékleti rétegződést a VI.1.2.a ábra, míg a felhőtető tipikus hőmérsékleti rétegződést a VI.1.2.b ábra mutatja. A VI.1.2.a ábra megfelel egy tipikus éjszakai inverziós helyzetnek is.

VI.1.2. Vizsgáljunk stacionárius, időben állandó frontfelületet!

$$\left[\left(\frac{\partial p}{\partial t} \right)_1 - \left(\frac{\partial p}{\partial t} \right)_2 \right] dt = 0$$

A frontfelület – az egyszerűség kedvéért – legyen párhuzamos az x tengellyel, vagyis az északi félgömbön a hideg levegő (1) északon, a meleg (2) délen helyezkedik el.

$$\left[\left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)_1 - \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)_2 \right] dx = 0$$

A nyomás nem változik, illetve a hideg és a meleg levegőben ugyanúgy változik az x tengely mentén. Egyszerűen számítható az ilyen stacionárius front hajlata – az y tengellyel bezárt (α) szöge –, pontosabban a hajlásszög

tangense $\left(\operatorname{tg} \alpha = \frac{dz}{dy} \right)$.

$$\frac{dz}{dy} = - \frac{\left[\left(\frac{\partial p}{\partial y} \right)_1 - \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right)_2 \right]}{\left[\left(\frac{\partial p}{\partial z} \right)_1 - \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right)_2 \right]}$$

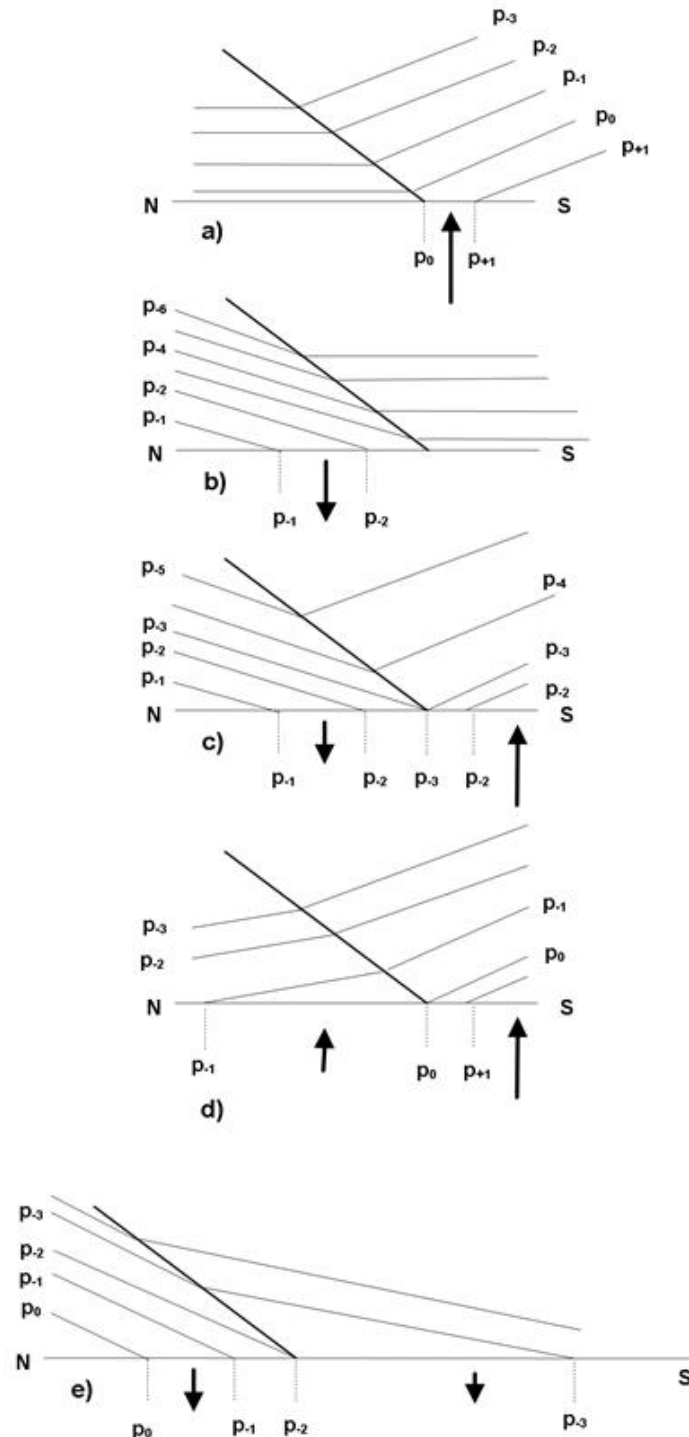
A sztatika alapegyenlete $0 < \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right) = -\rho g$ szerint a hideg levegőben (1) ugyanolyan magasságban nagyobb a sűrűség – tehát a nyomás jobban csökken a magassággal –, mint a (2) meleg levegőben.

$$\rho_1 > \rho_2 \quad \text{és} \quad \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right)_1 < \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right)_2 < 0$$

A frontfelület hajlata pozitív, $\frac{dz}{dy} > 0$. Ebből következik, hogy a horizontális nyomási gradiens a hideg levegőben nagyobb, mint a meleg levegőben. (Itt a horizontális nyomási gradiens értékéről nem pedig abszolút értékéről „beszélünk”.)

$$\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)_1 > \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)_2$$

Így a frontok nyomási teknőben helyezkednek el. A lehetséges nyomási képeket a *MVI.1.1. ábra* szemlélteti.



MVI.1.1. ábra. A nyomási és az áramlási mező főbb típusai frontfelületek mentén. A fronttól délre a meleg levegő, északra a hideg levegő helyezkedik el. (Dési és Rákóczi, 1970).

VI.1.3. Ha a stacionárius front az y tengellyel párhuzamos, akkor a kiindulási egyenletünk

$$\frac{dz}{dx} = - \frac{\left[\left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)_1 - \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)_2 \right]}{\left[\left(\frac{\partial p}{\partial z} \right)_1 - \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right)_2 \right]}.$$

Ekkor a geosztrófikus szélegyenlet $\frac{\partial p}{\partial x} = \rho f v_\varepsilon$ felhasználásával:

$$\frac{dz}{dx} = - \frac{f}{g} \frac{\rho_2 v_{\varepsilon 2} - \rho_1 v_{\varepsilon 1}}{\rho_1 - \rho_2},$$

ami az állapotegyenlet felhasználásával

$$\frac{dz}{dy} = - \frac{f}{g} \frac{T_1 v_{\varepsilon 2} - T_2 v_{\varepsilon 1}}{T_2 - T_1},$$

majd tovább alakítva:

$$\frac{dz}{dx} = - \frac{f}{g} \bar{T} \frac{v_{\varepsilon 2} - v_{\varepsilon 1}}{T_2 - T_1} + \frac{f}{g} \left(\frac{v_{\varepsilon 1} + v_{\varepsilon 2}}{2} \right) \approx - \frac{f}{g} \bar{T} \frac{v_{\varepsilon 2} - v_{\varepsilon 1}}{T_2 - T_1}.$$

Nézzük meg a frontfelület hajlatát az ageosztrófikus szél hatását is figyelembe véve. A horizontális mozgásegyenletek felhasználásával a nyomási gradiens:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho \frac{du}{dt} + \rho f v, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = -\rho \frac{dv}{dt} - \rho f u,$$

illetve az ageosztrófikus szél ($v_a = v - v_\varepsilon$, $u_a = u - u_\varepsilon$) bevezetésével

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho f v_a + \rho f v, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \rho f u_a - \rho f u.$$

Tekintsünk – ahogy a feladat első részében is – egy y tengellyel párhuzamos stacionárius frontot! A frontfelület egyensúlyi hajlata:

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dx} &= - \frac{\left[\left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)_1 - \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)_2 \right]}{\left[\left(\frac{\partial p}{\partial z} \right)_1 - \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right)_2 \right]} = - \frac{f}{g} \frac{\rho_2 v_2 - \rho_1 v_1}{\rho_1 - \rho_2} + \frac{1}{g} \frac{\rho_2 \frac{du_2}{dt} - \rho_1 \frac{du_1}{dt}}{\rho_1 - \rho_2} \\ &= - \frac{f}{g} \frac{T_1 v_2 - T_2 v_1}{T_2 - T_1} + \frac{1}{g} \frac{T_1 \frac{du_2}{dt} - T_2 \frac{du_1}{dt}}{T_2 - T_1}, \end{aligned}$$

illetve kihasználva, hogy $\left(\frac{du}{dt} = f v_a \right)$:

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{f}{g} \frac{T_1 v_2 - T_2 v_1}{T_2 - T_1} + \frac{f}{g} \frac{T_1 v_{a2} - T_2 v_{a1}}{T_2 - T_1}.$$

A frontfelület hajlata tehát egy adaléktaggal egészült ki, ami azt mutatja, hogy a hajlat függ a gyorsulás nagyságától és irányától, vagy másképp fogalmazva, az ageosztrofikus szélkomponens nagyságától és irányától.

VI.1.4. A frontok mérsékeltövi ciklonokhoz kötődnek. A front vonala haladjon párhuzamosan az izobárokkal (a ciklon középpontjától távol)! Kiindulási egyenletünk a gradiens szél:

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + f v_z + \frac{v_z^2}{r} = 0,$$

ahol r a vizsgált időjárási objektum (ciklon, vagy anticiklon) görbületi sugara, v_z az érintő irányú sebessége, míg $\frac{\partial p}{\partial r}$ a sugárirányú nyomási gradiens. Ciklonális rendszerben $v_z > 0$, $\frac{\partial p}{\partial r} > 0$; anticiklonális rendszerben $v_z < 0$, $\frac{\partial p}{\partial r} < 0$. Ilyen áramlási rendszerben az egyensúlyi hajlat:

$$\frac{dz}{dr} = -\frac{f}{g} \frac{\rho_2 v_{z2} - \rho_1 v_{z1}}{\rho_1 - \rho_2} - \frac{1}{gr} \frac{\rho_2 v_{z2}^2 - \rho_1 v_{z1}^2}{\rho_1 - \rho_2} = -\frac{f}{g} \frac{T_1 v_{z2} - T_2 v_{z1}}{T_2 - T_1} - \frac{1}{gr} \frac{T_1 v_{z2}^2 - T_2 v_{z1}^2}{T_2 - T_1}.$$

A kifejezés tovább alakítható, kihasználva az $(a^2 - b^2 = (a+b)(a-b))$ azonosságot:

$$\frac{dz}{dr} \approx -\frac{f \bar{T}}{g} \frac{v_{z2} - v_{z1}}{T_2 - T_1} \left(1 + \frac{v_{z2} + v_{z1}}{fr} \right).$$

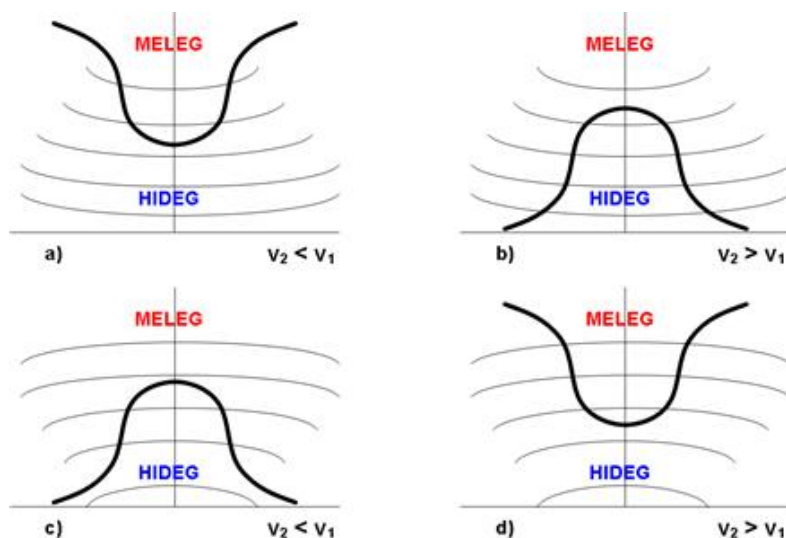
Az egyensúlyi hajlat ismét egy adaléktaggal tér el a Margules-féle formulától. Az adaléktag fordítottan arányos a görbülettel és a két levegőtömeg hőmérséklet különbségével, míg egyenesen arányos a két levegőtömeg szélsősebesség különbségével, illetve az átlagos szélsősebességgel, valamint a két légtömeg átlagos hőmérsékletével.

Jelölje az 1 index itt is a hideg, a 2 index a meleg levegőt. Az adatok behelyettesítése után:

a) $\frac{dz}{dr} \approx 2,1 \cdot 10^{-3}$.

b) $\frac{dz}{dr} \approx -2,1 \cdot 10^{-3}$.

VI.1.5. A kétszer rétegzett közeg ciklonális és anticiklonális forgását, s benne az eltérő sebességgel mozgó hideg és meleg levegőtömeg határfelületének elhelyezkedését az *MVI.1.2. ábra* szemlélteti. Ciklonális rendszerben $v_z > 0$, anticiklonban $v_z < 0$.



MVI.1.2. ábra. A ciklonális és az anticiklonális örvénylezés négy fő típusa kétszer rétegzett közegben. Az ábrán 1 – hideg; 2 – meleg levegő.

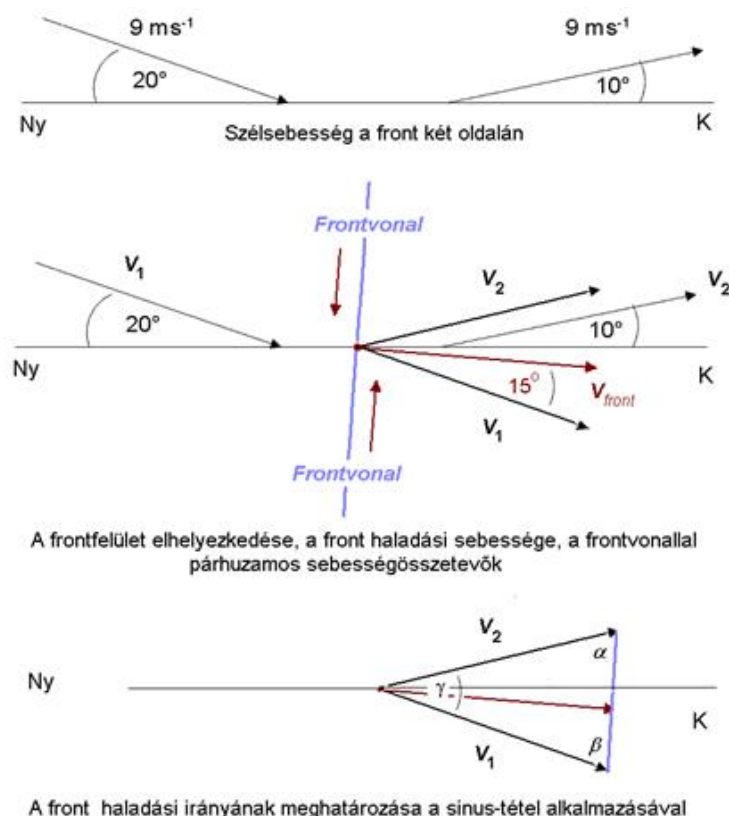
VI.1.6. A front vonala párhuzamos az y tengellyel. A Margules-féle egyensúlyi hajlat:

$$\frac{dz}{dx} \approx -\frac{f}{g} \bar{T} \frac{v_{\xi 2} - v_{\xi 1}}{T_2 - T_1} = -\frac{10^{-4}}{9,81} \cdot 271,15 \cdot \frac{3-8}{12} = 1,15 \cdot 10^{-3} = 0,066^\circ = 3,96'$$

VI.1.7. A front vonala párhuzamos az x tengellyel. $f(\varphi = 48^\circ) = 1,054 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ A Margules-féle egyensúlyi hajlat:

$$\frac{\partial z}{\partial y} \approx \frac{f}{g} \bar{T} \frac{u_{\xi 2} - u_{\xi 1}}{T_2 - T_1} = \frac{1,054 \cdot 10^{-4}}{9,81} \cdot 297,15 \cdot \frac{3 - (-5)}{8} = 3,2 \cdot 10^{-3} = 0,18^\circ = 10,8'$$

VI.1.8. Kihhasználjuk, hogy a front vonalára merőleges sebesség összetevő mindkét levegőtömegben ugyanakkora. az eltérés a frontra merőleges összetevőkben lesz. Toljuk közös kezdőpontba a két sebességvektort, majd a sinus-tételt kihasználva határozzuk meg a front haladási sebességét és irányát! A számításához a MVI.1.3. ábra nyújt segítséget. Ismert a két levegőtömegben (1) és (2) a szélssebesség és a adott a két vektor által bezárt szög (γ).



MVI.1.3. ábra. A hideg és a meleg levegő közös kezdőpontba hozott sebességvektora, s a front haladási sebességének meghatározása az így kapott háromszög magasságának a megadásával.

$$\frac{v_1}{\sin \alpha} = \frac{v_2}{\sin \beta}$$

Tudjuk, hogy $\alpha + \beta = 180^\circ - \gamma$, továbbá teljesül, hogy

$$\sin(180 - \gamma) = \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \sin \beta \cdot \cos \alpha \quad \text{és} \quad \cos \alpha = (1 - \sin^2 \alpha)^{1/2}$$

A fenti egyenletekből már meghatározható a front haladási sebessége és iránya, s megadható a frontvonal elhelyezkedése, ami merőleges a haladási sebességre. A front haladási iránya a két sebességvektor által kijelölt háromszög magassága lesz. Míg a front vonala a háromszög harmadik oldalával (a két közös pontba vitt sebességvektor végpontjait összekötő szakasszal) párhuzamos lesz.

a) a front haladási sebessége $8,75 \text{ m s}^{-1}$, a front haladási iránya -5° -kal tér el a keleti iránytól. Mivel mind a hideg, mind a meleg levegőben a szélesebbég nagysága megegyezik, a front haladási sebességét a két vektor által kijelölt egyenlő szárú háromszög magasságának a helyzetéből határozzuk meg.

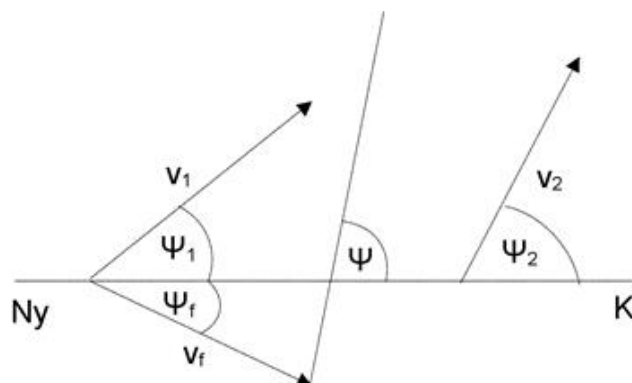
b) A front haladási sebessége $7,1 \text{ ms}^{-1}$, a haladási iránya délkeleti.

VI.1.9. A v_1 és a v_2 sebességvektor x tengellyel (keleti iránnyal) bezárt szöge legyen most ψ_1 és ψ_2 . A frontvonal x tengellyel bezárt szögét (ψ) határozzuk meg! Ebben segít a MVI.1.4. ábra.

$$\psi = \psi_2 = \arcsin \frac{v_1 \sin(\psi_2 - \psi_1)}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 - 2v_1v_2 \cos(\psi_2 - \psi_1)}}, \quad \psi_f = \psi - \frac{\pi}{2}$$

Megadhatjuk a front haladási sebességét is:

$$|v_f| = \frac{|v_1 v_2 \sin(\psi_2 - \psi_1)|}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 - 2v_1 v_2 \cos(\psi_2 - \psi_1)}}$$

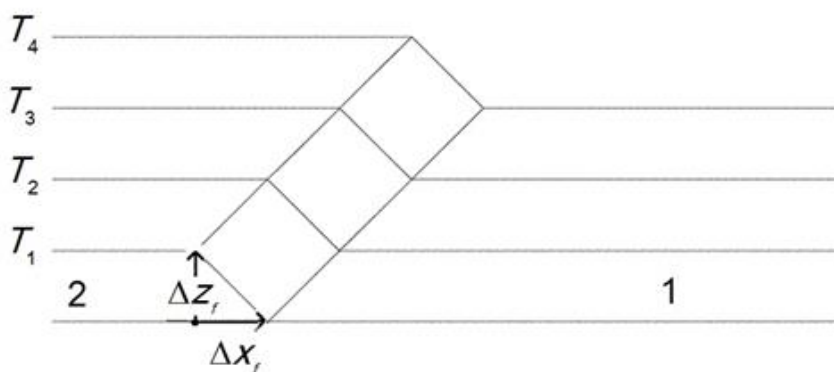


MVI.1.4. ábra. A frontfelület elhelyezkedése és a front haladási sebessége (v_1 és v_2 a két légtömegben mért szélvektor). A front haladási sebessége v_f , az x tengellyel bezárt szöge: ψ_f .

Az adatok behelyettesítése után a feladat megoldása: a) $\tan \alpha \approx 0,008 = 0,46^\circ = 27,6'$ a frontvonal hozzávetőlegesen 130° -os szöget zár be a keleti iránnyal. A front haladási sebessége hozzávetőlegesen 8 m s^{-1}

b) A front hajlata $\tan \alpha \approx 0,01 = 0,57^\circ = 34,2'$. A front vonala 30° -os szöget zár be a meridionális iránnyal.

VI.1.10. Tekintsük a frontfelületet egy kis vastagságú egyensúlyban lévő légrétegnek a MVI.1.5. ábra szerint!



MVI.1.5. ábra. Hőmérsékleti rétegződés a frontálzónában. A horizontális hőmérsékleti gradiens szélnyírást generál.

$$\tan \alpha = \frac{\Delta z_f}{\Delta x_f}$$

α a frontfelület hajlata.

A frontfelület vertikális metszetében a Δz_f rétegben a termikus széleget általános alakja:

$$\frac{\Delta u_\varepsilon}{\Delta z} = -\frac{g}{fT} \frac{\Delta T}{\Delta y} + \frac{\bar{u}_\varepsilon}{T} \frac{\Delta T}{\Delta z} \approx -\frac{g}{fT} \frac{\Delta T}{\Delta y}$$

$$\frac{\Delta v_g}{\Delta z} = \frac{g}{f\bar{T}} \frac{\Delta T}{\Delta x} + \frac{\bar{v}_g}{\bar{T}} \frac{\Delta T}{\Delta z} \approx \frac{g}{f\bar{T}} \frac{\Delta T}{\Delta x}$$

Az egyenletben $\Delta u_g, \Delta v_g$ a horizontális szélnyírás komponensei, $\bar{u}_g, \bar{v}_g$ az átlagos geosztrófikus szél komponensei a vizsgált Δz_F rétegben. Kihasnálva, hogy a frontálzóna vékony és mindkét levegőtömegben elhanyagolható a Δz_F rétegben bekövetkező szélsébség változás, kapjuk, hogy

$$\Delta u_g|_z = u_{g2} - u_{g1}, \quad \Delta v_g|_z = v_{g2} - v_{g1}.$$

Legyen az (x, z) síkmetszeten a frontális réteg koordináta-irányok szerinti vastagsága Δx_F és Δz_F (MVI.1.5. ábra).

A front vonala párhuzamos az y tengellyel. A front hajlatának a meghatározásában a front két oldalán mért

meridionális sebesség és a zonális hőmérséklet változás játszik szerepet. Ekkor $\frac{\Delta v_g}{\Delta z} \approx \frac{g}{f\bar{T}} \frac{\Delta T}{\Delta x}$, ahol $\Delta T|_x = -(T_2 - T_1)$.

A frontfelület hajlásszögének tangense $\frac{\Delta z_F}{\Delta x_F}$ geosztrófikus közelítés esetén a termikus szélegyenlet. Így a front hajlata:

$$\frac{\Delta z_F}{\Delta x_F} = -\frac{f\bar{T}}{g} \frac{v_{g2} - v_{g1}}{T_2 - T_1},$$

ami formailag megegyezik a Margules-féle formulával. A fenti összefüggés felhívja a figyelmet a frontfelületek alakja és a termikus szél közötti kapcsolatra. Ez érthető, hiszen barotróp légkörben nem lehetnek frontfelületek – nincs termikus szél.

VI.1.11. Jelöljük a $\mathbf{g}$ fizikai mennyiség frontfelület menti szakadását $[\mathbf{g}\mathbf{v}]$ -vel, azaz skalárértékű $\mathbf{g}$ esetén legyen

$$[\mathbf{g}\mathbf{v}] = g_1 v_1 - g_2 v_2,$$

vektor értékű esetén pedig

$$[\mathbf{g}\mathbf{v}]_j = [\mathbf{g} \circ \mathbf{v}]_j = g_{1i} v_{1j} - g_{2i} v_{2j},$$

ahol az 1 és 2 index fizikai mennyiségének a frontfelület adott pontjában a front egyik illetve másik oldalán felvett értékét jelenti. Az i és j összegző indexek. A feladat feltételének értelmében a frontfelület normálvektora $\mathbf{n}(1, 0, 0)$ azaz a front az (y, z) koordinátákkal párhuzamosan húzódik.

A frontfelületen keresztülhaladó tömegáramnak zérusnak kell lennie, azaz

$$[\rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}] = [\rho v_x] = 0,$$

$$\rho_1 v_{1x} - \rho_2 v_{2x} = 0.$$

Az energiamegmaradásra a $\rho_E = \frac{1}{2} \rho v^2 + \phi$ összefüggés alapján hasonló egyenlet írható fel:

$$[\rho_E \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}] = [\rho (\frac{1}{2} v^2 + \phi) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}] = [(\frac{1}{2} v^2 + \phi) \rho v_x] = 0,$$

amiből

$$(\frac{1}{2}\rho_1 v_1^2 + \rho_1 \phi_1) v_{1x} - (\frac{1}{2}\rho_2 v_2^2 + \rho_2 \phi_2) v_{2x} = 0,$$

ahol ϕ most a belsőenergia-sűrűség.

Az impulzusáram vektormennyiség, szakadási felület menti ugrása a $\rho_p = \rho v$ impulzussűrűséggel a

$$[(\rho_p \circ v) \cdot n]_i = [\rho v_i v_j n_j]$$

alakban írható fel. Ennek a mennyiségnek azonban csak akkor kell eltűnnie, ha az erőhatások ugrása is zérus a felület mentén. Lokális folyadékban csak a nyomásból származó erőnek lehet ugrása, ezért a feladatban adott feltételek mellett, az impulzusáramra vonatkozó feltételek a

$$[(p + \rho v_i v_j) n_j] = 0$$

alakot öltik, és az $n(1, 0, 0)$ és $v_j n_j = v_x$ miatt a

$$\begin{aligned} [p + \rho v_x^2] &= p_1 + \rho_1 v_{1x}^2 - p_2 - \rho_2 v_{2x}^2 = 0, \\ [\rho v_y v_x] &= \rho_1 v_{1y} v_{1x} - \rho_2 v_{2y} v_{2x} = 0, \\ [\rho v_z v_x] &= \rho_1 v_{1z} v_{1x} - \rho_2 v_{2z} v_{2x} = 0 \end{aligned}$$

komponensekre esnek szét.

VI.1.12. A tömegáramnak nem lehet szakadása a frontfelületen, az újabb feltétel csak annyiban jelent többletet, hogy megtiltja a tömegpontok átlépését egyik oldalról a másikra, azaz

$$v_{1x} = v_{2x} = 0$$

kell legyen. Ezzel az impulzusáramra vonatkozó első feltétel csak abban az esetben teljesülhet, ha $p_1 = p_2$.

VI.1.13. Ebben az esetben $v_{1x} \rho_1 - v_{2x} \rho_2 = 0$, de $v_{1x} \neq 0$ és $v_{2x} \neq 0$. Az impulzusáramra vonatkozó második és harmadik feltétel ez esetben a

$$(v_{1y} - v_{2y}) \alpha = 0,$$

$$\alpha = v_{1x} \rho_1 = v_{2x} \rho_2,$$

illetve

$$(v_{1z} - v_{2z}) \alpha = 0$$

alakot ölti, amiből $v_{1x} = v_{2x}$ és $v_{1z} = v_{2z}$.

Ebben az esetben a tömeg-, energia- és impulzusáramra vonatkozó feltételek a

$$[\rho v_x] = 0, [p + \rho v_x^2] = 0 \text{ és } \left[\frac{v_x^2}{2} + \phi \right] = 0$$

alakúak, ahol ϕ a belsőenergia-sűrűség. Ezeket a szakadásokat erős szakadásoknak nevezzük. Erős szakadások a lökéshullámokban jönnek létre, a meteorológiában nincsen szerepük.

VI.2. A tropopauza

VI.2.1. A Napból érkező sugárzási energia egy részét a sztratoszférikus ózonréteggel kapcsolatos fotokémiai folyamatok elnyelik, emiatt ebben a rétegben magasabb lesz a légkör hőmérséklete, mint közvetlenül a termikus tropopauza alatt.

VI.2.2. Három alapvető elmélet ismert:

1. a termikus, más szóval sztatikai elmélet szerint a hideg légtömeg összehúzódik, ezért fölötté alacsonyabb a tropopauza, a meleg légtömeg ezzel szemben kitágul, ezért fölötté magasabb a tropopauza (Gustav Stüve, 1926);
2. a kinematikai elmélet szerint a trópusi területek magas és a poláris területek alacsony tropopauzáját a közepes földrajzi szélességek szinoptikus képződményei, azaz az anticiklonok és a ciklonok előoldali és hátoldali áramlása szállítja északról délre, illetve délről északra (Jakob Bjerknes, 1933);
3. a dinamikai elmélet szerint a ciklonokban és az anticiklonokban megfigyelhető vertikális cirkuláció okozza a tropopauza beszívódását, azaz magasságának csökkenését, és kitolódását, azaz magasságának növekedését.

VI.2.3. A ciklon hideg oldalán.

VI.2.4. Mivel a termikus tropopauzában megszűnik a környezet hőmérsékletének csökkenése az emelkedő levegőrészecskéhez viszonyítva, ezért a tropopauza alsó szintjén megszűnik a felhajtó erő, azaz itt található a konvektív réteg elméleti felső határa. (Ez alapvetően meghatározza a konvektív felhők lehetséges legnagyobb vertikális kiterjedését és ezen keresztül a zivatarfelhőkben keletkező felhőelemek maximális méretét.)

VI.2.5. Természetes ok: időjárási frontok és vulkánkitörések esetén, valamint mesterséges, vagyis antropogén ok: pl. légköri atomrobbantások.

VI.2.6. Olyan anyagok jutnak a sztratoszférába, amelyeknek egyetlen forrása van a légkör szempontjából: a földfelszín. Ilyen anyagok például a vízgőz, a vulkáni por és hamu, továbbá az antropogén eredetű halogénezett szénhidrogének, más elnevezéssel a kloro-fluoro-karbon (CFC) vegyületek.

VI.2.7. A sztratoszférába jutó vulkáni por módosítja a légköri sugárzásátvitelt, és az éghajlat átmenti megváltozását idézheti elő. A sztratoszférába, majd onnan a mezoszférába jutó vízgőz hozza létre az éjszakai világító felhőket, a felszín közelében inertnek ismert halogénezett szénhidrogének pedig fotodisszociációs képességük révén hozzájárulnak a sztratoszférikus ózon – láncreakcióhoz hasonló módon történő – bontásához, azaz az úgynevezett ózonlyuk kialakulásához.

VI.2.8. Az állandó légkörrel nem rendelkező Merkúrt leszámítva valamennyi bolygó légkörében megfigyeltek izoterm és inverz rétegeket. Ezeket a bolygókon is troposzférának nevezik a felszín és az izoterm, vagy inverz réteg alsó határa közötti gázburkot, de az ottani troposzféra fölötti gázburkot inkább hasonlít a földi mezoszférához, mint a sztratoszférához. Ennek két oka is van: a többi bolygón nincs olyan fotokémiai folyamat, mint a földi ózonrétegben, más részből az izotermia vagy inverzió kialakulását a – főként metánból, nitrogénvegyületekből, és részben vízgőzből álló – felhők által kiváltott üvegházhatás hozza létre. A többi légkör „tropopauzája” leginkább a földi légkör mezopauzájához hasonlít. Sztratoszférája – eddigi ismereteink szerint – csak a földi légkörnek van.

VI.2.9. A tropopauza átlagos magassága mindkét félgömbben északról dél felé csökken a nyomási, és növekszik a magassági koordináta-rendszerben. A téli és a nyári félév között egyedül a poláris légtömegben van jelentős változás: nyáron számottevően emelkedik az érték. Az átlagos hőmérséklet a magasság növekedése miatt északról dél felé csökken. Télen a tropopauza alacsonyabb és nagyobb a változékonysága.

VI.2.10. A megfigyelési adatok alapján a 850 hPa-os főzobárszint hőmérsékletét ($t_{850 \text{ hPa}}$), valamint a tropopauza magasságát (p_t) és hőmérsékletét (t_t) az *MVI.2.1. táblázat* tartalmazza.

MVI.2.1. táblázat. A tropopauza szintje a TEMP táviratok adatai alapján.

		$t_{850 \text{ hPa}} (^{\circ}\text{C})$	$p_t \text{ (hPa)}$	$t_t (^{\circ}\text{C})$
Sodankyla	00 UTC	11,4	224	-56,3
	12 UTC	11,6	237	-55,7
Trappes	00 UTC	4,0	276	-52,1
	12 UTC	5,0	219	-59,5
Ajaccio	00 UTC	4,4	327	-47,7
	12 UTC	4,0	309	-45,5

Rögtön szembetűnik, hogy az alsó légrétegekben mennyivel melegebb van Lappföldön. A tropopauza elhelyezkedését tekintve azt látjuk, hogy a felület Franciaországban (Trappes 12 UTC-s mérését leszámítva) alacsonyabban van, akár a téli, akár a nyári átlagot nézzük. Lappföldön viszont épp fordított a helyzet, ott a tropopauza magassága meghaladja a sokévi átlagnak mind a téli, mind a nyári értékét. Ez is alátámasztja annak jogosságát, miért van ilyen nagy hőmérsékletkülönbség észak-déli irányban. A tropopauza hőmérsékleti értékei a sokévi átlag körül alakulnak, ami összefügg azzal, amit a tropopauza magasságával kapcsolatban megjegyeztünk.

VI.2.11. A tropopauza hajlata z -rendszerben:

$$\operatorname{tg} \theta_y = \frac{\frac{\partial T_1}{\partial y} - \frac{\partial T_2}{\partial y}}{\gamma_1 - \gamma_2},$$

ahol az 1-es index a troposzféra felső részére, a 2-es index a tropopauzára vonatkozik. A feladatban megadott adatok alapján:

$$\gamma_1 = 6,5 \cdot 10^{-3} \text{ K m}^{-1}; \gamma_2 = 0; \frac{\partial T_1}{\partial y} = -10^{-5} \text{ K m}^{-1}; \frac{\partial T_2}{\partial y} = 0.$$

A megadott adatokat behelyettesítve $\operatorname{tg} \theta_y = -0,001538$, amiből az egyensúlyi hajlatra $\theta_y = -0,088^{\circ}$ adódik. Ez azt jelenti, hogy a tropopauza észak felé haladva lefelé dől, ami megfelel meteorológiai ismereteinknek.

VI.2.12. A tropopauza hajlata z -rendszerben:

$$\operatorname{tg} \theta_y = \frac{\frac{\partial T_1}{\partial y} - \frac{\partial T_2}{\partial y}}{\gamma_1 - \gamma_2},$$

A feladatban megadott adatok alapján:

$$\gamma_1 = 3 \cdot 10^{-3} \text{ K m}^{-1}; \gamma_2 = 0; \frac{\partial T_1}{\partial y} = -3 \cdot 10^{-5} \text{ K m}^{-1}; \frac{\partial T_2}{\partial y} = 0.$$

A megadott adatokat behelyettesítve $\operatorname{tg} \theta_y = -0,01$, amiből az egyensúlyi hajlatra $\theta_y = -0,57^{\circ}$

adódik. Ez azt jelenti, hogy a tropopauza észak felé haladva lefelé dől, ami megfelel meteorológiai ismereteinknek.

A dőlés ismeretében kiszámítható a magasság változása 100 km-en: $\frac{\Delta h}{100 \text{ km}} = \operatorname{tg} \theta_y$, amiből $\Delta h = -1 \text{ km}$, azaz a tropopauza magassága 100 km-rel északabbra 10 800 m. A kapott nagy magasságkülönbséget az északi irányban történő erőteljes hűlés eredményezi.

VI.2.13. A 47. és az 50. szélességi körök közötti távolságkülönbség 333 km. A magasságkülönbségből kiszámítható a tropopauza hajlata:

$$\operatorname{tg} \theta_y = \frac{-700}{3,33 \cdot 10^5} = -2,1 \cdot 10^{-3}$$

A tropopauza hajlata z -rendszerben:

$$\operatorname{tg} \theta_y = \frac{\frac{\partial T_1}{\partial y} - \frac{\partial T_2}{\partial y}}{\gamma_1 - \gamma_2}$$

A feladatban megadott adatok alapján:

$$\gamma_1 = 10^{-2} \text{ K m}^{-1}; \gamma_2 = 0; \frac{\partial T_1}{\partial y} = \frac{-4}{3,33 \cdot 10^5} = -1,2 \cdot 10^{-5} \text{ K m}^{-1}$$

Az adatokat és a tropopauza korábban kiszámított hajlásszögét behelyettesítve a következő egyenletet kapjuk:

$$-2,1 \cdot 10^{-3} = \frac{-1,2 \cdot 10^{-5} \text{ K m}^{-1} - \frac{\partial T_2}{\partial y}}{10^{-2} \text{ K m}^{-1}},$$

amit a tropopauza horizontális hőmérsékleti gradiensére megoldva:

$$\frac{\partial T_2}{\partial y} = 9 \cdot 10^{-6} \text{ K m}^{-1},$$

azaz a hőmérséklet a tropopauzában észak felé haladva $0,9^\circ\text{C}$ -ot emelkedik 100 km-enként.

VI.2.14. A tropopauza hajlatának különbsége a z - és p -rendszerben kapott érték között:

$$\operatorname{tg} \theta_y - \operatorname{tg} \theta_{yp} = \frac{\left(\frac{\partial T_1}{\partial y}\right)_p - \left(\frac{\partial T_2}{\partial y}\right)_p}{\gamma_1 - \gamma_2}$$

A feladatban megadott adatok alapján:

$$\gamma_1 = 10^{-2} \text{ K m}^{-1}; \gamma_2 = 0; \left(\frac{\partial T_1}{\partial y}\right)_p = \frac{-7 \text{ K}}{5 \cdot 10^5 \text{ m}} = -1,4 \cdot 10^{-5} \text{ K m}^{-1}; \left(\frac{\partial T_2}{\partial y}\right)_p = 0$$

A megadott adatokat behelyettesítve

$$\operatorname{tg} \theta_y - \operatorname{tg} \theta_{yp} = -1,4 \cdot 10^{-3}$$

A 47. és az 50. szélességi körök közötti távolságkülönbség 333 km. A magasságkülönbségből kiszámítható a

tropopauza hajlata:

$$\operatorname{tg} \theta_y = \frac{-700}{3,33 \cdot 10^5} = -2,1 \cdot 10^{-3}$$

$$\operatorname{tg} \theta_y = \frac{\frac{\partial T_1}{\partial y} - \frac{\partial T_2}{\partial y}}{\gamma_1 - \gamma_2}$$

A tropopauza hajlata z -rendszerben:

A feladatban megadott adatok alapján:

$$\gamma_1 = 10^{-2} \text{ K m}^{-1}; \gamma_2 = 0; \frac{\partial T_1}{\partial y} = \frac{-4 \text{ K}}{3,33 \cdot 10^5 \text{ m}} = -1,2 \cdot 10^{-5} \text{ K m}^{-1}$$

Az adatokat és a tropopauza korábban kiszámított hajlásszögét behelyettesítve a következő egyenletet kapjuk:

$$-2,1 \cdot 10^{-3} = \frac{-1,2 \cdot 10^{-5} \text{ K m}^{-1} - \frac{\partial T_2}{\partial y}}{10^{-2} \text{ K m}^{-1}},$$

amit a tropopauza horizontális hőmérsékleti gradiensére megoldva:

$$\frac{\partial T_2}{\partial y} = 9 \cdot 10^{-6} \text{ K m}^{-1},$$

azaz a hőmérséklet a tropopauzában észak felé haladva $0,9 \text{ }^\circ\text{C}$ -ot emelkedik 100 km-enként.

VI.2.15. Az észak-déli irányú hőmérsékleti gradiens helyett ezúttal a ciklonból sugárirányban kifelé mutató hőmérsékletváltozás okozza a tropopauza magasságának változását. Annak érdekében, hogy az eddigi jelöléseinket használhassuk, tekintsük a ciklon déli pereme és középpontja közötti különbséget! Ekkor az eddig megszokott módon fennáll, hogy a hőmérsékleti gradiens délre mutat, a tropopauza pedig észak felé lejt.

A magasságváltozásból kiszámítható a tropopauza hajlata:

$$\text{tg } \theta_y = \frac{-1500}{10^5} = -1,5 \cdot 10^{-3}$$

A tropopauza hajlata z -rendszerben:

$$\text{tg } \theta_y = \frac{\frac{\partial T_1}{\partial y} - \frac{\partial T_2}{\partial y}}{\gamma_1 - \gamma_2},$$

A feladatban megadott adatok alapján:

$$\gamma_1 = 9,6 \cdot 10^{-3} \text{ K m}^{-1},$$

ami megfelel a száraz adiabatikus hőmérsékleti gradiensnek. A troposzféra vertikális hőmérsékletváltozása:

$$\gamma_2 = 0.$$

A troposzféra horizontális hőmérsékletváltozásának kiszámításához meg kell állapítanunk a ciklon pereme és középpontja közötti különbséget a troposzféra hőmérsékletében. Mivel a potenciális hőmérséklet a tropopauza mentén állandó, a hőmérsékletkülönbség a magasságkülönbségből származik, és a száraz adiabatikus hőmérsékleti gradiens szerint számolható:

$$\Delta T_2 = -1500 \text{ m} \cdot 9,6 \cdot 10^{-3} \text{ K m}^{-1} = -14,4 \text{ K}$$

A tropopauza horizontális hőmérsékleti gradiense tehát:

$$\frac{\partial T_2}{\partial y} = \frac{-14,4 \text{ K}}{10^5 \text{ m}} = -1,44 \cdot 10^{-5} \text{ K m}^{-1}$$

azaz 1,44 °C-ot csökken 100 km-enként. Az eddigi adatokat az egyensúlyi hajlásszög egyenletébe behelyettesítve:

$$-1,5 \cdot 10^{-3} = \frac{\frac{\partial T_1}{\partial y} + 1,44 \cdot 10^{-5} \text{ K m}^{-1}}{9,6 \cdot 10^{-3} \text{ K m}^{-1}}$$

amit a horizontális hőmérsékleti gradiensre megoldva

$$\frac{\partial T_1}{\partial y} = -2,88 \cdot 10^{-5} \text{ K m}^{-1}$$

azaz a hőmérséklet a ciklon belseje felé haladva 2,88 °C-ot csökken 100 km-enként. Az 1000 km sugarú ciklon pereme és középpontja között ennek alapján 28,8 °C a hőmérsékletkülönbség.

VI.3. A sugáráram (jet stream)

VI.3.1. A lokális Descartes-féle koordináta-rendszerben.

VI.3.2. 490 ms^{-1}

VI.3.3. A légkör, de csak a közepes földrajzi szélességeken.

VI.3.4. A földforgás eltérítő erejének változása, azaz a Coriolis-erő horizontális komponensének növekedése a pólusok irányában.

VI.3.5. A közepes földrajzi szélességeken a nyugati szél dominanciája jellemző, ezért hozta kontinensünk fölé a vulkáni port és hamut az áramlás. Az *Eyjafjallajökull* kitörése átszakította a tropopauzát, és a finom szemcsés vulkáni por és hamu megjelent kontinensünk csaknem teljes légkörében. Más izlandi vulkánok kitörései nem törnek át a tropopauzát, azok anyaga főként durva szemcsékből áll, ami viszonylag hamar kihullik, illetve kimosódik a troposzférából.

VI.3.6. A politikusok tanácsadói abban reménykedhettek, hogy a közepes földrajzi szélességek nyugati áramlása és a nyugatról keletre fújó polárfonti jet Szibéria irányába sodorja a radioaktív felhőt. (Megjegyzés: később az áramlás – a ritkán előforduló retrográd, azaz kelet-nyugati irányt vette, így jutottak el a kiüledő radioaktív részecskék előbb Észak-Európába, majd Lengyelországon át Közép-Kelet-Európába. Ezt a ritka időjárási helyzetet a szinoptikusok azóta is gyakran emlegetik Csernobil-helyzetnek.) A robbanás utáni szennyezőanyag felhő terjedését az erőmű térségében az *MVI.3.1. nagyfelbontású műholdkép* szemlélteti

VI.3.7. Feltételezve, hogy a ballon felbocsátásának helye és a célpont ugyanazon földrajzi szélességen fekszik, továbbá, hogy a polárfonti jet a Csendes-óceán fölött nem változtat irányt, a két partvidék távolsága 60 hosszúsági fokra becsülhető. Ez 8 000 km-nek felel meg egy loxodróma mentén. Ha a sugáráram sebessége

minimális, azaz éppen 25 ms^{-1} 25 ms^{-1} , akkor a kérdéses idő 90 óra.

VI.3.8. A következő legfontosabb megállapítások tehetők:

1. a polárfonti jet mind télen, mind nyáron sokkal erősebben meanderezik, mint a szubtrópusi jet;
2. a polárfonti jet hullámszáma mind télen, mind nyáron nagyobb, mint szubtrópusi jet hullámszáma;
3. a két sugáráram egymáshoz viszonyított távolsága függ mind az évszaktól, mind a meridiánoktól, azaz a földrajzi helytől, vagyis a tengerek és a szárazföldek eloszlásától.



MVI.3.1. ábra. Műholdfelvétel a radioaktív felhő terjedéséről a csernobili robbanás után (mesterséges színezés).

VII. fejezet - A légköri turbulencia

VII.1. Térbeli és időbeli átlagok

VII.1.1. a) Azonos átalakítások után:

$$\overline{X'Y} = \overline{X'(\tilde{Y} + Y')} = \overline{X'\tilde{Y} + X'Y'} = \overline{X'\tilde{Y}} + \overline{X'Y'} = \overline{X'\tilde{Y}} + \overline{X'Y'} = \overline{X'Y'}$$

b) $\overline{X''Y} = \overline{X''(\tilde{Y} + Y'')} = \overline{X''\tilde{Y} + X''Y''} = \overline{X''\tilde{Y}} + \overline{X''Y''} = \overline{X''\tilde{Y}} + \overline{X''Y''} = \overline{X''Y''}$

c) $\overline{\rho X''} = \overline{\rho(X - \tilde{X})} = \overline{\rho X} - \overline{\rho \tilde{X}}$. Kihasználva a súlyozott átlag definíciós egyenletét

$$X - X'' = \tilde{X} = \frac{\overline{\rho \tilde{X}}}{\rho}$$

és a súlyozott átlag átlagára vonatkozó összefüggést ($\tilde{X} = \tilde{X}$) kapjuk a bizonyításra váró kifejezéseket.

d) $\overline{\rho X''Y} = \overline{\rho X''(\tilde{Y} + Y'')} = \overline{\rho X''\tilde{Y} + \rho X''Y''} = \overline{\rho X''\tilde{Y}} + \overline{\rho(X - \tilde{X})\tilde{Y}} = \overline{\rho X''Y''}$, kihasználva a súlyozott átlag definícióját.

VII.1.2. a) Azonos átalakítások során, kihasználva az átlagolás tulajdonságait (az átlag és a súlyozott átlag értéke az átlagolás során nem változik):

$$\overline{\rho' X''} = \overline{\rho'(X - \tilde{X})} = \overline{\rho'(\bar{X} + X' - \tilde{X})} = \overline{\rho'(\bar{X} - \tilde{X})} + \overline{\rho' X'} = \overline{\rho' X'}$$

b) A meteorológiai állapothatározók súlyozott átlagra és attól vett eltérésre történő felbontása alapján:

$$\overline{\rho X \tilde{Y}} = \overline{\rho(\tilde{X} + X'') \cdot (\tilde{Y} + Y'')} = \overline{\rho \tilde{X} \tilde{Y}} + \overline{\rho X'' \tilde{Y}} + \overline{\rho \tilde{X} Y''} + \overline{\rho X'' Y''}$$

Kihasználva, hogy

$$(\tilde{X}'') = 0, \text{ s így } \overline{\rho X''} = 0 \text{ és } \overline{\rho Y''} = 0,$$

továbbá az átlagolás tulajdonságai miatt

$$\overline{\rho \tilde{X} \tilde{Y}} = \overline{\rho \tilde{X} \tilde{Y}}$$

kapjuk a bizonyítani kívánt állítást, ami a kovariancia számítás módszertanát adja meg súlyozott átlagolás esetén:

$$\overline{\rho X \tilde{Y}} = \overline{\rho \tilde{X} \tilde{Y}} + \overline{\rho X'' Y''}$$

c) Kihasználjuk, hogy $\overline{X \tilde{Y}} = \overline{X \tilde{Y}} + \overline{X' \tilde{Y}}$, illetve $X' = \tilde{X} + X'' = X'' - \overline{X''}$. Ezt felhasználva $X = \tilde{X} + X'' = X'' - \overline{X''} + \tilde{X}$, amit az első egyenletbe behelyettesítve kapjuk, hogy

$$\overline{X''Y''} = \overline{X''}\overline{Y''} + \overline{X'Y'} \quad \text{és így} \quad \overline{X''X''} \geq \overline{X'X'} > 0,$$

vagyis a Reynolds-féle átlagolás alkalmazásával – a súlyozott átlagolással összevetve – alábecsüljük a varianciát.

VII.1.3. Azonos átalakítások után kapjuk a bizonyításra váró összefüggést:

$$(\rho X)' = \rho X - \bar{\rho} \tilde{X} = (\bar{\rho} + \rho')(\tilde{X} + X'') - \bar{\rho} \tilde{X} = \bar{\rho} X'' + \rho' \tilde{X} + \rho' X'' \approx \bar{\rho} X'' + \rho' \tilde{X}.$$

VII.1.4. Az $X = \tilde{X} + X''$, $Y = \tilde{Y} + Y''$, $Z = \tilde{Z} + Z''$ helyettesítéssel, az átlagolási szabályok figyelembevételével, pl. $\overline{\rho X''} = 0$ adódik a megoldás.

VII.1.5. a) Tekintsük a kontinuitási egyenlet tér- és időbeli átlagolásra vonatkozó alakját:

$$\overline{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \rho \mathbf{V}} = 0$$

Az átlagolási szabályok figyelembevételével:

$$\overline{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \rho \mathbf{V}} = \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \text{div} \bar{\rho} \mathbf{V} = \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \text{div} \left((\bar{\rho} + \rho') \cdot (\tilde{\mathbf{V}} + \mathbf{V}'') \right) = \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \text{div} \bar{\rho} \tilde{\mathbf{V}}$$

Kihasználtuk, hogy $\overline{\rho \mathbf{V}''} = 0$ és $\overline{\rho' \tilde{\mathbf{V}}} = 0$.

b) A súlyozott átlagolás alkalmazásával:

$$\frac{1}{2} \overline{\rho V^2} = \frac{1}{2} \overline{(\rho(\tilde{V} + V''))^2} = \frac{1}{2} \overline{\rho[(\tilde{V})^2 + (V'')^2]} = \frac{1}{2} \bar{\rho}(\tilde{V})^2 + \frac{1}{2} \overline{\rho(V'')^2}$$

VII.1.6. Azonos átalakítások után: $(\rho X)' = (\bar{\rho} + \rho') \cdot (\tilde{X} + X'') - \bar{\rho} \tilde{X} \approx \bar{\rho} X'' + \rho' \tilde{X}$.

Abban az esetben ha a sűrűség fluktuáció szerepe elhanyagolható, $\frac{|\rho'|}{\bar{\rho}} \ll \frac{|\tilde{X}|}{\tilde{X}}$, akkor $(\rho X)' \approx \bar{\rho} X''$, azaz $X' \approx X''$, tehát $\rho X \approx \bar{\rho}(\tilde{X} + X')$.

Ha a sűrűség fluktuáció szerepe nem elhanyagolható, $\frac{|\rho'|}{\bar{\rho}} \gg \frac{|\tilde{X}|}{\tilde{X}}$, akkor $(\rho X)' \approx \rho' \tilde{X}$, azaz $X' < X''$, tehát $\rho X \approx \bar{\rho} \left(\tilde{X} + X'' \right)$. Természetesen minden esetben teljesül, hogy $\left(\frac{|\rho'|}{\bar{\rho}} \ll 1 \right)$.

A Boussinesq-féle folyadék esetén feltételezzük tehát, hogy vertikális elmozdulások esetén nem

hanyagolható el a sűrűség fluktuáció. Például: $\frac{|\rho'|}{\bar{\rho}} \gg \frac{|w''|}{\tilde{w}}$, vagyis $(\rho w)' \approx \bar{\rho} w''$ és $\rho w \approx \bar{\rho} \left(\tilde{w} + w'' \right)$, illetve: $\frac{|\rho'|}{\bar{\rho}} \gg \frac{|T''|}{\tilde{T}}$, vagyis $(\rho T)' \approx \bar{\rho} T''$ és $\rho T \approx \bar{\rho} \left(\tilde{T} + T'' \right)$. A második momentumokra pedig teljesül:

$$\left| \overline{\rho X Y} - \bar{\rho} \tilde{X} \tilde{Y} \right| = \left| \overline{\rho X'' Y''} \right| \approx \left| \bar{\rho} \overline{X'' Y''} \right| > \left| \bar{\rho} \overline{X' Y'} \right|$$

A hőmérséklet turbulens áramára vonatkoztatva:

$$\left| \overline{\rho T'' w''} \right| \approx \left| \bar{\rho} \overline{T'' w''} \right| > \left| \bar{\rho} \overline{T' w'} \right|$$

Megjegyezzük, hogy a Boussinesq-féle közelítés sem adja meg a súlyozott átlagok feltételezésével számított momentumok pontos értékét, de az elhanyagolás a számított áramoknál két nagyságrenddel kisebb tagra vonatkozik.

$$\left| \overline{\rho' T'' w''} \right| < \left| \bar{\rho} \overline{T'' w''} \right|$$

VII.1.7. Adott az $X_i, i=1, \dots, N$ mért meteorológiai állapotjelző és az $a_i, i=1, \dots, N$ súlytényező (általában a sűrűség) időszora. Az átlag és a súlyozott átlag alakja:

$$\bar{X} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i, \quad \tilde{X} = \frac{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N a_i X_i}{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N a_i} = \frac{\overline{aX}}{\bar{a}}$$

A hőmérséklet súlyozott átlagának a meghatározásánál az entalpia fogalomból indulunk ki $H_i = \rho_i c_{pi} T_i, i=1, \dots, N$, a súlytényező pedig $a_i = \rho_i c_{pi}, i=1, \dots, N$.

$$\tilde{T} = \frac{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \rho_i c_{pi} T_i}{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \rho_i c_{pi}} = \frac{\overline{\rho c_p T}}{\overline{\rho c_p}}$$

Állandó specifikus gázállandó ($c_p \equiv c_{pi}$) feltételezésével (pl. eltekintünk a nedvességfluktuáció hatásától):

$$\tilde{T} = \frac{\overline{\rho T}}{\bar{\rho}}$$

Az állapotegyenlet átlagolásával a súlyozott a kétfajta hőmérsékleti átlag közötti kapcsolat:

$$\tilde{T} = \bar{T} + \frac{\overline{\rho' T'}}{\bar{\rho}}$$

Megjegyezzük, hogy a termodinamikai állapotegyenlet – természetesen – teljesül a súlyozott átlagokra is:

$$\tilde{p} = \tilde{\rho} R_a \tilde{T}$$

Hasonló módon számíthatjuk a sebesség $\tilde{u}$ súlyozott átlagát.

$$\tilde{u} = \frac{\overline{\rho u}}{\bar{\rho}} = \bar{u} + \frac{\overline{\rho' u'}}{\bar{\rho}}$$

A specifikus nedvesség (koncentráció) súlyozott átlagát a $q_i = \frac{\rho_{vi}}{\rho_i}$, $i = 1, \dots, N$ definíciós egyenlet alapján számíthatjuk, ahol ρ_{vi} a vízgőz sűrűsége.

$$\tilde{q} = \frac{\overline{\rho_v}}{\overline{\rho}} = \frac{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \rho_{vi}}{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \rho_i} = \frac{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \rho_i q_i}{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \rho_i} = \frac{\overline{\rho q}}{\overline{\rho}} = \overline{q} + \frac{\overline{\rho' q'}}{\overline{\rho}}$$

Megjegyezzük, hogy $\overline{q} \neq \frac{\overline{\rho_v}}{\overline{\rho}}$.

VII.1.8. Az átlaghőmérséklet: $\overline{T} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N T_i$, ahol $N \rightarrow \infty$ az esetszám. $\overline{T} = 10,5^\circ\text{C}$.

A VII.1.7. feladat megoldása alapján: $\tilde{T} = \overline{T} + \frac{\overline{\rho' T'}}{\overline{\rho}}$. A levegő átlagos sűrűsége

$$\overline{\rho} = \tilde{\rho} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \rho_i = 1,2285 \text{ kg m}^{-3}$$

ahol a sűrűség $\rho_i = \frac{p}{R_a T_i}$ alternáló időszora:

$$\rho_1 = 1,231 \text{ kg m}^{-3}, \rho_2 = 1,226 \text{ kg m}^{-3}, \rho_3 = 1,231 \text{ kg m}^{-3}, \dots$$

A hőmérséklet és a sűrűség fluktuáció adatsoraiból $\overline{\rho' T'} = -1,25 \cdot 10^{-3}^\circ\text{C}$. A kétfajta átlagolás között az eltérés ezred fokos nagyságrendű. A súlyozott átlaghőmérséklet a kisebb. A különbség elhanyagolható.

A súlyozott átlagolás az adott térfogatban lévő egységnyi tömegű levegő entalpiáját hasonlítja össze (a fajhő (c_p) állandóságával számolva).

VII.1.9. A feladatot kézzel is kiszámíthatjuk, de egyszerűen megoldható pl. excel táblázatkezelővel is.

$$\overline{T} = 9,94^\circ\text{C}, \tilde{T} = 9,9397^\circ\text{C}, \overline{w} = -2 \text{ cm s}^{-1}, \overline{w' T'} = 0,0242 \text{ K m s}^{-1}, \overline{w'' T''} = 0,02422 \text{ K m s}^{-1}$$

A kétféle kovariancia közötti eltérés 0,1%-on belüli, azaz gyakorlati számításoknál elhanyagolható.

VII.1.10. A három sebességkomponens átlagértékei:

$$\overline{u} = 1,47 \text{ m s}^{-1}, \overline{v} = 2,36 \text{ m s}^{-1}, \overline{w} = 0,9 \text{ cm s}^{-1}$$

A kovariancia mátrix alakja, s értékei a torzítatlan becslés formulájával:

$$\text{cov} V = \begin{pmatrix} \overline{u'u'} & \overline{u'v'} & \overline{u'w'} \\ \overline{v'u'} & \overline{v'v'} & \overline{v'w'} \\ \overline{w'u'} & \overline{w'v'} & \overline{w'w'} \end{pmatrix} = \frac{8}{7} \begin{pmatrix} 0,0110 & 0,0075 & -0,0072 \\ 0,0075 & 0,0073 & -0,0064 \\ -0,0072 & -0,0064 & 0,0098 \end{pmatrix} [\text{m}^2 \text{s}^{-2}].$$

VII.2 Alkalmazott egyenletek, főbb egyszerűsítések, lezárási hipotézisek

VII.2.1. Kiindulási egyenletünk az átlagos potenciális hőmérséklet időbeli változását leíró összefüggés. Ez egy differenciál egyenlet, de mögötte mindig egy térrészt képzelünk el, ahol a változások bekövetkeznek.

$$\frac{d\bar{\theta}}{dt} = \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t} + \bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla \bar{\theta} = \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t} + u \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x} + v \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial y} + w \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} = - \left(\frac{\partial}{\partial x} \overline{u'\theta'} + \frac{\partial}{\partial y} \overline{v'\theta'} + \frac{\partial}{\partial z} \overline{w'\theta'} \right) + \nu_{\theta} \Delta \bar{\theta} + \bar{Q}$$

Nincs

- potenciális hőmérsékleti advekcio $-\left(u \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x} + v \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial y}\right)$,
- konvekció $-w \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} = 0$,
- nem-adiabatikus hőbevétel, vagy kiadás
- $\frac{d\bar{\theta}}{dt} = \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t} + \bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla \bar{\theta} = \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t} + u \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x} + v \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial y} + w \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} = - \left(\frac{\partial}{\partial x} \overline{u'\theta'} + \frac{\partial}{\partial y} \overline{v'\theta'} + \frac{\partial}{\partial z} \overline{w'\theta'} \right) + \nu_{\theta} \Delta \bar{\theta} + \bar{Q}$,
- molekuláris diffúzió $\nu_{\theta} \Delta \bar{\theta} = 0$.
- A turbulencia horizontálisan homogén és izotróp $\left(\frac{\partial}{\partial x} \overline{u'\theta'} + \frac{\partial}{\partial y} \overline{v'\theta'} \right) = 0$.

a) A potenciális hőmérséklet lokális változását a turbulens áram divergencia kormányozza. Megadja, hogy „mennyi hó marad” az adott térrészben.

$$\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial z} \overline{w'\theta'} = b$$

Az integrálás elvégzése után:

$$\bar{\theta} = \bar{\theta}_0 + bt$$

A számértékek behelyettesítésével $\bar{\theta} \cong 1,1 \text{ K}$.

b) Ha a fluxus-divergenciát az advekcio okozza, akkor a kormányzó egyenletünk:

$$\nu_h \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial n} = - \frac{\partial}{\partial z} \overline{w'\theta'} = b$$

ahol $\nu_h = 5 \text{ m s}^{-1}$ a horizontális sebesség, $\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial n}$ pedig a potenciális hőmérséklet szélirányba eső megváltozása. Az egyenlet rendezése után:

$$\frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial n} = \frac{b}{v_h} = \frac{3 \cdot 10^{-4} \text{ K s}^{-1}}{5 \text{ m s}^{-1}} = 0,6 \cdot 10^{-4} \text{ K m}^{-1}$$

Az 1 km-re jutó, s folyamatosan fennmaradó potenciális hőmérséklet különbség $\Delta \bar{\Theta} = 0,06 \text{ K}$, ami nem nagy érték.

VII.2.2. Az egyszerűség kedvéért válasszuk meg a koordináta-rendszerünket úgy, hogy a szél az x-koordináta irányában fújjon. A passzív nyomanyagra kapott egyenletet felírhatjuk a keveredési arányra (q) is – az egyszerűsítések figyelembe vételével – a következő alakban:

$$-u \frac{\partial \bar{q}}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial z} \overline{w'q'}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \overline{w'q'} = -5 \cdot 10^{-4} \text{ g kg}^{-1} \text{ s}^{-1}$$

$0,25 \text{ g kg}^{-1} \text{ m s}^{-1}$ vertikális specifikus nedvesség fluxus csökkenést jelez, ami nagy érték.

Az általunk vizsgált légréteg egyik lapját a szélirányába fordítjuk. Az áramló levegő 1 óra alatt 36 km-es utat tesz meg. Ha csak advekción van, akkor ehhez az úthosszhoz $\Delta \bar{q} = 0,36 \cdot 5 \text{ g kg}^{-1} = 1,8 \text{ g kg}^{-1}$ specifikus nedvességekülönbség tartozik. Ennek az átlagértéke $0,9 \text{ g kg}^{-1}$. Így 1 m^2 -es felületen 36 km-es szakasszal és 1 kg m^{-3} levegősűrűséggel számolva 1 óra alatt $0,9 \cdot 10^{-3} \text{ kg kg}^{-1} \cdot 1 \text{ kg m}^{-3} \cdot 36 \cdot 10^3 \text{ m} = 27 \text{ kg m}^{-2}$ vízgőz áramlik be az egységnyi felületen. A teljes vizsgált felületen $10^3 \cdot 5 \cdot 10^2 \text{ m}^2 = 5 \cdot 10^5 \text{ m}^2$ 1 óra alatt beáramló vízgőz, ami aztán a hasáb felső oldallapján el is távozik az egyszerűsített modellünkben mindösszesen

$10,8 \cdot 10^6 \text{ kg}$, ami megdöbbentően nagy érték. Ez vízgőz fluxusra számítva az 1 km^2 -es felületen:

$$\frac{10,8 \cdot 10^6 \text{ kg}}{10^6 \text{ m}^2 \cdot 3600 \text{ s}} = 3 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^{-2} \text{ s}^{-1} = 3 \text{ g m}^{-2} \text{ s}^{-1}$$

, ami nagy érték.

VII.2.3. Az átlagértékekre vonatkozó három mozgásegyenletet $\bar{u}_k$ -val szorozva azt kapjuk, hogy:

$$\bar{u}_k \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_k \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = f \varepsilon_{ij3} \bar{u}_k \bar{u}_j - \delta_{i3} \bar{u}_k g - \bar{u}_k \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \bar{u}_k \nu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j^2} - \bar{u}_k \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{u_i' u_j'}$$

Az i és k indexek permutálásával a következő egyenletek adódnak:

$$\bar{u}_i \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial t} + \bar{u}_i \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_j} = f \varepsilon_{kj3} \bar{u}_i \bar{u}_j - \delta_{k3} \bar{u}_i g - \bar{u}_i \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_k} + \bar{u}_i \nu \frac{\partial^2 \bar{u}_k}{\partial x_j^2} - \bar{u}_i \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{u_k' u_j'}$$

A fenti egyenletek összeadása után:

$$\begin{aligned} \bar{u}_k \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_i \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial t} + \bar{u}_k \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \bar{u}_i \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_j} &= f \varepsilon_{ij3} \bar{u}_k \bar{u}_j + f \varepsilon_{kj3} \bar{u}_i \bar{u}_j - \\ - \delta_{i3} \bar{u}_k g - \delta_{k3} \bar{u}_i g - \bar{u}_k \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} - \bar{u}_i \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_k} &+ \bar{u}_k \nu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j^2} + \bar{u}_i \nu \frac{\partial^2 \bar{u}_k}{\partial x_j^2} - \bar{u}_k \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{u_i' u_j'} - \bar{u}_i \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{u_k' u_j'}, \end{aligned}$$

Kihasználva azt, hogy:

$$\overline{u_k} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial t} + \overline{u_i} \frac{\partial \overline{u_k}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \overline{u_i u_k}$$

és

$$\overline{u_k u_j} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \overline{u_i u_j} \frac{\partial \overline{u_k}}{\partial x_j} = \overline{u_k} \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{u_i u_j} - \overline{u_k u_i} \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_j} + \overline{u_i u_j} \frac{\partial \overline{u_k}}{\partial x_j}$$

Kihasználva az összenyomhatatlan közeg kontinuitási egyenletét, miszerint $\frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_j} = 0$, a következő összefüggés adódik

$$\overline{u_k u_j} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \overline{u_i u_j} \frac{\partial \overline{u_k}}{\partial x_j} = \overline{u_k} \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{u_i u_j} + \overline{u_i u_j} \frac{\partial \overline{u_k}}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{u_i u_j u_k}$$

Teljesül továbbá, hogy

$$\overline{u_k} \frac{\partial^2 \overline{u_i}}{\partial x_j^2} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\overline{u_k} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} \frac{\partial \overline{u_k}}{\partial x_j} \quad \text{és} \quad \overline{u_i} \frac{\partial^2 \overline{u_k}}{\partial x_j^2} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\overline{u_i} \frac{\partial \overline{u_k}}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial \overline{u_k}}{\partial x_j} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j},$$

valamint

$$\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \overline{u_i u_k} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\overline{u_k} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\overline{u_i} \frac{\partial \overline{u_k}}{\partial x_j} \right)$$

A fentiek alapján az második momentumra vonatkozó egyenlet áttekinthetőbb alakba írható:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \overline{u_i u_k} + \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{u_i u_j u_k} &= f \varepsilon_{ij3} \overline{u_k u_j} + f \varepsilon_{kj3} \overline{u_i u_j} - \\ &- \delta_{i3} \overline{u_k g} - \delta_{k3} \overline{u_i g} - \overline{u_k} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} - \overline{u_i} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{p}}{\partial x_k} + \nu \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \overline{u_i u_k} - 2\nu \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} \frac{\partial \overline{u_k}}{\partial x_j} - \overline{u_k} \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{u_i u_j} - \overline{u_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{u_k u_j}. \end{aligned}$$

Az i és k indexek kiegyenlítése után:

$$\frac{\partial}{\partial t} \overline{u_i^2} + \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{u_i^2 u_j} = 2f \varepsilon_{ij3} \overline{u_i u_j} - 2\delta_{i3} \overline{u_i g} - 2\frac{\overline{u_i}}{\rho} \frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \overline{u_i^2} - 2\nu \left(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} \right)^2 - 2\overline{u_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{u_i u_j},$$

Az összegzés elvégzése után a jobb oldalon található első tag nullával lesz egyenlő

$$2f \varepsilon_{ij3} \overline{u_i u_j} = 2f \varepsilon_{123} \overline{u_1 u_2} + 2f \varepsilon_{213} \overline{u_2 u_1} = 0$$

Ez érthető, hiszen a Coriolis-erő – lévén kényszererő – nem végez munkát. Továbbá tudjuk, hogy:

$$\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \overline{u_i^2} = 2 \left(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} \right)^2 + 2\overline{u_i} \frac{\partial^2 \overline{u_i}}{\partial x_j^2}$$

és

$$\overline{u_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{u_i' u_j'} = \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{u_i u_i' u_j'} - \overline{u_i' u_j'} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j}.$$

Végeredményként a következő egyenletet kapjuk:

$$\frac{\partial E_k}{\partial t} + \overline{u_j} \frac{\partial E_k}{\partial x_j} = -\delta_{i3} \overline{u_i g} - \frac{\overline{u_i}}{\rho} \frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} + \nu \overline{u_i} \frac{\partial^2 \overline{u_i}}{\partial x_j^2} + \overline{u_i' u_j'} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{u_i u_i' u_j'},$$

VII.2.4. A fluktuációkra vonatkozó egyenletet u_k' -vel szorozva a következő egyenletet kapjuk:

$$u_k' \frac{\partial u_i'}{\partial t} + u_k' \overline{u_j} \frac{\partial u_i'}{\partial x_j} + u_k' u_j' \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + u_k' u_j' \frac{\partial u_i'}{\partial x_j} = f \varepsilon_{ij3} u_k' u_j' + \delta_{i3} g u_k' \frac{\Theta'}{\Theta} - \frac{u_k'}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x_i} + \nu u_k' \frac{\partial^2 u_i'}{\partial x_j^2} + u_k' \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{u_i' u_j'}.$$

A fenti egyenletben az i és k indexeket felcserélve és a kapott egyenletet a fentivel összeadva azt kapjuk, hogy:

$$\begin{aligned} u_k' \frac{\partial u_i'}{\partial t} + u_i' \frac{\partial u_k'}{\partial t} + u_k' \overline{u_j} \frac{\partial u_i'}{\partial x_j} + u_i' \overline{u_j} \frac{\partial u_k'}{\partial x_j} + u_k' u_j' \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + u_i' u_j' \frac{\partial \overline{u_k}}{\partial x_j} + u_k' u_j' \frac{\partial u_i'}{\partial x_j} + u_i' u_j' \frac{\partial u_k'}{\partial x_j} = \\ = f \varepsilon_{ij3} u_k' u_j' + f \varepsilon_{ki3} u_i' u_j' + \delta_{i3} g u_k' \frac{\Theta'}{\Theta} + \delta_{k3} g u_i' \frac{\Theta'}{\Theta} - \frac{u_k'}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x_i} - \frac{u_i'}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x_k} + \nu u_k' \frac{\partial^2 u_i'}{\partial x_j^2} + \nu u_i' \frac{\partial^2 u_k'}{\partial x_j^2} + \\ + u_k' \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{u_i' u_j'} + u_i' \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{u_k' u_j'}. \end{aligned}$$

Kihasználva, hogy:

$$u_k' \frac{\partial u_i'}{\partial t} + u_i' \frac{\partial u_k'}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} u_i' u_k',$$

$$u_k' \overline{u_j} \frac{\partial u_i'}{\partial x_j} + u_i' \overline{u_j} \frac{\partial u_k'}{\partial x_j} = \overline{u_j} \frac{\partial}{\partial x_j} u_i' u_k',$$

$$u_k' u_j' \frac{\partial u_i'}{\partial x_j} + u_i' u_j' \frac{\partial u_k'}{\partial x_j} = u_k' \frac{\partial}{\partial x_j} u_i' u_j' + u_i' \frac{\partial}{\partial x_j} u_k' u_j' = \frac{\partial}{\partial x_j} u_i' u_j' u_k',$$

továbbá tudjuk, hogy

$$u_i' \frac{\partial p'}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} p' u_i' - p' \frac{\partial u_i'}{\partial x_k}, \text{ valamint } \frac{\partial}{\partial x_j} \left(u_k' \frac{\partial u_i'}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial u_k'}{\partial x_j} \frac{\partial u_i'}{\partial x_j} + u_k' \frac{\partial^2 u_i'}{\partial x_j^2}$$

és ezért

$$u_k' \frac{\partial^2 u_i'}{\partial x_j^2} + u_i' \frac{\partial^2 u_k'}{\partial x_j^2} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(u_k' \frac{\partial u_i'}{\partial x_j} + u_i' \frac{\partial u_k'}{\partial x_j} \right) - 2 \frac{\partial u_i'}{\partial x_j} \frac{\partial u_k'}{\partial x_j} = \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} u_i' u_k' - 2 \frac{\partial u_i'}{\partial x_j} \frac{\partial u_k'}{\partial x_j}.$$

A fentiek alapján:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \overline{u_i' u_k'} + \overline{u_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{u_i' u_k'} + \overline{u_k' u_j} \frac{\partial \overline{u_i'}}{\partial x_j} + \overline{u_i' u_j} \frac{\partial \overline{u_k'}}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{u_i' u_j' u_k'} = f \varepsilon_{ij3} \overline{u_k' u_j'} + f \varepsilon_{kj3} \overline{u_i' u_j'} + \\ + \delta_{i3} \overline{g u_k'} \frac{\Theta'}{\Theta} + \delta_{k3} \overline{g u_i'} \frac{\Theta'}{\Theta} - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \overline{p' u_k'} - \overline{p' \frac{\partial u_k'}{\partial x_i}} + \frac{\partial}{\partial x_k} \overline{p' u_i'} - \overline{p' \frac{\partial u_i'}{\partial x_k}} \right) + \\ + \nu \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \overline{u_i' u_k'} - 2\nu \frac{\partial \overline{u_i'}}{\partial x_j} \frac{\partial \overline{u_k'}}{\partial x_j} + \overline{u_k'} \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{u_i' u_j'} + \overline{u_i'} \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{u_k' u_j'}. \end{aligned}$$

Az átlagolás elvégzése után:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \overline{u_i' u_k'} + \overline{u_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{u_i' u_k'} = -\overline{u_i' u_j} \frac{\partial \overline{u_k'}}{\partial x_j} - \overline{u_k' u_j} \frac{\partial \overline{u_i'}}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{u_i' u_j' u_k'} + \frac{g}{\Theta} (\delta_{k3} \overline{u_i' \Theta'} + \delta_{i3} \overline{u_k' \Theta'}) + \\ + f (\varepsilon_{ij3} \overline{u_i' u_j'} + \varepsilon_{ij3} \overline{u_k' u_j'}) - \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial x_i} \overline{p' u_k'} + \frac{\partial}{\partial x_k} \overline{p' u_i'} - \overline{p' \left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k'}{\partial x_i} \right)} \right] + \\ + \nu \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \overline{u_i' u_k'} - 2\nu \frac{\partial \overline{u_i'}}{\partial x_j} \frac{\partial \overline{u_k'}}{\partial x_j}. \end{aligned}$$

A Coriolis-féle tag nullával lesz egyenlő – a kényszererő nem végez munkát.

$$2f \varepsilon_{ij3} \overline{u_i' u_j'} = 2f \varepsilon_{123} \overline{u_1' u_2'} + 2f \varepsilon_{213} \overline{u_2' u_1'} = 0.$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \overline{u_i' u_k'} + \overline{u_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{u_i' u_k'} = -\overline{u_i' u_j} \frac{\partial \overline{u_k'}}{\partial x_j} - \overline{u_k' u_j} \frac{\partial \overline{u_i'}}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{u_i' u_j' u_k'} + \\ + \frac{g}{\Theta} (\delta_{k3} \overline{u_i' \Theta'} + \delta_{i3} \overline{u_k' \Theta'}) + \frac{p'}{\rho} \left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k'}{\partial x_i} \right) - 2\varepsilon_{u_i u_k}. \end{aligned}$$

Az úgynevezett nyomás-diffúziót és a molekuláris diffúziót leíró tag elhanyagolható a többihez viszonyítva. Ezért azt kapjuk, hogy:

ahol $\varepsilon_{u_i u_k} = \nu \frac{\partial \overline{u_i'}}{\partial x_j} \frac{\partial \overline{u_k'}}{\partial x_j}$ a disszipációs tag.

Az i és a k indexek kiegyenlítésével azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \overline{u_i'^2} + \overline{u_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{u_i'^2} = -2\overline{u_i' u_j} \frac{\partial \overline{u_i'}}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{u_i'^2 u_j'} + 2 \frac{g}{\Theta} \delta_{i3} \overline{u_i' \Theta'} + \frac{2}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} \overline{u_i' p'} - 2\varepsilon_{u_i u_i} \\ \bar{e} = \frac{\overline{u_i'^2}}{2} \end{aligned}$$

A turbulens kinetikus energia definíció szerint: $\bar{e} = \frac{\overline{u_i'^2}}{2}$. Ennek felhasználásával a turbulens kinetikus energia időbeli megváltozása:

$$\frac{\partial \bar{e}}{\partial t} + \overline{u_j} \frac{\partial \bar{e}}{\partial x_j} = -\overline{u_i' u_j} \frac{\partial \overline{u_i'}}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{u_j' \bar{e}} + \frac{g}{\Theta} \delta_{i3} \overline{u_i' \Theta'} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} \overline{u_i' p'} - \varepsilon_{u_i u_i}$$

VII.2.5. A potenciális hőmérséklet fluktuációjára kapott egyenletet $2\Theta'$ -vel szorozva azt kapjuk, hogy

$$\frac{\partial \Theta'^2}{\partial t} + u_j \frac{\partial \Theta'^2}{\partial x_j} + 2\Theta' u_j \frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial x_j} + u_j \frac{\partial \Theta'^2}{\partial x_j} = 2\Theta' \nu_\theta \frac{\partial^2 \Theta'}{\partial x_j^2} + 2\Theta' \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{u_j' \Theta'}$$

Az átlagolás elvégzése után az egyenletet kiegészítve a $\overline{\Theta'^2 \frac{\partial u_j'}{\partial x_j}}$ taggal, amelynek értéke nullával egyenlő (gondoljunk a kontinuitási egyenletre), azt kapjuk, hogy

$$\frac{\partial \overline{\Theta'^2}}{\partial t} + u_j \frac{\partial \overline{\Theta'^2}}{\partial x_j} = -2\overline{\Theta' u_j'} \frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{u_j' \Theta'^2} + 2\varepsilon_\theta$$

ahol a disszipációt leíró tag:

$$\varepsilon_\theta = \nu_\theta \overline{\Theta' \frac{\partial^2 \Theta'}{\partial x_j^2}}$$

VII.3. A turbulencia Kolmogorov-féle spektrális elmélete

VII.3.1. Induljunk ki a

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{v}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) - \nabla^2 \mathbf{v} = -\nabla^2 \mathbf{v}$$

azonosságból, amely azért érvényes, mert az összenyomhatatlanság miatt $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$. Ennek megfelelően:

$$\mathbf{v} \cdot \nabla^2 \mathbf{v} = -\mathbf{v} \cdot [\nabla \times (\nabla \times \mathbf{v})] = -\mathbf{v} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{\omega}) = -(\mathbf{v}, \nabla, \boldsymbol{\omega}) = -(\nabla, \boldsymbol{\omega}, \mathbf{v}) = -\nabla \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}) - \boldsymbol{\omega} \cdot (\nabla \times \mathbf{v}).$$

A jobboldalon azért jelent meg a második hármas vegyes szorzat, mert a nabla, mint differenciál operátor, csak az örvényvektorra vonatkozik. A vegyesszorzat $\nabla \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v})$ divergenciává való átrendezésekor azonban a differenciáloperátort már a vektorszorzat mindkét tényezőjére, tehát a sebességre is érvényesíteni kell. Ezt kompenzálja az $\boldsymbol{\omega} \cdot (\nabla \times \mathbf{v})$ tag. Megjegyezzük, hogy bár az átalakítás a nabla szimbolikában jártas szemmel nézve jól érthető, a divergenciát érdemes az Einstein szimbolikával is kifejezni. Ekkor az eredmény formálisan könnyebben adódik:

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}) = \partial_i \varepsilon_{ijk} \omega_j v_k = v_k \varepsilon_{ijk} \partial_i \omega_j + \omega_j \varepsilon_{kij} \partial_i v_k = v_k \varepsilon_{kij} \partial_i \omega_j - \omega_j \varepsilon_{jki} \partial_i v_k$$

Ezt az összefüggést a vektorjelölésekre visszaalakítva adódik, hogy

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{\omega}) - \boldsymbol{\omega} \cdot (\nabla \times \mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{\omega}) - \boldsymbol{\omega}^2$$

Tehát:

$$\mathbf{v} \cdot \nabla^2 \mathbf{v} = -\mathbf{v} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{\omega}) = -\nabla \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}) - \boldsymbol{\omega}^2$$

Az összefüggést a teljes tartományra integrálva és a jobboldali első integrált a Gauss-tétellel átalakítva azt kapjuk, hogy

$$\int_V \mathbf{v} \cdot \nabla^2 \mathbf{v} \, dV = - \int_V \nabla \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}) \, dV - \int_V \boldsymbol{\omega}^2 \, dV = - \oint_A (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}) \cdot d\mathbf{A} - \int_V \boldsymbol{\omega}^2 \, dV$$

A teljes tér határára vonatkozó integrál azonban eltűnik. Ezzel az állítást igazoltuk.

VII.3.2. A Reynolds-szám értéke:

$$\text{Re} = \frac{V \cdot L}{\nu} = \frac{10^{-1} \cdot 10^6}{10^{-6}} = 10^{11}$$

a molekuláris viszkozus erők tehát elhanyagolhatóak. A viszkozus erőket

$$L = \frac{\nu}{V} = \frac{10^{-6}}{10^{-1}} = 10^{-5} \text{ m} = 10^{-2} \text{ mm}$$

nagyságrendű mozgások esetén kell figyelembe venni. Eddig bontja le az energiaskaskád a nagy örvényeket.

VII.3.3. Az energiaspektrumot a

$$\mathfrak{S} = K \varepsilon^\alpha \cdot k^\beta$$

alakban keressük, ahol K dimenzió nélküli szám. A jobboldali és baloldali mennyiségek dimenzióinak meg kell egyeznie. Jelöljük a hosszúság dimenziót L -lel, az idő dimenziót pedig T -vel. A V sebesség dimenzió ennek megfelelően L/T . Az energiaspektrum dimenzióiira vonatkozó egyenlet:

$$L^3 T^{-2} = L^{2\alpha} T^{-3\alpha} L^\beta$$

Az egyenlet a hosszúság és az idő dimenzió szerint a

$$\begin{aligned} 3 &= 2\alpha + \beta, \\ -2 &= -3\alpha \end{aligned}$$

egyenletekre esik szét, ahonnan $\alpha = \frac{2}{3}, \beta = -\frac{5}{3}$.

VII.3.4. Határozzuk meg a sebességet határozzuk meg dimenzióanalízissel! Vegyük fel a sebességet:

$$v_k = \mathfrak{S}^\alpha k^\beta$$

alakban! A dimenziókat összevetve:

$$L = L^{3\alpha} L^{-\beta},$$

$$T^{-1} = T^{-2\alpha}$$

ahonnan $\alpha = \frac{1}{2}, \beta = \frac{1}{2}$, azaz $v_k = \sqrt{\mathfrak{S}k}$, vagyis az átfordulási idő:

$$\tau_k = \frac{1}{kv_k} = \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{S}k^3}}$$

Adott skálán az átfordulási idővel jellemezhetjük a betáplált energiának a kisebb skálák felé történő átvitelét, azaz

$$\varepsilon = \frac{v_k^2}{\tau_k} = \frac{k\mathfrak{T}}{\tau_k} = k\mathfrak{T}\sqrt{\mathfrak{T}k^3} = k^{-\frac{5}{3}}\mathfrak{T}^{\frac{3}{2}}$$

Stacionárius esetben ε állandó, tehát $\mathfrak{T} = \varepsilon^{\frac{2}{3}}k^{-\frac{5}{3}}$, ami éppen a Kolmogorov-féle spektrum.

VII.3.5. A mozgásegyenletből adódik, hogy amennyiben csak a viszkozus erő hat, akkor jó közelítéssel:

$$\frac{v_k^v}{\tau_k^v} = \nu \nabla^2 v_k \approx \nu \frac{v_k}{L^2} \approx \nu v_k k^2$$

azaz

$$\tau_k^v = \frac{1}{\nu k^2}$$

Egyenlővé téve ezt az időt az előző feladatban meghatározott

$$\tau_k = \frac{1}{k v_k} = \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{T}k^3}} = \varepsilon^{-\frac{1}{3}}k^{-\frac{2}{3}}$$

átfordulási idővel, azt kapjuk, hogy

$$k_v \propto \left(\frac{\varepsilon}{\nu^3}\right)^{\frac{1}{3}} \text{ illetve } L_v \propto \left(\frac{\varepsilon}{\nu^3}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

VII.3.6. Az örvényességi egyenlet elhanyagolható viszkozitás esetén a $\frac{d\zeta}{dt} = 0$ alakot ölti. Ebből már következik, hogy

$$\frac{dZ}{dt} = \frac{d}{dt} \int_A \zeta^2 dA = \frac{d}{dt} \int_A 2\zeta \frac{d\zeta}{dt} dA = 0.$$

VII.3.7. Az örvényvektorra vonatkozó mozgásegyenlet elhanyagolható viszkozitás esetén a

$$\frac{d\omega}{dt} = (\omega \cdot \nabla) \mathbf{v}$$

alakban írható fel. Kétdimenziós áramlásban a jobboldali tag az úgynevezett „vortex stretching” zérus, hiszen $\omega(0, 0, \zeta)$ és $\mathbf{v}(x, y)$.

VII.3.8. Állítsuk elő a térbeli energia és ensztrófia sűrűséget is a ψ áramfüggvény segítségével. Tudjuk, hogy a lokális energiasűrűség

$$e = \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 = \frac{1}{2} (\nabla \psi)^2,$$

az ensztrófia-sűrűség pedig

$$z = \frac{1}{2} (\nabla^2 \psi)^2$$

Az áramfüggvény

$$\psi(k, r) = \sum \alpha^*(k) e^{ik \cdot r}$$

Fourier-sorfejtése ortogonális tagokból áll, így a lokális energia és ensztrófia-sűrűség integrálásakor csak az amplitúdók $|\alpha^*(k)|^2$ négyzeteinek összege marad az integrandusban. A k térbeli összegezés helyett integrálásra térve ár, adódik, hogy,

$$E = \int_k k^2 |\alpha^*|^2 dk$$

illetve

$$Z = \int_k k^4 |\alpha^*|^2 dk$$

Ezzel az állítást igazoltuk.

VII.3.9. Mivel az áramfüggvény Fourier-sora ortonormált, mind a kinetikus energia, mind az ensztrófia a módusoknak megfelelő tagok összegére bomlik, továbbá az előző feladat értelmében az ensztrófia a $Z = k^2 E$ alakban fejezhető ki a megfelelő energiával. Sűrűdásmentes esetben a kétdimenziós áramlásban mind az összenergia, mind az összensztrófia megmarad, tehát az egyes tagok megváltozásának összege zérus:

$$\begin{aligned} \delta E_1 + \delta E_2 + \delta E_3 &= 0, \\ k_1^2 \delta E_1 + 4k_1^2 \delta E_2 + 9k_1^2 \delta E_3 &= 0. \end{aligned}$$

Az egyenletrendszer megoldása:

$$\delta E_1 = -\frac{5}{8} \delta E_2, \quad \delta E_3 = -\frac{3}{8} \delta E_2,$$

illetve az ensztrófia-változások:

$$k_1^2 \delta E_1 = -\frac{5}{32} k_1^2 \delta E_2, \quad k_3^2 \delta E_3 = -\frac{27}{32} k_1^2 \delta E_2.$$

Az eredmény azt mutatja, hogy amennyiben a középső hullámszámhoz tartozó energia csökken, akkor mind a nagyobb, mind a kisebb hullámszámok felé áramlik az energia, de a kisebb hullámszám (nagyobb térbeli skála) felé több energia áramlik, mint a nagyobb hullámszámok felé. Az ensztrófia éppen fordítva viselkedik, ott a nagyobb hullámszám felé áramlik több ensztrófia.

VII.3.10. $\Re$ dimenziója $\frac{L}{T^2}$, η dimenziója $\frac{1}{T^3}$, k dimenziója $\frac{1}{L}$. Keressük a spektrumot szorzat alakban:

$$\Re = \eta^\alpha k^\beta,$$

amiből

$$\frac{L}{T^2} = \frac{1}{T^{3\alpha}} \frac{1}{L^\beta},$$

tehát

$$\alpha = \frac{2}{3}, \quad \beta = -1.$$

Az ensztrófia-spektrum:

$$\mathfrak{R} = \eta^{\frac{2}{3}} k^{-1}.$$

Ebből a **VII.3.8. feladat** alapján megállapítható, hogy ebben a tartományban az energiaspektrum:

$$\mathfrak{S} = \eta^{\frac{2}{3}} k^{-3}$$

alakú.

VIII. fejezet - A felszínközei réteg és a planetáris határréteg

VIII.1. A felszínközei réteg profiljai

VIII.1.1. A vízfelszín felett kisebb az érdességi magasság, vagyis a szélsébség gyorsabban nő a magassággal, mint az érdesebb vízparti területek felett, így átlagosan a víz felől fújó szél esetén mérhetünk nagyobb szélsébséget a standard 10 m-es szinten.

VIII.1.2. A turbulens diffúziós együttható $K_M = u_*^2 \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right)^{-1}$ és a logaritmikus szélprofil egyenlet $\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = \frac{u_*}{\kappa z}$ összevetésével $K_M = \kappa u_* z$, tehát a magassággal lineárisan nő.

Kiindulva a keveredési út $l_M = u_* \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right)^{-1}$ meghatározásából, indifferens rétegzódás esetén: $l_M = \kappa z = u_* K_M^{-1}$.

VIII.1.3. Kihasználva az $l_M = u_* \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right)^{-1}$ egyenlőséget a dinamikus sebességre kapunk összefüggést a hossz- és az időlépték alapján:

$$u_* = -\kappa \frac{(\partial \bar{u} / \partial z)^2}{\partial^2 \bar{u} / \partial z^2}$$

Legyen $\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = f(z)$! Az impulzusáram állandóságát feltételezve (a felszínközei rétegben vagyunk) fennáll, hogy $\frac{\partial f}{\partial z} \sim f^2$, vagyis $f(z) \sim \frac{1}{z}$. Ahhoz hogy az kiindulási egyenletünk teljesüljön, az arányossági tényező: $\frac{u_*}{\kappa}$. Ekkor teljesül, hogy $\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = \frac{u_*}{\kappa z}$, ami a logaritmikus profilegyenlet.

VIII.1.4. A logaritmikus szélprofil egyenlet alapján:

$$\bar{u}(z_1) = \frac{u_*}{\kappa} (\ln z_1 - \ln z_0), \quad \bar{u}(z_2) = \frac{u_*}{\kappa} (\ln z_2 - \ln z_0)$$

Képezzük a két egyenlet hányadosát, majd rendezzük $\ln z_0$ -ra:

$$\ln z_0 = \frac{u_2 \ln z_1 - u_1 \ln z_2}{u_2 - u_1} \quad \text{és így} \quad z_0 = \exp \left(\frac{u_2 \ln z_1 - u_1 \ln z_2}{u_2 - u_1} \right)$$

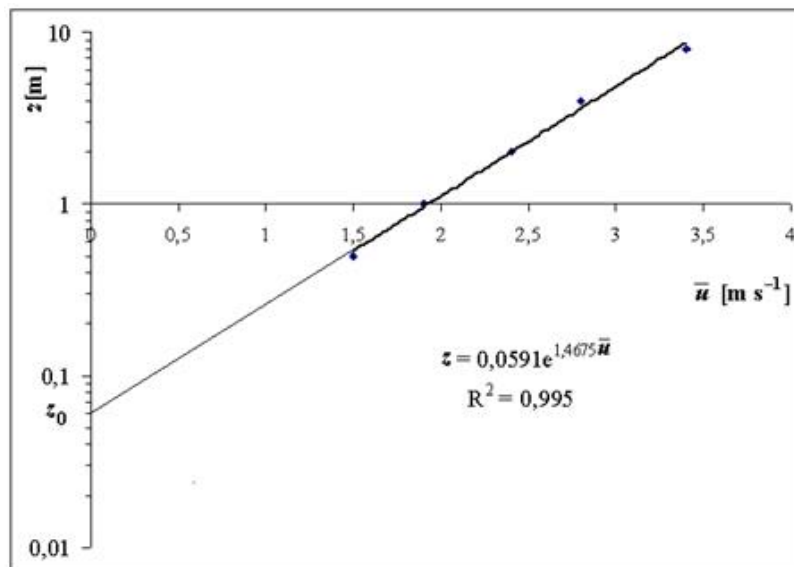
Az érdességi magasság értéke $z_0 = 5 \text{ cm}$. A szél mérés bizonytalansága a szélsébség különbség mérésében $\pm 0,2 \text{ m s}^{-1}$, ami a mért szélsébség különbséghez képest ($\Delta u = 0,6 \text{ m s}^{-1}$) nagy érték. A legnagyobb lehetséges

érdességi magasság ebben az esetben ($\bar{u}_1 = 1 - 0,1 \text{ m s}^{-1} = 0,9 \text{ m s}^{-1}$, $\bar{u}_2 = 1,6 + 0,1 \text{ m s}^{-1} = 1,7 \text{ m s}^{-1}$) $z_0 = 10,5 \text{ cm}$, a legkisebb érték (kis gradiens és alacsony szélsébség a 2 m-es szinten: $\bar{u}_1 = 1 + 0,1 \text{ m s}^{-1} = 1,1 \text{ m s}^{-1}$) $z_0 = 1,1 \text{ cm}$.

Mit lehet tenni a bizonytalanság csökkentéséért? a) A terepi mérések előtt össze kell kalibrálni a szenzorokat. b) Lehetőség szerint egymástól távolabb kell elhelyezni a szenzorokat, hogy csökkentsük a szélsébség különbség mérés relatív hibáját. c) Többször kell ismételni a profilméréseket, hosszabb időszak mérései alapján kell megadni az érdességi magasság átlagértékét és annak szórását. d) Több szintben kell mérni, s a profilmérések alapján görbeillesztéssel meghatározni az érdességi magasságot.

VIII.1.5. A szélsébség mérésekre a logaritmusos profil illesztést grafikus program (a mi esetünkben az excel) segítségével végeztük el, de ma is használhatunk log-lineáris diagramokat, vagy magunk is írhatunk egyszerű görbeillesztési programot (lineáris regresszió, lásd pl. Dévényi és Gulyás, 1988). Az érdességi

magasság: $z_0 = 5,9 \text{ cm}$, a dinamikus sebesség az *MVIII.1.1 ábra* alapján $\frac{u_*}{\kappa} = 0,14675 \text{ m s}^{-1}$. A Kármán-konstans értéke 0,4, így a dinamikus sebesség $u_* = 0,59 \text{ m s}^{-1}$. A 4 m-es szintre vonatkozó turbulens diffúziós együttható: $K_M = \kappa u_* z = 0,94 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$.



MVIII.1.1. ábra. Logaritmusos szélprofil illesztés.

VIII.1.6. Tekintsük két különböző szinten végzett szélsébség mérés különbségét:

$$\bar{u}_i - \bar{u}_j = \frac{u_*}{\kappa} [\ln(z_i - d) - \ln(z_j - d)], \quad i, j = 1, 2, \dots, k, \quad i \neq j$$

A feladat a mért és a becsült sebességkülönbségek négyzetösszegének a minimalizálása, amit valamilyen numerikus módszer segítségével oldhatunk meg:

$$\min_{i,j} \left[\left(\bar{u}_i - \bar{u}_j - \frac{u_*}{\kappa} [\ln(z_i - d) - \ln(z_j - d)] \right)^2 \right], \quad i, j = 1, 2, \dots, k, \quad i \neq j$$

A gyakorlatban hosszabb mérési periódus során a becsült kiszorítási rétegvastagságok átlagát vesszük.

VIII.1.7. A keveredési út hipotézis alapján:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = \frac{u_*}{l_M}$$

A hatványfüggvény deriválási szabályait figyelembe véve

$$l_M = l_{ref} \cdot \beta^{-1} (z / z_{ref})^{(1-\beta)}$$

Ezt behelyettesítve a felső egyenletbe és integrálva z_{ref} és z szintek között visszkapjuk a hatványkitevős szélprofil. A turbulens diffúziós együttható $K_M = u_* / l_M$ a magasság $(\beta-1)$ hatványkitevős függvénye alapján változik.

$$\bar{u}(z) = \bar{u}(z_{ref}) \left(\frac{z}{z_{ref}} \right)^\beta \quad \text{logaritmikus}$$

VIII.1.8. Első lépésként deriváljuk a hatványkitevős szélprofil egyenlet alakját a magasság szerint

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = \beta \frac{\bar{u}}{z}$$

Behelyettesítve a logaritmikus profilegyenletet, majd rendezve az egyenletet kapjuk, hogy:

$$\beta = \frac{1}{\ln z / z_0}$$

β értéke függ a magasságtól, de pl. $z_0 = 5 \text{ cm}$ -es érdességi magasságot választva (alacsony vegetáció) $\beta(10 \text{ m}) = 0,19$, $\beta(50 \text{ m}) = 0,145$, $\beta(100 \text{ m}) = 0,132$, így első közelítésként alkalmazható az 1/7-es profilkitevő.

Megjegyezzük, hogy tengeri területek felett ($z_0 \approx 10^{-4} \text{ m}$) az átlagos hatványkitevők is kisebbek, pl. $\beta(100 \text{ m}) = 0,072$.

Általános esetben a Monin–Obukhov-féle hasonlósági elmélet alkalmazásával:

$$\beta = \frac{\phi_M(\zeta)}{\Phi_M(\zeta) - \Phi_M(\zeta_0)},$$

ahol $\zeta_0 = \frac{z_0}{z}$.

VIII.1.9. Logaritmikus profilok esetén az érdességi magasság (s ha kell, a kiszorítási rétegvastagság) és a z szinten mért szélebség alapján meghatározzuk a dinamikus sebességet, majd ennek ismeretében a különböző szintek szélebsességét. A számítási eredményeket az *MVIII.1.1. táblázat* foglalja össze.

MVIII.1.1. táblázat. A szélebség értékek különböző magasságokban logaritmikus és hatványkitevős profilok feltételezésével. A 10 m-es szint szélebsége 4 m s^{-1} .

Profil alakja	Paraméterek (z_0, d, β)	$\bar{u}(30 \text{ m})$ [m s ⁻¹]	$\bar{u}(50 \text{ m})$ [m s ⁻¹]	$\bar{u}(100 \text{ m})$ [m s ⁻¹]

Logaritmikus	$z_0 = 10 \text{ cm}$	4,95	5,4	6,0
	$z_0 = 50 \text{ cm}$	5,5	6,1	7,1
	$z_0 = 50 \text{ cm}, d = 3 \text{ m}$	6,5	6,9	8,0
Hatványkitevős	$\beta = 0,08$	4,4	4,55	4,8
	$\beta = 1/7$	4,7	5,0	5,55
	$\beta = 0,2$	5,0	5,5	6,3
	$\beta = 0,4$	6,2	7,6	10,0
	$\beta = 1/7, d = 3 \text{ m}$	4,85	5,25	5,8

Az eredmények értékeléséből kitűnik, hogy az érdességi magasság és a hatványkitevő meghatározása az egyik kulcs kérdése az optimális szélesebség, s így a várható széleenergia termelés meghatározásában. Ezért is fontosak a terepi mérések.

VIII.10. Nappal közepes besugárzás és 4 m s^{-1} -os szélesebség esetén a Pasquill–Gifford-féle stabilitási osztály $B - C$, és az ehhez tartozó átlagos hatványkitevő értéke városban 0,175; vidéki területen 0,085. Éjszaka 5 okta felhőzet esetén D stabilitási osztályban vagyunk. A hatványkitevő értéke városi területek felett 0,25; vidéki területek felett 0,15. A számítási eredményeket az *MVIII.1.2. táblázat* szemlélteti.

MVIII.1.2. táblázat. A szélesebség értékek különböző magasságokban hatványkitevős profilok feltételezésével. A 10 m-es szint szélesebsége 4 m s^{-1} . Nappal közepes besugárzással, míg éjszaka 5 okta felhőzettel számolunk.

	Kategória	Terület	β	$\bar{u}(30 \text{ m})$ [m s^{-1}]	$\bar{u}(50 \text{ m})$ [m s^{-1}]	$\bar{u}(100 \text{ m})$ [m s^{-1}]	$\bar{u}(150 \text{ m})$ [m s^{-1}]
Nappal	B–C	Város	0,175	4,85	5,3	6,0	6,4
		Vidék	0,085	4,4	4,6	4,85	5,05
Éjszaka	D	Város	0,25	5,25	6,0	7,1	7,9
		Vidék	0,15	4,7	5,1	5,65	6,0

VIII.1.11. Nézzük a logaritmikus szélprofil egyenletét:

$$u(z-d) = \frac{u_*}{\kappa} [\ln(z-d) - \ln z_0]$$

A felírásból következik, hogy az átlagos kiszorítási rétegvastagságot ($\bar{d}$) az egyes területelemekre jellemző d_i értékek súlyozott átlagából kell számítani:

$$\bar{d} = \sum_i s_i d_i,$$

ahol s_i az egyes területelemek részaránya: $\sum_i s_i = 1$.

A logaritmikus szélprofil logaritmikus skálán jelent lineáris kapcsolatot, így az egyes területelemek érdességi magasságának logaritmusaival kell dolgoznunk. Vesszük ezeknek a súlyozott átlagát. Ez lesz az átlagos érdességi magasság logaritmus, amiből $\overline{z_0}$ számítható:

$$\ln \overline{z_0} = \sum_i s_i \ln z_{0i} \quad \text{és} \quad \overline{z_0} = \exp \left(\sum_i s_i \ln z_{0i} \right)$$

Az adatok behelyettesítése után: $\overline{d} = 3,54 \text{ m}$, $\overline{z_0} = 7 \text{ cm}$.

VIII.2. Monin–Obukhov-féle hasonlósági elmélet és alkalmazásai

VIII.2.1. Nézzük a turbulenciát alakító mennyiségek dimenzióját! Az impulzusáram és a szenzibilis hőáram helyett használhatjuk a dinamikus (vagy sűrűdési) sebességet $u_* = (\tau / \rho_m)^{1/2} [\text{m s}^{-1}]$ és a dinamikus hőmérsékletet, $T_* = (-H / \rho_m c_{pm} u_*)^{1/2} [\text{K}]$. A harmadik mennyiség a $\beta = g / \overline{\Theta}$ stabilitási paraméter (a felhajtóerő számításánál), melynek a dimenziója $[\text{m s}^{-2} \text{K}]$. A dimenzióanalízis szerint:

$$[\text{m s}^{-1}]^a [\text{K}]^b [\text{m s}^{-2} \text{K}^{-1}]^c = [\text{m}]^1$$

Három különböző dimenzió $[\text{m}]$, $[\text{s}]$ és $[\text{K}]$, és három ismeretlen kitevőnk (a, b, c) van, így a feladat tehát megoldható. A három egyenlet:

$$a + c = 1, \quad -a - 2c = 0 \quad \text{és} \quad b - c = 0.$$

Az egyenletrendszer megoldása:

$$a = 2, \quad b = -1, \quad c = -1,$$

vagyis

$$L_{Mon} \sim \frac{u_*^2}{\beta T_*}$$

Az arányossági tényező a κ^{-1} Kármán-konstans,

$$L_{Mon} = \frac{u_*^2}{\kappa \beta T_*} = \frac{(\tau / \rho)^{3/2}}{\kappa \beta (-H / \rho c_{pm})}$$

VIII.2.2. A $(\tau / \rho)^{3/2}$ meghatározásának pontossága $\pm 7,5\%$, így L_{Mon} megadásának a bizonytalansága $\pm 22,5\%$.

VIII.2.3 Erősen stabilis egyensúlyi helyzetben a $\zeta = \frac{z}{L_{Mon}}$ dimenzió nélküli magasság nagy pozitív értéket vesz fel. A turbulens energetikai viszonyokat meghatározó Richardson-szám egy véges kritikus értékhez tart, ami felett már nem alakulhat ki egyensúlyi turbulens rendszer, a turbulens kinetikus energia forrása már nem kompenzálja

annak nyelőit. A turbulens kinetikus energia egyenlet szerint a fluxus Richardson-szám (Ri_f) a felhajtóerő és a mechanikus turbulencia kinetikus energia generációs tagjának a hányadosa:

$$Ri_f = \frac{\beta(-H / c_{pm}\rho)}{u_*^2 \frac{\partial u}{\partial z}} = \frac{u_*}{\kappa L_{Mon}} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right)^{-1} = \frac{u_*}{\kappa L_{Mon}} \left(\frac{u_*}{\kappa z} \phi_M(\zeta) \right)^{-1} = \zeta \frac{1}{\phi_M(\zeta)}$$

és teljesül, hogy a Richardson-szám az impulzusáramra és a szenzibilis hőáramra jellemző univerzális függvényen keresztül kifejezhető a fluxus Richardson-számból:

$$Ri = \beta \frac{\frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial z}}{\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right)^2} = \zeta \frac{\phi_H(\zeta)}{\phi_M^2(\zeta)} = Ri_f \frac{\phi_H(\zeta)}{\phi_M(\zeta)}$$

Mivel $\lim_{\zeta \rightarrow \infty} Ri = Ri_\infty$, ezért erősen stabilis rétegződés esetén $\phi_M(\zeta) = b_M \zeta$, ami lineáris profilközelítést jelent. Hasonló alakú közelítés igaz a $\phi_H(\zeta)$ függvényre is.

VIII.2.4. Indifferens esetben az univerzális függvény értéke $\phi_M(\zeta = 0) = 1$. Indifferens egyensúlyi helyzet körül Taylor-sorba fejtve az univerzális függvényt

$$\phi_M(\zeta) = \phi_M(\zeta = 0) + \left(\frac{\partial \phi_M}{\partial \zeta} \right)_{\zeta=0} \zeta + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 \phi_M}{\partial \zeta^2} \right)_{\zeta=0} \zeta^2 + \dots$$

Megtartva a sorfejtés nulladik és első tagját kapjuk a logaritmikuss-lineáris profilra jellemző univerzális függvényt

VIII.2.5. Erős instabil rétegződés (szabad konvekció) esetén $\zeta = \frac{z}{L_{Mon}}$ nagy abszolút értékű negatív szám. $\zeta \rightarrow -\infty$ esetén $L_{Mon} \rightarrow -0$ és $u_* \rightarrow 0$. Az ilyenkor kialakuló konvektív turbulencia paraméterei közül hiányzik a mechanikus hatásokat leíró impulzusáram. Ennek a feltétele a $\phi_M(\zeta) = c_M \zeta^{-1/3}$ alapú univerzális függvény, hiszen $[(\tau / \rho)^{3/2}]^{1/3} = (\tau / \rho)^{1/2} = u_*$ és

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = \frac{u_*}{\kappa z} \phi_M(\zeta) = \frac{u_*}{\kappa z} c_M z^{-1/3} \left(\frac{(\tau / \rho)^{3/2}}{\kappa \beta (-H / \rho c_{pm})} \right)^{1/3} = \frac{c_M}{z^{4/3}} [\beta (-H / \rho c_{pm})]^{-1/3}$$

Hasonló alakú univerzális függvényeket használunk a hő, nedvesség és a nyomanyag turbulens diffúziós folyamatainak leírásánál.

A dimenzió nélküli magasság és a Richardson-szám közötti kapcsolat általános alakja (lásd a **VIII.2.3. feladatot**)

$$is): Ri = \zeta \frac{\phi_H(\zeta)}{\phi_M^2(\zeta)}$$

Ha az 1/3-os profilközelítést alkalmazzuk ($\phi_M(\zeta) = c_M \zeta^{-1/3}$ és $\phi_H(\zeta) = c_H \zeta^{-1/3}$), akkor a Richardson-szám alakja:

$$Ri = \frac{\zeta}{|\zeta|} \frac{c_H}{c_M^2} \zeta^{-4/3} = -\frac{c_H}{c_M^2} \zeta^{-4/3}$$

Ha a Högström-féle $\phi_H(\zeta) = \phi_M^2(\zeta)$ profil közelítést alkalmazzuk labilis rétegződésben, akkor

$$Ri = 0,95 \zeta$$

A $\phi_H(\zeta) = \phi_M^2(\zeta)$ profil közelítés (más néven O'KEYPS-formula) szerint indifferens rétegződés esetén a Richardson-szám és a dimenzió nélküli magasság megegyezik, míg az 1/3-os profilközelítés esetén a Richardson-szám a dimenzió nélküli magasság 4/3-os hatványkitevőjével arányos. (Nézzünk utána az O'KEYPS-formula eredetének!)

VIII.2.6. Használjuk a

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = \frac{u_*}{Kz} \phi_M(\zeta) = \frac{u_*}{Kz} [1 - (1 - \phi_M(\zeta))]$$

felbontást.

$$\int (1 - \phi_M(\zeta)) d \ln z = \int (1 - \phi_M(\zeta)) d \ln \zeta = \Psi_M(\zeta) + \text{állandó}$$

VIII.2.7. A leggyakrabban használt univerzális függvények (VIII.2.1. táblázat) integrál alakját

$$\int \phi_z(\zeta) d \ln \zeta \quad (s \in (M, H))$$

stabilis rétegződés esetén az *MVIII.2.1 táblázat*, labilis rétegződés esetén az *MVIII.2.2. táblázat* mutatja.

MVIII.2.1. táblázat. A hasonlósági elméletben alkalmazott főbb univerzális függvények és integrált alakjuk stabilis rétegződés esetén (a , b és c állandók).

Stabilis rétegződés ($\zeta > 0$), $\phi_M(\zeta)$, $\phi_T(\zeta)$	$\Psi_s = \int \phi_s(\zeta) d \ln \zeta$ ($s \in (M, H)$)
$a\zeta + b$	$b \ln \zeta + a\zeta$
$c\zeta^2 + a\zeta + b$	$b \ln \zeta + a\zeta + \frac{c}{2} \zeta^2$
$1 + \zeta X^{-1}$, ahol $X = a\zeta + b$ és $X > 0$	$\ln \zeta + \frac{1}{a} X$
$X^{3/2}$	$\frac{2}{3} X^{3/2} + 2b X^{1/2} + \frac{b^2}{b^{1/2}} \ln \frac{X^{1/2} - b^{1/2}}{X^{1/2} + b^{1/2}}$
$X^{3/4}$	$\frac{4}{3} X^{3/4} + b \left[\frac{1}{b^{1/4}} \ln \frac{X^{1/4} - b^{1/4}}{X^{1/4} + b^{1/4}} + \frac{2}{b^{1/4}} \arctan \frac{X^{1/4}}{b^{1/4}} \right]$

MVIII.2.2. táblázat. A hasonlósági elméletben alkalmazott főbb univerzális függvények és integrált alakjuk instabilis rétegződés esetén (a , b és c állandók).

Labilis rétegződés ($\zeta < 0$), $\phi_M(\zeta)$, $\phi_T(\zeta)$	$\Psi_\zeta = \int \phi_\zeta(\zeta) d \ln \zeta$ ($\zeta \in (M, H)$)
$a\zeta + b$ $a(-\zeta)^{-c}$, ahol $c > 0$ $X^{-1/2}$, ahol $X = a\zeta + b$ és $X > 0$ $X^{-1/3}$ $X^{-1/4}$	$b \ln \zeta + a\zeta$ $-\frac{a}{c}(-\zeta)^{-c}$ $-\frac{2}{b^{1/2}} \operatorname{arth} \frac{X^{1/2}}{b^{1/2}} = \frac{1}{b^{1/2}} \ln \frac{X^{1/2} - b^{1/2}}{X^{1/2} + b^{1/2}}$ $\frac{1}{2b^{1/3}} \ln \frac{(X^{1/3} - b^{1/3})^3}{X - b} + \frac{3^{1/2}}{b^{1/3}} \arctan \frac{2X^{1/3} + b^{1/3}}{3^{1/2}b^{1/3}}$ $-\frac{2}{b^{1/4}} \operatorname{arth} \frac{X^{1/4}}{b^{1/4}} + \frac{2}{b^{1/4}} \arctan \frac{X^{1/4}}{b^{1/4}} =$ $= \frac{1}{b^{1/4}} \ln \frac{X^{1/4} - b^{1/4}}{X^{1/4} + b^{1/4}} + \frac{2}{b^{1/4}} \arctan \frac{X^{1/4}}{b^{1/4}}$

VIII.2.8. Deriváljuk a potenciális hőmérséklet $\bar{\Theta} = \bar{T} \left(\frac{p_0}{p} \right)^{\frac{R_m}{c_{pm}}}$ logaritmikus alakját z szerint:

$$\frac{\partial \ln \bar{\Theta}}{\partial z} = \frac{\partial \ln \bar{T}}{\partial z} - \frac{R_m}{c_{pm}} \frac{\partial \ln p}{\partial z}$$

Alkalmazva a sztatika alapegyenletét $\frac{\partial \ln p}{\partial z} = -\frac{g}{R_m \bar{T}}$, a következő összefüggés adódik:

$$\frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial z} = \frac{\bar{\Theta}}{\bar{T}} \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial z} + \frac{g}{c_{pm}} \right)$$

Kihasználva, hogy $\frac{\bar{\Theta}}{\bar{T}} \approx 1$:

$$\frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial z} = \frac{\partial \bar{T}}{\partial z} + \frac{g}{c_{pm}},$$

$\Gamma = \frac{g}{c_{pm}} \approx 0,97^\circ \text{C}/100 \text{ m}$ a száraz adiabatikus hőmérsékleti gradiens. $p_0 = 1000 \text{ hPa}$ a referencia szint nyomása. 10 m-es rétegben az eltérés a potenciális hőmérséklet különbség ($\Delta \bar{\Theta}$) és a hőmérséklet különbség ($\Delta \bar{T}$) között $\approx 0,097^\circ \text{C}$, ami sok esetben elhanyagolható.

VIII.2.9. A Richardson-szám alakja (VIII.2.3. és VIII.2.5. feladat): $Ri = \zeta \frac{\phi_H(\zeta)}{\phi_M^2(\zeta)}$. Az impulzusra vonatkozó turbulens diffúziós együttható alakja, felhasználva az

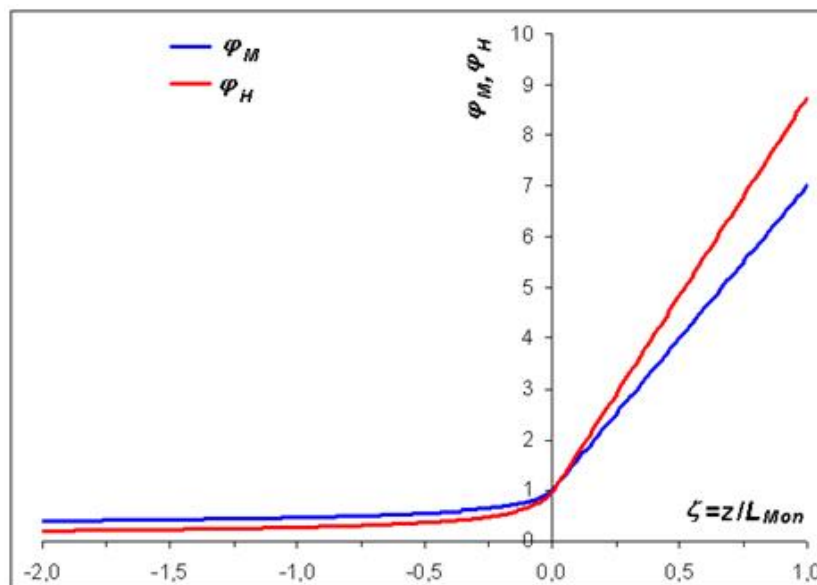
$u_*^2 = K_M \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}$ és a $\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = \frac{u_*}{\kappa z} \phi_M(\zeta)$ összefüggéseket: $K_M = \frac{\kappa u_* z}{\phi_M(\zeta)}$. Hasonló kifejezést kapunk a hőre vonatkozó turbulens diffúziós együtthatóra is: $K_H = \frac{\kappa u_* z}{\phi_H(\zeta)}$. A Högström-féle univerzális függvények alkalmazásával kapott eredményeket az *MVIII.2.3. táblázat* mutatja.

MVIII.2.3. táblázat. A Richardson-szám (Ri) és a turbulens diffúziós együtthatók ($K_M(\zeta)$, $K_H(\zeta)$) magasságfüggése a Högström (1988) univerzális függvényeinek az alkalmazásával.

Rétegződés	Ri	$K_M(\zeta)$ [m ² s]	$K_H(\zeta)$ [m ² s]
Stabilis $\zeta > 0$	$0,95 \left(\frac{\zeta}{1+6\zeta} + \frac{2,2\zeta^2}{(1+6\zeta)^2} \right)$	$K_M = \frac{\kappa u_* z}{1+6\zeta}$	$K_H = 1,05 \frac{\kappa u_* z}{1+8,2\zeta}$
Labilis $\zeta < 0$	$0,95 \zeta \left(\frac{1-11,6\zeta}{1-19,3\zeta} \right)^{-\frac{1}{2}}$	$K_M = \frac{\kappa u_* z}{(1-19,3\zeta)^{-1,4}}$	$K_H = \frac{1,05 \kappa u_* z}{(1-11,6\zeta)^{-1,2}}$
Indifferens $\zeta = 0$	0	$K_M = \kappa u_* z$	$K_H = 1,05 \kappa u_* z$

Megjegyezzük, hogy $|\zeta| \leq 0,05 - 0,1$ esetén kvázi-indifferens helyzetről beszélünk. Ilyenkor első közelítésként használhatjuk a logaritmikus profilközelítést is. Ideális esetben indifferens rétegződés esetén ($Ri \rightarrow 0$, $\zeta \rightarrow 0$) a szenzibilis hőáram, s így a dinamikus hőmérséklet is nullához tart ($H \rightarrow 0$, $\zeta \rightarrow 0$, $L_{Mon} \rightarrow \pm\infty$).

VIII.2.10. A Högström-féle univerzális függvények ($\phi_M(\zeta)$ és $\phi_H(\zeta)$) menetét a $-2 \leq \zeta \leq 1$ tartományban az *MVIII.2.1. ábrán* közöljük. Labilis rétegződés esetén a függvények értéke egynél kisebb, vagyis ugyanolyan turbulens áram esetén labilis rétegződéshez kisebb, míg stabilis rétegződéshez nagyobb abszolút értékű gradiensek tartoznak.



MVIII.2.1. ábra. Högström (1988) ($\phi_M(\zeta)$ és $\phi_H(\zeta)$) univerzális függvényeinek menete a $-2 \leq \zeta \leq 1$ tartományban.

A profilegyenleteket az univerzális függvények integrál alakjából kapjuk:

$$\bar{u}(z) = \frac{u_*}{\kappa} [\ln(z-d) - \ln z_0 - (\psi_M((z-d)/L_{Mon}) - \psi_M(z_0/L_{Mon}))]$$

és

$$\bar{\Theta}(z) = \bar{\Theta}(z_0 + d) + \frac{T_*}{\kappa} 0,95 [(\ln(z-d) - \ln z_0) - (\psi_H((z-d)/L_{Mon}) - \psi_H(z_0/L_{Mon}))]$$

Erősen stabilis egyensúlyi helyzetben ($\zeta = \frac{z-d}{L_{Mon}} \geq 1$) például

$$\Psi_M(\zeta) = -6 \cdot (1 + \ln \zeta), \quad \Psi_H(\zeta) = -8,2 \cdot (1 + \ln \zeta)$$

Stabilis és labilis esetben – az univerzális függvények integrált alakjának az ismeretében – a fentiekhez hasonlóan írjuk fel a profilokat.

A dinamikus hőmérsékletet a dinamikus sebesség (u_*) és a Monin–Obukhov-hossz (L_{Mon}) alapján határozzuk meg:

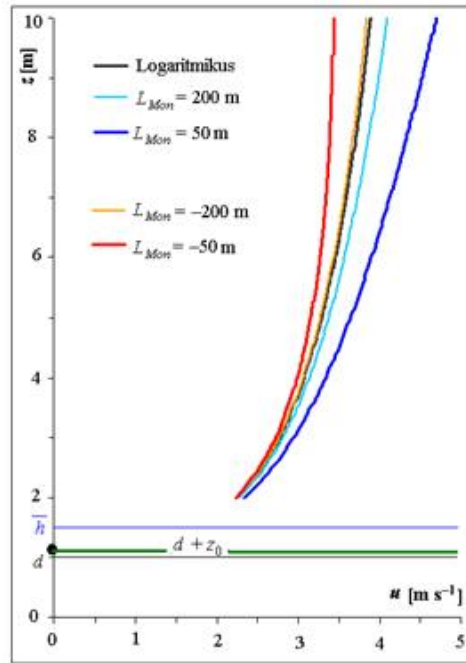
$$T_* = \frac{u_*^2}{\kappa \beta L_{Mon}}$$

Minden adat ismert ($\kappa = 0,4$, $\beta = 3,33 \cdot 10^{-2} \text{ m s}^{-2} \text{ K}^{-1}$) a szenzibilis hőáram $H = -\rho_m c_{pm} u_* T_*$ megadásához is. Eredményeinket az *MVIII.2.4. táblázat*ban közöljük.

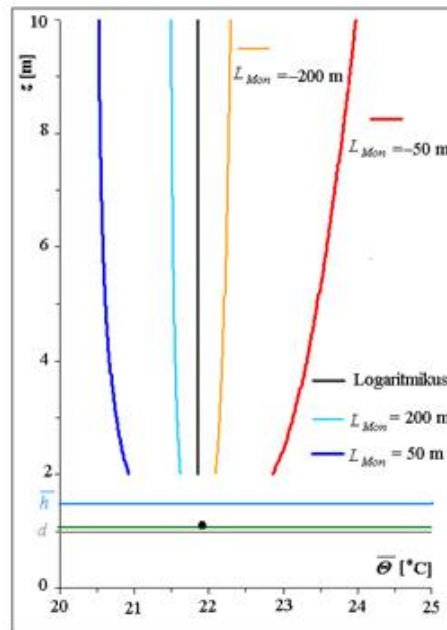
MVIII.2.4. táblázat. A dinamikus hőmérséklet és a szenzibilis hőáram különböző Monin–Obukhov-féle hosszak esetén.

$L_{Mon} [\text{m}]$	$T_* [^\circ\text{C}]$	$H [\text{W m}^{-2}]$
50	0,135	–49,1
200	0,033	–12,0
$L_{Mon} \rightarrow \pm\infty$	0	0
–200	–0,033	12,0
–50	–0,135	49,1

A különböző Monin–Obukhov-féle hosszak alapján számított szélesebb és potenciális hőmérsékleti profilokat az *MVIII.8.2.* és az *MVIII.8.3. ábra* szemlélteti. Megjegyezzük, hogy a példabeli esetben az $u_* = 0,3 \text{ m s}^{-1}$ dinamikus sebesség jelentős impulzusáramra (mechanikus keveredés) utal. Ilyen esetekben nem lehetnek tetszőlegesen nagy szenzibilis hőáramok, vagyis nem kapunk minden esetben szigorúan monoton növekvő szélprofil.



MVIII.2.2. ábra. Szélsebesség profilok a 2–10 m-es rétegben különböző Monin–Obukhov-féle hossz esetén Högström (1988) univerzális függvényei alapján ($u_* = 0,3 \text{ m s}^{-1}$, $\bar{h} = 1,4 \text{ m}$, $d = 1 \text{ m}$ és $z_0 = 5 \text{ cm}$).



MVIII.2.3. ábra. Hőmérséklet profilok a 2–10 m-es rétegben különböző Monin–Obukhov-féle hossz esetén Högström (1988) univerzális függvényei alapján ($\bar{\Theta}(d + z_0) = 21,85 \text{ °C}$, $u_* = 0,3 \text{ m s}^{-1}$, $\bar{h} = 1,4 \text{ m}$, $d = 1 \text{ m}$ és $z_0 = 5 \text{ cm}$).

VIII.2.11. Stabilis légrétegződést vizsgálunk. Kihasználjuk, hogy $\bar{\Theta} \cong \bar{T}$ és

$$\Delta \bar{\Theta} \approx \Delta \bar{T} + 1,5 \cdot 0,97 \cdot 10^{-2} [\text{K}] \approx \Delta \bar{T} + 0,01 [\text{K}], \quad \beta = \frac{\bar{T}(0,5 \text{ m}) + \bar{T}(2 \text{ m})}{2g} = 3,46 \cdot 10^{-2} \text{ m s}^{-2} \text{ K}^{-1}$$

Írjuk fel a Richardson-szám véges különbséges alakját!

$$Ri = \beta \frac{\Delta \bar{\Theta}}{(\Delta u)^2} \Delta z = \frac{\Delta z}{L_{Mon}} \frac{\text{const} \cdot [\ln(z_2/z_1) - (\Psi_H(\zeta_2) - \Psi_H(\zeta_1))]}{\ln(z_2/z_1) - (\Psi_M(\zeta_2) - \Psi_M(\zeta_1))}$$

Högström (1988) univerzális függvényeit használva $\text{const} = 0,95$. Beírva az univerzális függvények alakját L_{Mon} értékét már kiszámíthatjuk. Stabilis esetben lehet analitikus megoldás, labilis esetben iterációs eljárást kell alkalmazni. A mi esetünkben:

$$Ri = \beta \frac{\Delta \bar{\Theta}}{(\Delta u)^2} \Delta z = \Delta \zeta \frac{0,95 \cdot (\ln(z_2/z_1) + 8,2 \Delta \zeta)}{(\ln(z_2/z_1) + 6 \Delta \zeta)^2}$$

ahol $\Delta \zeta = \frac{\Delta z}{L_{Mon}}$. A másodfokú egyenlet megoldása után $L_{Mon} = 17,69 \text{ m}$, s kihasználva, hogy $L_{Mon} = 17,95 \text{ m}$. Kihasználva, hogy:

$$u_* = \kappa \Delta \bar{u} \frac{1}{\ln(z_2/z_1) - (\Psi_M(\zeta_2) - \Psi_M(\zeta_1))} = 0,18 \text{ m s}^{-1}$$

$$T_* = \kappa \Delta \bar{\Theta} \frac{1}{0,95 \cdot [\ln(z_2/z_1) - (\Psi_H(\zeta_2) - \Psi_H(\zeta_1))]} = 0,13 \text{ K}$$

Az eredményeket két tizedes jegyre kerekítettük.

VIII.2.12. A légrétegződés labilis. A feladatot a *VIII.2.11. feladat* analógiájára oldjuk meg. Itt is kihasználjuk, hogy $\bar{\Theta} \approx \bar{T}$ és $\Delta \bar{\Theta} \approx \Delta \bar{T} + 3 \cdot 0,97 \cdot 10^{-2} [\text{K}] \approx \Delta \bar{T} + 0,03 [\text{K}]$,

$$\beta = \frac{\bar{T}(0,5 \text{ m}) + \bar{T}(2 \text{ m})}{2g} = 3,27 \cdot 10^{-2} \text{ m s}^{-2} \text{ K}^{-1}$$

$$\Delta \bar{u} = 0,53 \text{ m s}^{-1} \quad \text{és} \quad \Delta \bar{\Theta} = -0,65 \text{ K}$$

A Richardson-szám véges különbséges alakja:

$$Ri = \beta \frac{\Delta \bar{\Theta}}{(\Delta u)^2} \Delta z = -0,227 = \frac{\Delta z}{L_{Mon}} \frac{0,95 \cdot [\ln(z_2/z_1) - (\Psi_H(\zeta_2) - \Psi_H(\zeta_1))]}{[\ln(z_2/z_1) - (\Psi_M(\zeta_2) - \Psi_M(\zeta_1))]^2}$$

Beírva az univerzális függvények alakját L_{Mon} értékét már kiszámíthatjuk. Labilis esetben iterációs eljárást kell alkalmazni. A mi esetünkben $L_{Mon} = -10,9 \text{ m}$, valamint

$$u_* = \kappa \Delta \bar{u} \frac{1}{\ln(z_2/z_1) - (\Psi_M(\zeta_2) - \Psi_M(\zeta_1))} = 0,22 \text{ m s}^{-1} \quad \text{és} \quad T_* = -0,35 \text{ K}$$

Az eredményeket két tizedes jegyre kerekítettük.

VIII.2.13. A 2–8 m-es réteg átlagos hőmérséklete $\bar{t} = 28,63^\circ \text{C}$. Az ehhez tartozó telítési gőznyomás

$$\bar{e}_s(\bar{t}) = 6,11 \cdot 10^{\frac{7,5\bar{t}}{237,3 + \bar{t}}} = 39,22 \text{ hPa}$$

A relatív nedvesség 65%, így a levegő gőznyomása $\bar{e} = 0,65 \cdot 39,22 = 25,50 \text{ hPa}$. A specifikus nedvesség:

$$\bar{q} = 0,622 \frac{\bar{e}}{p - 0,378\bar{e}} = 15,9 \cdot 10^{-3} \text{ kg kg}^{-1}$$

A nedves levegő specifikus gázállandója:

$$R_M = R_d(1 + 0,608\bar{q}) = 289,8 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1},$$

az állandó nyomáson vett fajhő:

$$c_{pm} \cong c_{pd}(1 + 0,8\bar{q}) = 1017,8 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1},$$

ahol $R_d = 287 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$ és $c_{pd} = 1005 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$.

A réteg átlagos potenciális hőmérséklete:
$$\bar{\Theta} = \bar{T} \left(\frac{p_0}{p} \right)^{\frac{R_m}{c_{pm}}} = 300,95 \text{ K} = 27,8 \text{ °C} \quad (p_0 = 1000 \text{ hPa}).$$

A nedves levegő sűrűsége:
$$\bar{\rho}_m = \frac{\bar{p}}{R_m \bar{T}} = \frac{101000}{289,8 \cdot 301,78} = 1,155 \text{ kg m}^{-3}$$

A szélesség és a hőmérséklet gradiens becslése:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial \ln z} \frac{1}{z} = \frac{\Delta \bar{u}}{\Delta \ln z} \frac{1}{\sqrt{z_1 z_2}} = \frac{0,73}{1,386} \frac{1}{4} = 0,13 \text{ s}^{-1} \quad \text{és}$$

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial z} = \frac{\partial \bar{T}}{\partial \ln z} \frac{1}{z} = \frac{\Delta \bar{T}}{\Delta \ln z} \frac{1}{\sqrt{z_1 z_2}} = \frac{-0,84}{1,386} \frac{1}{4} = -0,15 \text{ °C m}^{-1}$$

A potenciális hőmérsékleti gradiens:
$$\frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial z} = \frac{\partial \bar{T}}{\partial z} + 0,0097 [\text{°C m}^{-1}] = -0,14 [\text{°C m}^{-1}]$$

A stabilitási paraméter értéke:
$$\beta = \frac{g}{\bar{\Theta}} = 3,26 \cdot 10^{-2} \text{ m s}^{-2} \text{ K}^{-1}$$

A Richardson-szám becsült értéke:
$$Ri = \beta \frac{\partial \bar{\Theta} / \partial z}{(\partial \bar{u} / \partial z)^2} = \beta \frac{\partial \bar{\Theta} / \partial \ln z}{(\partial \bar{u} / \partial \ln z)^2} z = -0,270$$
 . Högström (1988) univerzális függvényeit alkalmazva labilis rétegződés esetén:

$$Ri = -0,270 = \zeta \frac{\phi_H(\zeta)}{\phi_M^2(\zeta)} = \zeta \frac{0,95(1 - 11,6\zeta)^{-1/2}}{(1 - 19,3\zeta)^{-1/2}}$$

Számolás után $\zeta = -0,233$, ami a 4 m-es szintre ($\sqrt{z_1 z_2}$) vonatkozik, így $L_{Mon} = -17,2 \text{ m}$,

$$u_* = \kappa \frac{\partial \bar{u}}{\partial \ln z} \frac{1}{\phi_M(\zeta)} = 0,4 \cdot (0,13 \cdot 4) \frac{1}{(1 + 19,3 \cdot 0,233)^{-1/4}} = 0,136 \text{ m s}^{-1} \quad \text{és} \quad T_* = -0,083 \text{ K}$$

Ha a T_* -ot számítanánk ki, majd a Monin–Obukhov-hossz definíciójából az u_* -ot, akkor:

$$T_* = \kappa \frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial \ln z} \frac{1}{\phi_H(\zeta)} = 0,4 \cdot (-0,14 \cdot 4) \frac{1}{0,95 \cdot (1+11,6 \cdot 0,233)^{-1,2}} = -0,122 \text{ K} \quad \text{és} \quad u_* = 0,165 \text{ m s}^{-1}$$

A két számolás átlaga: $u_* = 0,153 \text{ m s}^{-1}$ és $T_* = -0,1025 \text{ K}$. Ebben az esetben viszont $L_{Mon} = -17,5 \text{ m}$. Ami közel van a számított Monin–Obukhov-féle hosszhoz. Mi a magyarázat?

Ez utóbbi eredményt használjuk a turbulens áramok meghatározására:

$$\text{Az impulzusáram: } \tau = \bar{\rho}_m u_*^2 = 1,155 \cdot 0,142^2 = 0,0233 \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-2}$$

$$\text{A szenzibilis hőáram: } H = -\bar{\rho}_m c_{pm} u_* T_* = 1,155 \cdot 1017,8 \cdot 0,142 \cdot 0,098 = 16,4 \text{ W m}^{-2}$$

A feladat megoldása során képet kaptunk a becslés bizonytalanságáról. Ha a nedvesség hatását is figyelembe szeretnénk venni a turbulencia paraméterek meghatározásánál, akkor a potenciális hőmérséklet helyett a virtuális potenciális hőmérséklettel kell számolnunk.

VIII.2.14. Elsőként határozzuk meg a szélesebb és a potenciális hőmérsékleti gradienst az egyes alrétegekre, majd ezek alapján a Richardson-számot. A Monin–Obukhov-féle hosszat az univerzális függvények ismeretében számoljuk. Labilis egyensúlyi helyzetet vizsgálunk. Högström (1988) függvényei alapján:

$$Ri = \zeta \frac{\phi_H(\zeta)}{\phi_M^2(\zeta)} = \zeta \frac{0,95(1-11,6\zeta)^{-1,2}}{(1-19,3\zeta)^{-1,2}}$$

Businger et al. (1971) alapján:

$$Ri = \zeta \frac{\phi_H(\zeta)}{\phi_M^2(\zeta)} = \zeta$$

Az eredményeket az *MVIII.2.5. táblázat* mutatja.

MVIII.2.5. táblázat. Szélesebb és hőmérsékleti gradiens, valamint a Richardson-szám és a Monin–Obukhov-féle hossz magasságszerinti változása az alsó 32 m-es rétegben a Kansas (USA) mérési expedíció adataiból alacsony vegetáció felett (préri).

Alréteg	2–4 m	4–8 m	8–16 m	16–32 m
$\sqrt{z_1 z_2}$	2,8 m	5,7 m	11,3 m	22,6 m
$\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = \frac{\Delta \bar{u}}{\Delta \ln z} \frac{1}{\sqrt{z_1 z_2}}$	0,46 s ⁻¹	0,20 s ⁻¹	0,08 s ⁻¹	0,03 s ⁻¹
$\frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial z} = \frac{\Delta \bar{\Theta}}{\Delta \ln z} \frac{1}{\sqrt{z_1 z_2}}$	-0,28 K m ⁻¹	-0,09 K m ⁻¹	-0,047 K m ⁻¹	-0,017 K m ⁻¹
$\beta = \frac{g}{\Theta} \text{ [m s}^{-2} \text{ K}^{-1}]$	3,20 · 10 ⁻²	3,20 · 10 ⁻²	3,21 · 10 ⁻²	3,21 · 10 ⁻²
$Ri = \beta \frac{\partial \bar{\Theta} / \partial z}{(\partial \bar{u} / \partial z)^2}$	-4,24 · 10 ⁻²	-7,20 · 10 ⁻²	-23,6 · 10 ⁻²	-60,3 · 10 ⁻²

Högström (1988)	$\zeta = -4,05 \cdot 10^{-2}$	$\zeta = -6,68 \cdot 10^{-2}$	$\zeta = -20,5 \cdot 10^{-2}$	$\zeta = -50,7 \cdot 10^{-2}$
L_{Mon}	-69,1 m	-85,3 m	-55,1 m	-44,6 m
Businger et al. (1971)	$\zeta = -4,24 \cdot 10^{-2}$	$\zeta = -7,20 \cdot 10^{-2}$	$\zeta = -23,6 \cdot 10^{-2}$	$\zeta = -60,3 \cdot 10^{-2}$
L_{Mon}	-66,0 m	-79,2 m	-47,9 m	-37,5 m

Nézzük meg a Monin–Obukhov-féle hossz meghatározását az univerzális függvények integrál alakjából a 2–4 m-es rétegben:

$$\beta \frac{\Delta \bar{\Theta}}{(\Delta \bar{u})^2} = -2,222 \cdot 10^{-2} = \frac{1}{L_{Mon}} \frac{\ln(z_2/z_1) - (\Psi_H(\zeta_2) - \Psi_H(\zeta_1))}{[\ln(z_2/z_1) - (\Psi_M(\zeta_2) - \Psi_M(\zeta_1))]^2}$$

Beírva az univerzális függvények alakját L_{Mon} értékét már kiszámíthatjuk iterációs eljárással. A mi esetünkben Högström (1988) univerzális függvényeit alkalmazva: $L_{Mon} = -68,1 \text{ m}$.

$$u_* = \kappa \Delta \bar{u} \frac{1}{\ln(z_2/z_1) - (\Psi_M(\zeta_2) - \Psi_M(\zeta_1))} = 0,60 \text{ m s}^{-1} \quad T_* = \frac{u_*^2}{\kappa \beta L_{Mon}} = -0,41 \text{ K}$$

Az impulzusáram értéke: $\tau = \bar{\rho}_m u_*^2 = 0,432 \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-2}$.

A szenzibilis hőáram: $H = -\bar{\rho}_m c_{pm} u_* T_* = 299,6 \text{ W m}^{-2}$.

Businger et al. (1971) univerzális függvényét alkalmazva: $L_{Mon} = -65 \text{ m}$

$$u_* = \kappa \Delta \bar{u} \frac{1}{\ln(z_2/z_1) - (\Psi_M(\zeta_2) - \Psi_M(\zeta_1))} = 0,58 \text{ m s}^{-1} \quad T_* = \frac{u_*^2}{\kappa \beta L_{Mon}} = -0,40 \text{ K}$$

Az impulzusáram értéke: $\tau = \bar{\rho}_m u_*^2 = 0,403 \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-2}$.

A szenzibilis hőáram: $H = -\bar{\rho}_m c_{pm} u_* T_* = 282,6 \text{ W m}^{-2}$.

(A kétféle módszerrel – az adott univerzális függvények közvetlen alkalmazásával, illetve integrálásával – számított L_{Mon} értéke között az eltérés a 2–4 m-es rétegben 1 m, ami hozzávetőlegesen 2%-os bizonytalanságot jelent a mi esetünkben.)

VIII.2.15. Lásd Arya (2011) tankönyvének 11. fejezetét. A könyv megtalálható az interneten.

VIII.2.16. A $\bar{t} = 31^\circ \text{C}$ -os hőmérsékletre tartozó telítési gőznyomás

$$\bar{e}_s(\bar{t}) = 6,11 \cdot 10^{\frac{7,5\bar{t}}{237,3+\bar{t}}} = 44,94 \text{ hPa}$$

A relatív nedvesség 35%, így a levegő gőznyomása $\bar{e} = 0,35 \cdot 44,94 = 15,7 \text{ hPa}$. A specifikus nedvesség:

$$\bar{q} = 0,622 \frac{e}{p - 0,378e} = 10,5 \cdot 10^{-3} \text{ kg kg}^{-1}$$

A nedves levegő specifikus gázállandója:

$$R_M = R_d(1 + 0,608\bar{q}) = 288,8 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1},$$

az állandó nyomáson vett fajhő:

$$c_{pm} \cong c_{pd}(1 + 0,8\bar{q}) = 1013,4 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1},$$

ahol $R_d = 287 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$, $c_{pd} = 1005 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$.

A réteg átlagos potenciális hőmérséklete:

$$\bar{\Theta} = \bar{T} \left(\frac{p_0}{p} \right)^{\frac{R_d}{c_{pm}}} = 304,41 \text{ K} = 31,25 \text{ }^\circ\text{C} \quad (p_0 = 1000 \text{ hPa}).$$

A nedves levegő sűrűsége:

$$\bar{\rho}_m = \frac{\bar{p}}{R_M \bar{T}} = \frac{99700}{288,8 \cdot 304,15} = 1,135 \text{ kg m}^{-3}$$

A dinamikus sebesség: $u_* = \sqrt{\frac{\tau}{\rho_m}} = 0,41 \text{ m s}^{-1}$, a dinamikus hőmérséklet: $T_* = -\frac{H}{\rho_m c_{pm} u_*} = -0,265 \text{ K}$. A

Monin–Obukhov-féle hossz: $L_{Mon} = \frac{u_*^2}{\kappa \beta T_*} = -49,2 \text{ m}$

ahol a stabilitási paraméter: $\beta = \frac{g}{\Theta} = 3,22 \text{ m s}^{-2} \text{ K}^{-1}$

(Ha a nedvesség hatását is figyelembe szeretnénk venni a turbulencia paraméterek meghatározásánál, akkor a potenciális hőmérséklet helyett a virtuális potenciális hőmérséklettel kell számolnunk.)

Az ózon fluxust gradiens módszerrel határozzuk meg. A hőcserélődésre használt (Högström, 1988) univerzális függvényeket alkalmazzuk:

$$\bar{c}_2 - \bar{c}_1 = \frac{c_*}{\kappa} 0,95 [\ln z_2 - \ln z_1 - (\psi_H(\zeta_2) - \psi_H(\zeta_1))]$$

Az adatok behelyettesítése után: $c_* = 0,227 \text{ ppb}$. A turbulens áram (az ózon ülepedés negatív fluxust jelent) $F_{O_3} = -c_* u_*$. Ha a koncentrációt ppb-ben adjuk meg, akkor a fluxus: $F_{O_3} = -0,093 \text{ ppb m s}^{-1}$. Végezetül nézzük meg a [ppb] és a $[\text{mg m}^{-3}]$ közötti átszámítást:

$$\bar{c} [\mu \text{ m}^{-3}] = \bar{c} [\text{ppb}] \cdot \rho_m M_{O_3} M_m^{-1},$$

ahol az ózon, a nedves levegő és a száraz levegő molekulatömege rendre: $M_{O_3} = 48 \text{ g mol}^{-1}$, $M_m = M_d(1 + 0,608\bar{q})^{-1} = 28,78 \text{ g mol}^{-1}$ és $M_d = 28,96 \text{ g mol}^{-1}$. Így a váltószámami esetünkben: $1 \text{ ppb} = 1,89 \mu \text{g m}^{-3}$, az ózon fluxus értéke pedig:

$$F_{O_3} = -175,8 \text{ ng m}^2 \text{ s}^{-1} = -0,176 \text{ } \mu\text{g m}^2 \text{ s}^{-1}$$

VIII.3. A felszínközeli réteg turbulencia karakterisztikáinak számítása

VIII.3.1. A becsült sugárzási egyenleg: $R_n = 770 \text{ W m}^{-2}$. A sugárzási egyenleg hőmérséklet függése:

$$\frac{\partial R_n}{\partial T} = \frac{1}{1 + c_3} (6c_1 \bar{T}^5 - 4\sigma \bar{T}^3)$$

Az adatok ($\bar{T} = 296,15 \text{ K}$) behelyettesítése után: $\frac{\partial R_n}{\partial T} = 1,51 \text{ W m}^{-2}$. A hőmérséklet 1°C -kal történő növekedése $1,51 \text{ W m}^{-2}$ sugárzási egyenleg növekedést okoz. A sugárzásegyenleg becslése csak kevésbé érzékeny a hőmérséklet pontos megadására.

VIII.3.2. A stabilitási paraméter: $\beta = \frac{g}{\Theta} \cong \frac{g}{T} = 0,0338 \text{ m s}^{-2} \text{ K}^{-1}$. Az impulzusáram, s innen a dinamikus sebesség

a Monin–Obukhov-féle hossz $\left(L_{Mon} = \frac{u_*^2}{\beta \kappa T_*} \right)$ és a szenzibilis hőáram $\left(H = -\bar{\rho}_m c_{pm} u_* T_* \right)$ alapján számolható:

$$u_* \left(\frac{\tau}{\rho} \right)^{1/2} = [L_{Mon} \kappa \beta (-H / (\bar{\rho}_m c_{pm}))]^{1/3} = 0,381 \text{ m s}^{-1}$$

A dinamikus hőmérséklet: $T_* = -\frac{H}{\bar{\rho}_m c_{pm} u_*} = 0,215 \text{ K}$

Az impulzusra és a szenzibilis hőre vonatkozó turbulens diffúziós együttható alakja:

$$K_M(z) = \frac{\kappa z u_*}{\phi_M(\zeta)}, \quad K_H(z) = \frac{\kappa z u_*}{\phi_M(\zeta)}$$

A K_M és K_H turbulens diffúziós együttható profilját az alsó 20 m-es rétegben a *MVIII.3.1. ábra* szemlélteti.

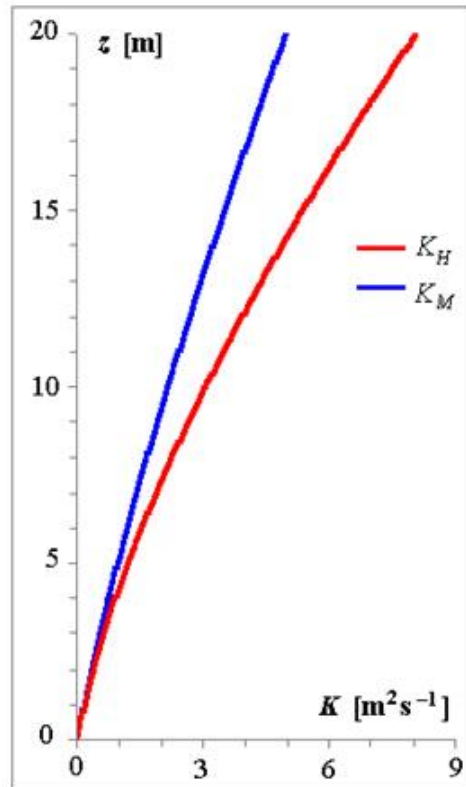
A Monin–Obukhov-féle hasonlósági elmélet alapján Businger et al. (1971) univerzális függvényeinek az integrált alakját használva az 1–4 m-es réteg szélesség és potenciális hőmérséklet különbsége rendre: $\Delta \bar{u} = 1,17 \text{ m s}^{-1}$, $\Delta \bar{\Theta} = -0,59 \text{ K}$. Behelyettesítés után:

$$\bar{K}_M = u_*^2 \frac{\Delta z}{\Delta u} = 0,37 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}, \quad \bar{K}_H = T_* u_* \frac{\Delta z}{\Delta \Theta} = 0,42 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$$

Megjegyezzük, ha a turbulens diffúziós együtthatók integrálját vesszük:

$$(\bar{K})_{int} = \frac{1}{\Delta z} \int_{z_1}^{z_2} K(z) dz$$

Elvégezve az integrálást: $(\overline{K}_M)_{\text{int}} = 0,44 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$, $(\overline{K}_H)_{\text{int}} = 0,51 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$. A két becslés nem egyezik meg. Az első becslést használjuk!



MVIII.3.1. ábra. A K_M és K_H turbulens diffúziós együttható profilját az alsó 20 m-es rétegben ($L_{\text{Mon}} = -50 \text{ m}$, $u_* = 0,381 \text{ m s}^{-1}$, $\kappa = 0,4$).

Tudjuk, hogy $\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = \frac{u_*}{\kappa z} \phi_M(\zeta) = \frac{u_*^2}{K_M(\zeta)}$, $\frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial z} = \frac{u_* T_*}{K_H(\zeta)}$, s ezek integrálásával kapjuk a bizonyítani kívánt egyenlőséget.

Az érdeességi magasságot nem kellett használni.

VIII.3.3. Indifferens rétegződés esetén:

$\sigma_u = 2,45 u_* = 0,858 \text{ m s}^{-1}$, $\sigma_v = 1,9 u_* = 0,665 \text{ m s}^{-1}$, $\sigma_w = 1,45 u_* = 0,508 \text{ m s}^{-1}$. Indifferens esetben ($T_* = 0 \text{ K}$) nincs szenzibilis hőáram, ez úgy lehet, ha $\sigma_T \rightarrow 0 \text{ K}$. A gyakorlatban kvázi-indifferens rétegződés mellett kapott dinamikus hőmérséklettel számolunk, ami nullához közeli kis érték.

A Monin–Obukhov–féle hossz $L_{\text{Mon}} = \frac{u_*^2}{\kappa \beta (-H / \rho_m c_p m u_*)}$, a dinamikus hőmérséklet. Stabilis esetben ($H = -40 \text{ W m}^{-2}$)

$$L_{\text{Mon}} = 97,6 \text{ m}, \quad T_* = \frac{-H}{\rho_m c_p m u_*} = 0,095 \text{ K}, \quad \sigma_w = 1,45 \cdot u_* \cdot [(1 - 15z/L_{\text{Mon}})^{-1/4}]^{-1/2} = 0,413 \text{ m s}^{-1},$$

$$\sigma_T = 1,6 \cdot T_* \cdot [(1 + 5z/L_{\text{Mon}})]^{-1/2} = 0,124 \text{ K}.$$

Labilis esetben ($H = 100 \text{ W m}^{-2}$)

$$L_{Mon} = -39,0 \text{ m}, \quad T_* = \frac{-H}{\rho_m c_{pd} u_*} = 0,234 \text{ K}, \quad \sigma_w = 1,45 \cdot u_* \cdot [(1-15z/L_{Mon})^{-1/4}]^{-1/2} = 0,618 \text{ m s}^{-1},$$

$$\sigma_T = 1,6 \cdot T_* \cdot [(1-15z/L_{Mon})^{-1/2}]^{-1/2} = 0,556 \text{ K}.$$

VIII.3.4. Első közelítésként kihasználjuk, hogy $w_* \cong \sigma_w / 0,6 = 1,67 \sigma_w$. Labilis rétegződés esetén alkalmazzuk a $\sigma_w = 1,25 \cdot u_* \cdot [(1-15z/L_{Mon})^{-1/4}]^{-1/2}$ becslést. Ehhez meg kell határoznunk a dinamikus sebességet és a a Monin–Obukhov-féle hosszat. Az adatok behelyettesítése után:

$$u_* = \sqrt{\tau / \rho_m} = 0,36 \text{ m s}^{-1}, \quad T_* = \frac{-H}{\rho_m c_{pd} u_*} = -0,215 \text{ K} \quad (c_{pd} = 1005 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}),$$

$$L_{Mon} = \frac{u_*^2}{\kappa \beta T_*} = -45,7 \text{ m}$$

és így $\sigma_w = 1,45 \cdot u_* \cdot [(1-15z/L_{Mon})^{-1/4}]^{-1/2} = 0,746 \text{ m s}^{-1}$ és $w_* \cong 1,243 \text{ m s}^{-1}$. A konvektív PHR magasság:

$$h = \frac{(w_*)^3}{\beta u_* T_*} \cong 752 \text{ m}$$

VIII.3.5. A felszín, pontosabban a $z_0 + d$ szint és a referencia szint $z_r = d + 10 \text{ m}$ közötti rétegben a Monin–Obukhov-féle hossz ismeretében:

$$C_M = \kappa^2 [\ln(z_r / z_0) - (\psi_M(z_r / L) - \psi_M(z_0 / L))]^{-2},$$

$$C_E = C_H = \kappa^2 [\ln(z_r / z_0) - (\psi_M(z_r / L) - \psi_M(z_0 / L))]^{-1} \cdot [\ln(z_r / z_0) - (\psi_H(z_r / L) - \psi_H(z_0 / L))]^{-1}.$$

Indifferens egyensúlyi helyzetben az ellenállási paraméter az érdességi magasság függvénye:

$$C_M = C_H = C_E = \kappa^2 [\ln(z_r / z_0)]^{-2}.$$

Az adatok behelyettesítése után: $C_M(z_0 = 10^{-4} \text{ m}) = 1,2 \cdot 10^{-3}$, $C_M(z_0 = 10^{-3} \text{ m}) = 1,9 \cdot 10^{-3}$, $C_M(z_0 = 10^{-2} \text{ m}) = 3,4 \cdot 10^{-3}$, $C_M(z_0 = 10^{-1} \text{ m}) = 7,5 \cdot 10^{-3}$.

VIII.3.6. Legyen $C_M = C_E = 1,5 \cdot 10^{-3}$. A latens hőáram:

$$LE \cong -L \bar{\rho}_m C_E \bar{u}_\tau (\bar{q}_r - \bar{q}_0) = -L C_E (\bar{\rho}_{vr} - \bar{\rho}_{v0}).$$

A fázisátalakulási hő értéke: $L \cong 2,5 \cdot 10^6 \text{ J kg}^{-1}$.

Számítsuk ki a vízgőz sűrűségeket az állapotegyenlet alapján: $\bar{\rho}_v = \frac{R_v \bar{T}}{e}$. A gőznyomás értékét a telítési gőznyomás és a relatív nedvesség alapján határozzuk meg. Vízfelszín felett a levegő telített ($f = 100\%$). A telítési gőznyomás-hőmérséklet függvényt a Magnus–Tetens-formula alapján számoljuk. Vízfelszín felett:

$$\bar{e}_s(t) = 6,11 \cdot 10^{\frac{at}{b+t}} [\text{hPa}],$$

ahol t [$^{\circ}\text{C}$] a hőmérséklet, $a = 7,5$ [$^{\circ}\text{C}^{-1}$] és $b = 237,3$ állandók. Behelyettesítés után: $\bar{e}_s(26^{\circ}\text{C}) = 33,6 \text{ hPa}$,
 $\bar{e}_s(27^{\circ}\text{C}) = 35,7 \text{ hPa}$ és $\bar{e}_s(28^{\circ}\text{C}) = 37,8 \text{ hPa}$. A 10 m-es referencia szinten: $\bar{\rho}_v = \frac{f}{100} \frac{\bar{e}_s}{R_v \bar{T}} = 18,1 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^{-3}$,
 $R_v = 461 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$. A vízfelszín felett a levegő telített. A vízgőz sűrűség és a latens hőáram értékei rendre:

$$\text{a) } t_{vz} = 26^{\circ}\text{C}, \quad \bar{\rho}_{v0} = \bar{\rho}_{vz} = \frac{\bar{e}_s}{R_v \bar{T}_{vz}} = 24,4 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^{-3}, \quad LE \cong LC_E(\bar{\rho}_{vr} - \bar{\rho}_{v0}) = 23,6 \text{ W m}^{-2},$$

$$\text{b) } t_{vz} = 27^{\circ}\text{C}, \quad \bar{\rho}_{v0} = 25,8 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^{-3}, \quad LE \cong 28,9 \text{ W m}^{-2},$$

$$\text{c) } t_{vz} = 28^{\circ}\text{C}, \quad \bar{\rho}_{v0} = 27,2 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^{-3}, \quad LE \cong 34,1 \text{ W m}^{-2}.$$

A párolgás mindhárom esetben kis érték. Ennek oka a kis hőmérséklet és nedvesség különbség a felszín és a referencia szint között.

A számított párolgás egyenesen arányos az ellenállási paraméterrel. A modellekben nagy jelentősége van az ellenállás paraméterek pontos megadásának. A módszer első (durva) közelítésként alkalmazható a terepi mérések feldolgozásában.

VIII.3.7. A dinamikus sebességet és a dinamikus nedvességet logaritmikus profil közelítéssel számoljuk ki. A

$$\text{dinamikus sebesség: } u_* = \frac{\kappa \Delta \bar{u}}{\ln(z_2 / z_1)} = 0,31 \text{ m s}^{-1}.$$

A dinamikus vízgőz sűrűség (ρ_{v*}) a dinamikus specifikus nedvesség (q_*) mintájára:

$$\rho_{v*} = \frac{\kappa \Delta \bar{\rho}_v}{\ln(z_2 / z_1)}.$$

A vízgőz sűrűsége a két szinten megadható a hőmérséklet és a relatív nedvesség ismeretében az állapotegyenlet

$$\text{alapján: } \bar{\rho}_v = \frac{f}{100} \frac{\bar{e}_s}{R_v \bar{T}}. \quad \text{Felhasználva, hogy } \bar{e}_s(15^{\circ}\text{C}) = 17,1 \text{ hPa} \quad \text{és} \quad \bar{\rho}_v(0,5 \text{ m}) = 11,8 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^{-3},$$

$\bar{\rho}_v(2 \text{ m}) = 9,6 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^{-3}$ így $\rho_{v*} = \frac{\kappa \Delta \bar{\rho}_v}{\ln(z_2 / z_1)} = -0,635 \text{ kg m}^{-3}$. A latens hőáram: $LE = 492,1 \text{ W m}^{-2}$, ami nagyon nagy érték, s viszonylag alacsony hőmérsékleten. Ilyen extrém párolgást figyelhetünk meg pl. egy erős hidegfront után, amikor nagy sebességgel szárazabb levegő érkezik a vízfelszín fölé (Liu et al., 2011). Számítsuk át a párolgást [mm órá^{-1}] egységre! 1 W m^{-2} latens hő azt jelenti, hogy 1 óra alatt 3600 J m^{-2} energia fordítódik párolgásra, ami $3600 / 2,5 \cdot 10^6 = 1,44 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^{-2}$ víz elpárolgását jelenti, ami megfelel $1,44 \cdot 10^{-3} \text{ mm}$ párolgásnak, így a vízfelszínről 1 óra alatt $\approx 0,7 \text{ mm}$ víz párolgott el.

VIII.3.8. Az ellenállás módszer alapján:

$$\tau \cong \bar{\rho}_m C_M \bar{u}_r^2 = -LC_E (\bar{\rho}_{vr} - \bar{\rho}_{v0}) = 0,106 \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-2},$$

$$H \cong \bar{\rho}_m c_{pd} C_H \bar{u}_r (\bar{\Theta}_r - \bar{\Theta}_0) = -LC_E (\bar{\rho}_{vr} - \bar{\rho}_{v0}) = 13,4 \text{ W m}^{-2}.$$

A felszíni nyomás 1000 hPa, így $\bar{\Theta} = \bar{T}$.

A latens hőáram kiszámításához ismerni kell a felszíni specifikus nedvességet. A vízfelszín feletti telítési gőznyomás:

$$e_s(28,41^\circ\text{C}) = 38,7 \text{ hPa}, \text{ s így a telítési specifikus nedvesség: } q_{s0} = \frac{0,622 e_s}{p - 0,378 e_s} = 24,4 \cdot 10^{-3} \text{ kg kg}^{-1},$$

$$LE \cong L \bar{\rho}_m C_E \bar{u}_r (\bar{q}_r - \bar{q}_{s0}) = -LC_E (\bar{\rho}_{vr} - \bar{\rho}_{v0}) = 268,9 \text{ W m}^{-2}.$$

1 óra alatt hozzávetőlegesen 0,4 mm víz párolgott el.

A virtuális szenzibilis hőáram a virtuális hőmérsékleti fluktuációk $\Theta_v' \cong \Theta' + 0,608 \bar{\Theta} q'$ alapján a következő egyenlőség alapján számítható:

$$\overline{\Theta_v' w'} \cong \overline{\Theta' w'} + 0,608 \bar{\Theta} \overline{q' w'},$$

így

$$H_v \cong H + \frac{c_{pd} 0,608 \bar{\Theta}}{L} LE = 13,4 + 19,8 = 33,2 \text{ W m}^{-2},$$

ahol $\bar{\Theta} = \frac{\bar{\Theta}_r + \bar{\Theta}_0}{2} = 27,92^\circ\text{C} = 301,07 \text{ K}$. A két szenzibilis hőáram (H_v és H) között nagy az eltérés. Az adaléktag ugyanolyan nagyságrendű, mint a kvázi-indifferens rétegződésre jellemző (kis értékű) szenzibilis hőáram (H). Megjegyezzük, hogy a szónikus anemométerrel, ahol az ún. szónikus hőmérséklet fluktuációit mérjük a H_v virtuális szenzibilis hőáramot számíthatjuk, s ebből határozzuk meg a szenzibilis hőáramot (H).

VIII.3.9. Induljunk ki a latens hőáramra vonatkozó ellenállás módszer alapegyenletéből:

$$LE = -L \bar{\rho}_m C_M \bar{u}_r (\bar{q}_r - \bar{q}_{0z}).$$

A vízfelszín felett a légrész telített, míg a referencia magasságban már telítetlen. Tekintsük a referencia magasságban a telítési specifikus nedvesség ($\bar{q}_{sr}$) és a mért specifikus nedvesség különbségét ($\bar{q}_r$), ami a standard meteorológiai mérésekből is könnyen származtatatható. Ekkor a latens hő két tag összegeként is felírható:

$$LE = -L \bar{\rho}_m C_M \bar{u}_r (\bar{q}_{rs} - \bar{q}_{0z}) + LE_a,$$

$$LE_a = -L \bar{\rho}_m C_E \bar{u}_r (\bar{q}_r - \bar{q}_{rs}).$$

A szenzibilis hőáram alakja az ellenállás módszer alapján:

$$H = -\bar{\rho}_m c_{pm} C_H \bar{u}_r (\bar{\Theta}_r - \bar{\Theta}_0)$$

Feltételezve, hogy a két ellenállás – hasonlóan a kétféle turbulens diffúziós együtthatóhoz – a felszín közelében megegyezik ($C_M = C_H$), továbbá $\bar{\Theta} \cong \bar{T}$ felírható, hogy:

$$\frac{LE}{H} = B^{-1} = \frac{L}{c_{pm}} \frac{q_{rs} - q_0}{T_r - T} + \frac{LE_a}{H},$$

ami tovább alakítható kihasználva az $LE_a = L \cdot E_a$ és $LE = L \cdot E$ jelölést, ahol E_a és E a vízgőzáram, továbbá alkalmazva a $\frac{q}{p} \cong \frac{0,622e}{p}$ közelítést:

$$B^{-1} = \frac{0,622L}{c_{pm}p} \frac{e_{rs} - e_{0s}}{T_r - T} + B^{-1} \frac{E_a}{E}$$

Az egyenlet – s ez volt Penman gondolata – tovább alakítható. A Bowen-arány új alakja:

$$B = \frac{\gamma}{\Delta} \frac{LE - LE_a}{LE}$$

Az itt szereplő két új mennyiség a γ pszichrometrikus állandó (ami a valóságban kis mértékben függ a nyomástól és a hőmérséklettől a fázisátalakulási hő hőmérsékletfüggésén keresztül – lásd a Planck-egyenletet)

$$\gamma = \frac{c_{pm} p}{0,622 L}$$

A Clausius-Clapeyron-egyenlet alapján pedig meghatározható a telítési gőznyomás-hőmérséklet függvény érintője:

$$\Delta = \frac{\bar{e}_{rs} - \bar{e}_0}{T_r - T_0} \cong \frac{d\bar{e}_s}{dT} = \frac{L}{R_v} \frac{\bar{e}_s}{T^2}$$

A Bowen-arányt behelyettesítve a felszíni energiamérleg egyenletbe:

$$Rn - G = LE + H = LE + B \cdot LE,$$

s így kapjuk a jól ismert Penman-formulát:

$$LE = \frac{\Delta}{\Delta + \gamma} (Rn - G) + \frac{\gamma}{\Delta + \gamma} LE_a$$

Δ és a γ paraméter értékeit különböző relatív nedvességek esetén az *MVIII.3.1. táblázat* szemlélteti. A számítások során $q \cong 0,622e/p$, $c_{pm} \cong c_{pd}(1 + 0,8\bar{q})$. A fázisátalakulási hő hőmérséklet-függésére a Planck-egyenletet használjuk:

$$L = L(t_0 = 0^\circ\text{C}) + (c_{pv} - c_w)t,$$

ahol $L(t = 0^\circ\text{C}) \cong 2,5 \cdot 10^6 \text{ J kg}^{-1}$, $c_{pv} = 1850 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$ a vízgőz állandó nyomáson vett fajhője, $c_w = 4218 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$

pedig a víz fajhője. $\gamma [\text{hPa K}^{-1}]$ értéke jó közelítéssel állandó (alapvetően a nyomástól függ, azzal arányosan változik, de a felszíni légnyomás változása azonban legfeljebb néhány %-os eltérést okoz az értékében).

MVIII.3.1. táblázat. γ és Δ értékei a relatív nedvesség függvényében adott hőmérséklet és nyomás esetén.

$t = 20^\circ\text{C}$, $p = 1000 \text{ hPa}$	$f = 50\%$	$f = 75\%$	$f = 100\%$
$e [\text{hPa}]$	11,7	17,5	23,4
$t_d [^\circ\text{C}]$	9,3	15,4	20,0
$q [\text{kg kg}^{-1}]$	$7,3 \cdot 10^{-3}$	$10,9 \cdot 10^{-3}$	$14,6 \cdot 10^{-3}$
$c_{pm} [\text{J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}]$	1010,9	1013,8	1016,7
$\gamma [\text{hPa K}^{-1}]$	0,663	0,665	0,666
$\Delta [\text{hPa K}^{-1}]$	0,780	0,984	1,449

Ha $p = 1000 \text{ hPa}$, $t = 5^\circ\text{C}$, s a relatív nedvesség 50%, akkor az egyes értékek rendre: $e = 4,36 \text{ hPa}$, $t_d \cong -4,7^\circ\text{C}$, $q = 2,7 \cdot 10^{-3} [\text{kg kg}^{-1}]$, $c_{pm} = 1007,2 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$, $\gamma = 0,660 \text{ hPa K}^{-1}$, $\Delta = 0,322 \text{ hPa K}^{-1}$.

VIII.3.10. A rendelkezésre álló energia:

$$Rn - G = 0,9 Rn = 504 \text{ W m}^{-2}$$

A 10 m-es referencia szintre vonatkozó adatok: a gőznyomás: $e = 17,3 \text{ hPa}$, a harmatpont $t_d \cong 15,2^\circ\text{C}$,

$$q_r = 10,9 \cdot 10^{-3} [\text{kg kg}^{-1}], c_{pm} = 1013,8 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}, L(18,8^\circ\text{C}) = 2,455 \cdot 10^6 \text{ J kg}^{-1},$$

$$\gamma = 0,657 \text{ hPa K}^{-1}, \Delta = 1,108 \text{ hPa K}^{-1}.$$

Továbbá:

$$q_{rz} = 13,6 \cdot 10^{-3} [\text{kg kg}^{-1}], R_m = 291,7 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}, \rho_m = 1,162 \text{ kg m}^{-3},$$

$$LE_a = -L \bar{\rho}_m C_E(z_r) \cdot \bar{u}_r (\bar{q}_r - \bar{q}_{rz}) = 251 \text{ W m}^{-2},$$

$$\frac{\Delta}{\Delta + \gamma} (Rn - G) = 316,4 \text{ W m}^{-2}, \frac{\gamma}{\Delta + \gamma} LE_a = 93,4 \text{ W m}^{-2}, LE = 316,4 + 93,4 = 409,8 \text{ W m}^{-2}.$$

A latens hőáram számításánál szereplő két tag közül a második kisebb, de növényállomány felett már nem hanyagolható el. Vízfelszín felett, ahol kicsi az ellenállási paraméter ez az elhanyagolás első közelítésként megtehető.

A szenibilis hőáram értéke a felszíni energiamérleg egyenletből számítható:

$$H = Rn - G - LE = 94,2 \text{ W m}^{-2}.$$

VIII.3.11. A Bowen-arány módszer pontatlan, ha kicsi a hőmérséklet, vagy a nedvesség különbség értéke a két szint között, hiszen ilyenkor nagy a relatív hiba, s a Bowen-arány értéke bizonytalan. Nem működik a módszer akkor sem, ha $B \rightarrow -1$, hiszen matematikailag tetszőleges megoldás adódik a szenzibilis és a latens hőáramra. Ilyenkor a rendelkezésre álló energia értéke alapján egy átlagos Bowen-arányt feltételezve becsülhetjük meg a latens és a szenzibilis hőáramot.

$$B = \frac{c_{pm}}{L} \frac{\bar{\Theta}_2 - \bar{\Theta}_1}{\bar{q}_2 - \bar{q}_1} \cong \gamma \frac{\bar{T}_2 - \bar{T}_1}{e_2 - e_1} = 0,66 \frac{-1,5}{-0,8} = 1,26$$

A számpéldában:

$$B = 0,66 \frac{-1,4}{-0,9} = 1,03$$

$$B = 0,66 \frac{-1,6}{-0,7} = 1,51$$

A minimális Bowen-arány érték: , a maximális érték: , vagyis nagyon fontos a pontos hőmérséklet és nedvesség különbség ismerete. A 0,1 °C-os hőmérséklet mérési pontosság nem elég, hasonlóan a 0,1 hPa-os pontosságú gőznyomás méréshez. Másképp fogalmazva törekedni kell a század fokos pontossággal mérő hőmérséklet, illetve harmatpont mérő szenzorok alkalmazására, s ezeket egymáshoz is kalibrálni kell.

VIII.4. Az Ekman-spirál

VIII.4.1. Írjuk fel az általunk alkalmazott függvényeket (sin, cos, exp) sorfejtés segítségével!

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!},$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

A sorfejtés elvégzése után

$$u \approx u_\varepsilon \left[1 - \left(1 - \frac{z}{h} \right) \left(1 - \frac{1}{2!} \frac{z^2}{h^2} \right) \right] \approx u_\varepsilon \frac{z}{h},$$

$$v \approx u_\varepsilon \left(1 - \frac{z}{h} \right) \left(\frac{z}{h} - \frac{1}{3!} \frac{z^3}{h^3} \right) \approx u_\varepsilon \frac{z}{h}.$$

VIII.4.2. Amikor $z \rightarrow 0$ az Ekman spirál egyenlete alapján azt kapjuk, hogy:

$$\tan \alpha = \frac{v}{u} = \frac{\exp\left(-\frac{z}{h}\right) \sin \frac{z}{h}}{1 - \exp\left(-\frac{z}{h}\right) \cos \frac{z}{h}}, \quad \tan \alpha(z \rightarrow 0) \approx 1 \quad \text{és így} \quad \alpha = 45^\circ.$$

VIII.4.3. A szélsébség maximumát keressük. Ez ott lesz ahol a szélprofil magasságszerinti deriváltja nullává válik:

$$\frac{du}{dz} = u_{\varepsilon} \left[\frac{1}{h} \exp\left(-\frac{z}{h}\right) \cos \frac{z}{h} + \frac{1}{h} \exp\left(-\frac{z}{h}\right) \sin \frac{z}{h} \right] = 0.$$

Ez akkor teljesül, ha

$$\cos \frac{z}{h} = -\sin \frac{z}{h}, \text{ és így } \frac{z}{h} = \frac{3}{4}\pi.$$

A kapott értékek behelyettesítése után $u = 1,07 \cdot u_{\varepsilon}$.

VIII.4.4. Végezzük el az Ekman-szállítás meghatározásához az integrálást a sebességprofil ismeretében:

$$U = \int_0^{\infty} (u - u_{\varepsilon}) dz = - \int_0^{\infty} \left[u_{\varepsilon} \exp\left(-\frac{z}{h}\right) \cos \frac{z}{h} + v_{\varepsilon} \exp\left(-\frac{z}{h}\right) \sin \frac{z}{h} \right] dz = -(u_{\varepsilon} I_1 + v_{\varepsilon} I_2) = -\frac{h}{2} (u_{\varepsilon} + v_{\varepsilon}),$$

$$V = \int_0^{\infty} (v - v_{\varepsilon}) dz = \int_0^{\infty} \left[u_{\varepsilon} \exp\left(-\frac{z}{h}\right) \sin \frac{z}{h} - v_{\varepsilon} \exp\left(-\frac{z}{h}\right) \cos \frac{z}{h} \right] dz = (u_{\varepsilon} I_2 - v_{\varepsilon} I_1) = \frac{h}{2} (u_{\varepsilon} - v_{\varepsilon}),$$

ahol az I_1, I_2 integrál alakja:

$$I_1 = \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{z}{h}\right) \cos \frac{z}{h} dz = \frac{h}{2} \exp\left(-\frac{z}{h}\right) \left(\sin \frac{z}{h} + \cos \frac{z}{h} \right) \Big|_0^{\infty} = \frac{h}{2},$$

$$I_2 = \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{z}{h}\right) \sin \frac{z}{h} dz = -\frac{h}{2} \exp\left(-\frac{z}{h}\right) \left(\sin \frac{z}{h} + \cos \frac{z}{h} \right) \Big|_0^{\infty} = \frac{h}{2}.$$

VIII.4.5. A kontinuitási egyenlet magasság szerinti integrálásával azt kapjuk, hogy

$$\frac{\partial u_{\varepsilon}}{\partial y} \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{z}{h}\right) \sin \frac{z}{h} dz = -w(h)$$

Mivel $\zeta_{\varepsilon} = -\frac{\partial u_{\varepsilon}}{\partial y}$, végeredményül azt kapjuk, hogy $w(h) = \frac{d}{2} \zeta_{\varepsilon}$. Behelyettesítve a számértékeket $w(h) = 2,2 \text{ cm s}^{-1}$.

VIII.4.6. Integráljuk az ageosztrofikus szélkomponenseket a határretegben (egyszerűség kedvéért a nulla és $-\infty$ között – azzal a feltételezéssel élünk, hogy a határreteg alatt az áramlás geosztrofikus.)

$$U = \int_{-\infty}^0 (u - u_{\varepsilon}) dz = \frac{\sqrt{2}}{\rho f h} \int_{-\infty}^0 \exp\left(\frac{z}{h}\right) \left[\tau_x \cos\left(\frac{z}{h} - \frac{\pi}{4}\right) - \tau_y \sin\left(\frac{z}{h} - \frac{\pi}{4}\right) \right] dz = \frac{\sqrt{2}}{\rho f h} (\tau_x I_3 - \tau_y I_4) = \frac{\tau_y}{\rho f},$$

$$V = \int_{-\infty}^0 (v - v_{\varepsilon}) dz = \frac{\sqrt{2}}{\rho f h} \int_{-\infty}^0 \exp\left(\frac{z}{h}\right) \left[\tau_x \sin\left(\frac{z}{h} - \frac{\pi}{4}\right) + \tau_y \cos\left(\frac{z}{h} - \frac{\pi}{4}\right) \right] dz = \frac{\sqrt{2}}{\rho f h} (\tau_x I_4 - \tau_y I_3) = -\frac{\tau_x}{\rho f},$$

ahol

$$I_3 = \int_{-\infty}^0 \exp\left(\frac{z}{h}\right) \cos\left(\frac{z}{h} - \frac{\pi}{4}\right) dz = \frac{h}{2} \exp\left(\frac{z}{h}\right) \left[\cos\left(\frac{z}{h} - \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{z}{h} - \frac{\pi}{4}\right) \right] \Big|_{-\infty}^0 = 0,$$

$$I_4 = \int_{-\infty}^0 \exp\left(\frac{z}{h}\right) \sin\left(\frac{z}{h} - \frac{\pi}{4}\right) dz = \frac{h}{2} \exp\left(\frac{z}{h}\right) \left[\sin\left(\frac{z}{h} - \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{z}{h} - \frac{\pi}{4}\right) \right] \Big|_{-\infty}^0 = -\frac{\sqrt{2}}{2} h.$$

Az Ekman-transzport merőleges a szélnyírási vektorra, az északi félgömbön a szélnyíráshoz viszonyítva jobbra mutat.

VIII.4.7. A kezdeti és peremfeltételek segítségével $t=0$ időpontban $[u(x=0)=0]$ a parton és $\eta \rightarrow 0$ a parttól messze ($x \rightarrow +\infty$) a feladatban adott differenciálegyenlet-rendszer megoldásával a t időpontban

$$u = -\frac{\tau}{f\rho H} (1 - e^{-x/R}), \quad v = -t \frac{\tau}{\rho H} e^{-x/R}, \quad \text{és} \quad \eta = t \frac{\tau}{Rf\rho} e^{-x/R},$$

ahol a parttól távol a Rossby-sugár, értéke:

$$R = \sqrt{gH}/f.$$

A viharhullám magassága az idő lineáris függvénye. Minnél közelebb vagyunk a parthoz, annál nagyobb a vízszint-emelkedés üteme.

VIII.4.8.

Az örvényesség időbeli változását leíró egyenlet a határréteg h vastagsága és a légkör H magassága között történő vertikális integrálását követően azt kapjuk, hogy:

$$\int_h^H \frac{dw}{dz} dz = f[w(h) - w(H)]$$

Amennyiben az örvényességet a geostrofikus örvényességgel helyettesítjük, valamint kihasználjuk, hogy $w(H)=0$, $w(h) = \frac{h}{2} \zeta_\varepsilon$ és $H \gg h$, azt kapjuk, hogy:

$$\int_{\zeta_0}^{\zeta_\varepsilon} \frac{d\zeta_\varepsilon}{\zeta_\varepsilon} = -\frac{fh}{2H} \int_0^t dt$$

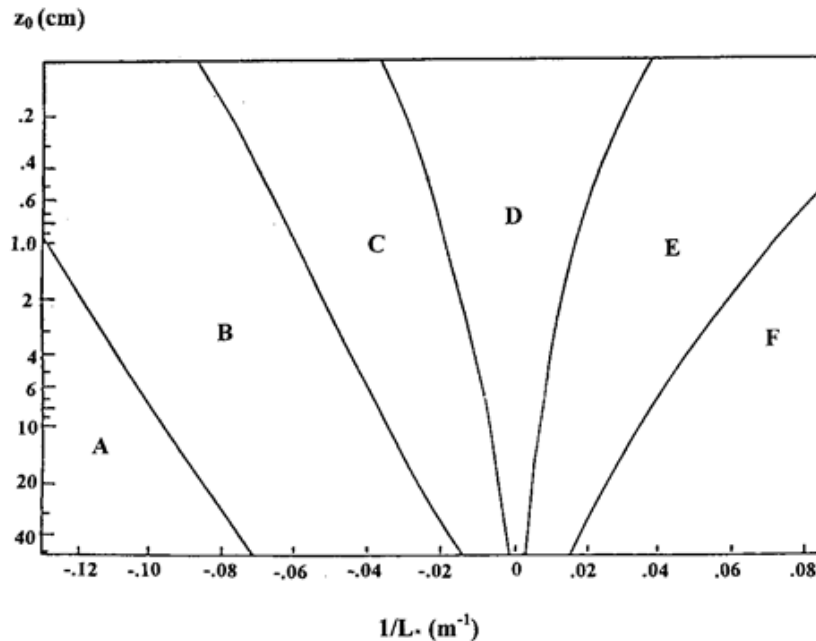
Az integrálás elvégzése után egyértelművé válik, hogy az örvényesség csökkenése a határrétegben jelenlévő súrlódási erő miatt történik

$$\zeta_\varepsilon = \zeta_{\varepsilon 0} \exp\left[-\frac{fh}{2H} t\right].$$

Abban az esetben, ha $\zeta_\varepsilon = \frac{\zeta_{\varepsilon 0}}{e}$, az következik, hogy $t = \frac{2H}{\sqrt{2} f K_m}$. Behelyettesítve a megadott értékeket ez az idő megközelítőleg 5,2 nap.

VIII.5. A stabil és az instabil keveredési réteg vastagságának számítása

VIII.5.1. Az *MVIII.5.1. ábra* szerint a légállapot stabilis.



MVIII.5.1. ábra. A légállapot összefüggése a Monin–Obukhov-féle hossz reciprokával (L_0^{-1}) és az érdességi magassággal (z_0).

A keverési rétegvastagságot a

$$h = c \cdot \sqrt{\frac{u_* \cdot L_0}{f}}$$

összefüggés alapján számítjuk. Behelyettesítés után:

$$h = 0,35 \cdot \sqrt{\frac{0,26 \cdot 102}{10^{-4}}} = 180 \text{ m}$$

VIII.5.2. Először a virtuális potenciális hőmérsékleti értékeket (θ_v) határozzuk meg:

a) Helyi időben 15 órakor a földfelszínen:

$$r(z_{mT})_{\text{max}} = \frac{0,622 \cdot 939}{100400 - 939} = 0,00587 \text{ kg kg}^{-1},$$

$$\theta(z_{mT})_{\text{max}} = 284,0 \cdot \left(\frac{10^5}{100400} \right)^{0,286} = 283,7 \text{ K},$$

$$\Theta_v(z_{mT})_{\max} = 283,7 \cdot (1 + 0,608 \cdot 0,00587) = 284,7 \text{ K}$$

b) 00 UTC-kor a földfelszínen:

$$r(z_{mT}) = \frac{0,622 \cdot 648}{100450 - 648} = 0,00404 \text{ kg kg}^{-1}$$

$$\Theta(z_{mT}) = 279,1 \cdot \left(\frac{10^5}{100450} \right)^{0,286} = 278,7 \text{ K}$$

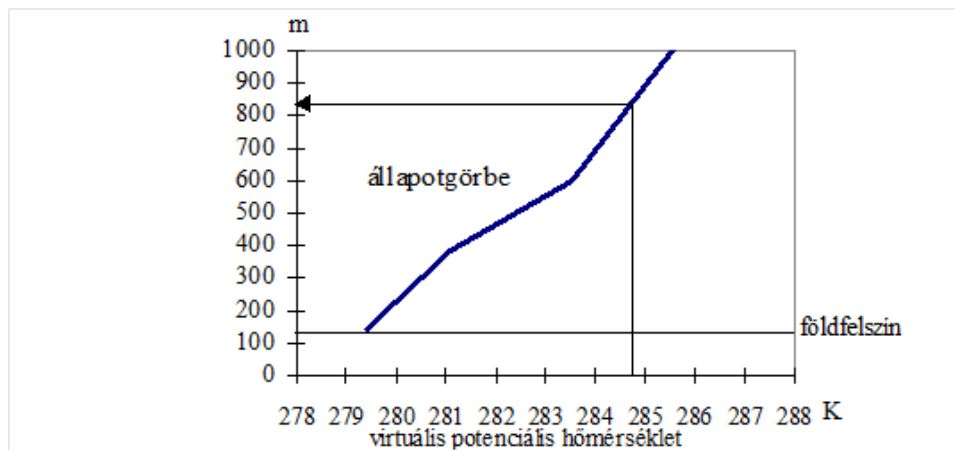
$$\Theta_v(z_{mT}) = 278,7 \cdot (1 + 0,608 \cdot 0,00404) = 279,4 \text{ K}$$

A z_1 , z_2 és z_3 markáns pontokban (00 UTC-s rádiószondás felszállás) hasonlóan történik a virtuális potenciális hőmérsékletek meghatározása:

$$\Theta_v(z_1) = 281,1 \text{ K}, \quad \Theta_v(z_2) = 283,5 \text{ K}, \quad \Theta_v(z_3) = 294,0 \text{ K}$$

A keveredési réteg feletti potenciális hőmérsékleti gradiens $\gamma_\Theta = 0,005 \text{ K m}^{-1} = 0,5 \text{ K/100 m}$ a 2. és a 3. markáns ponti adatok alapján.

VIII.5.3. Az *MVIII.5.2. ábrán* a rádiószondás mérések alapján megszerkesztett virtuális potenciális hőmérséklet állapotgörbéje látható. A keveredési rétegvastagság napi maximális értékét a $\Theta_v(z_{mT})_{\max}$ -ból kiinduló függőleges egyenes és az állapotgörbe metszéspontjánál leolvasott magasság adja meg. Ebben az esetben a tengerszint felett a keveredési réteg felső határának magassága 820 m. A keveredési réteg felső határának földfelszín feletti magassága, vagyis a keveredési rétegvastagság: $h = 820 \text{ m} - 140 \text{ m} = 680 \text{ m}$.



MVIII.5.2. ábra. A napi maximális keveredési rétegvastagság meghatározása a 00 UTC-kor végzett rádiószondás mérés alapján.

Mivel 07 UTC-kor még stabilis volt a légrétegződés ($T_* > 0$), így a számítást 07:30 UTC-kor kell kezdeni a 07 UTC és 08 UTC adatok átlagértékeinek figyelembevételével. A potenciális hőmérsékletet az M1. melléklet szerint kell meghatározni. A fentiek alapján $\gamma_\Theta = 0,005 \text{ K m}^{-1} = 0,5 \text{ K/100 m}$. A keveredési réteg felső határára számított potenciális hőmérsékleti ugrást a következő egyenlettel kell kiszámítani:

$$\Delta\Theta_m = \frac{A \cdot h - \kappa \cdot B \cdot L_*}{(1 + 2A) \cdot h - \kappa \cdot B \cdot L_*} \cdot \gamma_{\Theta_m} \cdot h$$

A $\Delta\Theta_m$ -re kapott értékeket az *MVIII.5.1. táblázat* tartalmazza:

MVIII.5.1. táblázat. A potenciális hőmérsékleti ugrás korrekció nélküli és korrigált adatai.

Számítási időszak [UTC]	$\Delta\Theta_m$ korrekció nélkül [K]	$\Delta\Theta_m$ korrigált [K]
7. 30–8. 00	0,11	0,30
8. 00–9. 00	0,10	0,30
9. 00–10. 00	0,16	0,33
10. 00–11. 00	0,27	0,38
11. 00–12. 00	0,36	0,43

A keresett keveredési rétegvastagságot iterációval határozzuk meg. Vagyis h_2 értékét $h_1 = 100$ m-től fokozatosan növeljük (pl. 1 m-rel) mindaddig, amíg az egyenlőség nem teljesül. Az eredményeket az *MVIII.5.2. táblázat* tartalmazza.

MVIII.5.2. táblázat. A keveredési rétegvastagság a nappali órákban.

Számítási időszak [UTC]	Keveredési rétegvastagság változása (Δh) [m]	Keveredési rétegvastagság (h) [m]
7. 30–8. 00	20	120
8. 00–9. 00	97	217
9. 00–10. 00	119	336
10. 00–11. 00	126	462
11. 00–12. 00	106	568

VIII.6. A turbulens keveredés, a szennyezőanyag diszperziója

VIII.6.1. Labilis légrétegződés esetén a füstfáklya tömegközéppontjának a kémény alapjától számított horizontális távolságát három szakaszban kell meghatározni.

$$H_p(x) = \begin{cases} \min \{ (h_z + \Delta h(x)), h \} & , \text{ ha } x \leq x_f \\ H_p(x_f) + \left(\frac{h}{2} - H_p(x_f) \right) \cdot \frac{(x - x_f)}{(x_m - x_f)} & , \text{ ha } x_f < x \leq x_m \\ h/2 & , \text{ ha } x > x_m \end{cases}$$

A forrás és a füstfáklya stabilizálódása közötti szakaszban ($x \leq x_f$) a füstfáklya tömegközéppontja lesz a füstfáklya magassága, ha az nem haladja meg a keveredési réteg magasságát.

A füstfáklya emelkedését ($H_p(x)$) a következő egyenlettel kell kiszámítani:

$$\Delta h(x) = \left(\frac{3F_m \cdot x}{\beta_1^2 \cdot u_p^2} + \frac{3}{2\beta_1^2} \cdot \frac{F_b \cdot x^2}{u_p^3} \right)^{1/3},$$

$$\text{ahol } \beta_1 = 0,6, \quad F_m = \frac{T(h_z)}{T_z} \cdot w_z^2 \cdot r_z^2, \quad F_b = g \cdot w_z \cdot r_z^2 \cdot \frac{\Delta T_z}{T_z}.$$

A szélesség a kéménymagasság szintjében a feladat szerint:

$$u_p = u(h_z) = u(100 \text{ m}) = 3,2 \text{ m s}^{-1}.$$

A számértékek behelyettesítése után: $F_m = 915,5 \text{ m}^4 \text{ s}^{-2}$, $F_b = 320,9 \text{ m}^4 \text{ s}^{-3}$. A füstfáklya stabilizálódásának a kibocsátástól mért távolsága $F_b > 55 \text{ m}^4 \text{ s}^{-3}$ esetén

$$x_f = 119 F_b^{2/5}.$$

Behelyettesítés után: $x_f = 1197 \text{ m}$.

A füstfáklya középvonalának ($H_p(x)$) a forrástól vett távolság (x) függvényében való meghatározásához ismerni kell a szennyezőanyag homogén átkeverődésének távolságát (x_m):

$$x_m = \bar{u} \cdot \bar{t},$$

ahol

$$\bar{t} = \frac{h}{(\bar{\sigma}_w^2)^{1/2}}.$$

A keveredési réteg szélprofiljának és a vertikális diszperziós együttható profiljának ismeretében – a feladat szerint – az átlagos szélesség és átlagos vertikális diffúziós együttható értéke rendre:

$$\bar{u} = 5,7 \text{ m s}^{-1} \quad \text{és} \quad \bar{\sigma}_w = 0,619 \text{ m s}^{-1}.$$

A behelyettesítés után a szennyezőanyag homogén átkeverődésének távolsága: $x_m = 5033 \text{ m}$.

Nem kellett korrekciós összefüggést alkalmazni sem a füstfáklya stabilizációs távolságának (x_f), sem a stabilizációs távolságban kiszámított füstfáklya emelkedés meghatározásakor.

$$x_f > x_m \quad \text{és} \quad \Delta h(x_f) > \Delta h_m,$$

miközben $\Delta T_z > 0$ és $F_b > 0$. A behelyettesítés után:

$$x_{fm} = \frac{8r_z \cdot (w_z + 3u_p)^2}{w_z \cdot u_p}, \quad x_{fm} = 252,2 \text{ m},$$

$$\Delta h_m = \frac{6r_z \cdot w_z}{u_p}, \quad \Delta h_m = 70,3 \text{ m}.$$

A behelyettesítés után: $x_f = 1197 \text{ m} > 252,2 \text{ m} = x_{fm}$ és $\Delta h(x_f) = 390,1 \text{ m} > \Delta h_m = 70,3 \text{ m}$.

A füstfáklya stabilizálódásakor a forrástól x_f távolságra a füstfáklya középvonalának magassága:

$$H_p(x_f) = 490,1 \text{ m}.$$

Az adatok behelyettesítése után a füstfáklya középvonalának meghatározása:

$$H_p(x) = \begin{cases} \min\{(100 \text{ m} + \Delta h(x)), 550 \text{ m}\} & , \text{ ha } x \leq 1197 \text{ m}; \\ 557,1 \text{ m} - 0,056x & , \text{ ha } 1197 \text{ m} < x \leq 5033 \text{ m}; \\ 275 \text{ m} & , \text{ ha } x > 5033 \text{ m}. \end{cases}$$

A forrás 1 km sugarú körzetében 100 m-es bontásban és a forrás 5 km-es körzetében 1 km-es bontásban a $H_p(x)$ értékeket az *MVIII.6.1. táblázat* adja meg:

MVIII.6.1. táblázat. A füstfáklya középvonalának magassága ($H_p(x)$) a forrás 5 km sugarú körzetében.

x	$H_p(x)$ [m]
100 m	178,4
200 m	221,2
300 m	257,4
400 m	289,7
500 m	319,5
600 m	347,4
700 m	373,8
800 m	398,9
900 m	423,0
1000 m	446,3
2000 m	445,1
3000 m	389,1
4000 m	333,1
5000 m	277,1

VIII.6.2. A keveredési réteg paraméterek vertikális átlagait ($\overline{\sigma_v^2}$, $\bar{u}$) a VIII.6.2. fejezet szerint számítottuk ki. Az átlagolást két lépésben lineáris profilok feltételezésével kell elvégezni. Az átlagolás során kapott értékeket a füstfáklya középvonalának magassága, vagyis a forrástól vett távolság befolyásolja. Ezeket az értékeket a feladatban megadtuk. Ismert a füstfáklya középvonalának a magassága is ($H_p(x)$) a forrástól vett távolság (x) függvényében.

A rétegződés labilis. A horizontális diszperziós együtthatót a következő egyenlettel számítjuk:

$$\sigma_y(x) = \frac{\left(\overline{\sigma_v^2}\right)^{1/2} \cdot x}{\bar{u} \cdot (1 + \alpha \cdot X)^p},$$

ahol

$$X = \frac{\left(\overline{\sigma_v^2}\right)^{1/2} \cdot x}{\bar{u} \cdot h},$$

$$\alpha = \frac{h}{H_p(x)} \quad \text{és} \quad p = 0,3.$$

A fenti egyenletek alkalmazásával a forrástól vett távolság és a füstfáklya középvonal magasságának a függvényében az MVIII.6.2. táblázat szerinti adatokat kapjuk a segédváltozókra és a horizontális diszperziós együtthatóra.

MVIII.6.2. táblázat. A horizontális diszperziós együttható és a meghatározásához szükséges segédváltozók értékei a forrás 5 km-es körzetében.

x	$H_p(x)$ [m]	Segédváltozók				$\sigma_y(x)$ [m s ⁻¹]
		α	$\left(\overline{\sigma_v^2}\right)^{1/2}$ [m s ⁻¹]	$\bar{u}$ [m s ⁻¹]	X	
100 m	178,4	3,1	0,704	4,3	0,03	15,95
200 m	221,2	2,5	0,704	4,7	0,05	28,57
300 m	257,4	2,1	0,704	5,1	0,08	39,43
400 m	289,7	1,9	0,704	5,5	0,09	49,06
500 m	319,5	1,7	0,704	5,8	0,11	57,91
600 m	347,4	1,6	0,705	6,0	0,13	66,35
700 m	373,8	1,5	0,706	6,3	0,14	74,42
800 m	398,9	1,4	0,708	6,5	0,16	82,16
900 m	423,0	1,3	0,710	6,7	0,17	89,67
1000 m	446,3	1,2	0,713	6,9	0,19	97,01
2000 m	445,1	1,2	0,708	5,8	0,44	213,55
3000 m	389,1	1,4	0,696	4,6	0,82	357,01
4000 m	333,1	1,7	0,693	4,3	1,18	469,53
5000 m	277,1	2,0	0,691	3,9	1,62	579,41

VIII.6.3. A vertikális diszperziós együttható egy emelt szintű és egy felszíni részből tevődik össze:

$$\sigma_z(x) = \sqrt{\sigma_{zx}(x)^2 + \sigma_{zz}(x)^2}.$$

Mivel $H_p(x) > 0,1 \cdot h$ esetén a felszíni rész $\sigma_{zs}(x) = 0$, ezért csak az emelt szintű részt kell figyelembe venni. A vertikális diszperziós együttható emelt szintű részét a következő egyenlettel kell kiszámítani:

$$\sigma_{zs}(x) = \left(\frac{1}{2} \left(\sum_j \sigma_{zs,j}^2(x) \right) \right)^{1/2},$$

ahol

$$\sigma_{zs,j}(x) = \alpha_j \left[b_j \cdot \frac{w_* \cdot x}{u} \right],$$

$j=1$, ha a füstfáklya felfelé, és $j=2$ ha a füstfáklya lefelé irányul. A füstfáklya középvonalának magassága minden esetben meghaladja a keveredési rétegvastagság 10%-át. ($H_p(x) > 0,1 \cdot h$), ezért $\alpha_j = 1,0$. A képletben szereplő b_j ($j=1, 2$) értékei:

$$b_1 = R \cdot \alpha_1, \text{ ha } j=1 \text{ és } b_2 = R \cdot \alpha_2, \text{ ha } j=2,$$

ahol $R = 2,0$. α_j értékeit pedig az alábbiak szerint kell kiszámítani:

$$\alpha_1 = \frac{(\overline{\sigma_w^2})^{1/2}}{w_*} \left(\frac{\alpha \cdot S}{2} + \frac{1}{2} \left(\alpha^2 \cdot S^2 + \frac{4}{\beta} \right)^{1/2} \right), \text{ ha } j=1,$$

$$\alpha_2 = \frac{(\overline{\sigma_w^2})^{1/2}}{w_*} \left(\frac{\alpha \cdot S}{2} - \frac{1}{2} \left(\alpha^2 \cdot S^2 + \frac{4}{\beta} \right)^{1/2} \right), \text{ ha } j=2$$

A fenti képletekben szereplő paraméterek:

$$\alpha = \frac{1+R^2}{1+3R^2} = \frac{5}{13} = 0,385; \quad \beta = 1+R^2 = 5; \quad S = \frac{\overline{w^3} / w_*^3}{\left((\overline{\sigma_w^2})^{1/2} / w_* \right)^3},$$

ahol a mi esetünkben $H_p(x) > 0,1 \cdot h$ és így $\frac{\overline{w^3}}{w_*^3} = 0,125$.

A számításokhoz használt keveredési réteg paramétereinek vertikális átlagait ($\overline{\sigma_w^2}$, $\overline{u}$) itt is a **VIII.6.1.2. fejezet** szerint számítottuk ki és adtuk meg a feladatban. Az átlagolást itt is két lépésben lineáris profilok feltételezésével végeztük el. Megjegyezzük, hogy az átlagolás során kapott értékeket a füstfáklya középvonalának magassága, vagyis a forrástól vett távolság befolyásolja.

A fenti egyenletek alkalmazásával a forrástól vett távolság és a füstfáklya középvonal magasságának függvényében a segédváltozókra és a vertikális diszperziós együtthatókra az *MVIII.6.3. táblázat* szerinti adatokat kapjuk.

MVIII.6.3. táblázat. A vertikális diszperziós együttható és a meghatározásához szükséges segédváltozók értékei a forrás 5 km-es körzetében.

x	$H_p(x)$ [m]	Segédváltozók							$\sigma_z(x)$ [m s ⁻¹]
		$\bar{u}$ [m s ⁻¹]	$(\overline{\sigma_w^2})^{1/2}$ [m s ⁻¹]	S	b_1	b_2	$\sigma_{ze,1}$ [m s ⁻¹]	$\sigma_{ze,2}$ [m s ⁻¹]	
100	178,4	4,3	0,639	0,538	0,692	0,437	16,74	10,58	14,00
200	221,2	4,7	0,637	0,544	0,691	0,434	30,29	19,04	25,30
300	257,4	5,1	0,635	0,549	0,690	0,432	42,05	26,34	35,08
400	289,7	5,5	0,634	0,552	0,690	0,431	52,53	32,83	43,80
500	319,5	5,8	0,633	0,554	0,690	0,430	62,17	38,78	51,81
600	347,4	6,0	0,633	0,555	0,689	0,430	71,31	44,44	59,42
700	373,8	6,3	0,632	0,556	0,689	0,429	80,00	49,83	66,65
800	398,9	6,5	0,632	0,556	0,689	0,429	88,29	54,97	73,54
900	423,0	6,7	0,632	0,556	0,689	0,429	96,24	59,92	80,17
1000	446,3	6,9	0,633	0,556	0,689	0,429	103,88	64,70	86,54
2000	445,1	5,8	0,635	0,550	0,690	0,432	246,71	154,46	205,82
3000	389,1	4,6	0,618	0,597	0,685	0,412	460,05	276,93	379,70
4000	333,1	4,3	0,615	0,604	0,684	0,409	666,62	398,88	549,31
5000	277,1	3,9	0,612	0,614	0,683	0,405	917,96	544,53	754,71

IX. fejezet - Léggöri hullámok

IX.1. Felületi és térbeli hullámok

IX.1.1. Az összenyomhatatlan folyadék rotációmentes áramlására vonatkozó Euler-egyenlet:

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla \phi = -\nabla \left(\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 + \chi \right), \text{ ahol } \chi = g y.$$

(Megjegyezzük, hogy ebben a fejezetben – a hidrodinamikai tárgyalásmódban szokásos (x, y) síkban dolgozunk, ahol az y irány jelenti a kétdimenziós folyadék vastagságát a nehézségi erőterben, ezért az egységnyi folyadékelem potenciális energiája $\chi = g y$)

Az egyenletet integrálva azt kapjuk, hogy

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 + \chi = G(t),$$

ahol $G(t)$ tetszőleges, csak az időtől függő függvény.

IX.1.2. Oldjuk meg a Laplace-egyenletet egyetlen harmonikus zavar feltételezésével. Tegyük fel, hogy a folyadék felszínét az

$$\eta(x, t) = A \cos(kx - \omega t)$$

harmonikus függvény szerint módosítjuk. Keressük a ϕ sebességpotenciált meghatározó

$$\nabla^2 \phi = 0$$

Laplace-egyenlet megoldását $\phi(x, t) = f(y) \sin(kx - \omega t)$ alakban.

Megjegyezzük, hogy a sebességpotenciálra itt alkalmazott – az elméleti hidrodinamikában elterjedten használt jelölés – eltér a meteorológiai gyakorlatban megszokottól. Ismét hangsúlyozzuk, hogy a kétdimenziós folyadékarámlásban az (x, y) síkban dolgozunk, a sebesség-komponensek u, v , az y tengely a helyi függőleges irányába mutat. E jelöléssel a folyadékarámlás kétdimenziósságát hangsúlyozzuk.

A Laplace egyenletből az $f(y)$ amplitúdó függvényre az

$$f''(y) - k^2 f = 0$$

differentiálegyenletet kapjuk. Ennek általános megoldása

$$f = C e^{ky} + D e^{-ky}.$$

Ha a folyadék mélysége igen nagy, akkor $D = 0$, tehát

$$\phi = C e^{ky} \sin(kx - \omega t).$$

A felületre vonatkozó kinematikai feltétel szerint a felület részecskéi minden pillanatban a felületen maradnak. Ennek figyelembevételére definiáljuk az

$$F(x, y, t) = y - \eta(x, t)$$

függvényt. Ez a függvény a felület minden pontjára minden időpillanatban zérus, azaz

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)F = 0, \text{ ha } y = \eta(x, t).$$

A deriválásokat elvégezve

$$\frac{\partial F}{\partial t} = -\frac{\partial \eta}{\partial t}, \quad u \frac{\partial F}{\partial x} = -u \frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad v \frac{\partial F}{\partial y} = v, \quad \text{azaz } \frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial \eta}{\partial x} = v \text{ ha } y = \eta(x, t).$$

A nyomási feltételből adódik, hogy a felszínen a nyomás megegyezik a külső P_0 nyomással, így ha az időfüggő

Bernoulli-egyenletben a $G(t) = \frac{P_0}{\rho}$ választással élünk, akkor az egyenlet a

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(u^2 + v^2) + g\eta = 0 \text{ ha } y = \eta(x, t)$$

alakra egyszerűsödik.

A fenti feltételekből adódó egyenleteket linearizálhatjuk, ha a mozgás amplitúdója kicsi. Így a részecskék felületen

maradását kifejező egyenletből $\frac{\partial \eta}{\partial t} = v$, illetve a jobboldalt y szerint sorbafejtve

$$v(x, 0, t) + \eta \left. \frac{\partial v}{\partial y} \right|_{x, 0, t} + \dots = v(x, y, t)$$

adódik. A magasabb rendben kicsiny tagokat elhanyagolva azt kapjuk, hogy

$$v(x, 0, t) = \frac{\partial \eta}{\partial t} \text{ ha } y = 0.$$

Hasonlóképpen a Bernoulli-egyenlet, a sebesség négyzetek elhanyagolása a

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + g\eta = 0 \text{ ha } y = 0.$$

összefüggésre vezet. A felületre vonatkozó kinematikai és dinamikai feltételből végül azt kapjuk, hogy

$$Ck = A\omega, \\ -C\omega + gA = 0.$$

Innen a diszperziós relációra $\omega^2 = gk$, a sebességpotenciálra $\phi = \frac{A\omega}{k} e^{ky} \sin(kx - \omega t)$, a sebességre

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = A\omega e^{ky} \cos(kx - \omega t), \\ v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = A\omega e^{ky} \sin(kx - \omega t)$$

adódik. A csoportsebesség:

$$c_{cs} = \frac{d\omega}{dk} = \frac{1}{2\sqrt{gk}} g = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{k}},$$

ami éppen az

$$c_f = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega}{k} = \frac{\sqrt{gk}}{k} = \sqrt{\frac{g}{k}}$$

fázissebesség fele.

IX.1.3. A sebesség összetevők:

$$\begin{aligned} u &= A\omega e^{ky} \cos(kx - \omega t), \\ v &= A\omega e^{ky} \sin(kx - \omega t). \end{aligned}$$

A kitérés kicsiny, ezért a részecskék egyensúlyi helyzetüktől csak kevésé mozdulnak el, így az (x_0, y_0) körül a mozgás sebességének időfüggése a

$$\begin{aligned} \frac{dx'}{dt} &= A\omega e^{ky_0} \cos(kx_0 - \omega t), \\ \frac{dy'}{dt} &= A\omega e^{ky_0} \sin(kx_0 - \omega t) \end{aligned}$$

függvénnyel közelíthető. Ebből

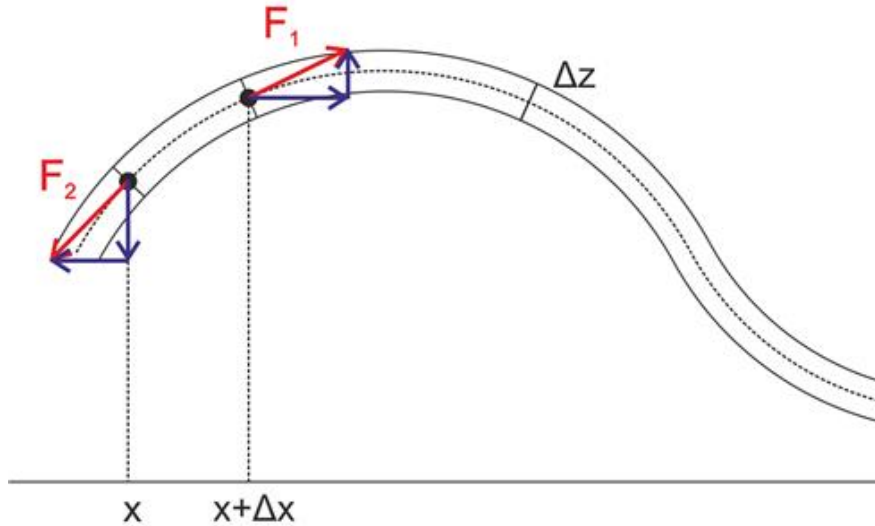
$$\begin{aligned} x'(t) &= -Ae^{ky_0} \sin(kx_0 - \omega t), \\ y'(t) &= Ae^{ky_0} \cos(kx_0 - \omega t). \end{aligned}$$

A két egyenletet négyzetre emelve és összeadva azt kapjuk, hogy

$$x'^2 + y'^2 = A^2 e^{2ky_0},$$

azaz a részecskék egyensúlyi helyzetük körül körpályán mozognak. A körpálya sugara a felszíntől mért távolság függvényében exponenciálisan csökken.

IX.1.4. A számítás menete megegyezik a gravitációs hullámokra vonatkozó számítás menetével, kivételt képez azonban a dinamikai határfeltétel, mert ott figyelembe kell vennünk a felületi feszültségből adódó görbületi nyomást.



MIX.1.1. ábra. A felületi hullámok sematikus képe.

Az MIX.1.1. ábra alapján a kijelölt ívelemre ható erő, függőleges komponense

$$\sigma \left(\frac{d\eta(x+\Delta x)}{dx} - \frac{d\eta(x)}{dx} \right) \Delta z \approx \sigma \Delta z \frac{d^2\eta}{dx^2} \Delta x$$

A felfelé mutató görbületi nyomás

$$p_z = \frac{1}{\Delta x \Delta z} \sigma \frac{d^2\eta}{dx^2} \Delta x \Delta z = \sigma \frac{d^2\eta}{dx^2}$$

A dinamikai határfeltétel pedig ennek megfelelően:

$$p_0 = p + \sigma \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}$$

Az időfüggő Bernoulli-törvény tehát a

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + g\eta - \frac{\sigma}{\rho} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = 0, \text{ ha } y=0$$

alakot ölti. Így a kinematikai és dinamikai feltételekből

$$Ck = A\omega \text{ és } A \left(g + \frac{\sigma}{\rho} k^2 \right) = C\omega$$

adódik, amiből a diszperziós reláció:

$$\omega = \sqrt{gk + \frac{\sigma}{\rho} k^3}$$

A csoportsebesség:

$$C_{cz} = \frac{d\omega}{dk} = \frac{1}{2\sqrt{gk + \frac{\sigma}{\rho}k^3}} \left(g + \frac{3\sigma k^2}{\rho} \right)$$

A k hullámszámhoz tartozó harmonikus hullám fázissebessége:

$$C_f = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{g}{k} + \frac{\sigma}{\rho}k}$$

Látható, hogy

$$\frac{C_{cz}}{C_f} = \frac{k}{\sqrt{gk + \frac{\sigma}{\rho}k^3}} \frac{1}{2\sqrt{gk + \frac{\sigma}{\rho}k^3}} \left(g + \frac{3\sigma k^2}{\rho} \right) = \frac{1}{2} + \frac{\frac{\sigma k^2}{\rho}}{g + \frac{\sigma}{\rho}k^2}$$

IX.1.5. A **IX.1.2. feladatban** követett gondolatmenetet és jelöléseket használhatjuk. A Laplace-egyenlet megoldásaként kapott

$$\phi(x, y, t) = (Ce^{\eta y} + De^{-\eta y}) \sin(kx - \omega t)$$

sebességpotenciálban azonban a $v(-h) = 0$ határfeltételt kell figyelembe venni, ahol h a folyadék mélysége:

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = (Cke^{\eta y} - Dke^{-\eta y}) \sin(kx - \omega t)$$

$$v(-h) = (Cke^{-\eta h} - Dke^{\eta h}) \sin(kx - \omega t) = 0$$

azaz

$$Cke^{-\eta h} = Dke^{\eta h} \Rightarrow D = Ce^{-2\eta h}$$

Ezt felhasználva

$$\phi(x, y, t) = Ce^{-\eta h} \left(e^{\eta(y+h)} + e^{-\eta(y+h)} \right) \sin(kx - \omega t) = 2Ce^{-\eta h} \cosh \eta(y+h) \sin(kx - \omega t)$$

A kinematikai és a dinamikai határfeltétel linearizálása nem változik:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial y} \Big|_{y=0} \quad \text{és} \quad \frac{\partial \phi}{\partial t} = -g\eta \Big|_{y=0}$$

Beírva a határfeltételekbe a

$$\phi(x, y, t) = 2Ce^{-\eta h} \cosh \eta(y+h) \sin(kx - \omega t)$$

sebességpotenciált és a felületi zavarként választott

$$\eta(x, t) = A \cos(kx - \omega t)$$

függvényt, azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} A\omega \sin(kx - \omega t) &= 2Ce^{-kh} k \sinh(k(y+h)) \sin(kx - \omega t), \\ -2Ce^{-kh} \cosh(k(y+h)) \omega \cos(kx - \omega t) &= -gA \cos(kx - \omega t). \end{aligned}$$

A peremfeltételeket ezekből az egyenletekből az $y=0$ helyettesítéssel kapjuk:

$$\begin{aligned} A\omega &= 2Ce^{-kh} k \sinh(kh), \\ 2C\omega e^{-kh} \cosh(kh) &= gA, \end{aligned}$$

amiből a diszperziós reláció:

$$\omega = \sqrt{gkh \tanh(kh)}.$$

IX.1.6. Vegyük fel a hullámokat keltő zavart $\eta(x, t) = A \cos(kx - \omega t)$ alakban. Ezután ismét a **IX.1.2. feladat** gondolatmenete mentén haladhatunk, azonban a Laplace-egyenletet mindkét közegben meg kell oldani, majd a két megoldást a határfeltételek szerint illeszteni. A Laplace-egyenlet megoldása a két közegben rendre:

$$\begin{aligned} \phi_1(x, y, t) &= (C_1 e^{ky} + D_1 e^{-ky}) \sin(kx - \omega t), \\ \phi_2(x, y, t) &= (C_2 e^{ky} + D_2 e^{-ky}) \sin(kx - \omega t). \end{aligned}$$

Az első közeg „felülről”, a második „alulról” végtelen, ezért

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \phi_1 = 0 \Rightarrow C_1 = 0, \quad \phi_1(x, y, t) = D_1 e^{-ky} \sin(kx - \omega t),$$

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} \phi_2 = 0 \Rightarrow D_2 = 0, \quad \phi_2(x, y, t) = C_2 e^{ky} \sin(kx - \omega t).$$

A linearizált kinematikai határfeltétel változatlan:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial y} \Big|_{y=0}.$$

A dinamikai határfeltétel a két közegre vonatkozóan:

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial t} + \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 + g\eta = G_1(t),$$

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial t} + \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 + g\eta = G_2(t).$$

A határon a nyomás a két közegben megegyezik, azaz $p_1 = p_2 = p_0$, továbbá éljünk a $G_1(t) = G_2(t) = 0$ választással és vegyük figyelembe, hogy linearizáláskor a sebesség négyzetet tartalmazó tagok elhanyagolhatók. Szorozzuk végig az egyenleteket rendre a megfelelő közegbeli sűrűséggel, majd tegyük egyenlővé a két kifejezést. Ekkor a határfeltételt az

$$\rho_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial t} + p_0 + \rho_1 g \eta = \rho_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial t} + p_0 + \rho_2 g \eta ,$$

illetve átrendezés után a

$$\rho_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial t} - \rho_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial t} = g \eta (\rho_2 - \rho_1)$$

alakra hozhatjuk. Beírva ide a

$$\phi_1(x, y, t) = D e^{-ky} \sin(kx - \omega t) ,$$

$$\phi_2(x, y, t) = C e^{ky} \sin(kx - \omega t)$$

sebességpotenciálok időderiváltjait, és a határfeltételt az $y=0$ helyen véve, azt kapjuk, hogy

$$(-\omega \rho_1 D + \omega \rho_2 C) \cos(kx - \omega t) = g A (\rho_2 - \rho_1) \cos(kx - \omega t) .$$

A kinematikai határfeltételből pedig a két közegre rendre az

$$\omega A \sin(kx - \omega t) = -k D \sin(kx - \omega t) ,$$

$$\omega A \sin(kx - \omega t) = k C \sin(kx - \omega t) .$$

egyenletek adódnak, amiből következik, hogy

$$D = -C .$$

Így a dinamikai és kinematikai határfeltétel

$$C \omega (\rho_1 + \rho_2) = g A (\rho_2 - \rho_1) ,$$

$$A \omega = k C$$

összefüggésre egyszerűsödik, amiből a diszperziós reláció:

$$\omega = \sqrt{gk \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1}} .$$

Látható, hogy ebből a $\rho_1 \rightarrow 0$ határesetben visszakapjuk a végtelen mély közeg felületén keletkező gravitációs hullám diszperziós relációját.

IX.1.7. Változzék a levegő sűrűsége az y magassággal a $\rho = \rho(y)$ függvény szerint. Helyezkedjék el a kimozdítandó V térfogatú légrész kezdetben az y_0 magasságban, ahol az egyensúly miatt sűrűsége megegyezik a környezet $\rho = \rho(y_0)$ sűrűségével. Mozdítsuk ki a légrészt Δy_0 távolsággal felfelé. Ekkor kisebb sűrűségű környezetbe kerül, tehát a rá ható felhajtó erő kisebb lesz, mint saját súlya. Emiatt egyensúlyi helyzete felé kezd gyorsulni. A mozgásegyenlet az egyensúlyi helyzettől mért pillanatnyi kitérés függvényében:

$$(\rho(y_0 + \Delta y) - \rho(y_0))Vg = V\rho(y_0)\frac{dv}{dt}.$$

Mivel a légréteg kimozdulása kicsiny, a baloldali sűrűségkülönbséget sorba fejthetjük és a magasabb rendű tagokat elhanyagolhatjuk,

$$\left. \frac{\partial \rho}{\partial y} \right|_{y=y_0} \Delta y g = \rho(y_0) \frac{dv}{dt}.$$

Mivel $\frac{dv}{dt} = \frac{d^2(\Delta y)}{dt^2}$, és tudjuk, hogy $\frac{\partial \rho}{\partial y}$ negatív, az egyenlet átírható a

$$\frac{d^2(\Delta y)}{dt^2} = - \frac{g}{\rho_0} \left| \frac{\partial \rho}{\partial y} \right| \Delta y$$

alakra, ami a jól ismert harmonikus rezgőmozgás differenciálegyenlete. Ebből a kitérésre a $\Delta y = \Delta y_0 \cos(Nt)$ kitérés idő függvénye adódik, ahol

$$N = \sqrt{\frac{g}{\rho_0} \left| \frac{\partial \rho}{\partial y} \right|}$$

a légkör statikus stabilitását jellemző Brunt–Vaisala-frekvencia.

IX.1.8. A mozgásegyenlet horizontális és vertikális komponense:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - g. \end{aligned}$$

A tömeg és a térfogat megmaradását kifejező egyenletek:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} &= 0. \end{aligned}$$

Megjegyezzük, hogy a $\frac{d\rho}{dt} = 0$ egyenlet nem jelenti a sűrűség állandóságát, hanem csak azt, hogy minden individuális részecske megőrzi sűrűségét.

IX.1.9. A másodrendűen kicsiny tagok elhanyagolása után a mozgásegyenletek a következő formában írhatók:

$$\begin{aligned} \rho_0 \frac{\partial u_1}{\partial t} &= -\frac{\partial p_1}{\partial x}, \\ \rho_0 \frac{\partial v_1}{\partial t} &= -\frac{\partial p_1}{\partial y} - g\rho_1 - \frac{\partial p_1}{\partial y} - g\rho_1, \end{aligned}$$

ahol kihasználtuk, hogy a nyugalmi állapotra érvényes a hidrosztatika alapegyenlete. Az összenyomhatatlanságot és a sűrűség állandóságát kifejező egyenletek:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} = 0 ,$$

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + v \frac{\partial \rho_0}{\partial y} = 0 .$$

A fenti egyenletekbe behelyettesítve a feladatban megszabott függvényeket, és a deriválásokat elvégezve, azt kapjuk, hogy

$$-i \rho_0 \omega u_1^* = -ik p_1^* , \quad (1)$$

$$-i \rho_0 \omega v_1^* = -\frac{\partial p_1^*}{\partial y} - g \rho_1^* , \quad (2)$$

$$iku_1^* + \frac{\partial v_1^*}{\partial y} = 0 , \quad (3)$$

$$-i \omega \rho_1^* + v_1^* \frac{\partial \rho_0}{\partial y} = 0 . \quad (4)$$

Itt $i = \sqrt{-1}$ az imaginárius egység. Az egyenletrendszerből meghatározható a rendszer diszperziós relációja. Fejezzük ki az első egyenletből a nyomás perturbációt, és határozzuk meg y szerinti deriváltját:

$$\frac{\partial p_1^*}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\rho_0 \omega u_1^*}{k} \right) = \frac{\omega}{k} \frac{\partial \rho_0}{\partial y} u_1^* + \frac{\rho_0 \omega}{k} \frac{\partial u_1^*}{\partial y} .$$

Helyettesítsük be ide a fenti 3. egyenletből adódó $u_1^* = -\frac{1}{ik} \frac{\partial v_1^*}{\partial y}$ összefüggést:

$$\frac{\partial p_1^*}{\partial y} = -\frac{\omega}{ik^2} \frac{\partial \rho_0}{\partial y} v_1^* - \frac{\rho_0 \omega}{ik^2} \frac{\partial^2 v_1^*}{\partial y^2} .$$

Beírva ezt és a fenti 4. egyenletből adódó $\rho_1^* = \frac{1}{i\omega} \frac{\partial \rho_0}{\partial y} v_1^*$ sűrűségperturbációt a fenti 2. egyenletbe, rendezés után:

$$\frac{\partial^2 v_1^*}{\partial y^2} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial y} \frac{\partial v_1^*}{\partial y} - \left(k^2 + \frac{gk^2}{\rho_0 \omega^2} \frac{\partial \rho_0}{\partial y} \right) v_1^* = 0$$

Vegyük észre, hogy a jobboldali zárójel második tagja kifejezhető az

$$N^2 = \frac{g}{\rho_0} \left| \frac{\partial \rho_0}{\partial y} \right| = -\frac{g}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial y}$$

Brunt–Vaisala-féle frekvenciával (**IX.1.6. feladat**), azaz

$$\frac{\partial^2 v_1^*}{\partial y^2} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial y} \frac{\partial v_1^*}{\partial y} - \left(k^2 - \frac{N^2}{\omega^2} k^2 \right) v_1^* = 0$$

A továbbiakban használjuk fel, hogy nyugalmi állapotban a sűrűség a magassággal a $\rho_0 = \rho_{00} e^{-\frac{y}{H}}$ függvény szerint csökken. A vertikális sebesség amplitúdójára kapott differenciálegyenlet ezzel az

$$\frac{\partial^2 v_1^*}{\partial y^2} - \frac{1}{H} \frac{\partial v_1^*}{\partial y} + k^2 \left(\frac{N^2}{\omega^2} - 1 \right) v_1^* = 0$$

alakot ölti. Keressük az egyenlet megoldását $v_1^*(y) = e^{\frac{y}{2H}} e^{i\psi}$ alakban. A

$$\frac{\partial}{\partial y} v_1^*(y) = \frac{1}{2H} e^{\frac{y}{2H}} e^{i\psi} + i l e^{\frac{y}{2H}} e^{i\psi},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} v_1^*(y) = \frac{1}{4H^2} e^{\frac{y}{2H}} e^{i\psi} + \frac{i l}{H} e^{\frac{y}{2H}} e^{i\psi} - l^2 e^{\frac{y}{2H}} e^{i\psi}$$

összefüggéseket visszahelyettesítve a diszperziós relációra a

$$\omega^2 = \frac{N^2 k^2}{k^2 + l^2 + \frac{1}{4H^2}}$$

kifejezés adódik. A sebesség-perturbációk:

$$u_1 = u_1^*(y) e^{i(kx - \omega t)} = \left(\frac{ik}{2H} - \frac{l}{k} \right) e^{\frac{y}{2H}} e^{i(kx + y - \omega t)},$$

$$v_1 = v_1^*(y) e^{i(kx - \omega t)} = e^{\frac{y}{2H}} e^{i(kx + y - \omega t)}.$$

IX.1.10. A fázissebesség definíció szerint:

$$c = \frac{k}{k^2} \omega,$$

azaz

$$c = \frac{Nk}{(k^2 + l^2) \sqrt{\left(k^2 + l^2 + \frac{1}{4H^2} \right)}} (k e_1 + l e_2),$$

illetve

$$c = |c| = \frac{\omega}{|k|} = \frac{\sqrt{N^2 k^2}}{\sqrt{(k^2 + l^2) \left(k^2 + l^2 + \frac{1}{4H^2} \right)}},$$

A csoportsebesség definíció szerint:

$$c_{cz} = \nabla \omega = \frac{\partial \omega}{\partial k} e_1 + \frac{\partial \omega}{\partial l} e_2,$$

azaz

$$c_{cs1} = \frac{1}{2 \sqrt{\frac{N^2 k^2}{\left(k^2 + l^2 + \frac{1}{4H^2}\right)}}} \frac{2N^2 k \left(k^2 + l^2 + \frac{1}{4H^2}\right) - 2N^2 k^3}{\left(k^2 + l^2 + \frac{1}{4H^2}\right)^2} = \frac{1}{\omega} \frac{N^2 k \left(l^2 + \frac{1}{4H^2}\right)}{\left(k^2 + l^2 + \frac{1}{4H^2}\right)},$$

$$c_{cs2} = -\frac{1}{\omega} \frac{N^2 k^2}{\left(k^2 + l^2 + \frac{1}{4H^2}\right)^2},$$

$$\mathbf{c}_{cs} = \frac{1}{\omega} \frac{N^2 k}{\left(k^2 + l^2 + \frac{1}{4H^2}\right)^2} \left[\left(l^2 + \frac{1}{4H^2}\right) \mathbf{e}_1 - kl \mathbf{e}_2 \right].$$

IX.1.11. A diszperziós reláció az

$$\omega = \frac{Nk}{\sqrt{k^2 + l^2}}$$

alakra egyszerűsödik. A fázissebesség pedig:

$$\mathbf{c} = \frac{Nk^2}{(k^2 + l^2)^{\frac{3}{2}}} \mathbf{e}_1 + \frac{Nkl}{(k^2 + l^2)^{\frac{3}{2}}} \mathbf{e}_2 = \frac{Nk}{(k^2 + l^2)^{\frac{3}{2}}} (k\mathbf{e}_1 + l\mathbf{e}_2),$$

illetve

$$c = |\mathbf{c}| = \frac{\omega}{|k|} = \frac{Nk}{(k^2 + l^2)}.$$

A csoportsebesség a **IX.1.10. feladatban** nyert eredmény alapján:

$$\mathbf{c}_{cs} = \frac{1}{\omega} \frac{N^2 kl}{(k^2 + l^2)^2} [l\mathbf{e}_1 - k\mathbf{e}_2] = \frac{Nl}{(k^2 + l^2)^{\frac{3}{2}}} [l\mathbf{e}_1 - k\mathbf{e}_2].$$

Látható, hogy a fázis és a csoportsebesség vektor skaláris szorzata zérus, tehát a két sebesség merőleges egymásra.

Megállapítható továbbá, hogy amennyiben Arra a tartományra korlátozódunk, ahol $\frac{y}{H} \ll 1$, és $\frac{k}{H} \ll 1$, azaz $e^{\frac{y}{H}} \approx 1$ ott a sebességek:

$$u_1 = u_1^*(y) e^{i(kx - \omega t)} = \left(\frac{ik}{2H} - \frac{l}{k} \right) e^{\frac{y}{2H}} e^{i(kx + \frac{y}{2H} - \omega t)} \approx -\frac{l}{k} e^{i(kx + \frac{y}{2H} - \omega t)},$$

$$v_1 = v_1^*(y) e^{i(kx - \omega t)} = e^{\frac{y}{2H}} e^{i(kx + \frac{y}{2H} - \omega t)} \approx e^{i(kx + \frac{y}{2H} - \omega t)}.$$

A $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$ divergencia egyenlet alapján látható, hogy

$$k u_1 + l v_1 = \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_1 = 0,$$

következésképpen a részecskék sebessége merőleges a hullámterjedés irányára, másképpen a részecskék sebessége a hullámfrontban történik. Az ilyen hullámzást nyírási hullámnak nevezzük.

IX.2. Hanghullámok megoldások

IX.2.1. Írjuk fel a nyomást és a sűrűséget a p_0, ρ_0 egyensúlyi és p_1, ρ_1 kicsiny perturbációk segítségével a $p = p_0 + p_1$, és $\rho = \rho_0 + \rho_1$ alakban! Helyettesítsük be ezt az adiabata egyenletbe:

$$(p_0 + p_1) \cdot (\rho_0 + \rho_1)^{-\gamma} = p_0 \rho_0^{-\gamma}$$

és alakítsuk át a következőképpen:

$$p_0 \rho_0^{-\gamma} \left(1 + \frac{p_1}{p_0}\right) \left(1 + \frac{\rho_1}{\rho_0}\right)^{-\gamma} = p_0 \rho_0^{-\gamma} !$$

Alkalmazzuk a két tag hatványára a kicsiny x -ek esetén érvényes $(1+x)^n \approx 1+nx$ Bernoulli-közelítést:

$$\left(1 + \frac{p_1}{p_0}\right) \left(1 - \gamma \frac{\rho_1}{\rho_0}\right) = 1 !$$

Végezzük el a beszorzást és hanyagoljuk el a másodrendűen kicsiny tagokat! Azt kapjuk, hogy

$$p_1 = \gamma \frac{p_0}{\rho_0} \rho_1 = \gamma \frac{R}{M} T_0 \rho_1,$$

amivel az állítást bizonyítottuk.

IX.2.2. Írjuk fel a kis perturbációkra vonatkozó linearizált mozgásegyenletet, valamint a kontinuitási egyenlet linearizált alakját:

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} = -\nabla p_1,$$

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{v}_1 = 0 !$$

Vegyük észre, hogy mivel a perturbált állapotot a nyugalmi állapothoz viszonyítjuk, a sebességet a $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1$ kicsiny perturbáció képviseli, így mind a sebesség, mind a sűrűségderivált esetén a teljes advektív tag elhanyagolhatóvá vált!

Képezzük a mozgásegyenlet divergenciáját:

$$\rho_0 \frac{\partial \nabla \cdot \mathbf{v}_1}{\partial t} = -\nabla^2 p_1$$

és helyettesítsük be a kontinuitási egyenletből a sebesség divergenciát:

$$\frac{\partial^2 \rho_1}{\partial t^2} = \nabla^2 p_1 !$$

Felhasználva, hogy a **IX.2.1. feladat** szerint

$$\rho_1 = \frac{1}{c_0^2} p_1, \text{ ahol } c_0^2 = \gamma \frac{R}{M} T_0$$

a fenti egyenlet az

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} = \nabla^2 p_1$$

alakra hozható. Az egyenlet megoldását keressük $Ae^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$ síkhullám alakban! Ekkor a hullámegyenletből a

$$\omega^2 = c_0^2 k^2$$

diszperziós reláció adódik, amiből a hullám fázissebessége:

$$c_f = \frac{\omega}{|\mathbf{k}|} = c_0 = \sqrt{\gamma \frac{R}{M} T_0},$$

illetve vektoriális alakban:

$$c_f = \frac{\omega}{k^2} \mathbf{k} = \sqrt{\gamma \frac{R}{M} T_0} \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}.$$

A diszperziós reláció szerint a körfrekvencia a hullámszám lineáris függvénye, azaz a csoportsebesség a hullámszámtól függetlenül:

$$c_{gz} = \nabla_{\mathbf{k}} \omega = c_0 \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} = \sqrt{\gamma \frac{R}{M} T_0} \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|},$$

azaz a fázissebesség és a csoportsebesség ebben az esetben megegyezik. Mivel tetszőleges zavar leírható harmonikus hullámok összegével, illetve integráljával, a fázis- és csoportsebesség egyezése bizonyítja, hogy a hang terjedési sebessége minden hanghullámot egyértelműen jellemez.

IX.2.3. Induljunk ki a **IX.2.2. feladat**ban kapott

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \nabla^2 p$$

hullámegyenletből és vegyük figyelembe, hogy gömbszimmetrikus esetben $p = p(r, t)$! Ehhez illeszkedve térjünk át térbeli polárkoordináta-rendszerre, és vegyük figyelembe, hogy esetünkben a Laplace-operátornak csak r -től függő része lesz! A hullámegyenlet a Laplace-operátor térbeli polárkoordinátás alakjának felhasználásával:

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial p}{\partial r} \right).$$

Ez az egyenlet a

$$p = \frac{1}{r} d(r, t)$$

helyettesítéssel a

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 d}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 d}{\partial r^2}$$

egydimenziós hullámegyenletre egyszerűsödik. A hullámegyenlet megoldása általános alakban:

$$d(r, t) = f(r - c_0 t) + g(r + c_0 t)$$

alakban kereshető. Az első tag a pozitív r , a második a negatív r irányban terjedő hullámot reprezentál. A hanghullámok esetén az utóbbi eset értelemsszerűen nem létezik, így a nyomás perturbáció a

$$p(r, t) = \frac{1}{r} f(r - c_0 t)$$

alakban adható meg. Harmonikus hullám esetén a megoldás:

$$p(r, t) = \frac{A}{r} e^{i(kr - \omega t)}$$

IX.2.4. A megoldásban a **IX.2.2. feladat** gondolatmenetét érdemes követni. Vegyük fel a nyomást és a sűrűséget a p_0, ρ_0 egyensúlyi és a p_1, ρ_1 kicsiny perturbációk segítségével a $p = p_0 + p_1$, és $\rho = \rho_0 + \rho_1$ alakban! A mozgásegyenletből és a kontinuitási egyenletből a kicsiny sűrűség és nyomás perturbáció között a másodrendűen kicsiny tagok elhanyagolása után a

$$\frac{\partial^2 \rho_1}{\partial t^2} = \nabla^2 p_1$$

összefüggés adódik. Itt kell figyelembe venni a folyamat izotermikusságát. Helyettesítsük be a nyomás és a sűrűség perturbációkkal kifejezett alakját a

$$p\rho^{-1} = \text{állandó}$$

izoterma egyenletbe! Az egyenlet ugyanolyan szerkezetű, mint az adiabata-egyenlet, csak a sűrűség kitevője változik:

$$(p_0 + p_1)(\rho_0 + \rho_1)^{-1} = p_0 \rho_0^{-1}$$

Ezt alakítsuk át a következőképpen:

$$p_0 \rho_0^{-\gamma} \left(1 + \frac{p_1}{p_0}\right) \left(1 + \frac{\rho_1}{\rho_0}\right)^{-1} = p_0 \rho_0^{-1}$$

Innen a másodrendűen kicsiny tagok elhanyagolása után adódik, hogy

$$\rho_1 = \frac{\rho_0}{p_0} p_1 = \frac{1}{c_0^2} p_1, \text{ ahol } c_0^2 = \frac{p_0}{\rho_0} = \frac{R^* T_0}{M}.$$

Innen a második feladat gondolatmenetével

$$c = \sqrt{\frac{R^*}{M} T}.$$

IX.2.5. A hanghullámokat azzal zárjuk ki a légköri mozgásegyenletekből, hogy feltételezzük, hogy a légrések mind térfogatukat, mind sűrűségüket megőrzik a vizsgált mozgás során. Megjegyezzük, hogy hidrosztatikus feltételezéssel (nincs vertikális irányú gyorsulás) ki tudjuk szűrni a vertikális irányban terjedő hanghullámokat.

IX.3. Tehetetlenségi és gravitációs hullámok

IX.3.1. Írjuk fel a hidro-termodinamikai egyenletrendszer kicsiny perturbációkra vonatkozó alakját az adott feltételeknek megfelelően! Mivel a levegő eredetileg nyugalmi állapotban volt és a sűrűség állandó,

$\bar{\mathbf{v}} = 0$, $\alpha_1 = 0$ és $\frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial z} = 0$. Következésképpen a mozgásegyenlet a

$$\frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} + \bar{\alpha} \nabla p_1 + f(\mathbf{e}_z \times \mathbf{v}_1) = 0,$$

a kontinuitási egyenlet pedig a

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_1 = 0$$

alakra egyszerűsödik. A megoldást a

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_1^* e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, p = p_1^* e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$$

síkhullám alakban keressük, ahol a csillaggal jelölt mennyiségek rendre a sebesség- és a nyomáshullám $\mathbf{v}_1^*(u_1^*, v_1^*, w_1^*)$ és p_1^* állandó (komplex) amplitúdói, $\mathbf{k}(k_x, k_y, k_z)$ pedig a hullámszám vektor. Figyelembe véve, hogy a megoldás független az y koordinátától, a mozgásegyenletet komponensekben kiírt alakjából és a kontinuitási egyenletből a következő egyenletrendszerhez jutunk:

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + \bar{\alpha} \frac{\partial p_1}{\partial x} - f v_1 = 0,$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} + f u_1 = 0,$$

$$\frac{\partial w_1}{\partial t} + \bar{\alpha} \frac{\partial p_1}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial w_1}{\partial z} = 0.$$

Beírva ide a síkhullám megoldást, a deriválások elvégzése után a differenciálegyenlet rendszer karakterisztikus egyenletrendszerére azt kapjuk, hogy:

$$-i\omega u_1^* + i\bar{\alpha}k_x p_1^* - f_1 = 0,$$

$$-i\omega v_1^* + f u_1^* = 0,$$

$$-i\omega w_1^* + i k_z \bar{\alpha} p_1^* = 0,$$

$$i k_x u_1^* + i k_z w_1^* = 0.$$

Ennek a komplex amplitúdókra vonatkozó homogén lineáris egyenletrendszernek csak akkor van nem triviális megoldása, ha a rendszer determinánsa zérus (Lásd a lineáris egyenletrendszer megoldásának az elméletét is)!

$$\begin{vmatrix} -i\omega & -f & 0 & i k_x \bar{\alpha} \\ f & -i\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i\omega & i k_z \bar{\alpha} \\ i k_x & 0 & i k_z & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Innen a determinánst az első sor szerint kifejtve az

$$-\bar{\alpha}\omega^2 k_z^2 + \bar{\alpha} f^2 k_z^2 - \bar{\alpha}\omega^2 k_x^2 = 0$$

egyenletet kapjuk, amiből a hullám diszperziós relációjára:

$$\omega = \pm \frac{f k_z}{\sqrt{k_x^2 + k_z^2}} = \pm \frac{f k_z}{|k|}$$

adódik. A $\pm$ előjel azt jelenti, hogy minden hullámhoz tartozik egy ellenkező irányban haladó hullám is. A formula

mutatja, hogy a diszperziós reláció csak a hullámterjedés irányától függ, hiszen $\frac{k_z}{|k|} = \sin \vartheta$ és ϑ a hullámterjedés irányának vízszintessel (az x tengellyel) bezárt szöge. A hullám fázissebessége:

$$c_f = \frac{\omega}{|k|} = \frac{f k_z}{k^2},$$

illetve vektoriálisan:

$$\mathbf{c}_f = \frac{\omega}{|k|} \mathbf{e}_k = \frac{f k_z}{k^2} \mathbf{e}_k = \frac{f k_z}{k^2} \frac{\mathbf{k}}{|k|} = \frac{f k_z}{|k|^3} \mathbf{k}$$

A hullám csoportsebessége:

$$\mathbf{c}_{cz} = \nabla_k \omega = \frac{\partial}{\partial k_x} \frac{f k_z}{|k|} \mathbf{e}_x + \frac{\partial}{\partial k_z} \frac{f k_z}{|k|} \mathbf{e}_y = -\frac{f k_z \frac{k_x}{|k|}}{|k|^2} \mathbf{e}_x + \frac{f |k| - f k_z \frac{k_z}{|k|}}{|k|^2} \mathbf{e}_y = -\frac{f k_z k_x}{|k|^3} \mathbf{e}_x + \frac{f k_z^2}{|k|^3} \mathbf{e}_z,$$

ahol kihasználtuk, hogy

$$|\mathbf{k}| = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$$

A csoportsebesség a

$$\mathbf{c}_{cs} = \frac{f k_x}{|\mathbf{k}|^3} (-k_z \mathbf{e}_x + k_x \mathbf{e}_z) = \frac{f k_x}{|\mathbf{k}|^3} (\mathbf{k} \times \mathbf{e}_y)$$

alakban is felírható, amiből azonnal látszik, hogy a fázissebesség és csoportsebesség merőleges egymásra, hiszen $\mathbf{c}_f \cdot \mathbf{c}_{cs} = 0$.

IX.3.2. A

$$-i\omega u_1^* + i\bar{\alpha} k_x p_1^* - f v_1 = 0,$$

$$-i\omega v_1^* + f u_1^* = 0,$$

$$-i\omega w_1^* + i k_x \bar{\alpha} p_1^* = 0,$$

$$i k_x u_1^* + i k_z w_1^* = 0$$

karakterisztikus egyenletrendszerből meghatározhatók a sebességek komplex amplitúdói. Az egyenletrendszer nem független egyenletekből áll, így például az u_1^* amplitúdót szabadon választhatjuk. Válasszuk tehát u_1^* -t valós állandónak és fejezzük ki a többi amplitúdót ennek függvényében a karakterisztikus egyenletrendszerből! A második egyenletből

$$v_1^* = -\frac{if}{\omega} u_1^*,$$

a negyedikből pedig

$$w_1^* = -\frac{k_x}{k_z} u_1^*.$$

A $\mathbf{v}_1$ perturbációs sebesség komponensei tehát:

$$u_1 = u_1^* e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, \quad v_1 = -\frac{if}{\omega} u_1^* e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, \quad w_1 = -\frac{k_x}{k_z} u_1^* e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, \quad \text{ahol } \mathbf{k} = (k_x, 0, k_z).$$

Innen azonnal látszik, hogy a sebességvektor merőleges a hullámszám vektorra, hiszen

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{k} = 0,$$

vagyis a hullám, transzverzális. A sebességkomponenseket a fenti komplex összetevők valós részei adják, azaz

$$u_1 = u_1^* \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t), \quad v_1 = \frac{\sqrt{k_x^2 + k_z^2}}{k_z} u_1^* \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t), \quad w_1 = -\frac{k_x}{k_z} u_1^* \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t),$$

ahol figyelembe vettük az $\omega = \frac{fk_z}{\sqrt{k_x^2 + k_z^2}}$ diszperziós relációt, valamint azt, hogy $-i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$. Az u_1 és w_1 sebességek ellentétes fázisúak, eredőjük végpontja adott helyen az (x, z) síkban a hullámterjedés irányára merőleges egyenes mentén mozog $\frac{\sqrt{k_x^2 + k_z^2}}{k_z} u_1^*$ amplitúdóval:

$$\mathbf{v}_1 = u_1^* \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) \mathbf{e}_x - \frac{k_x}{k_z} u_1^* \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) \mathbf{e}_z = \frac{\sqrt{k_x^2 + k_z^2}}{k_z} u_1^* \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) \mathbf{e}_{k_m},$$

ahol $\mathbf{e}_{k_m}$ a $\mathbf{k}$ hullámszám vektorra merőleges egységvektor. Az y irányú sebesség összetevő az erre merőleges egyenes mentén 90° -os fáziseltéréssel változik. A két függvényt négyzetre emelve és összeadva a

$$(v_1)^2 + w_1^2 = \frac{k_x^2 + k_z^2}{k_z^2} (u_1^*)^2$$

kör egyenletét kapjuk. A sebesség-hodográf tehát valóban kör.

IX.3.3. Tekintsük a

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho} \nabla p_1 - f[\mathbf{e}_z \times \mathbf{v}_1], \\ \nabla \cdot \mathbf{v}_1 &= 0. \end{aligned}$$

perturbációs egyenleteket! Célszerű változónként dolgozni, és a megoldást az

$$\begin{aligned} u &= u_1(x, t) = u_1^*(z) e^{i(kx - \omega t)}, \\ v &= v_1(x, t) = v_1^*(z) e^{i(kx - \omega t)}, \\ w &= w_1^*(z) e^{i(kx - \omega t)}, \\ p &= p_1^*(z) e^{i(kx - \omega t)} \end{aligned}$$

alakban keresni. (A hullámszámnak most csak egyetlen komponense van, ezért az indexet elhagytuk mellőle.) A linearizálás során a másodrendűen kicsiny tagokat elhanyagolhatjuk, így a karakterisztikus egyenletrendszer az

$$\begin{aligned} -i\rho\omega u_1^* &= -ikp_1^* + \rho f v_1^*, \\ -i\omega v_1^* &= -f u_1^*, \\ -i\rho\omega w_1^* &= -\frac{dp_1^*}{dz}, \\ iku_1^* + \frac{dw_1^*}{dz} &= 0 \end{aligned}$$

alakot ölti. A határfeltételekből azt kapjuk, hogy az alsó határon a vertikális sebesség zérus, a felső pedig a nyomás

mindig megegyezik a folyadék feletti állandó nyomással, azaz $\frac{dp}{dt} = 0$. Tehát

$$w_1^* = 0, \text{ ha } z = 0$$

és

$$\frac{\partial p_1}{\partial t} + w_1 \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} = 0, \text{ ha } z = H_0,$$

illetve az átlagos nyomásra érvényes hidrosztatikai feltétel miatt:

$$\frac{\partial p_1}{\partial t} - w_1 g \rho = 0, \text{ ha } z = H_0.$$

Beírva ide a sebesség és nyomás perturbációt:

$$i\rho p_1^* - g\rho w_1^* = 0, \text{ ha } z = H_0.$$

A karakterisztikus egyenletrendszer első két egyenletéből w_1^* -t eliminálva azt kapjuk, hogy

$$\rho(\omega^2 - f^2)u_1^* = k\omega p_1^*.$$

Beírva innen $u_1^* = \frac{k\omega}{\rho(\omega^2 - f^2)} p_1^*$ -t a karakterisztikus egyenletrendszer negyedik egyenletébe, azt kapjuk, hogy:

$$\frac{ik^2\omega}{\rho(\omega^2 - f^2)} p_1^* + \frac{dw_1^*}{dz} = 0.$$

Ebből

$$\frac{dp_1^*}{dz} = \frac{i\rho(\omega^2 - f^2)}{k^2\omega} \frac{d^2 w_1^*}{dz^2}$$

adódik, amit a karakterisztikus egyenletrendszer harmadik egyenletébe beírva és kissé átrendezve w_1^* -re a következő másodrendű differenciálegyenletet kapjuk:

$$\frac{d^2 w_1^*}{dz^2} - \frac{k^2\omega^2}{\omega^2 - f^2} w_1^* = 0.$$

Az egyenlet megoldását $w_1^* = e^{\gamma z}$ alakban keresve adódik, hogy $\gamma = \pm \left(\frac{k^2\omega^2}{\omega^2 - f^2} \right)^{\frac{1}{2}}$, amivel az egyenlet általános megoldása:

$$w_1^* = Ae^{\gamma z} + Be^{-\gamma z}$$

alakban adható meg. Az A és B együtthatókat a határfeltételekből kaphatjuk meg. Az alsó határon ($z=0$) $w_1^* = 0$, azaz $A = -B$, tehát

$$w_1^* = 2A \sinh(\gamma z).$$

A felső határ $i\rho p_1^* - g\rho w_1^* = 0$, ha $z = H_0$ határfeltételét a karakterisztikus egyenletekből kapott

$$\frac{ik^2\omega}{\rho(\omega^2 - f^2)} p_1^* + \frac{dw_1^*}{dz} = 0$$

egyenlet segítségével a

$$\frac{dw_1^*}{dz} - \frac{k^2 g}{(\omega^2 - f^2)} w_1^* = 0, \text{ ha } z = H_0$$

alakra hozhatjuk. Beírva ebbe a határfeltételbe a

$$2A\gamma \operatorname{ch}(\gamma z) - \frac{2k^2 g}{(\omega^2 - f^2)} A \operatorname{sh}(\gamma z) = 0, \text{ ha } z = H_0$$

megoldásfüggvényt, és felhasználva a $\gamma = \left(\frac{k^2 \omega^2}{\omega^2 - f^2} \right)^{\frac{1}{2}}$ sajátértéket az

$$\frac{\omega}{kg} (\omega^2 - f^2)^{\frac{1}{2}} = \operatorname{th} \left(\frac{\omega k H_0}{(\omega^2 - f^2)^{\frac{1}{2}}} \right)$$

diszperziós relációhoz jutunk. Az egyenlet transzcendens, algebrai úton csak speciális esetekben oldható meg ω -ra.

IX.3.4. Tekintsük az

$$\frac{\omega}{kg} (\omega^2 - f^2)^{\frac{1}{2}} = \operatorname{th} \left(\frac{\omega k H_0}{(\omega^2 - f^2)^{\frac{1}{2}}} \right)$$

diszperziós relációt, és érvényesítsük a sekélység $kH_0 \ll 1$ feltételét. Ekkor a jobboldalon álló tangens hiperbolikus függvény értéke jó közelítéssel

$$\frac{\omega k H_0}{(\omega^2 - f^2)^{\frac{1}{2}}},$$

tehát

$$\omega = \sqrt{f^2 + k^2 g H_0}.$$

A fázissebesség:

$$c_f = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{f^2}{k^2} + g H_0}.$$

A csoportsebesség:

$$c_{cs} = \frac{d\omega}{dk} = \frac{kgH_0}{\sqrt{f^2 + k^2 gH_0}} = \frac{gH_0}{\sqrt{\frac{f^2}{k^2} + gH_0}},$$

vagyis a csoport- és fázissebesség szorzata gH_0 . Vegyük észre, hogy amennyiben a forgás hatása (f) elhanyagolható, akkor a fázis- és csoportsebesség egyenlővé válik, azaz az ilyen hullámoknak nincs diszperziója.

IX.3.5. Induljunk ki a sekélyfolyadék közelítésben kapott

$$\omega = \sqrt{f^2 + k^2 gH_0}$$

diszperziós relációból. A diszperziós relációban akkor válik dominánssá a forgás következtében adódó hatás, ha $f > k\sqrt{gH_0}$. Határesetben a két hatás éppen egyenlő, ami akkor következik be, ha $f = \frac{2\pi}{\Lambda} \sqrt{gH_0}$, amiből a Λ Rossby-sugár:

$$\Lambda = \frac{2\pi}{f} \sqrt{gH_0}$$

Az adatokkal: $\Lambda \approx 6200 \text{ km}$.

Amennyiben $f^2 \gg k^2 gH_0$, akkor ez fizikailag azt jelenti, hogy a mozgás során a gravitációs hatás elhanyagolható és a hullámozgás kizárólag egy tehetetlenségi erő, a Coriolis-erő hatására jön létre. Emiatt az ilyen hullámokat tehetetlenségi vagy inerciális hullámoknak nevezzük. A tiszta tehetetlenségi hullámok diszperziós relációja az $\omega = \pm f$ összefüggésre egyszerűsödik, amiből következik, hogy ezeknek a hullámoknak a csoportsebessége zérus. Következésképpen csak állóhullámok lehetnek.

IX.3.6. A horizontális mozgásegyenletek és kontinuitási egyenlet kis perturbációkra vonatkozó linearizált alakja esetünkben:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) u_1 - f v_1 + g \frac{\partial h_1}{\partial x} = 0,$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) v_1 + f u_1 + g \frac{\partial h_1}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} = 0.$$

A második egyenlet x szerinti deriváltjából kivonva az első egyenlet y szerinti deriváltját, és felhasználva a kontinuitási egyenletet azt kapjuk, hogy

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) \zeta_1 + v_1 \frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

ahol $\zeta_1 = \frac{\partial v_1}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y}$ az örvényesség perturbációja. (Az összefüggés az abszolút örvényesség megmaradását fejezi ki.) Az áramlás kétdimenziós és divergencia mentes, így bevezethetjük a $\psi_1 = \psi_1(x, y)$ perturbációs áramfüggvényt, amellyel: $u_1 = -\frac{\partial \psi_1}{\partial y}$ és $v_1 = \frac{\partial \psi_1}{\partial x}$ alakban fejezhető ki.

Az áramfüggvénnyel az örvényességi egyenlet az

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) \nabla^2 \psi_1 + \beta \frac{\partial \psi_1}{\partial x} = 0$$

alakot ölti. Keresünk az egyenlet megoldását $\psi = A e^{i(k_x x + k_y y - \omega t)}$ alakban! A deriválásokat elvégezve a

$$(k_x U - \omega)(k_x^2 + k_y^2) - \beta k_x = 0$$

karakterisztikus egyenlethez jutunk, amiből

$$\omega = k_x \left(U - \frac{\beta}{k_x^2 + k_y^2} \right)$$

A zavar fázissebessége definíció szerint

$$c_f = \frac{\omega}{|k|} = \frac{\omega}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2}} = \frac{k_x U}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2}} - \frac{k_x \beta}{(k_x^2 + k_y^2)^{\frac{3}{2}}},$$

illetve vektoriális formában:

$$c_f = \frac{\omega}{|k|} \frac{k}{|k|} = \frac{\omega}{k_x^2 + k_y^2} k = \left(\frac{k_x U}{k_x^2 + k_y^2} - \frac{k_x \beta}{(k_x^2 + k_y^2)^2} \right) k$$

A csoportsebesség definíció szerint:

$$c_{cs} = \nabla_k \omega = \frac{\partial \omega}{\partial k_x} e_x + \frac{\partial \omega}{\partial k_y} e_y$$

A deriválásokat elvégezve:

$$c_{cs} = \left(U + \beta \frac{k_x^2 - k_y^2}{(k_x^2 + k_y^2)^2} \right) e_x + \frac{2\beta k_x k_y}{(k_x^2 + k_y^2)^2} e_y$$

Látszik, hogy a fázis- és csoportsebesség nem azonos irányú.

IX.3.7. A sebesség komponenseit az áramlási függvényből határozhatjuk meg:

$$u_1 = -\frac{\partial \psi_1}{\partial y} = -i k_y A e^{i(k_x x + k_y y - \omega t)} \quad v_1 = \frac{\partial \psi_1}{\partial x} = i k_x A e^{i(k_x x + k_y y - \omega t)}$$

ahonnan azonnal látszik, hogy $\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_1 = 0$, tehát a sebesség és a hullámterjedés iránya merőleges egymásra.

IX.3.8. Tekintsük az

$$\omega = Uk_x - \frac{\beta k_x}{k_x^2 + k_y^2}$$

diszperziós egyenletet, amiből az x irányú terjedési sebességre az következő egyenlőség adódik:

$$c_x = \frac{\omega}{k_x} = U - \frac{\beta}{k_x^2 + k_y^2}$$

Vegyük észre, hogy ez a sebesség a hullámfrontok és az x tengely metszéspontjainak a sebessége és nem a fázissebesség x komponense. Azonnal látszik, hogy ez a sebesség kisebb, mint az alapáramlás sebessége, azaz a szél „átfúj” ezeken a hullámokon, továbbá nagyon kicsiny $|\mathbf{k}|$ -k, azaz nagy hullámhosszak esetén ezek a hullámok a horizontális áramlással szembe is haladhatnak.

a) A csoportsebesség vektor a **IX.3.6. feladat** szerint

$$\mathbf{c}_{cz} = \nabla \omega = \left(U - \frac{\beta k_x^2}{(k_x^2 + k_y^2)} + \frac{2\beta k_x^2}{(k_x^2 + k_y^2)^2} \right) \mathbf{e}_x + \frac{2\beta k_x k_y}{(k_x^2 + k_y^2)^2} \mathbf{e}_y$$

Térjünk át arra speciális esetre, amikor $k_y = 0$, azaz a hullám az x tengely mentén terjed és a hullámfrontok párhuzamosak az y tengellyel. Ekkor $|\mathbf{k}| = |k_x|$ és

$$\mathbf{c}_{cz} = \nabla \omega = \left(U + \frac{\beta k_x^2}{(k_x^2 + k_y^2)^2} \right) \mathbf{e}_x,$$

ami valóban nagyobb a $c = \frac{\omega}{k_x} = U - \frac{\beta}{k_x^2}$ fázissebességnél.

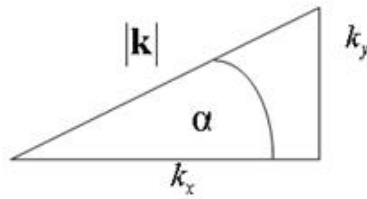
b) A csoportsebesség az x irányú fázissebességgel kifejezhető a következő alakban:

$$\mathbf{c}_g = c \mathbf{e}_x + \frac{2\beta}{|\mathbf{k}|^2} \left(\frac{k_x^2}{|\mathbf{k}|^2} \right) \mathbf{e}_x + \frac{k_x k_y}{|\mathbf{k}|^2} \mathbf{e}_y = c \mathbf{e}_x + \frac{2\beta}{|\mathbf{k}|^2} \frac{k_x}{|\mathbf{k}|} \left(\frac{k_x}{|\mathbf{k}|} \mathbf{e}_x + \frac{k_y}{|\mathbf{k}|} \mathbf{e}_y \right),$$

ahol

$$c = \frac{\omega}{k_x} = U - \frac{\beta}{|\mathbf{k}|^2}$$

Az **MIX.3.1. ábra** mutatja, hogy $\frac{k_x}{|\mathbf{k}|} = \cos \alpha$ és $\mathbf{e}_k = \left(\frac{k_x}{|\mathbf{k}|} \mathbf{e}_x + \frac{k_y}{|\mathbf{k}|} \mathbf{e}_y \right)$ a hullámterjedés irányába mutató egységvektor.



MIX.3.1. ábra. A $\mathbf{k}$ hullámszám vektor komponensei

Tehát:

$$c_{cz} = c e_x + \frac{2\beta}{k^2} \cos \alpha e_k$$

Stacionárius esetben a hullám terjedési sebessége zérus, azaz $c = 0$ és ekkor a csoportsebesség is a $\mathbf{k}$ hullámszám

vektor irányába esik. A stacionaritás miatt $U = \frac{\beta}{k^2}$, azaz $c_{cz} = 2U \cos \alpha k$.

Tisztán x irányú hullámterjedés esetén ez azt jelenti, hogy a csoportsebesség kétszerese az átlagos szélességnek.

c) Ha az alapáramlás sebessége zérus, akkor a diszperziós reláció:

$$\omega = -\frac{\beta k_x}{k_x^2 + k_y^2}$$

Beírva ide a konstans ω_0 értéket, az összefüggés átrendezésével a

$$\left(k_x + \frac{\beta}{2\omega_0}\right)^2 + k_y^2 = \left(\frac{\beta}{2\omega_0}\right)^2$$

egyenlethez jutunk, ami a hullámszám térben kör egyenlete. A kör középpontja a y pont, sugara $\frac{\beta}{2\omega_0}$. A különböző körfrekvenciához tartozó körök mindegyike az origóban érinti az x tengelyt. A csoportsebesség vektor adott körfrekvencia mellett minden pontban a kör középpontja felé mutató vektor, hiszen definíció szerint merőleges a konstans körfrekvenciájú felületekre.

IX.3.9. A IX.3.6. feladat megoldása szerint:

$$\omega = k_x \left(U - \frac{\beta}{k_x^2 + k_y^2} \right),$$

a hullámok fázissebessége:

$$c = \frac{\omega}{|\mathbf{k}|} = \frac{k_x}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2}} \left(U - \frac{\beta}{k_x^2 + k_y^2} \right)$$

Az adatokkal:

$$\beta = \frac{2\Omega \cos 60^\circ}{R_F} = \frac{2 \times \frac{2\pi}{24 \times 3600} \text{ s}^{-1} \times 0.5}{6371 \times 10^3 \text{ m}} \approx 10^{-11} \text{ m}^{-1} \text{ s}^{-1},$$

$$k_x^2 + k_y^2 = \left(\frac{2\pi}{10^7 \text{ m}} \right)^2 + \left(\frac{2\pi}{2.5 \times 10^6 \text{ m}} \right)^2 \approx 6.8 \times 10^{-12} \text{ m}^{-2},$$

$$U - \frac{\beta}{k_x^2 + k_y^2} \approx 8.5 \text{ m s}^{-1},$$

$$c \approx 2.13 \text{ m s}^{-1}.$$

Érdeemes észrevenni, hogy a hullámok nyugatról keletre, 8.5 m s^{-1} sebességgel terjednek. Ez az érték alig tér el az átlagos szélességtől. A szélességhez képest vett $\frac{\beta}{k_x^2 + k_y^2}$ korrekciós tagot ugyanis erősen csökkenti az, hogy a k_y hullámszám viszonylag nagy.

IX.3.10. A hullámterjedés sebessége

$$c = \left(U - \frac{\beta}{k_x^2} \right),$$

hiszen $k_y = 0$. Stacionárius esetben a terjedési sebesség zérus, tehát $k_x = \sqrt{\frac{\beta}{U}}$, illetve $\lambda_x = 2\pi \sqrt{\frac{U}{\beta}} \approx 4500 \text{ km}$. A szélességi kör hossza $2\pi R_F \cos 45^\circ \approx 28000 \text{ km}$, amelyen nagyjából hat hullám fér el.

IX.3.11. A tó lengés egyszerűsített modellje a sekélyvíz egyenletekre épül:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad \text{és} \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} = -H \frac{\partial u}{\partial x},$$

ahol u a horizontális sebesség, H a vízmélység, η a vízmélység megváltozása a lengés következtében. A fenti két egyenlet alapján:

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}.$$

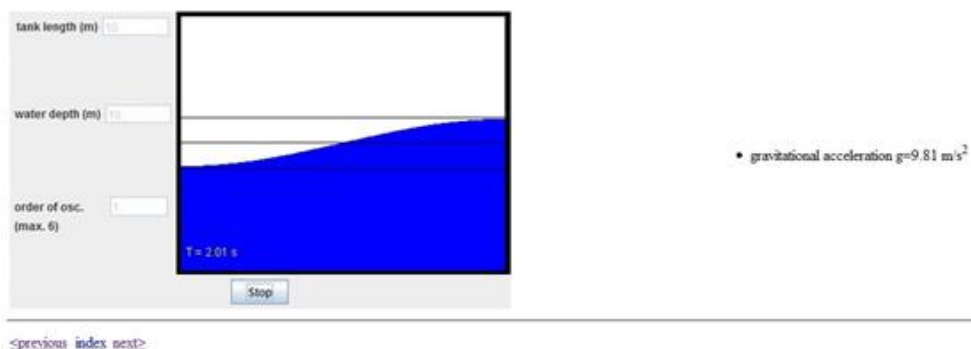
Itt $c = \sqrt{gH}$ a hullám terjedési sebessége. Az oszcillációk periódusideje:

$$T = \frac{2L}{n\sqrt{gH}},$$

ahol L a tartály, vagy a tó karakterisztikus hossza, n a csomópontok, fél-hullámhosszak száma (order of oscillation).

A tó lengés dinamikáját az *MIX.3.1. interaktív videón* szemléltetjük.

Seiche



MIX.3.1. interaktív videó. A tólengés

X. fejezet - Légköri energetika

X.1. Légköri energiafajták

X.1.1. A helyzeti energia:

$$E_p = \int_{p_0}^p \rho g z \, dz$$

A nyomás magasságfüggése a sztatika alapegyenlete és a gázegyenlet szerint:

$$dp = -\rho g \, dz, \quad \rho = \frac{p}{RT_0}, \quad \frac{dp}{p} = -\frac{g}{RT_0} \, dz$$

Ebből

$$\ln \frac{p}{p_0} = -\frac{g}{RT_0} z,$$

illetve átrendezve

$$p = p_0 e^{-\frac{g}{RT_0} z}$$

Tehát:

$$z = -\frac{RT_0}{g} \ln \frac{p}{p_0} \quad \text{és} \quad dz = -\frac{RT_0}{g} \frac{dp}{p}$$

Beírva ezt a helyzeti energia kifejezésébe

$$E_p = \frac{RT_0}{g} \int_{p_0}^p \ln \frac{p}{p_0} \, dp = \frac{RT_0}{g} \left[p \left(\ln \frac{p}{p_0} - 1 \right) \right]_{p_0}^p = \frac{RT_0}{g} \left[p \left(\ln \frac{p}{p_0} - 1 \right) + p_0 \right] = \frac{RT_0}{g} \left[p \ln \frac{p}{p_0} + p_0 - p \right]$$

A p és p_0 szintek közötti száraz levegő esetén $p_0 - p = mg$, ahol m a két réteg közötti egységnyi alapterületű függőleges légoszlopban lévő levegő tömege.

A súlypont magassága:

$$h = \frac{E_p}{mg} = \frac{RT_0}{g} \left[p \frac{\ln \frac{p}{p_0} - 1}{p_0 - p} + 1 \right]$$

A súlypont magasságában a nyomás:

$$p_s = p_0 e^{-\frac{g}{RT_0} h} = p_0 e^{-\left[\frac{p}{p_0 - p} \ln \frac{p}{p_0} + 1 \right]} = p_0 e^{-\ln \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{p}{p_0 - p}}} e^{-1},$$

$$p_z = p_0 \left(- \left(\frac{p_0}{p_1} \right)^{\frac{p}{p_0 - p}} \frac{1}{e} \right) = \frac{p_0}{e} \left(\frac{p_0}{p} \right)^{\frac{p}{p_0 - p}}$$

A belső energia:

$$E_p = \int_{p_0}^p c_v \rho T_0 dz = \frac{c_v T_0}{g} (p_0 - p)$$

X.1.2. A feladat szerint adott a talaj szintjén a nyomás (p_0) és a hőmérséklet (T_0), valamint a kérdéses p szinten

a nyomás. A sztatika alapegyenletébe beírva a $\rho = \frac{p}{RT}$ sűrűséget valamint a $T = T_0 - \gamma z$ hőmérsékletet, a

$$\frac{dp}{p} = - \frac{g}{R} \frac{dz}{T - \gamma z}$$

differentiálegyenlethez jutunk, amelynek megoldása:

$$\ln \frac{p}{p_0} = - \frac{g}{R} \int_0^z \frac{dz}{T - \gamma z} = - \frac{g}{R} \left[- \frac{1}{\gamma} \ln(T_0 - \gamma z) \right]_0^z = \frac{g}{R} \ln \frac{T_0 - \gamma z}{T_0},$$

ahonnan

$$p = p_0 \left(\frac{T_0 - \gamma z}{T_0} \right)^{\frac{R\gamma}{g}}$$

Innen kifejezhető a z magasság a nyomás függvényében:

$$T_0 - \gamma z = T_0 \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{R\gamma}{g}} \quad \text{és} \quad z = \frac{T_0}{\gamma} \left[1 - \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{R\gamma}{g}} \right],$$

$$dz = - \frac{T_0}{\gamma} \frac{R\gamma}{g} \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\left(\frac{R\gamma}{g} - 1 \right)} \frac{1}{p_0} dp$$

A hőmérséklet és a sűrűség a nyomás függvényében:

$$T = T_0 - \gamma z = T_0 \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{R\gamma}{g}}, \quad \rho = \frac{p}{RT} = \frac{p}{T_0} \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{R\gamma}{g}}$$

Az $E_p = \int_0^z \rho(z) z g dz$ potenciális energia a nyomás függvényében:

$$E_p = - \int_{p_0}^p \frac{T_0}{\gamma} \left[1 - \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{R\gamma}{\varepsilon}} \right] dp = - \frac{T_0}{\gamma} \left[p - \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{R\gamma}{\varepsilon}} p_0 \frac{1}{\frac{R\gamma}{\varepsilon} + 1} \right]_{p_0}^p,$$

$$E_p = \frac{T_0}{\gamma} \left\{ (p_0 - p) - \frac{p_0}{\frac{R\gamma}{\varepsilon} + 1} \left[1 - \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{R\gamma}{\varepsilon} + 1} \right] \right\}.$$

A súlypont magassága:

$$h = \frac{E_p}{p_0 - p} = \frac{T_0}{\gamma} \left\{ 1 - \frac{1}{\frac{R\gamma}{\varepsilon} + 1} \frac{p_0}{p_0 - p} \left[1 - \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{R\gamma}{\varepsilon} + 1} \right] \right\}.$$

A belső energia alakja:

$$E_b = \int_0^z \rho c_v T dz = \int_0^z \frac{p}{RT} c_v T dz.$$

Beírva ide a

$$dz = - \frac{T_0}{\gamma} \frac{R\gamma}{g} \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{R\gamma}{\varepsilon} - 1} \frac{1}{p_0} dp$$

kifejezést

$$E_b = - \frac{c_v}{R} \frac{RT_0}{g} \int_{p_0}^p \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{R\gamma}{\varepsilon} + 1} dp = \frac{c_v}{g} T_0 \frac{p_0}{\frac{R\gamma}{\varepsilon} + 1} \left[\left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{R\gamma}{\varepsilon} + 1} \right]_{p_0}^p = \frac{c_v p_0 T_0}{R\gamma + g} \left[1 - \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{R\gamma}{\varepsilon} + 1} \right].$$

Az átlaghőmérséklet definíció szerint:

$$\bar{T} = \frac{1}{m} \int_0^z c_v \rho T dz = \frac{E_b}{mc_v},$$

azaz

$$\bar{T} = \frac{p_0}{p_0 - p} \frac{T_0}{R\gamma + g} \left[1 - \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{R\gamma}{\varepsilon} + 1} \right].$$

Az eredmény jól mutatja, hogy annak ellenére, hogy a hőmérséklet lineárisan változik a magassággal, az átlaghőmérséklet nem a légoszlop alján és tetején mért hőmérséklet számtani közepe, hiszen a légoszlop alján a sűrűség nagyobb, mint a tetején.

X.1.3. A helyzeti energia:

$$E_p = g \int_{z_1}^{z_2} z \rho \, dz$$

A sztatika, $dp = -g\rho \, dz$ alapegyenletével és parciális integrálás után

$$E_p = - \int_{p_1}^{p_2} z \, dp = - \left[pz \right]_{p_1 z_1}^{p_2 z_2} + \int_{z_1}^{z_2} p \, dz = p_1 z_1 - p_2 z_2 + \int_{z_1}^{z_2} \rho R T \, dz$$

A belső energia:

$$E_b = \int_{z_1}^{z_2} \rho c_v T \, dz = \frac{c_v}{R} \int_{z_1}^{z_2} \rho R T \, dz$$

ahonnan az $R = c_p - c_v$ összefüggés felhasználásával:

$$\int_{z_1}^{z_2} \rho R T \, dz = \frac{R}{c_v} E_b = \frac{c_p - c_v}{c_v} E_b = (\kappa - 1) E_b$$

azaz

$$E_p = p_1 z_1 - p_2 z_2 + (\kappa - 1) E_b$$

ahol $\kappa = \frac{c_p}{c_v}$. Vegyük észre, hogy amennyiben $p_1 = p_0$ a talaj szintjén vett nyomás $p_2 \approx 0$ akkor $\frac{E_p}{E_b} = \gamma - 1$.

X.1.4. A X.1.2. feladat szerint

$$p = p_0 \left(\frac{T_0 - \gamma z}{T_0} \right)^{\frac{\gamma}{R\gamma}} \quad \text{és} \quad \rho = \frac{p}{T_0} \left(\frac{p_0}{p} \right)^{\frac{R\gamma}{\gamma}}$$

Itt $\gamma = -\frac{\partial T}{\partial z}$ a hőmérsékleti gradiens.

A teljes potenciális energia kiszámításához a légkört érdemes dz vastagságú gömbhéjakra osztani, amelyekben a sűrűség állandónak tekinthető. A z magasságban fekvő réteg levegőjének potenciális és belső energiája rendre

$$dE_p = \rho(z) g (R_F + z)^2 \pi z \, dz, \quad dE_b = \rho(z) c_v T (R_F + z)^2 \pi \, dz$$

Határozzuk meg először a belső energiát!

$$E_b = \int dE_b = 4R_F^2 \pi \frac{c_v}{R} \int_0^z p(z) \left(1 + \frac{z}{R_F} \right)^2 dz$$

Mivel a troposzféra magasságához képest R_F igen nagy, az $\left(1 + \frac{z}{R_F}\right)^2$ tényezőt nulladik közelítésben 1-nek vehetjük, pontosabban számolva pedig $1 + 2\frac{z}{R_F}$ -képlettel közelíthetjük.

Nulladik közelítésben tehát

$$E_b = 4R_F^2 \pi \frac{c_v}{R} \int_0^{z_T} p \, dz$$

A **X.1.2. feladat**ban azt kaptuk, hogy

$$\frac{c_v}{R} \int_0^{z_T} p \, dz = \frac{c_v p_0 T_0}{R\gamma + g} \left[1 - \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\left(\frac{R\gamma}{g} + 1 \right)} \right]$$

A standard légkör adatával $9,22 \cdot 10^7 \text{ J m}^{-2}$. Megszorozva ezt a Föld felszínével $4\pi(6,37 \cdot 10^6)^2 = 5,1 \cdot 10^{14} \text{ m}^2$. Az összenergia pedig $E_b = 4,7 \cdot 10^{22} \text{ J} = 4,7 \cdot 10^4 \text{ EJ}$.

Vegyük észre, hogy ebben a közelítésben a Föld felszínét mintegy síkba kiterítve képzeljük el, és nem vesszük figyelembe a gömbhéjak területének a magassággal való növekedését.

A következő közelítésben az integrál két tagra esik szét, első tagja a most meghatározott nulladik közelítés. A második tag pedig egyszerűen becsülhető, ha a $z \ll z_T$ közelítést alkalmazzuk. Ekkor

$$E_b = E_{b0} \left(1 + 2 \frac{z_T}{R_F} \right)$$

és $2 \frac{z_T}{R_F} = 2 \cdot \frac{22}{6370} = 6 \cdot 10^{-3}$, azaz az újabb megközelítés, csak néhány ezrelékes változást eredményezne!

A helyzeti energiát a **X.1.3. feladat**ban a potenciális és a belső energia közötti összefüggést felhasználva határozhatjuk meg. Kihasználna itt is, hogy a Föld sugara sokkal nagyobb, mint a tropopauza magassága, a keresett helyzeti energia jól közelíthető az

$$E_p = 4R_F^2 \pi [p_1 z_1 - p_2 z_2 + (\kappa - 1) E_{b0}]$$

ahol $\kappa = \frac{c_p}{c_v}$.

$$E_p = 4R_F^2 \pi (p_1 z_1 - p_2 z_2) + \underbrace{4,7 \cdot 10^{22} \cdot 0,4}_{1,88 \cdot 10^{22}}$$

Az adatokkal: $z_1 = 0 \text{ m}$, $p_2 = 234 \text{ hPa}$, $z_2 = 11000 \text{ m}$,

$$-4 \cdot 6,37^2 \cdot 10^{12} \cdot 3,14 \cdot 234 \cdot 11000 + 1,88 \cdot 10^{22} = 4 \cdot 6,37^2 \cdot 3,14 \cdot 234 \cdot 11 \cdot 10^{15} = 1,3 \cdot 10^{21}$$

$$E_p = 1,75 \cdot 10^{22} \text{ J}$$

X.1.5. A kinetikus energia:

$$E_k = \frac{1}{2} \int_0^{z_1} \rho v^2 dz$$

A sztatika $dp = -\rho g dz$ egyenletének felhasználásával

$$E_k = -\frac{1}{2g} \int_0^{p_1} v^2 dp$$

A sebesség a feladat szerint $v(z) = \frac{v_{p_1}}{z_{p_1}} z$ és a **X.1.2. feladat** szerint izoterm légkör esetén $z = -\frac{RT_0}{g} \ln \frac{p}{p_0}$ lineárisan csökkenő hőmérséklet mellett pedig

$$z = \frac{T_0}{\gamma} \left[1 - \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \right],$$

ahol $\gamma = -\frac{\partial T}{\partial z}$ a hőmérsékleti gradiens. Felhasználva ezeket, a $\frac{v_{p_1}}{z_{p_1}} = w$ jelöléssel az izoterm légkör esetén

$$v(p) = w \frac{RT_0}{g} \ln \frac{p_0}{p},$$

lineárisan csökkenő hőmérséklet esetén pedig

$$v(p) = w \frac{T_0}{\gamma} \left[1 - \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \right].$$

A kinetikus energia az a.) esetben

$$E_k = -w^2 \frac{R^2 T_0^2}{g} \frac{1}{2g} \int_{p_0}^{p_1} \ln^2 \left(\frac{p_0}{p} \right) dp,$$

mivel

$$\int \ln^2 \left(\frac{p_0}{p} \right) dp = p \left\{ \ln \left(\frac{p_0}{p} \right) \left[\ln \left(\frac{p_0}{p} \right) + 2 \right] + 2 \right\},$$

$$\int_{p_0}^{p_1} \ln^2 \left(\frac{p_0}{p} \right) dp = p_1 \left\{ \ln \left(\frac{p_0}{p_1} \right) \left[\ln \left(\frac{p_0}{p_1} \right) + 2 \right] + 2 \right\} - 2p_0$$

$$E_k = \frac{v_1^2}{z^2} \frac{R^2 T_0^2}{2g^2} \left\{ p_1 \ln^2 \left(\frac{p_0}{p_1} \right) + 2 p_1 \ln \left(\frac{p_0}{p_1} \right) + 2 p_1 - 2 p_0 \right\},$$

$$E_k = - \frac{v_1^2 R T_0}{2g} \left\{ p_1 \ln \left(\frac{p_0}{p_1} \right) + 2 p_1 + 2 \frac{p_1 - p_0}{\ln \left(\frac{p_0}{p_1} \right)} \right\}.$$

Az átlagsebesség:

$$\begin{aligned} \bar{v} &= \frac{\int_0^z \rho z \, dz}{\int_0^z \rho \, dz} = \frac{-\frac{\varpi}{g} \int_{p_0}^p z \, dp}{-\frac{1}{g} \int_{p_0}^p dp} = \frac{\frac{\varpi}{g} \int_{p_0}^p \frac{R T_0}{g} \ln \left(\frac{p}{p_0} \right) dp}{\frac{p_0 - p}{g}} = \frac{R T_0 \varpi}{g} \frac{\int_{p_0}^p \ln \left(\frac{p}{p_0} \right) dp}{p_0 - p} = \\ &= \frac{R T_0 \varpi}{g} \frac{p_1 \left(\ln \left(\frac{p_1}{p_0} \right) - 1 \right) + p_0}{p_0 - p_1} = \frac{R T_0}{g} \frac{v_{p_1}}{\frac{R T_0}{g} \ln \left(\frac{p_0}{p_1} \right)} \frac{p_1 \ln \left(\frac{p_1}{p_0} \right) - p_1 + p_0}{p_0 - p_1} = v_{p_1} \left[\frac{1}{\ln \left(\frac{p_0}{p_1} \right)} - \frac{p_1}{p_0 - p_1} \right]. \end{aligned}$$

Nézzük meg, hogy milyen nyomási szinten következik be ez a sebesség!

$$\begin{aligned} \varpi \frac{R T_0}{g} \ln \left(\frac{p_0}{p} \right) &= v_{p_1} \left[\frac{1}{\ln \left(\frac{p_0}{p_1} \right)} - \frac{p_1}{p_0 - p_1} \right] \\ \ln \left(\frac{p_0}{p} \right) &= \ln \left(\frac{p_0}{p_1} \right) \left[\frac{1}{\ln \left(\frac{p_0}{p_1} \right)} - \frac{p_1}{p_0 - p_1} \right] = 1 - \frac{p_1 \ln \left(\frac{p_0}{p_1} \right)}{p_0 - p_1}. \end{aligned}$$

X.1.6.

a) A kinetikus energia:

$$E_k = \frac{1}{2} \int_0^z \rho v^2 \, dz = - \frac{1}{2g} \int_{p_0}^p v^2(p) \, dp = - \frac{v_m^2}{2g} \left[\int_{p_0}^{p_1} \left(\frac{p_0 - p}{p_0 - p_1} \right)^2 dp + \int_{p_1}^p \left(\frac{p}{p_1} \right)^2 dp \right].$$

Alkalmazzuk az első integrálban az $y = \frac{p_0 - p}{p_0 - p_1}$ helyettesítést. Ekkor

$$\int_{p_0}^{p_1} \left(\frac{p_0 - p}{p_0 - p_1} \right)^2 dp = - \int_0^1 y^2 (p_0 - p_1) \, dy = - \left[(p_0 - p_1) \frac{y^3}{3} \right]_0^1 = - \frac{1}{3} (p_0 - p_1).$$

A második integrál esetén legyen $y = \frac{p}{p_1}$ és így

$$\int_1^0 p_1 v^2 dv = -\frac{p_1}{3}$$

Tehát: $E_k = \frac{v_m^2}{2g} \frac{p_0}{3} = \frac{p_0 v_m^2}{6g}$

b) Az áramlási sebesség vertikális átlaga

$$\overline{v_{vert}} = \frac{1}{p_0} \int_0^{p_2} v dp = \frac{1}{p_0} \left\{ \int_0^{p_1} v_M \frac{p}{p_1} dp + \int_{p_1}^{p_2} v_M \frac{p_0 - p}{p_0 - p_1} dp \right\} = \frac{v_M}{2}$$

az átlagos áramlás kinetikus energiája pedig

$$E_k = \frac{1}{2} \overline{v_{vert}}^2 \int_{p_0}^0 \rho dz = \frac{1}{2} \frac{v_M^2}{4} \frac{1}{g} \int_0^{p_2} dp = \frac{v_M^2 p_0}{8g}$$

c) A nyírási kinetikus energia a teljes kinetikus energia és az átlagos áramlás kinetikus energiájának különbsége:

$$E_{nyirasi} = \frac{v_M^2 p_0}{6g} - \frac{v_M^2 p_0}{8g} = \frac{v_M^2 p_0}{24g}$$

X.1.7.

A sztatikus stabilitási paraméter definíció szerint:

$$\sigma = -\alpha \frac{d \ln \Theta}{dp}$$

ahol α a specifikus térfogat. Felhasználva az $\alpha = \frac{RT}{p}$, $\Theta = T \left(\frac{p_0}{p} \right)^{\frac{R}{c_p}}$ és $\sigma = \frac{\sigma_0 p_0^2}{p^2}$ összefüggéseket, azt kapjuk, hogy

$$-\frac{RT}{p} \left(\frac{d \ln T}{dp} - \frac{R}{c_p} \frac{d \ln p}{dp} \right) = \sigma = \frac{\sigma_0 p_0^2}{p^2}$$

A deriválásokat elvégezve és az egyenletet rendezve a

$$\frac{dT}{dp} = \frac{R}{c_p} \frac{1}{p} \left(T - \frac{c_p \sigma_0 p_0^2}{R^2} \right)$$

differenciálegyenlethez jutunk. A változókat szétválasztva

$$\frac{R}{c_p} \frac{dp}{p} = \frac{dT}{T - \frac{c_p \sigma_0 p_0^2}{R^2}},$$

majd integrálva

$$\frac{R}{c_p} \ln \frac{p}{p_0} = \ln \frac{T - \frac{c_p \sigma_0 p_0^2}{R^2}}{T_0 - \frac{c_p \sigma_0 p_0^2}{R^2}}$$

Kifejezve a hőmérsékletet

$$T = \left(T_0 - \frac{c_p \sigma_0 p_0^2}{R^2} \right) \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{R}{c_p}} + \frac{c_p \sigma_0 p_0^2}{R^2}$$

A belső energia:

$$\begin{aligned} E_b &= \int_0^z \rho c_v T dz = -\frac{1}{g} \int_{p_0}^{p_1} c_v T dp = \frac{c_v}{g} \left(T_0 - \frac{c_p \sigma_0 p_0^2}{R^2} \right) \int_{p_0}^{p_1} \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{R}{c_p}} dp + \frac{c_v}{g} (p_0 - p_1) \frac{c_p \sigma_0 p_0^2}{R^2} = \\ &= \frac{c_v}{g} \left(T_0 - \frac{c_p \sigma_0 p_0^2}{R^2} \right) \frac{1}{\frac{R}{c_p} + 1} \left[1 - \left(\frac{p_1}{p_0} \right)^{\frac{R}{c_p} + 1} \right] + \frac{c_v}{g} (p_0 - p_1) \frac{c_p \sigma_0 p_0^2}{R^2} \end{aligned}$$

Itt kihasználtuk, hogy

$$\int \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{R}{c_p}} dp = \frac{1}{\frac{R}{c_p} + 1} p_0 \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{R}{c_p} + 1}$$

A helyzeti energia mint azt a **X.1.3. feladat**ban láttuk kifejezhető a belső energiával

$$E_p = -[p_1]_{p_0 z_0}^{p_1 z_1} + \frac{R}{c_v} E_b = -p_1 z_1 + \frac{R}{c_v} E_b$$

Ismernünk kellene továbbá p_1 nyomású szint magasságát. Ezt a sztatika $dp = -\rho g dz$ alapegyenletéből határozhatjuk

meg, ha $\rho = \frac{p}{RT}$ -be beírjuk a feladat előző kérdésére válaszként kapott T értéket és az egyenletet a változók szétválasztásával integráljuk.

$$dp = -\rho g dz \quad \text{és} \quad -\frac{RT}{g} \frac{dp}{p} = dz$$

Ennek felhasználásával:

$$-\frac{R}{g} \left[(T_0 - T') \left(\frac{p}{p_0} \right)^k + T' \right] \frac{dp}{p} = dz$$

ahol $T' = \frac{c_p \sigma_0 p_0^2}{R^2}$ és $k = \frac{R}{c_p}$.

Az egyenletet rendezve

$$-\frac{R}{g}(T_0 - T') \frac{1}{p_0} \left(\frac{p}{p_0}\right)^{k-1} - \frac{R}{g} T' \frac{dp}{p} = dz,$$

majd integrálva:

$$\left[-\frac{R}{g}(T_0 - T') \frac{1}{p_0} \frac{1}{k} \left(\frac{p}{p_0}\right)^k \right]_{p_0}^{p_1} - \frac{R}{g} T' [\ln p]_{p_0}^{p_1} = z$$

Visszaírva T' és k jelentését:

$$\frac{R}{g} \frac{c_p}{R} \left(T_0 - \frac{c_p \sigma_0 p_0^2}{R^2} \right) \left[1 - \left(\frac{p_1}{p_0} \right)^{\frac{R}{c_p}} \right] + \frac{R}{g} \frac{c_p \sigma_0 p_0^2}{R^2} \ln \frac{p_0}{p_1} = z$$

X.1.8. A **X.1.3. feladat**ban beláttuk, hogy a $p_1(z)$ és $p_2(z)$ szintek között elhelyezkedő egységnyi területű légoszlop potenciális és belső energiája között fennáll az

$$E_p = p_2 z_2 - p_1 z_1 + E_b(\kappa - 1),$$

ahol $\kappa = \frac{c_p}{c_v}$. Ebből adódik, hogy a teljes légköri magasságra számítva $p_2 z_2 = p_1 z_1 = 0$ és

$$\frac{E_p}{E_b} = 0,4$$

Nyilvánvaló, hogy ugyanezt az arányt kapjuk akkor is, ha $p_1 z_1 = p_2 z_2$.

Az egyensúlyban lévő légkörben a nyomás monoton csökkenő függvénye a magasságnak, azaz a p_2 függvény folytonos és függvénye z -nek, továbbá tudjuk, hogy $p_2 \geq 0$ mivel $z = 0$ és $z \rightarrow \infty$ esetén $p_2 = 0$, a függvénynek valamilyen $z > 0$ értéknél maximuma van, ez azt jelenti, hogy a maximum hely környezetében vannak olyan helyek, ahol p_2 ugyanazt az értéket veszi fel!

X.1.9. Az $y = p(z)z$ függvény maximum helyét a $\frac{dy}{dz} = 0$ feltételből adódó $z \frac{dp}{dz} = -p$ egyenletből határozhatjuk meg a különböző rétegződésnek megfelelő $p = p(z)$ függvény behelyettesítésével.

a) Izoterm légkörben a barometrikus magasságformulának megfelelően $p = p_0 e^{-\frac{g}{RT_0} z}$,

azaz $z p_0 \frac{g}{RT} e^{-\frac{g}{RT} z} = p_0 e^{-\frac{g}{RT} z}$ amiből $z = \frac{RT_0}{g}$.

b) Politrop légkörben $p \rho^{-m} = \text{állandó}$ ($m \leq \kappa$). Itt $\kappa = \frac{c_p}{c_v}$. Az $y = p(z)z$ függvény minimumának meghatározása előtt érdemes belátni, hogy a politrop légkörben a hőmérséklet a magassággal lineárisan csökken. A gáztörvény

felhasználásával a politrópiát definiáló egyenletből adódik, hogy $pT^{\frac{m}{1-m}} = \text{állandó}$. Képezve ennek teljes differenciálját:

$$dp T^{\frac{m}{1-m}} + \frac{m}{1-m} p T^{\frac{m}{1-m}-1} dT = 0,$$

amiből

$$dp = -\frac{p}{T} \frac{m}{1-m} dT.$$

Beírva ezt a hidrosztatika alapegyenletébe

$$-\frac{p}{T} \frac{m}{1-m} dT = -\rho g dz,$$

majd a gázegyenlet felhasználásával:

$$\frac{p}{T} \frac{m}{1-m} dT = \frac{g}{R} \frac{p}{T} dz.$$

Innen már kifejezhető a $\frac{dT}{dz} = -\gamma$ hőmérsékleti gradiens:

$$\gamma = -\frac{\partial T}{\partial z} = -\frac{m-1}{m} \frac{g}{R}.$$

A kapott összefüggés mutatja, hogy a hőmérsékleti gradiens a politrópia fokától függő állandó. Fejezzük ki az egyenletből a politrópia kitevőt:

$$m = \frac{g}{g - \gamma R}.$$

A hőmérséklet változása a magassággal a

$$T = T_0 - \gamma z$$

alakban adható meg, és a politrópia miatt

$$p = p_0 \left(\frac{T_0}{T} \right)^{\frac{m}{1-m}}.$$

Térjünk vissza most az y függvény minimumának meghatározására!

$$y = p_0 \left(\frac{T}{T_0} \right)^{\frac{m}{m-1}} \quad z = p_0 \left(\frac{T_0 - \gamma z}{T_0} \right)^{\frac{m}{m-1}} z,$$

$$\frac{dy}{dz} = p_0 \left(\frac{T}{T_0} \right)^{\frac{m}{m-1}} \left[1 + \frac{m}{m-1} \left(\frac{T_0 - \gamma z}{T_0} \right)^{-1} \left(\frac{\gamma}{T_0} \right) z \right] = 0,$$

ami rendezés után:

$$1 = \frac{m}{m-1} \frac{T_0}{T_0 - \gamma z} \frac{\gamma}{T_0} z, \quad (m-1)(T_0 - \gamma z) = m\gamma z$$

és így

$$z = \frac{(m-1)T_0}{(m-1)\gamma}.$$

Visszaírva ide a politrópia kitevő γ -val kifejezett értékét, azt kapjuk, hogy

$$z = \frac{RT_0}{g + \gamma R}.$$

A kifejezést tovább alakítva:

$$zg = R(T_0 - \gamma z) = RT(z),$$

amiből

$$z = \frac{RT(z)}{g}.$$

Az összefüggés mutatja, hogy politrop légkörben a P^z kifejezés ott veszi fel maximumát, ahol az egységnyi tömegű levegő helyzeti energiája lokálisan megegyezik az $RT(z)$ szorzattal. Ezt a magasságot szokás a légkör közepes energetikai szintjének nevezni.

c) Az adiabatikus légkör a politrop légkör speciális esete, ahol $m = \frac{c_p}{c_v} = \kappa$, azaz

$$z = \frac{RT_0}{g + \kappa R} = \frac{RT_0}{g + 1,4R}.$$

d) Az állandó sűrűségű légkörben az állapotegyenletet nem használhatjuk, mert a közeg nem gáz, hanem folyadék.

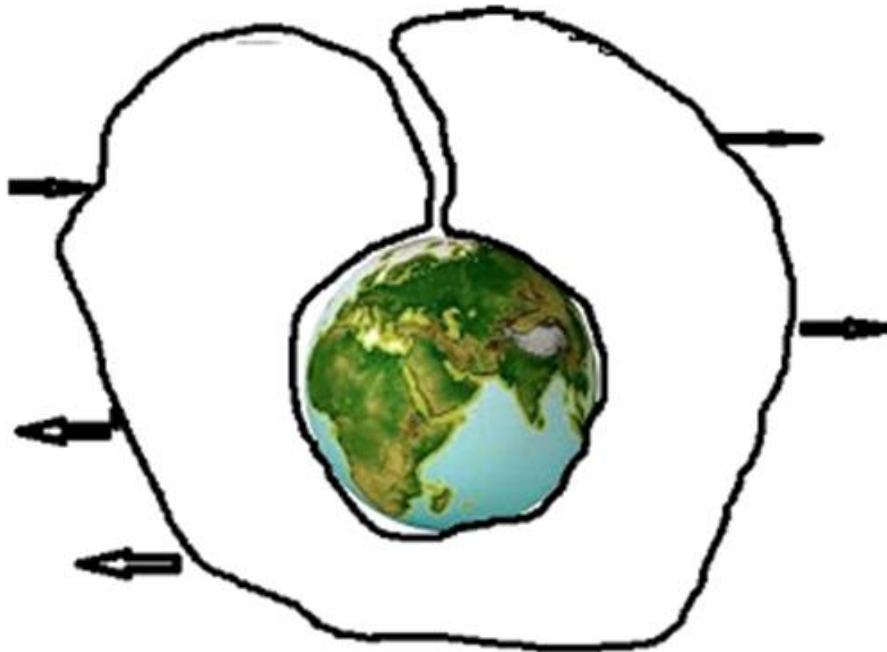
A politropitási együttható $m = \pm\infty$ (hiszen egyébként tetszőleges P mellett $P\rho^{-m}$ nem lehetne állandó),

következésképpen $\gamma_k = \frac{g}{R}$. Ez a kritikus vertikális hőmérsékleti gradiens. Ha $\gamma > \gamma_k$, akkor a légkör semmiképpen sem lehet hidrosztatikus!

$$z = \frac{RT_0}{2g}.$$

X.2. A légköri energiák közötti átalakulások

X.2.1. A divergencia integrálja a Gauss-tétel felhasználásával felületi integrállá alakítható. Az átalakítás azonban nem nyilvánvaló, mivel a teljes légkört a Földgömb és a vele koncentrikus igen nagy sugarú gömb határolja. Ez a tartomány nem egyszeresen összefüggő, ezért a Gauss tétel közvetlenül nem alkalmazható rá. A tartomány azonban egyszeresen összefüggővé tehető, ha a Föld középpontján átmenő síkkal bevágjuk és az *MX.2.1. ábrán* látható módon a légkör határát formálisan egyetlen felületté tesszük.



MX.2.1. ábra. A légkör mint egyszeresen összefüggő tartomány az energetikai vizsgálatokban.

Ez a tartomány már egyszeresen összefüggő, így alkalmazható a Gauss-tétel:

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{j} \, dV = \oint_A \mathbf{j} \cdot d\mathbf{A} = \oint_A s \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A}$$

A felület természetes módon három részre bomlik. A földfelszín által alkotott gömbre, a vele koncentrikus nagyon távoli gömbre és a bemetszési felületre, amelyet kétszer, ellentétes normálvektorral kell figyelembe vennünk. A bemetszés mentén adódó fluxus járuléka nyilvánvalóan zérus. Így:

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{j} \, dV = \oint_{Föld} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{A} + \oint_{nagy\ gömb} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{A} = \oint_{Föld} s \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A} + \oint_{nagy\ gömb} s \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A} = 0$$

ugyanis mind a földfelszínen, mind a légkör felső határán a normális irányú sebességnek zérusnak kell lennie.

X.2.2. Fejtsük ki a baloldali integrandusban a totális hidrodinamikai időderiváltat és alakítsuk át az alábbi módon:

$$\rho \frac{dS}{dt} = \rho \left(\frac{\partial S}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla S \right) = \frac{\partial(\rho S)}{\partial t} - S \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \mathbf{v} \cdot \nabla S$$

Használjuk fel a

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0$$

kontinuitási egyenletet! Azt kapjuk, hogy:

$$\rho \frac{dS}{dt} = \frac{\partial(\rho S)}{\partial t} + S \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) + \rho \mathbf{v} \cdot \nabla S = \frac{\partial(\rho S)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} S).$$

Az egyenletet a teljes térre integrálva az igazolandó állítást kapjuk, mert a jobboldali divergencia teljes térre vett integrálja a Gauss-tétel értelmében eltűnik.

$$\frac{dE_p}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V \rho g z dV = \int_V \frac{\partial}{\partial t} (\rho g z) dV.$$

X.2.3. A **X.2.1. feladat**ban bebizonyított tételt a g_z skalárja alkalmazva:

$$\frac{dE_p}{dt} = \int_V \rho \frac{d}{dt} (g z) dV = \int_V \rho g w dV.$$

X.2.4. A termodinamika I. főtételének egységnyi tömegű levegőre felírt alakja szerint:

$$c_v dT = \delta Q - p d\alpha.$$

Ebből az egységnyi időre vonatkoztatott energiamérleg:

$$c_v \frac{dT}{dt} = Q' - p \frac{d\alpha}{dt},$$

ahol Q' az egységnyi tömegű levegő által egységnyi idő alatt felvett hő. Az összefüggést a teljes légekőre integrálva,

és felhasználva, hogy $\alpha = \frac{1}{\rho}$:

$$\frac{dE_b}{dt} = \int_V Q' \rho dV + \int_V p \rho \frac{1}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt} dV.$$

A sűrűség deriválta a kontinuitási egyenletből behelyettesítve, adódik hogy

$$\frac{dE_b}{dt} = \int_V Q' \rho dV - \int_V p \nabla \cdot \mathbf{v} dV.$$

X.2.5. Írjuk fel a mozgásegyenletet:

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p - f \rho (\mathbf{k} \times \mathbf{v}) - g \rho \mathbf{k} + \rho \mathbf{F},$$

ahol $\mathbf{F}$ a súrlódási erő sűrűség. Szorozzuk be az egyenletet a sebességgel és integráljuk a teljes légekőre:

$$\frac{dE_k}{dt} = -\int_V \mathbf{v} \cdot \nabla p dV - \int_V \rho g w dV + \int_V \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{F} dV \quad \frac{dE_k}{dt} = -\int_V \mathbf{v} \cdot \nabla p dV - \int_V \rho g w dV + \int_V \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{F} dV.$$

Alakítsuk át a jobboldal első tagját a következőképpen:

$$-\int_V \mathbf{v} \cdot \nabla p dV = -\int_V \nabla \cdot (\mathbf{v}p) dV + \int_V p \nabla \cdot \mathbf{v} dV = \int_V p \nabla \cdot \mathbf{v} dV,$$

hiszen a Gauss-tétel értelmében $\int_V \nabla \cdot (\mathbf{v}p) dV = 0$. Ennek megfelelően:

$$\frac{dE_k}{dt} = \int_V p \nabla \cdot \mathbf{v} dV - \int_V \rho g w dV + \int_V \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{F} dV.$$

X.2.6. Írjuk fel a mozgásegyenleteket térbeli polárkoordináta-rendszer alkalmazásával komponensekben:

$$\rho \frac{du}{dt} = -\frac{1}{R_F \cos \varphi} \frac{\partial p}{\partial \lambda} + \rho f v - \rho h w + \rho \frac{uv}{R_F} \operatorname{tg} \varphi - \rho \frac{uw}{R_F} + F_x,$$

$$\rho \frac{dv}{dt} = -\frac{1}{R_F} \frac{\partial p}{\partial \varphi} - \rho f u - \rho \frac{u^2}{R_F} \operatorname{tg} \varphi - \rho \frac{vw}{R_F} + F_y,$$

$$\rho \frac{dw}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial r} - \rho g + \rho l u + \rho \frac{u^2 + v^2}{R_F} + F_z.$$

Szorozzuk be az egyenleteket a megfelelő sebességkomponensekkel, majd adjuk össze az első két egyenletet és integráljuk az így nyert két egyenletet a teljes térre! Jelölje E_{ih} a horizontális sebességekből E_{kw} pedig a vertikális sebességből nyert kinetikus energiát és a továbbiakban a h index általában is a horizontális síkban lévő mennyiségeket. A tendenciákra az:

$$\frac{dE_{kh}}{dt} = -\int_V \mathbf{v}_h \cdot \nabla_h p dV - \int_V \rho l u w dV - \int_V \rho \frac{u^2 + v^2}{R_F} w dV + \int_V \mathbf{F}_h \cdot \mathbf{v}_h dV,$$

$$\frac{dE_{kw}}{dt} = -\int_V w \frac{\partial p}{\partial r} dV - \int_V \rho g w dV + \int_V \rho l u w dV + \int_V \rho \frac{u^2 + v^2}{R_F} w dV + \int_V F_z w dV.$$

összefüggéseket kapjuk. A nyomási gradienseket tartalmazó tagok parciális integrálással és a Gauss-tétel felhasználásával a szokásos alakra hozhatók:

$$-\int_V \mathbf{v}_h \cdot \nabla_h p dV = -\int_V \nabla_h \cdot (\mathbf{v}_h p) dV + \int_V p \nabla_h \cdot \mathbf{v}_h dV = \int_V p \nabla_h \cdot \mathbf{v}_h dV,$$

$$-\int_V w \frac{\partial p}{\partial r} dV = -\int_V \frac{\partial (pw)}{\partial r} dV + \int_V p \frac{\partial w}{\partial r} dV.$$

Ezzel a belső energia változását leíró egyenlet az

$$\frac{dE_b}{dt} = \int_V Q' \rho dV - \int_V p \nabla_h \cdot \mathbf{v}_h dV - \int_V p \frac{\partial w}{\partial r} dV,$$

alakot ölti. Bevezetve a szokásos

$$C(E_b, E_{kh}) = \int_V p \nabla_h \cdot \mathbf{v}_h dV$$

$$C(E_b, E_{kw}) = \int_V p \frac{\partial w}{\partial r} dV$$

$$C(E_p, E_{kw}) = - \int_V \rho g w dV$$

jelöléseket és a kinetikus energia változását megszabó tagokat összevetve a belső energia és potenciális energia változását megszabó tagokkal, azonnal látható, hogy a horizontális sebességből származó kinetikus energia átalakulhat a vertikális sebességből származóba, és az átalakulási sebesség:

$$C(E_{kh}, E_{kw}) = \int_V \rho h u w dV + \int_V \rho \frac{u^2 + v^2}{R_F} w dV$$

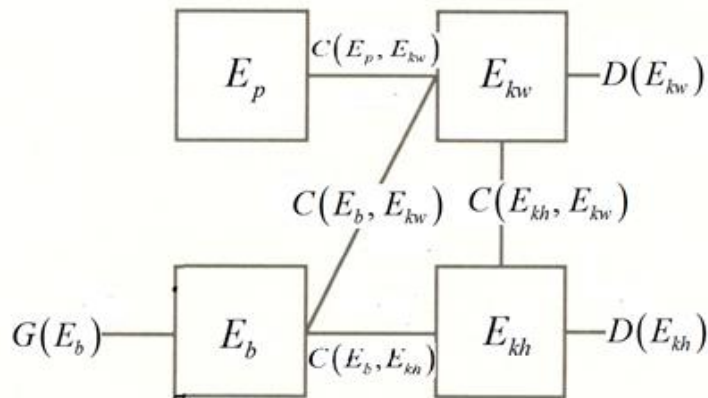
A belső energia generálását és a kinetikus energia disszipációját kifejező tagok:

$$G(E_b) = \int_V Q' \rho dV$$

$$D(E_{kh}) = - \int_V \rho \mathbf{v}_h \cdot \mathbf{F}_h dV$$

$$D(E_{kw}) = - \int_V \rho w \cdot F_z dV$$

A fentiek alapján az alábbi doboz diagram készíthető (MX.2.2. ábra).



MX.2.2. ábra. A légekőri energiaátalakulások sematikus képe.

X.2.7. A

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

kontinuitási egyenletbe helyettesítsük be a gázegyenletből a sűrűséget, $\rho = \frac{p}{RT}$. Azt kapjuk, hogy:

$$\frac{dp}{dt} - \frac{p}{T} \frac{dT}{dt} + p \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

A

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{c_v} \left(Q' - p \frac{d\alpha}{dt} \right)$$

termodinamikai egyenletet alakítsuk át a kontinuitási egyenlet segítségével a következő formára:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{c_v} (Q' - RT \nabla \cdot \mathbf{v})$$

majd helyettesítsük be a kontinuitási egyenletbe:

$$\frac{dp}{dt} - \frac{p}{T} \frac{1}{c_v} (Q' - RT \nabla \cdot \mathbf{v}) + p \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

és fejezzük ki $\frac{\partial p}{\partial t}$ -t:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -(\mathbf{v} \cdot \nabla) p + \frac{p}{T} \frac{1}{c_v} Q' - \frac{pR}{c_v} \nabla \cdot \mathbf{v} - p \nabla \cdot \mathbf{v} = -(\mathbf{v} \cdot \nabla) p + \frac{R}{c_v} \rho Q' - \frac{c_p}{c_v} p \nabla \cdot \mathbf{v}$$

Bontsuk szét a sebességdivergenciát és az advektív tagot horizontális és vertikális részre:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -(\mathbf{v}_h \cdot \nabla_h) p - W \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{R}{c_v} \rho Q' - \frac{c_p}{c_v} p \nabla_h \cdot \mathbf{v}_h - \frac{c_p}{c_v} p \frac{\partial W}{\partial z}$$

Használjuk fel a statika alapegyenletét a $W \frac{\partial p}{\partial z}$ tagban:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -(\mathbf{v}_h \cdot \nabla_h) p + W \rho g + \frac{R}{c_v} \rho Q' - \frac{c_p}{c_v} p \nabla_h \cdot \mathbf{v}_h - \frac{c_p}{c_v} p \frac{\partial W}{\partial z}$$

Deriváljuk idő szerint a hidrosztatika alapegyenletét:

$$\frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial p}{\partial t} = -g \frac{\partial \rho}{\partial t} = g \nabla \cdot (\rho \mathbf{v})$$

Fejezzük ki innen $\frac{\partial p}{\partial t}$ az egyenlet ∞ és z közötti integrálásával, és bontsuk szét a divergenciát horizontális és vertikális részre:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = g \int_{\infty}^z \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) dz = g \int_{\infty}^z \nabla_h \cdot (\rho \mathbf{v}) dz + g \int_{\infty}^z \frac{\partial (\rho W)}{\partial z} dz = g \int_{\infty}^z \nabla_h \cdot (\rho \mathbf{v}) dz + \rho g W(z)$$

Tegyük egyenlővé a nyomás időderiváltjának horizontális és vertikális tagokra bontott kifejezéseit:

$$g \int_{\infty}^z \nabla_2 \cdot (\rho \mathbf{v}) dz + \rho g W = -(\mathbf{v}_2 \cdot \nabla_h) p + W \rho g + \frac{R}{c_v} \rho Q' - \frac{c_p}{c_v} p \nabla_h \cdot \mathbf{v} - \frac{c_p}{c_v} p \frac{\partial W}{\partial z}$$

Fejezzük ki innen $p \frac{\partial W}{\partial z}$ -t és kissé alakítsuk át a jobboldalt, megkapjuk a Richardson-egyenletet:

$$p \frac{\partial W}{\partial z} = \frac{1}{\kappa} \left(-g \int_{\infty}^z \nabla_h \cdot (\rho \mathbf{v}_h) dz - (\nabla_h \cdot p \mathbf{v}_h) + \frac{R}{c_v} \rho Q' + \frac{R}{c_v} p \nabla_h \cdot \mathbf{v}_h \right)$$

$$\kappa = \frac{c_p}{c_v}$$

Itt $\kappa = \frac{c_p}{c_v}$. Vegyük észre, hogy a jobboldalon csak horizontális sebességek és deriváltak szerepelnek! Ebből az összefüggésből a 0 és z szintek közötti integrálással megkaphatjuk a hidrosztatikusság teljesüléséhez szükséges sebességet.

X.2.8. Hidrosztatikus közelítésben $w \approx 0$ (kivéve azokban a tagokban, ahol a nehézségi gyorsulás szerepel) azaz:

$$D(E_{kw}) = 0,$$

$$C(E_{kh}, E_{kw}) = 0$$

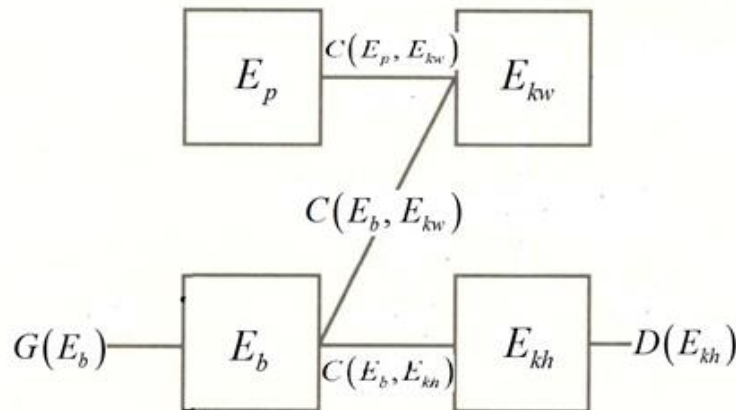
A további átalakulási sebességek pedig

$$C(E_b, E_{kh}) = \int_V p \nabla_h \cdot \mathbf{v}_h dV,$$

$$C(E_b, E_{kw}) = \int_V p \frac{\partial W}{\partial r} dV = \int_V \frac{\partial p W}{\partial r} dV - \int_V W \frac{\partial p}{\partial r} dV = \int_V W g \rho dV = C(E_{kw}, E_b)$$

$$C(E_p, E_{kw}) = - \int_V \rho g w dV$$

Ezekkel az összefüggésekkel a doboz diagram is egyszerűsödik, amit az *MX.2.3. ábra* szemléltet.



MX.2.3. ábra. A légköri energiaátalakulások sematikus képe hidrosztatikus közelítéssel.

X.3. A felhasználható potenciális energia

X.3.1. A folyadék potenciális energiája adott pillanatban

$$E_p = \int_A \int_0^h \rho g h \, dh \, dA = \frac{1}{2} \int_A \rho g h^2 \, dA$$

Vezessük be a folyadék

$$\bar{h} = \frac{1}{A} \int_A h \, dA$$

átlagos mélységét! Az átlagos mélység független az időtől, hiszen a folyadék $V = hA$ térfogata az összenyomhatatlanság miatt állandó. Ezzel a magasság a $h = \bar{h} + h'$ alakra hozható. Beírva ezt a potenciális energiába:

$$E_p = \frac{1}{2} \int_A \rho g (\bar{h} + h')^2 \, dA = \frac{1}{2} \rho g \int_A \bar{h}^2 \, dA + \rho g \bar{h} \int_A h' \, dA + \frac{1}{2} \rho g \int_A h'^2 \, dA$$

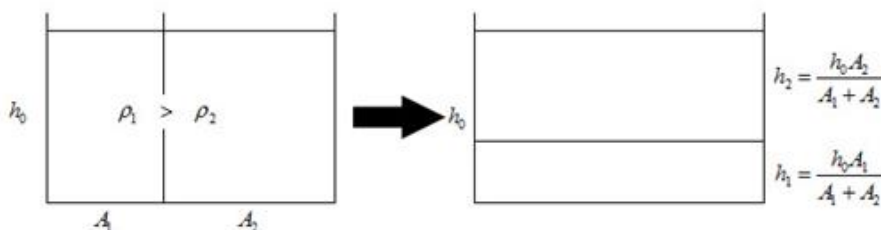
Az átlagképzésből következően $\int_A h' \, dA = 0$, így

$$E_p = \frac{1}{2} \int_A \rho g h^2 \, dA + \frac{1}{2} \rho g \int_A h'^2 \, dA$$

Mivel az első integrál konstans értékű, a második pedig csak pozitív lehet, az energia akkor minimális ha $h'(x, y, t) \equiv 0$. Ez azt jelenti, hogy a folyadék energiája csak növekedhet, ha felszíne eltér vízszintes egyensúlyi helyzettől. A kinyerhető potenciális energia:

$$E_p^{\text{kinyerhető}} = E_p - E_{p\min} = \frac{1}{2} \int_A \rho g h^2(x, y, t_0) \, dA$$

X.3.2. A folyadék átrendeződését az MX.3.1. ábra szemlélteti.



MX.3.1. ábra. A folyadék tömegátrendeződése Margules gondolatmenetét követve.

Kezdetben a folyadék helyzeti energiája:

$$E_{p(K)} = \frac{1}{2} \rho_1 g A_1 h_0^2 + \frac{1}{2} \rho_2 g A_2 h_0^2$$

Az egyensúly beállta után a helyzeti energia:

$$E_{p(V)} = \frac{1}{2} \rho_1 g \frac{h_0^2 A_1^2}{A_1 + A_2} + \rho_2 g A_2 h_0 \left[\frac{h_0 A_1}{A_1 + A_2} + \frac{1}{2} h_0 \frac{A_2}{A_1 + A_2} \right]$$

A kezdeti és minimális potenciális energia különbsége:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \rho_1 g h_0^2 \left[A_1 - \frac{A_1^2}{A_1 + A_2} \right] + \frac{1}{2} \rho_2 g h_0^2 \left[A_2 - \frac{A_2^2}{A_1 + A_2} \right] - \rho_2 g \frac{A_1 A_2}{A_1 + A_2} h_0^2 = \\ & \frac{1}{2} \rho_1 g h_0^2 \frac{A_1 A_2}{A_1 + A_2} + \frac{1}{2} \rho_2 g h_0^2 \frac{A_1 A_2}{A_1 + A_2} - \frac{1}{2} \rho_2 g h_0^2 \frac{2 A_1 A_2}{A_1 + A_2} = \frac{1}{2} (\rho_1 - \rho_2) g h_0^2 \frac{A_1 A_2}{A_1 + A_2} \end{aligned}$$

Ha $A_1 = A_2 = \frac{A}{2}$, akkor

$$\Delta E_p = \frac{1}{8} (\rho_1 - \rho_2) g A h_0^2$$

A két folyadék össztömege ekkor:

$$M = \frac{h_0 A}{2} (\rho_1 + \rho_2)$$

Ebből az egységnyi tömegre jutó mozgási energia:

$$\frac{\Delta E_p}{M} = \frac{g h_0}{4} \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + \rho_2} = \frac{g h_0}{8} \frac{\Delta \rho}{\rho}$$

X.3.3. Az előző X.3.2. feladat megoldása alapján az adatok behelyettesítése után:

$$\begin{aligned} \frac{\bar{V}^2}{z} &= \frac{g h_0}{8} \frac{\Delta T}{\bar{T}}, \\ \frac{2g}{8} \frac{\Delta T}{\bar{T}} &= 0,13 \end{aligned}$$

és így az áramlás átlagos sebessége $h_0 = 2 \text{ km}, 3 \text{ km}$ és 5 km értékek mellett rendre:

$$\bar{V}(2 \text{ km}) = 16,1 \text{ m s}^{-1}, \quad \bar{V}(3 \text{ km}) = 19,7 \text{ m s}^{-1}, \quad \bar{V}(5 \text{ km}) = 25,4 \text{ m s}^{-1}$$

X.3.4.

a) A sebesség maximuma a

$$0 = \frac{dv(x)}{dx} = v_0 e^{1-x} - v_0 x e^{1-x} = 0$$

egyenletből adódóan az $x=1$ helyen van és $v_{\max} = v_0$.

b) Írjuk fel először a gradiens szél egyensúlyt a tengelytől r távolságban elhelyezkedő részecskére!. Az örvénnyel együtt forgó koordináta-rendszerben a hidrosztatikai nyomásból származó gradiens erő tart egyensúlyt a Föld forgásából származó Coriolis és az örvénylő mozgás koordináta-rendszerében fellépő centrifugális erővel. Legyen $h = h(r)$ a folyadékfelszín magassága a folyadék tekintett aljától!. A mozgásegyenlet:

$$g \frac{dh}{dr} = f v + \frac{v^2}{r}.$$

Beírva ide a sebességfüggvényt és áttérve az r helyett az x változóra, amivel

$$\frac{dh}{dr} = \frac{dh}{dx} \frac{dx}{dr} = \frac{1}{r_0} \frac{dh}{dx},$$

$$\frac{g}{r_0} \frac{dh}{dx} = f v_0 x e^{1-x} + \frac{x^2 e^{2-2x}}{x} \frac{v_0^2}{r_0},$$

$$\frac{dh}{dx} = \frac{f r_0 v_0 e}{g} x e^{-x} + \frac{v_0^2 e^2}{g} x e^{-2x}.$$

Bevezetve az $a = \frac{f r_0 v_0 e}{g}$ és $b = \frac{v_0^2 e^2}{g}$ jelöléseket a

$$\frac{dh}{dx} = a x e^{-x} + b x e^{-2x}$$

egyenlethez jutunk. Az egyenlet közvetlenül integrálható parciális integrálással:

$$h(x) = \left[-a x e^{-x} \right]_0^x + \int_0^x a e^{-x} dx + \left[-\frac{b}{2} x e^{-2x} \right]_0^x + \int_0^x \frac{b}{2} e^{-2x} dx,$$

$$h(x) = -a x e^{-x} - a e^{-x} + a - \frac{b}{2} x e^{-2x} - \frac{b}{4} e^{-2x} + \frac{b}{4},$$

$$h(x) = a \left[1 - (1+x)e^{-x} \right] + \frac{b}{4} \left[1 - (1+2x)e^{-2x} \right] + h(0).$$

A folyadék átlagos magassága a mozgáshoz illeszkedő tengelyű koordináta-rendszerben:

$$\bar{h} = \frac{1}{x_{\max}^2 \pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{x_{\max}} h(x) x d\Theta dx = \frac{2}{x_{\max}^2} \int_0^{x_{\max}} x h(x) dx.$$

Mivel $x_{\max} \ll 1$, az integrál felső határát az $x^n e^{-\alpha x}$ jellegű tagokban $x \rightarrow \infty$ -ig kiterjeszthetjük és felhasználhatjuk az

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-\alpha x} dx = \frac{n!}{\alpha^{n+1}}$$

összefüggést, ami n -szer egymás után alkalmazott parciális integrálással egyszerűen igazolható:

$$\bar{h} = \frac{1}{x_{\max}^2} \int_0^{x_{\max}} \left(h(0) + a + \frac{b}{4} \right) x dx - \frac{2a}{x_{\max}^2} \int_0^{x_{\max}} (xe^{-x} + x^2 e^{-x}) dx - \frac{2b}{4x_{\max}^2} \int_0^{x_{\max}} (xe^{-2x} + 2x^2 e^{-2x}) dx,$$

$$\bar{h} = h_0 + a + \frac{b}{4} - \frac{1}{x_{\max}^2} \left(6a + \frac{3b}{8} \right).$$

Ebből

$$h' = h - \bar{h} = -a(1+x)e^{-x} - \frac{b}{4}(1+2x)e^{-2x} + \frac{1}{x_{\max}^2} \left(6a + \frac{3b}{8} \right)$$

c) Az átlagos magasságú folyadék helyzeti energiája

$$\overline{E_p} = \int_0^{2\pi} \int_0^{x_{\max}} \int_0^{\bar{h}} \rho g h x d\Theta dx dh$$

azaz

$$\overline{E_p} = \frac{g\rho}{2} x_{\max}^2 \pi \left[h(0) + a + \frac{b}{4} - \frac{1}{x_{\max}^2} \left(6a + \frac{3b}{8} \right) \right]^2.$$

A felhasználható potenciális energia:

$$E_{APE} = E_p - E_{pot}$$

A potenciális energia:

$$E_p = \int_0^{2\pi} \int_0^{x_{\max}} \int_0^{\bar{h}} \rho g h' x d\Theta dx dh' = 2\pi\rho g \frac{1}{2} \int_0^{x_{\max}} \left\{ h(0) + a[1 - (1+x)e^{-x}] + \frac{b}{4}[1 - (1+2x)e^{-2x}] \right\}^2 x dx$$

Az integrálás elvégzése után:

$$E_{APE} = g\rho x_{\max}^2 \pi \left[\frac{9A^2}{8} + \frac{9B^2}{512} + \frac{13AB}{52} - \frac{1}{2x_{\max}^2} \left(6A + \frac{3B}{8} \right)^2 \right].$$

A kinetikus energia:

$$E_K = \int_0^{2\pi} \int_0^{x_{\max}} \int_0^{\bar{h}} \frac{\rho}{2} v^2 x d\Theta dx dh = 2\pi\rho \int_0^{x_{\max}} v^2 h x dx = 2\pi\rho v_0^2 e^2 \left(\frac{3}{8} h_0 + \frac{131}{648} A + \frac{39}{512} B \right).$$

X.3.5. A $p = \bar{p} + p'$ felbontással állítsuk elő az integrandust a

$$p^{k+1} - \bar{p}^{k+1} = (\bar{p} + p')^{k+1} - \bar{p}^{k+1} = \bar{p}^{k+1} \left(1 + \left(\frac{p'}{\bar{p}} \right)^{k+1} - 1 \right)$$

alakban, majd fejtsük sorba a másodrendűen kicsiny tagokig a $\frac{p'}{\bar{p}}$ változóban:

$$p^{k+1} - \bar{p}^{k+1} = 1 + (k+1) \frac{p'}{\bar{p}} + \frac{k(k+1)}{2} \left(\frac{p'}{\bar{p}} \right)^2 - 1 = (k+1) \left(\frac{p'}{\bar{p}} \right) \bar{p}^{k+1} + \frac{k(k+1)}{2} \left(\frac{p'}{\bar{p}} \right)^2 \bar{p}^{k+1}$$

Amikor ezt a kifejezést a felület szerint integráljuk, akkor a p' -ben elsőrendű tag kiesik, hiszen a felület szerinti átlagtól vett eltérést méri. Tehát:

$$E_A = \frac{c_p}{2g} \frac{k}{p_{00}^k} \int_0^{p_2} \bar{p}^{k+1} \left(\frac{p'}{\bar{p}} \right)^2 d\Theta dA.$$

Felhasználva a $p' = \frac{\partial p}{\partial \Theta} d\Theta$, $d\Theta = \frac{\partial \Theta}{\partial p} dp$, $\frac{\partial \Theta}{\partial p} \Theta \approx \frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial \bar{p}}$ közelítéseket, az integrál az

$$E_A = \frac{R}{2g} \frac{1}{p_{00}^k} \int_{p_0}^0 \bar{p}^{k-1} \frac{\Theta^2}{\left(\frac{\partial \Theta}{\partial p} \right)^2} \frac{\partial \Theta}{\partial p} dp dA$$

alakra hozható. Továbbá alkalmazhatjuk a $\theta' = \frac{\bar{\theta}}{\bar{\alpha}} \alpha'$ közelítést is.

$$E_A = \frac{R}{2g} \frac{1}{p_{00}^k} \int_{p_0}^0 \bar{p}^{k-1} \left(\frac{\bar{\Theta}}{\bar{\alpha}} \right)^2 \frac{\alpha'^2}{\left(\frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial \bar{p}} \right)} dp dA$$

A közelítésben $\bar{\Theta}$ tovább alakítható, ha felhasználjuk a potenciális hőmérséklet definíciós egyenletét és a gázegyenletet:

$$\bar{\Theta} = T \left(\frac{p_{00}}{\bar{p}} \right)^k = \frac{\bar{p} \bar{\alpha}}{R} \left(\frac{p_{00}}{\bar{p}} \right)^k = \frac{\bar{\alpha}}{R} p_{00}^k \bar{p}^{1-k}$$

Ezzel a felhasználható potenciális energia a keresett

$$E_A = \frac{1}{g} \int_0^{p_2} \frac{\alpha'^2}{2\bar{\sigma}} dp dA$$

alakot ölti, ahol $\bar{\sigma} = -\frac{\bar{\alpha}}{\bar{\theta}} \frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial \bar{p}}$ a statikus stabilitási paraméter.

X.3.6. Használjuk az $\alpha' = \bar{\alpha} \frac{T'}{T}$ közelítést és alakítsuk át a statikus stabilitási paramétert a logaritmus derivált és a hidrosztatika alapegyenlete segítségével az alábbi módon:

$$\bar{\sigma} = -\bar{\alpha} \frac{\partial \ln \bar{\Theta}}{\partial p} = -\bar{\alpha} \frac{\partial \ln \bar{\Theta}}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial p} = \bar{\alpha} \frac{\partial \ln \bar{\Theta}}{\partial z} \frac{1}{g\rho} = \frac{\bar{\alpha}^2}{g} \frac{\partial \ln \bar{\Theta}}{\partial z}$$

Helyettesítsük be ide a potenciális hőmérséklet $\bar{\Theta} = \bar{T} \left(\frac{p_{00}}{p} \right)^{\frac{R}{c_p}}$ definícióját:

$$\bar{\sigma} = \frac{\bar{\alpha}^2}{g} \frac{\partial \ln \bar{\Theta}}{\partial z} = \frac{\bar{\alpha}^2}{g} \left(\frac{1}{\bar{T}} \frac{\partial \bar{T}}{\partial z} - \frac{R}{c_p \bar{p}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} \right) = \frac{\bar{\alpha}^2}{g} \left(\frac{1}{\bar{T}} \frac{\partial \bar{T}}{\partial z} + \frac{R}{c_p \bar{p}} \frac{\bar{\alpha}}{g} \right)$$

Egyszerűsítve és felhasználva a hőmérsékleti gradiens és a száraz adiabatikus hőmérsékleti gradiens

$\Gamma = -\frac{\partial \bar{T}}{\partial z}$, illetve $\Gamma_d = \frac{g}{c_p}$ definícióját, azt kapjuk, hogy:

$$\bar{\sigma} = \frac{\bar{\alpha}^2}{g \bar{T}} (\Gamma_d - \Gamma)$$

Beírva ezt és az $\alpha' = \bar{\alpha} \frac{T'}{\bar{T}}$ közelítést a felhasználható potenciális energiára vonatkozó Wiin Nielsen féle összefüggésbe a Lorenz által adott

$$E_A = \frac{1}{g} \int_0^{p_0} \int_A \bar{T} \frac{1}{\Gamma_d - \bar{T}} \left(\frac{T'}{\bar{T}} \right)^2 dA dp$$

összefüggéshez jutunk.

X.3.7. Írjuk be $E_p - E_E$ -be a definíciós integrálokat,

$$E_p - E_E = \frac{c_p}{g} \int_0^{p_0} T dp - \frac{1}{1+k} \frac{c_p}{g} \int_0^{p_0} \Theta dp$$

és helyettesítsük $T = \Theta \left(\frac{p}{p_{00}} \right)^k$ kifejezést, ahol $p_{00} = 1000 \text{ hPa}$:

$$E_p - E_E = \frac{c_p}{g} \frac{1}{p_{00}^k} \int_0^{p_0} \Theta p^k dp - \frac{1}{1+k} \frac{c_p}{g} \int_0^{p_0} \Theta dp$$

Használjuk fel, hogy

$$p^k dp = \frac{1}{1+k} d(p^{k+1}),$$

majd integráljuk parciálisan:

$$E_p - E_E = \frac{c_p}{g} \frac{1}{1+k} \left\{ \frac{1}{p_{00}^k} [\Theta p^{k+1}]_0^{p_0} - \frac{1}{p_{01}^k} \int_{\infty}^0 p^{k+1} d\Theta - [p\Theta]_0^{p_0} + \int_{\infty}^0 p d\Theta \right\}$$

Mivel a légkör tetején és alján a szögletes zárójeles tagok eltűnnek,

$$E_p - E_E = \frac{c_p}{g} \frac{p_0}{1+k} \left\{ \int_0^{p_0} \left[\left(\frac{p}{p_0} \right)^{k+1} - \frac{p}{p_0} \right] \left(-\frac{\partial \Theta}{\partial p} \right) dp \right\} = -E_S.$$

X.3.8.

$$\sigma = \frac{1}{p_0^k T_{\infty}} \frac{\partial \theta}{\partial p} \frac{1}{\left(\frac{p}{p_0} \right)^{-k}} = \frac{1}{p_0^k T_{\infty}} \frac{\partial \Theta}{\partial p} \frac{-1}{k p^{-(k+1)}} = - \left(\frac{p}{p_0} \right)^k \frac{p}{k T_{\infty}} \frac{\partial \Theta}{\partial p}$$

a)

$$\Theta = T \left(\frac{p}{p_0} \right)^k,$$

Mivel

$$\frac{\partial \Theta}{\partial p} = \frac{\partial T}{\partial p} \left(\frac{p_0}{p} \right)^k - p_0^k \frac{kT}{p^{k+1}} = \frac{\partial T}{\partial z} \frac{1}{\frac{\partial p}{\partial z}} \left(\frac{p_0}{p} \right)^k - \frac{kT}{p} \left(\frac{p_0}{p} \right)^k = \left(\frac{p_0}{p} \right)^k \left[\Gamma \frac{1}{\rho g} - \frac{kT}{p} \right]$$

Felhasználva ezt, és a gázegyenlethez adódó $\frac{p}{\rho} = RT$ összefüggést, valamint a $\Gamma_d = \frac{g}{c_p}$ száraz adiabatikus hőmérsékleti gradienst:

$$\sigma = - \frac{p}{k T_{\infty}} \left[\Gamma \frac{1}{\rho g} - \frac{kT}{p} \right] = - \frac{T}{T_{\infty}} \left[\Gamma \frac{c_p}{g} - 1 \right] = - \frac{T}{T_{\infty}} \left[\frac{\Gamma}{\Gamma_d} - 1 \right],$$

$$\sigma = \frac{T}{T_{\infty}} \left[1 - \frac{\Gamma}{\Gamma_d} \right].$$

b) A σ segítségével kifejezhető $-\frac{\partial \Theta}{\partial p} = \sigma \frac{k T_{\infty}}{p} \left(\frac{p_0}{p} \right)^k$. Ezzel,

$$E_S = - \frac{c_p}{g} \frac{p_0}{1+k} \int_0^{p_0} \left[\left(\frac{p}{p_0} \right)^{k+1} - \frac{p}{p_0} \right] \frac{k T_{\infty}}{p} \left(\frac{p_0}{p} \right)^k \sigma dp =$$

$$= - \frac{k}{k+1} \frac{T_{\infty}}{d} \int_0^{p_0} \left[1 - \left(\frac{p}{p_0} \right)^{-k} \right] \sigma dp = \frac{k}{k+1} \frac{T_{\infty}}{d} \int_0^{p_0} \left[\left(\frac{p}{p_0} \right)^{-k} - 1 \right] \sigma dp.$$

X.3.9. Adiabatikus körülmények között

$$E_p + E_K = K = \text{állandó}$$

Beírva ebből E_p -t az $E_p - E_E = -E_S$ összefüggésbe, adódik, hogy

$$K - E_K - E_E = -E_S.$$

Mivel adiabatikus körülmények között $E_E = \text{állandó}$, adódik, hogy

$$K' - E_K = -E_s,$$

tehát, E_K megváltozása megegyezik E_s megváltozásával.

XI. fejezet - A szinoptikus skálájú légköri folyamatok dinamikája

XI.1. A szinoptikus mozgásrendszerek főbb sajátosságai, matematikai leírásuk

XI.1.1. Ha a geosztrófikus szél definíciójában állandó $f = f_0$ szerepel, akkor

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_g = -\frac{1}{f_0} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} + \frac{1}{f_0} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial x} = 0,$$

vagyis a geosztrófikus szél divergenciamentes. Ha a definícióban a teljes f szerepel, akkor

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_g = -\frac{1}{f} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} + \frac{1}{f} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{f} \right) \frac{\partial \Phi}{\partial x},$$

ami általános esetben nem nulla.

XI.1.2. Az állapotegyenlet szerint

$$\alpha = RT / p.$$

Szinoptikus skálán hidrosztatikus közelítésben dolgozunk, a hidrosztatikai egyenlet nyomási rendszerbeli alakja

$$\alpha = -\frac{\partial \Phi}{\partial p}.$$

A két összefüggésből

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial p} = \frac{RT}{p}$$

adódik.

XI.1.3.

a)

$$\zeta_g = \frac{\partial v_g}{\partial x} - \frac{\partial u_g}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{f_0} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{1}{f_0} \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) = \frac{1}{f_0} \nabla^2 \Phi.$$

b)

$$u_g(x, y, p) = -\frac{1}{f_0} \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{K}{f_0}, \quad v_g(x, y, p) = \frac{1}{f_0} \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\Phi^*}{f_0} k \cos(kx),$$

$$\zeta_{\varepsilon}(x, y, p) = \frac{1}{f_0} \nabla^2 \Phi = -\frac{1}{f_0} \Phi^* k^2 \sin(kx)$$

XI.1.4. Érdemes áttérni a logaritmikus deriváltra:

$$\sigma = -\frac{\alpha}{\Theta} \frac{\partial \Theta}{\partial p} = -\alpha \frac{\partial(\ln \Theta)}{\partial p} = \frac{\partial \Phi}{\partial p} \frac{\partial(\ln \Theta)}{\partial p}$$

A potenciális hőmérséklet definíciója (Poisson-képlet) alapján

$$\ln \Theta = \ln T + \frac{R}{c_p} (\ln p_0 - \ln p)$$

Ezt P szerint deriválva:

$$\frac{\partial(\ln \Theta)}{\partial p} = \frac{\partial(\ln T)}{\partial p} - \frac{R}{c_p} \frac{1}{p},$$

amelynek első tagja

$$\frac{\partial(\ln T)}{\partial p} = \frac{\partial}{\partial p} \left(\ln \frac{p\alpha}{R} \right) = \frac{\partial}{\partial p} (\ln p + \ln \alpha - \ln R) = \frac{1}{p} + \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial p}$$

Ebből, felhasználva a sztatika alapegyenletét:

$$\sigma = \frac{\partial \Phi}{\partial p} \frac{1}{p} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial p^2} - \frac{\partial \Phi}{\partial p} \frac{R}{c_p p} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial p^2} + \frac{1}{p} \frac{\partial \Phi}{\partial p} \left(1 - \frac{R}{c_p} \right)$$

XI.1.5.

$$\sigma = -\alpha \frac{\partial \ln \Theta}{\partial p} = -\frac{RT}{p} \left(-\frac{R}{c_p p} \right) = \frac{R^2 T}{c_p p^2} \frac{1}{p^2} \sim \frac{1}{p^2}$$

XI.1.6. A kvázigeosztrófikus örvényességi egyenlet:

$$\frac{\partial \zeta_{\varepsilon}}{\partial t} = -\mathbf{v}_{\varepsilon} \cdot \nabla (\zeta_{\varepsilon} + f) + f_0 \frac{\partial \omega}{\partial p}$$

A keresett horizontális divergencia az utolsó tagban van elrejtve, ugyanis a kontinuitási egyenlet alapján

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = -\frac{\partial \omega}{\partial p}$$

Ezt kifejezve az egyenletből, behelyettesítések után

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \left(-\frac{\partial \zeta_{\varepsilon}}{\partial t} - \mathbf{v}_{\varepsilon} \cdot \nabla \zeta_{\varepsilon} - \beta v_{\varepsilon} \right) \frac{1}{f_0} = 2,94 \cdot 10^{-6} \text{ s}^{-1}$$

XI.1.7. Az előző feladathoz hasonló módon kifejezve a horizontális divergenciát a geopotenciállal felírt örvényességi egyenletből:

$$\nabla \cdot \mathbf{v}(x, y, p, t) = -\frac{1}{f_0} \mathbf{v}_E \cdot \nabla \left(\frac{1}{f_0} \nabla^2 \Phi + f \right) - \frac{1}{f_0^2} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla^2 \Phi)$$

A jobb oldalon

$$\nabla^2 \Phi = -c f_0 k \sin(k(x - ct))$$

A további deriválásokat elvégezve és a geosztrófikus szelet a geopotenciállal kifejezve azt kapjuk, hogy a horizontális divergenciát megadó kifejezés első tagja

$$-\frac{1}{f_0} \mathbf{v}_E \cdot \nabla \left(\frac{1}{f_0} \nabla^2 \Phi + f \right) = \frac{ck^2}{f_0} \left(\cos \frac{\pi p}{p_0} + 1 \right) \cos(k(x - ct))$$

a második tag pedig

$$-\frac{1}{f_0^2} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla^2 \Phi) = -\frac{k^2 c^2}{f_0} \cos(k(x - ct))$$

A kettő összegéből

$$\nabla \mathbf{v}(x, y, p, t) = \frac{k^2 c^2}{f_0} \cos \frac{\pi p}{p_0} \cos(k(x - ct))$$

XI.2. A tendencia- és az omega-egyenlet

XI.2.1. Egyhullám-közelítés: feltesszük, hogy a tendencia térfüggését mindhárom irányban egy darab hullámkomponens írja le, azaz

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = F(t) e^{i(\lambda x + \mu y + \nu p)}$$

ahol λ , μ és ν a különböző irányokhoz tartozó hullámszámok, F pedig valamilyen függvénye az időnek. Alkalmazzuk a tendenciaegyenlet bal oldalán álló differenciáloperátort erre a függvényre!

$$\left[\nabla^2 + \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{f_0^2}{\bar{\sigma}} \frac{\partial}{\partial p} \right) \right] \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) = F(t) ((i\lambda)^2 + (i\mu)^2 + \frac{f_0^2}{\bar{\sigma}} (i\nu)^2) e^{i(\lambda x + \mu y + \nu p)} =$$

$$-(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2) \frac{\partial \Phi}{\partial t} \sim -\frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

XI.2.2. Feltesszük, hogy

$$\omega = F(t) e^{i(\lambda x + \mu y + \nu p)}$$

Ezt az alakot behelyettesítve az omega-egyenlet bal oldalán álló kifejezésbe:

$$\left(\nabla^2 + \frac{f_0^2}{\sigma} \frac{\partial^2}{\partial p^2} \right) \omega = ((i\lambda)^2 + (i\mu)^2 + \frac{f_0^2}{\sigma} (i\nu)^2) \omega \sim -\omega$$

XI.2.3. Számítsuk ki a tendenciaegyenlet jobb oldalán álló tagokat! Az első tag:

$$-f_0 \mathbf{v}_E \cdot \nabla \left(\frac{1}{f_0} \nabla^2 \Phi + f \right) = \frac{K \Phi^*}{f_0} k^3 \cos(kx)$$

a második tag pedig nulla. Egyhullám-közelítésben dolgozva ez arányos a tendencia (-1) -szeresével, azaz

$$-C \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{K \Phi^*}{f_0} k^3 \cos(kx)$$

ahol $C > 0$ állandó. Az $x=0$ koordinátájú pontokban $\cos(k \cdot 0) = 1$, így a bal oldal pozitív, ezért

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} < 0$$

azaz a geopotenciál csökkenni fog.

XI.3. A vertikális sebesség becslése

XI.3.1. A **XI.1.7. feladat**ban láttuk, hogy a megadott geopotenciál-függvényhez tartozó horizontális divergencia mezeje

$$\nabla \cdot \mathbf{v}(x, y, p, t) = \frac{k^2 c^2}{f_0} \cos \frac{\pi p}{p_0} \cos(k(x - ct))$$

A kinematikai módszert alkalmazva

$$\omega(x, y, p, t) = - \int_{p_0}^p \frac{k^2 c^2}{f_0} \cos \frac{\pi p'}{p_0} \cos(k(x - ct)) dp' = - \frac{k^2 c^2 p_0}{f_0 \pi} \sin \frac{\pi p}{p_0} \cos(k(x - ct))$$

XI.3.2. Számítsuk ki az omega-egyenlet jobb oldalán álló kifejezést a megadott geopotenciál-függvényre! Ebből a

$$\left(\nabla^2 + \frac{f_0^2}{\sigma} \frac{\partial^2}{\partial p^2} \right) \omega = 2 \frac{f_0 U \pi c k^2}{\sigma p_0} \sin \frac{\pi p}{p_0} \cos(kx)$$

differenciálegyenlethez jutunk. Keressük azon W_0 állandót, amely mellett az

$$\omega = W_0 \sin \frac{\pi p}{p_0} \cos(kx)$$

függvény kielégíti ezt az egyenletet! Ehhez helyettesítsük be a fenti ω függvényt a differenciálegyenletbe! Az eredmény:

$$-W_0 \left(k^2 + \frac{f_0^2}{\sigma} \frac{\pi^2}{p_0^2} \right) \sin \frac{\pi p}{p_0} \cos(kx) = 2 \frac{f_0 U \pi c k^2}{\sigma p_0} \sin \frac{\pi p}{p_0} \cos(kx)$$

A két oldalon álló függvény akkor egyenlő minden x, p esetén, ha az együtthatók egyenlők, vagyis

$$-W_0 \left(k^2 + \frac{f_0^2}{\sigma} \frac{\pi^2}{p_0^2} \right) = 2 \frac{f_0 U \pi c k^2}{\sigma p_0}$$

Ebből W_0 -t kifejezve:

$$W_0 = - \frac{2 \frac{f_0 U \pi c k^2}{\sigma p_0}}{k^2 + \frac{f_0^2}{\sigma} \frac{\pi^2}{p_0^2}}$$

XI.3.3. Ha az izotermák párhuzamosak az x tengellyel, és délebbre helyezkedik el a melegebb levegő, akkor

$$\nabla T = \left(0, \frac{\partial T}{\partial y} \right) \quad \text{és} \quad \frac{\partial T}{\partial y} < 0$$

Ekkor

$$Q = - \frac{R}{p} \left(\frac{\partial v_{\xi}}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial v_{\xi}}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial y} \right)$$

Használjuk ki, hogy az állandó f mellett tekintett geosztrófikus szél divergenciamentes, ezért

$$\frac{\partial v_{\xi}}{\partial y} = - \frac{\partial u_{\xi}}{\partial x}$$

Ennek segítségével a Q -vektor második komponensét átírjuk, és így a

$$Q = - \frac{R}{p} \left(\frac{\partial v_{\xi}}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial y}, - \frac{\partial u_{\xi}}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial y} \right) = - \frac{R}{p} \frac{\partial T}{\partial y} \left(\frac{\partial v_{\xi}}{\partial x}, - \frac{\partial u_{\xi}}{\partial x} \right) = \frac{R}{p} \left| \frac{\partial T}{\partial y} \right| \left(\frac{\partial v_{\xi}}{\partial x}, - \frac{\partial u_{\xi}}{\partial x} \right)$$

alakhoz jutunk. A

$$\left(\frac{\partial v_{\xi}}{\partial x}, - \frac{\partial u_{\xi}}{\partial x} \right)$$

síkvektor azonosítható a

$$\left(\frac{\partial \mathbf{v}_{\xi}}{\partial x} \times \mathbf{k} \right)$$

térvektorral, ebből

$$\mathbf{Q} = \frac{R}{p} \left| \frac{\partial T}{\partial y} \right| \left(\frac{\partial \mathbf{v}_\varepsilon}{\partial x} \times \mathbf{k} \right)$$

Vagyis a $\mathbf{Q}$ -vektort megkapjuk, ha az izotermák mentén haladva megállapítjuk a geosztrófikus szélvektor változását. Ezt a vektort az óramutató járásával megegyező irányban a horizontális síkban 90 fokkal elforgatva megkapjuk a $\mathbf{Q}$ -vektor irányát. Nagysága arányos a geosztrófikus szél egységnyi távolságon való megváltozásával és a hőmérsékleti gradienssel.

XI.3.4. Az állapotegyenlet és a sztatika alapegyenletéből kapott

$$T = \frac{p\alpha}{R} = \frac{p}{R} \left(-\frac{\partial \Phi}{\partial p} \right)$$

felhasználásával

$$Q_1 = -\frac{R}{p} \frac{\partial \mathbf{v}_\varepsilon}{\partial x} \nabla T = -\frac{R}{p} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{R}{p} \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial p} + \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial p},$$

$$Q_2 = -\frac{R}{p} \frac{\partial \mathbf{v}_\varepsilon}{\partial y} \nabla T = \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial y} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial p} + \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial y} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial p}.$$

XI.3.5. Számítsuk ki a $\mathbf{Q}$ -vektort!

$$Q_1 = -\frac{c^2 k f_0 \pi}{p_0} \sin \frac{\pi p}{p_0} \sin(k(x-ct)), \quad Q_2 = 0.$$

Ebből a $\mathbf{Q}$ -vektor divergenciája:

$$\nabla \cdot \mathbf{Q} = -\frac{c^2 k f_0 \pi}{p_0} \sin \frac{\pi p}{p_0} \cos(k(x-ct)).$$

Speciálisan, a $p = 500 \text{ hPa}$ -os szinten, $t = 0$ -ban és $x = 0$ -ban

$$\nabla \cdot \mathbf{Q}(x=0, y, p=500 \text{ hPa}, t=0) = -\frac{c^2 k f_0 \pi}{p_0} < 0.$$

Ebből arra következtetünk, hogy a megadott pontban feláramlás van.

XI.3.6. Induljunk ki a hidrosztatikai egyenlet szokásos $\frac{\partial \Phi}{\partial p} = -\alpha$ alakjából és helyettesítsük be a gázegyenletből

az $\alpha = \frac{RT}{p}$, illetve a potenciális hőmérsékletből kifejezve a $T = \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} \Theta$ összefüggést:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial p} = -\frac{R}{p} \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} \Theta = -\frac{R}{p_0} \left(\frac{p_0}{p} \right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} \Theta.$$

A geosztrófikus szél komponensei

$$u_{\varepsilon} = -\frac{1}{f} \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad v_{\varepsilon} = \frac{1}{f} \frac{\partial \Phi}{\partial x}.$$

Deriváljuk P szerint ezeket az összetevőket és használjuk fel, hogy $\frac{1}{f} \frac{\partial \Phi}{\partial p} = -\gamma \Theta$. Azt kapjuk, hogy $\frac{\partial u_{\varepsilon}}{\partial p} = \gamma \frac{\partial \Theta}{\partial y}$,
 $\frac{\partial v_{\varepsilon}}{\partial p} = -\gamma \frac{\partial \Theta}{\partial x}$, vagyis

$$\frac{\partial \mathbf{v}_{\varepsilon}}{\partial p} = -\gamma (\mathbf{k} \times \nabla \Theta)$$

Itt kihasználtuk, hogy P -rendszerben írtuk fel az összefüggéseket, azaz γ független x és y -től.

XI.3.7. Képezzük a $\nabla \frac{d_{\varepsilon}}{dt} \Theta$ deriváltat, ami adiabatikus körülmények között zérus.

$$0 = \nabla \frac{d_{\varepsilon}}{dt} \Theta = \nabla \left(\frac{\partial \Theta}{\partial t} + u_{\varepsilon} \frac{\partial \Theta}{\partial x} + v_{\varepsilon} \frac{\partial \Theta}{\partial y} \right) = \frac{d_{\varepsilon}}{dt} \nabla \Theta + \left(\frac{\partial u_{\varepsilon}}{\partial x} \frac{\partial \Theta}{\partial x} + \frac{\partial v_{\varepsilon}}{\partial x} \frac{\partial \Theta}{\partial y} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial u_{\varepsilon}}{\partial y} \frac{\partial \Theta}{\partial x} + \frac{\partial v_{\varepsilon}}{\partial y} \frac{\partial \Theta}{\partial y} \right) \mathbf{j}$$

Innen

$$\frac{d_{\varepsilon}}{dt} \nabla \Theta = - \left(\frac{\partial v_{\varepsilon}}{\partial x} \cdot \nabla \Theta \right) \mathbf{i} - \left(\frac{\partial v_{\varepsilon}}{\partial y} \cdot \nabla \Theta \right) \mathbf{j},$$

azaz

$$- \left(\frac{\partial v_{\varepsilon}}{\partial x} \cdot \nabla \Theta \right) \mathbf{i} - \left(\frac{\partial v_{\varepsilon}}{\partial y} \cdot \nabla \Theta \right) \mathbf{j}$$

XI.3.8. A frontogenetikus függvény:

$$F_{\varepsilon} = \frac{d_{\varepsilon}}{dt} |\nabla \Theta| = \frac{d_{\varepsilon}}{dt} \sqrt{(\nabla \Theta)^2} = \frac{\nabla \Theta}{|\nabla \Theta|} \cdot \frac{d_{\varepsilon}}{dt} (\nabla \Theta) = - \frac{\nabla \Theta}{|\nabla \Theta|} \cdot \left[\left(\frac{\partial v_{\varepsilon}}{\partial x} \cdot \nabla \Theta \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial v_{\varepsilon}}{\partial y} \cdot \nabla \Theta \right) \mathbf{j} \right],$$

ami az előző feladat értelmében az

$$F_{\varepsilon} = \frac{\nabla \Theta}{|\nabla \Theta|} \cdot \mathcal{Q}$$

eredményre vezet. Ez azt jelenti, hogy a frontogenetikus függvényt a $\mathcal{Q}$ -vektornak az izentróp felületekre merőleges összetevője szabja meg.

XII. fejezet - Különböző típusú és különböző skálájú légköri instabilitások

XII.1. A hidrosztatikai instabilitás

XII.1.1. A makro- α (planetáris) és a makro- β (szinoptikus) skálán alkalmazható a hidrosztatikus közelítés:

$$\frac{\partial w}{\partial t} \approx 0 \quad \text{és} \quad w \approx 0. \quad (\text{MXII.1.1-2})$$

Ez a közelítés a többi nagyságrendi skálán nem állja meg a helyét, mert elfedné az adott nagyságrendi csoport mozgásrendszerei esetén a képződés mechanizmusát és a működés lényegét. A mezo és a mikro nagyságrendi „főcsoportok” között az alapján teszünk különbséget, hogy mi a szerepe a földforgási örvényességnek, azaz az f -nek és a β -nak. Ha értékük állandónak tekinthető, vagy elhanyagolható, akkor egyértelműen a mikro skála légköri képződményeinek egyikével van dolgunk. Ellenkező esetben azokat az egyenleteket és összefüggéseket kell használnunk, amelyekkel a mezometeorológia operál.

XII.1.2. Hőmérséklet a következő indexeknek: SSI , NI , NI^* , LI , K , TI , VT , CT , TT , KO , SI , RI , BrI és MJI . Definíciójuk szerint a BI és a $SWEAT$ hibrid indexek, így dimenziójuk nem értelmezhető. A PII index dimenziója $^{\circ}\text{C gpm}^{-1}$. A $CAPE$ és a CIN dimenziója J kg^{-1} , azaz $\text{m}^2 \text{s}^{-2}$. A részletes dimenzióanalízis szerint a $CAPE$ dimenziója a nyomási koordináta-rendszerben a specifikus térfogat ($\alpha = 1/\rho$) és a nyomás (p) dimenziójának szorzataként írható fel: $(\text{m}^3 \text{kg}^{-1}) \cdot (\text{N m}^{-2}) = \text{N m kg}^{-1} = \text{J kg}^{-1}$. A z -koordináta-rendszerben megadott definíció szerint a dimenzió $(\text{m s}^{-2}) \cdot \text{m} = \text{m}^2 \text{s}^{-2}$. A definíciós egyenlet szerint BRN dimenziómentes. A H és az SRH dimenziója $\text{m}^2 \text{s}^{-2}$. Az EHI dimenziómentes, ha az osztó dimenziója $\text{s}^4 \text{m}^{-4}$.

XII.1.3. Helyettesítsük be a $\rho = \frac{p}{RT}$ sűrűséget a $d\Phi = -\rho dp$ sztatika alapegyenletébe:

$$d\Phi = -\frac{p}{RT} d\Phi, \quad (\text{MXII.1.3})$$

majd az egyenlet átrendezése után integráljunk a P_1 és a P_2 izobárfelületek között! A geopotenciál értéke a két izobárfelületen legyen rendre Φ_1 és Φ_2 ! Az integrál alakja így:

$$-\int_{P_1}^{P_2} \frac{RT(p)}{p} dp = \int_{\Phi_1}^{\Phi_2} d\Phi. \quad (\text{MXII.1.4})$$

A hőmérséklet függőleges változását helyettesítsük a P_1 és P_2 izobárfelületek közötti réteg középhőmérsékletével:

$$\bar{T} = \int_{P_1}^{P_2} T(p) dp. \quad (\text{MXII.1.5})$$

A határozott integrál értéke a behelyettesítés után a Newton–Leibniz-formula szerint:

$$(\Phi_2 - \Phi_1) = R \bar{T} \ln \frac{P_1}{P_2}. \quad (\text{MXII.1.5})$$

XII.1.4. A SYNOP-távirat adatainak táblázatos és szöveges elemzése után az eredményeket a *MXII.1.1. táblázatban* közöljük.

MXII.1.1. táblázat. A felhőfajták (C), a felhőzet mennyisége (N), a legalacsonyabb szintű felhőzet mennyisége (N_h) és a felhőalap magassága nappali gomolyfelhők esetén (h_{Cu}) Budapest-Pestszentlőrinc állomáson 2013. május 20-án.

GG	N	C	$H [m]$	N_h	h_{Cu}
00	7	Cu mediocris, Ac és As, Ci spissatus	1000–1500	3	–
01	4	Cu mediocris, Ac lenticularis, Ci spissatus	1500–2000	1	–
02	3	Ac lenticularis, Ci spissatus	$2500 \leq$	1	–
03	2	Ac lenticularis, Ci spissatus	$2500 \leq$	1	–
04	1	Ci spissatus	$2500 \leq$	0	–
05	1	Ac lenticularis, Ci spissatus	$2500 \leq$	1	–
06	1	Ac lenticularis, Ci spissatus	$2500 \leq$	1	–
07	2	Cu humilis	1000–1500	2	700
08	4	Cu mediocris	1000–1500	4	850
09	3	Cu mediocris	1000–1500	3	1000
10	4	Cu mediocris	1000–1500	4	1150
11	4	Cu mediocris	1000–1500	4	1250
12	5	Cu mediocris	1000–1500	5	1350
13	6	Cu mediocris, Ac cumulogenitus	1000–1500	5	1450
14	4	Cb, Ac cumulogenitus	1000–1500	4	1200
15	3	Cu mediocris, Ac cumulogenitus, Ci spissatus cumulonimbogenitus	1500–2000	2	1500
16	2	Cu mediocris, Ci spissatus cumulonimbogenitus	1500–2000	1	1500
17	2	Cu mediocris, Ci spissatus	1500–2000	1	1500
18	2	Cu mediocris, Ac cumulogenitus, Ci spissatus cumulonimbogenitus	1500–2000	1	1300
19	3	Cu mediocris, Ac castellanus, Ci spissatus cumulonimbogenitus	1500–2000	1	–
20	5	Ac castellanus, Ci spissatus cumulonimbogenitus	$2500 \leq$	2	–
21	7	Ac castellanus, Cs	$2500 \leq$	3	–
22	7	Cu mediocris, Ac castellanus, Cs	1500–2000	1	–
23	5	Ac castellanus, Ci spissatus	$2500 \leq$	2	–

GG az észlelés időpontja (UTC), N a borultság (okta), C a felhő(k) fajtája, h a felhőalap észlelő által kódolt magassága (méter), N_h a legalacsonyabb szintű felhőzet mennyisége (okta), h_{Cu} a nappali gomolyfelhő magassága a Ferrel-formulával számolva és kerekítve. Megjegyzés: 07, 08 és 18 UTC-kor azért nem egyezik a számolt és az észlelő által megadott felhőalap-magasság, mert nem teljesültek a szabad konvekció feltételei.

A hajnali órákban a felhőzet mennyisége jelentősen csökkent. A nappali gomolyfelhő-képződés megindulása után fokozatosan növekedett a kumuluszok mennyisége. 13 és 14 UTC között záporosó hullott az állomáson. Erre utal – a jelenlegi idő kódja mellett – a Cb, valamint a középmagas- és magas-szintű felhőzet megjelenése. Ez utóbbiak mennyisége a délutáni órákban csak fokozatosan csökkent. Az esti óráktól ismét megnövekedett a felhőzet.

XII.1.5. $\gamma = -(0,6\text{ °C} - 16,2\text{ °C}) / (3060\text{ gpm} - 754\text{ gpm}) \approx 0,676\text{ °C}/100\text{ m}$. (A szokásos feltételezéssel $1\text{ gpm} \approx 1\text{ m}$). A légkör feltételesen instabil.

XII.1.6. $NI = 21,2\text{ °C}$; $NI^* = 18,2\text{ °C}$; $K = 36,5\text{ °C}$; $BI = 96,4$; $VT = 28,9\text{ °C}$; $CT = 25,9\text{ °C}$; $TT = 54,8\text{ °C}$. Gyenge konvekciót mutat NI és NI^* , erős konvekciót, illetve zivatart jelez az összes többi index.

XII.1.7. A 2013. május 22-én beérkezett jelentések kiértékelését az *MXII.1.2. táblázat* tartalmazza. A megfigyelési adatok közül a gomolyos felhőzet mennyisége, a jelenidő, az elmúlt idő és a csapadékmennyiség adatai a legfontosabbak.

MXII.1.2. táblázat. A gomolyos felhőzet mennyisége, a jelenidő, az elmúlt idő és a csapadékmennyiség adatai a fő- és mellékterminusokban a 2013. május 22-én beérkezett jelentések alapján egy másodfajú hidegfront átvonulása során.

	09 UTC			12 UTC				15 UTC			18 UTC			
	N _{Cu}	ww	W ₁	N _{Cu}	ww	W ₁	R ₆	N _{Cu}	Ww	W ₁	N _{Cu}	ww	W ₁	R ₁₂
Szécsény							4							5
Jósvafő							1							4
Miskolc	0	·]	·	0	·]	∇	1	7	nsz	nsz	0	nsz	∇	4
Záhony							6							9
Sopron							0							0
Szombathely	2		nsz	5	)·(	∇	0	1	nsz	↓	1	)·(	↓	2
Moson-magyaróvár							0							0
Győr							0							0
Veszprém							0							0
Tata							0							0
Budapest	0	nsz	nsz	5	nsz	nsz	0	2	↓]	↓	2	nsz	↓	0,3
Agárd							0							0
Kékestető	9	f≡	≡	9	f≡	∇	2	7	∇	↓	f≡	↓	↓	1,4
Szolnok	0	·	·	0	·]	·	5	5	nsz	nsz	0	nsz	nsz	5
Poroszló							2							2
Eger	6	nsz	nsz	0	nsz	nsz	0	7	(↓)	↓	5	)·(	↓	5
Debrecen	7		·	7	∇	∇	5	4	·]	∇	1	nsz	∇	7
Napkor							4							6
Farkasfa							0							0,2
Zalaegerszeg							0							0,1
Nagykanizsa							0							0
Kaposvár							0							0
Siófok	0	nsz	nsz	4	nsz	nsz	0	2	nsz	nsz	0	nsz	nsz	0
Pogány	0	·	·	6	nsz	·	5	3	nsz	nsz	1	nsz	nsz	5
Paks	3			3	·	∇	1	4	nsz	nsz	2	nsz	nsz	1

Baja							5							5
Kecskemét	0	·	·	0	·]	∇	6	4	nsz	nsz	1	nsz	nsz	6
Szeged	4	·	·	0	·	·	4	5	nsz	·	0	)·(	·	4
Békéscsaba	0	·		3	∇	∇	4	4	∇]	∇	0	nsz	∇	5
Tát							0							0
Sármellék	3	nsz	nsz	4	nsz	nsz	0	2	nsz	nsz	0	nsz	nsz	0

Megjegyzések:

- N_{Cu} a gomolyos felhőzet ($C_L = 1, 2, 3, 9$) mennyisége (okta);
- jelentése: az állomáson eső hullik/hullott ($60 \leq ww \leq 65 / W_1 = 6$);
- ∇ jelentése: az állomáson záporosó hullik/hullott ($80 \leq ww \leq 85 / W_1 = 8$);
- „nsz” jelentése: nincs szignifikáns jelenség ($ww < 20; W_1 < 3$);
- Kékestető esetében $N_{Cu} = 9$ és $ww = f \equiv$ együtt, valamint $W_1 \equiv$ azt jelenti, hogy az állomás felhőben van;
- R_6 az elmúlt 6 óra csapadékmennyisége mm-ben;
- R_{12} az elmúlt 12 óra csapadékmennyisége mm-ben.

A KO-index térképeinek elemzése alapján az index értéke 09 UTC-kor nyugaton –4 és 0, keleten 0 és +5 közötti, 12 UTC-kor nyugaton –6 és –3, keleten –3 és +2 közötti, 15 UTC-kor északkeleten –3 körüli, az ország többi részén –5 és –7 közötti, 18 UTC-kor országszerte 0 és –6 közötti nyugaton –6 és –3, keleten –3 és +2 közötti, délkeleten –6 alatti értékeket mutatnak az előrejelzések. (Vegyük észre, hogy a térképanalízis 1,5 °C-onként történt!) Ezek alapján megállapítható, hogy napközben országszerte fokozatosan nőtt a hidrosztatikai instabilitás. Ezt igazolja, hogy a 14 észlelővel működő állomás közül csak Siófok és Sármellék nem jelentett csapadéktevékenységet. A többi helyen eső, zápor és zivatar egyaránt előfordult. A 06 és 18 UTC közötti 12 óra alatt lehullott csapadék mennyisége 0,1 és 9 mm között volt. Összesen húsz, csapadékmérővel ellátott állomás jelentett csapadékot. A csapadékot jelentő és észlelő nélküli állomások közül is valószínűleg több helyen volt záporosó vagy zivatar.

XII.1.8. A TEMP-táviratok alapján az egyes indexek értékeit az *MXII.1.3. táblázat* szemlélteti.

MXII.1.3. táblázat. A rádiószondás mérések alapján meghatározott stabilitási indexek (TT, BI, SI) 2013. május 26-án.

állomás	időpont	TT	BI	SI
Poprád	00 UTC	52,7	95,6	44,7
Budapest	00 UTC	50,2	95,2	44,3
Szeged	00 UTC	48,6	95,9	36,6
Poprád	12 UTC	51,5	96,0	48,1

Az indexek egyértelműen azt mutatják, hogy erős, közel igen erős a hidrosztatikai instabilitásra való hajlam. Ahol 12 UTC-kor is mérnek, ott az látszik, hogy az instabilitás napközben erősen növekedett. Ez indokolja a megfigyeléseket tornádó-kezdeményekről, valamint a felhőszakadás és a jégeső kialakulását. Felhőszakadás előfordulását a csapadék-mérések is igazolják.

XII.1.9. A TEMP-táviratok alapján számított stabilitási indexeket az *MXII.1.4. táblázatban* közöljük.

MXII.1.4. táblázat. A rádiószondás mérések alapján meghatározott stabilitási indexek (K, VT, CT, TT, BI, SI) Poprád, Budapest, Szeged és Belgrád TEMP-táviratának „A” része alapján 2013. május 12-én.

állomás	időpont	K	VT	CT	TT	BI	SI
Poprád	00 UTC	21,1	28,7	19,7	48,4	96,9	37,4
Budapest	00 UTC	25,5	28,5	20,5	49,4	95,9	43,0
Szeged	00 UTC	29,6	27,7	18,7	46,4	97,6	45,1
Belgrád	00 UTC	22,9	28,1	23,3	51,4	95,7	41,4
Poprád	12 UTC	23,4	27,9	23,0	50,9	96,5	41,9
Belgrád	12 UTC	29,5	24,3	24,0	48,3	94,5	45,6

A TEMP-táviratok alapján megállapítható, hogy 2013. május 12-én a K -index többnyire gyenge, a VT , a CT és az SI gyenge vagy mérsékelt, helyenként erős, a TT többnyire erős, a BI túlnyomó többségben erős konvektív aktivitás kialakulását mutatja. Poprád 12 UTC-s temp-analízise szerint 12 UTC-kor $K = 23$, $TT = 50$, $LI = -3$, $CAPE = 696$, $SRH = 43$, $TI = 26$. A K -index gyenge, a TT és az LI erős konvekcióra utal. A $CAPE$ és az SRH alapján kicsi a valószínűsége tornádó kialakulásának, de a lehetőség benne van az időjárási helyzetben. A hidrosztatikai instabilitásra vonatkozó elemzéseket az *MXII.1.5. táblázat* megfigyelési adatai messzemenően igazolják. Tornádó képződésének lehetősége adott volt a légkörben, de a jelenség kis horizontális kiterjedése miatt a keletkezés helyét lehetetlen lett volna órákkal korábban előre jelezni.

MXII.1.5. táblázat. A gomolyos felhőzet mennyisége és típusa, a jelenidő, az elmúlt idő és a csapadékmennyiség adatai 2013. május 21-én 12 és 18 UTC-kor beérkezett jelentések alapján.

	2013. május 12. 12 UTC					2013. május 12. 18 UTC				
	N_{Cu}	C_{Cu}	ww	W_1	R_6	N_{Cu}	C_{Cu}	ww	W_1	R_{12}
Szécsény					0,6					0,6
Jósvafő					0,1					13
Miskolc	5	Cb	nsz	↓	0,2	3	Cb	↓]	↓	0,5
Záhony					0					0
Sopron					0					0
Szombathely	5	Cu med	nsz	nsz	0	0		nsz	Nsz	0
Moson-magyaróvár					0					0
Győr					0,3					0,3
Veszprém					0,1					0,1
Tata					3					3
Budapest	2	Cb	(↓)	nsz	0	0		nsz	Nsz	0
Agárd					0,3					0,3
Kékestető	4	Cb	nsz	↓	0,4	9		f≡	≡	0,4
Szolnok	3	Cu hum	nsz	↓	0,2	0		nsz	Nsz	0,2
Poroszló					0					0
Eger	2	Cb calv	nsz	nsz	0	2	Cb	↓]	↓	1
Debrecen	2	Cu med	nsz	nsz	0	0		nsz	Nsz	0
Napkor					0					0
Farkasfa					0					0
Zalaegerszeg					0					0
Nagykanizsa					0					0

Kaposvár					0					0
Siófok	4	Sc, Cu	$\nabla \downarrow$	∇	0,1	1	Sc cu.g.	nsz	Nsz	0,1
Pécs / Pogány	6	Sc	nsz	·	0,6	1	Sc	nsz	Nsz	0,6
Paks	4	Sc	nsz	·	0,2	1	Cu med	nsz	Nsz	0,2
Baja					1					1
Kecskemét	3	Cu hum	nsz	nsz	0	0		nsz	Nsz	0
Szeged	5	Sc, Cu	nsz	nsz	0	1	Cu med	nsz	Nsz	0
Békéscsaba	1	Cu med	nsz	nsz	0	0		nsz	Nsz	0
Tát					0					0
Sármellék	4	Cu med	nsz	nsz	0	1	Cu hum	nsz	Nsz	0

XII.1.10. 3500 és 4500 J kg⁻¹ között.

XII.2. A barotróp instabilitás

XII.2.1. A D horizontális divergencia definíciós egyenlete alapján az alapáramlásra a következő feltétel teljesül:

$$D = \frac{\partial U(y)}{\partial x} = 0 \quad (\text{MXII.2.1})$$

XII.2.2. Az $u'(x, y, t)$ és a $v'(x, y, t)$ perturbált mennyiségekre a következő egyenlőségnek kell teljesülni:

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} = 0 \quad (\text{MXII.2.2})$$

XII.2.3. A relatív örvényesség és a szélmező definíciója alapján

$$\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v'}{\partial x} - \left(\frac{dU}{dy} - \frac{\partial u'}{\partial y} \right) \quad (\text{MXII.2.3})$$

Átalakítások után

$$\zeta = -\frac{dU}{dy} + \left(\frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial y} \right), \text{ vagyis } \zeta(x, y, t) = \bar{\zeta}(y) + \zeta'(x, y, t), \quad (\text{MXII.2.4-5})$$

ahol

$$\bar{\zeta} = -\frac{dU}{dy} \quad \text{és} \quad \zeta' = \frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial y} \quad (\text{MXII.2.6-7})$$

XII.2.4. Mivel a feladat feltételei szerint $\beta=0$, ezért a (XII.2.5) és az (MXII.2.6) egyenletek alapján barotróp instabilitás akkor alakul ki, ha

$$\frac{d^2 U}{dy^2} = 0 . \quad (\text{MXII.2.8})$$

A Newton–Leibniz-szabály alkalmazása, azaz az egyenlet kettős integrálása után ebből az következik, hogy $U(y) = ay + b$, ahol a és b tetszőleges valós számok. Az ay szorzat horizontális szélnyírást jelent, azaz a csatornamodellben az alapáramlás meridionálisan változó sebességű. Ha y előjelétől függően két különböző a konstans adunk meg, akkor irány szerinti szélnyírás lép fel.

XII.2.5. A barotróp örvényességi egyenlet kimondja, hogy a barotróp légkör örvényessége időben állandó, azaz

$$\frac{d\eta}{dt} = \frac{d(\zeta + f)}{dt} = 0 , \text{ vagyis } \frac{d\bar{\eta}}{dt} + \frac{d\eta'}{dt} = 0 . \quad (\text{MXII.2.9-10})$$

A d/dt individuális deriváltak *Euler*-féle felbontását, valamint az MXII.2.6 és az MXII.2.7 egyenleteket felhasználva az örvényességi egyenlet a következő alakot ölti:

$$\frac{\partial \zeta'}{\partial t} + U \frac{\partial \zeta'}{\partial x} + v' \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial y} + v' \beta = 0 . \quad (\text{MXII.2.11})$$

A levezetéskor figyelembe vettük, hogy $\bar{\zeta}$ esetében az átlagolás időbeli átlagot jelent, azaz $\bar{\zeta}$ csak y -tól függ, továbbá azt, hogy a kis perturbációk módszerének alkalmazásakor ($U \square u'$ és $U \square v'$ miatt) a másodrendben pontos mennyiségek szorzata elhanyagolható, azaz

$$u' \frac{\partial \zeta'}{\partial x} \approx 0 \quad \text{és} \quad v' \frac{\partial \zeta'}{\partial y} \approx 0 . \quad (\text{MXII.2.12-13})$$

XII.2.6. Ha az áramlás divergenciamentes, akkor érvényesek a következő összefüggések:

$$u = -\frac{\partial \Psi}{\partial y} \quad \text{és} \quad v = \frac{\partial \Psi}{\partial x} . \quad (\text{MXII.2.14-15})$$

A **XII.2.3. feladat** megoldása alapján

$$\zeta = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = \nabla^2 \Psi = \Delta \Psi . \quad (\text{MXII.2.16})$$

XII.2.7. A **XII.2.5.** és a **XII.2.6. feladat** megoldásának felhasználásával

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla^2 \Psi) + U \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 \Psi) + \frac{\partial \Psi}{\partial x} \left(-\frac{d^2 U}{dy^2} + \beta \right) = 0 . \quad (\text{MXII.2.17})$$

XII.2.8. Ha $c_i \neq 0$, akkor

$$\Psi(x, y, t) = \Psi_0(y) e^{\mu c_i t} \cdot e^{i\mu(x - \zeta_i t)} . \quad (\text{MXII.2.18})$$

A kapott eredmény azt mutatja, hogy a $\Psi(x, y, t)$ hullámfüggvény $\Psi_0(y) e^{\mu c_i t}$ amplitúdója $c_i \neq 0$ esetén függ az időtől, azaz az amplitúdó $\mu > 0$ esetén növekszik. Az (MXII.2.15) és a (XII.2.3) egyenleteket felhasználva

$$v' = i\mu e^{i\mu x} \cdot e^{i\mu(x-\epsilon, t)}, \quad (\text{MXII.2.19})$$

ezért a meridionális szélkomponens is növekedni fog időben, vagyis a zonális alapáramlásra exponenciálisan növekedő amplitúdójú meridionális perturbációk rakódnak. Ez vezet a barotróp instabilitás, azaz sugáráram (jet stream) meanderezésének kialakulásához.

XII.2.9. A **XII.2.4. feladat** megoldását felhasználva

$$\frac{d\bar{\zeta}}{dy} = -\frac{d^2U}{dy^2} = -\frac{d}{dy}\left(\frac{dU}{dy}\right) = -\frac{d}{dy}\left[\frac{d}{dy}\left(U_0 + \frac{U_1}{y_1}y\right)\right] = -\frac{d}{dy}\left(\frac{U_1}{y_1}\right) = 0. \quad (\text{MXII.2.20})$$

XII.2.10. A (XII.2.5) egyenlet és a **XII.2.3. feladat** megoldása alapján a barotróp instabilitás kialakulásának feltétele:

$$\frac{d\bar{\zeta}}{dy} + \beta = -\frac{d^2U}{dy^2} + \beta = 0. \quad (\text{MXII.2.21})$$

A jelen feladatban megadott szélprofil behelyettesítve:

$$-\frac{d}{dy}\left[\frac{d}{dy}\left(U_0 + \frac{\beta}{2}y^2\right)\right] + \beta = -\frac{d}{dy}(\beta y) + \beta = -\beta + \beta = 0. \quad (\text{MXII.2.22})$$

XII.2.11. A **XII.2.4. feladat** megoldását felhasználva és a jelen feladatban megadott szélprofil behelyettesítve akkor alakul ki barotróp instabilitás, ha

$$\frac{d^2U}{dy^2} = \frac{d^2}{dy^2}\left(U_0 \operatorname{th} \frac{y}{y_1}\right) = \frac{d}{dy}\left[\frac{d}{dy}\left(U_0 \operatorname{th} \frac{y}{y_1}\right)\right] = 0. \quad (\text{MXII.2.23})$$

A hiperbolikus függvények deriválási szabályait és definíciós egyenleteit alkalmazva:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dy^2}\left(U_0 \operatorname{th} \frac{y}{y_1}\right) &= \frac{d}{dy}\left(\frac{U_0}{y_1} \operatorname{sch}^2 \frac{y}{y_1}\right) = -2 \frac{U_0}{y_1^2} \left(\operatorname{th} \frac{y}{y_1}\right) \left(\operatorname{sch} \frac{y}{y_1}\right) = \\ &= -4 \frac{U_0}{y_1^2} \frac{e^{y/y_1} - e^{-y/y_1}}{(e^{y/y_1} + e^{-y/y_1})^2}. \end{aligned} \quad (\text{MXII.2.24})$$

Mivel a tört nevezője nem vehet fel nulla értéket, ezért az $y=0$ helyen

$$\frac{d^2U}{dy^2} = -4 \frac{U_0}{y_1^2} \cdot \frac{e^0 - e^0}{4} = 0. \quad (\text{MXII.2.25})$$

XII.2.12. Ismét a barotróp instabilitás kialakulásának a **XII.2.10. feladatban** is alkalmazott feltételét alkalmazzuk az (MXII.2.21) egyenlet szerint. Először az egyenletben kijelölt deriválást hajtjuk végre:

$$\frac{d^2U}{dy^2} = \frac{d}{dy} \beta y \left\{ \left[\frac{d}{dy} \operatorname{th} \left(\frac{y}{y_1} \right) \right] \operatorname{sch} \left(\frac{y}{y_1} \right) + \left[\operatorname{th} \left(\frac{y}{y_1} \right) \right] \frac{d}{dy} \operatorname{sch} \left(\frac{y}{y_1} \right) \right\} =$$

$$= \beta \left[\operatorname{sch}^3(y/y_1) - \operatorname{th}^2(y/y_1) \operatorname{sch}(y/y_1) \right] = \beta \frac{8 - 2(e^{y/y_1} - e^{-y/y_1})^2}{(e^{y/y_1} + e^{-y/y_1})^3} . \quad (\text{MXII.2.26})$$

Az $y=0$ helyen

$$\frac{d^2 U}{dy^2} = \beta \frac{8-0}{2^3} = \beta . \quad (\text{MXII.2.27})$$

Az (MXII.2.21) egyenletben megfogalmazott feltétel szerint

$$-\frac{d^2 U}{dy^2} + \beta = -\beta + \beta = 0 . \quad (\text{MXII.2.28})$$

XII.3. A baroklin instabilitás

XII.3.1. Induljunk ki az átlagos potenciális hőmérséklet logaritmikus megváltozását leíró

$$d \ln \bar{\Theta} = d \ln \bar{T} - \frac{R}{c_p} d \ln p \quad (\text{MXII.3.1})$$

egyenletből. Tudjuk továbbá, hogy a $\sigma = -\ln(p/p_0)$ redukált nyomási koordináta-rendszerben a vertikális irányú elmozdulás:

$$d\sigma = -d \ln p . \quad (\text{MXII.3.2})$$

Így teljesül, hogy

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln \bar{\Theta}}{\partial \ln p} &= \frac{\partial \ln \bar{T}}{\partial \ln p} - \frac{R}{c_p} \frac{\partial \ln p}{\partial \ln p} = \frac{\partial \ln \bar{T}}{\partial \ln p} - \frac{R}{c_p} = \\ &= -\frac{1}{\bar{T}} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \sigma} - \frac{R}{c_p} = -\frac{1}{\bar{T}} \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial \sigma} + \frac{R}{c_p} \bar{T} \right) = -\frac{1}{R\bar{T}} \Gamma . \end{aligned} \quad (\text{MXII.3.3})$$

Teljesül továbbá, hogy

$$\frac{\partial \ln \bar{\Theta}}{\partial \ln p} = \frac{p}{\bar{\Theta}} \frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial p} = -\frac{p}{\bar{\alpha}} \left(-\frac{\bar{\alpha}}{\bar{\Theta}} \frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial p} \right) . \quad (\text{MXII.3.4})$$

A fentiek alapján:

$$\Gamma = p^2 \left(-\frac{\bar{\alpha}}{\bar{\Theta}} \frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial p} \right) . \quad (\text{MXII.3.5})$$

XII.3.2. A XII.3.4 egyenlet alapján

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} (\bar{q} + q') + (U+u) \frac{\partial}{\partial x} (\bar{q} + q') + v' \frac{\partial}{\partial y} (\bar{q} + q') = 0 . \quad (\text{MXII.3.6})$$

Mivel mind U , mind $\bar{q}$ csak y és σ függvénye, ezért az egyenlet az alábbi alakot ölti:

$$\frac{\partial q'}{\partial t} + U' \frac{\partial q'}{\partial x} + u' \frac{\partial q'}{\partial x} + v' \frac{\partial \bar{q}}{\partial y} + v' \frac{\partial q'}{\partial y} = 0. \quad (\text{MXII.3.7})$$

Alkalmazzuk a kis perturbációk módszerénél megszokott eljárást, azaz a másodrendben kicsi tagokat elhanyagoljuk:

$$u' \frac{\partial q'}{\partial x} \approx 0 \quad \text{és} \quad v' \frac{\partial q'}{\partial y} \approx 0. \quad (\text{MXII.3.8-9})$$

Az elhanyagolások után a feladatban szereplő egyenlethez jutunk.

XII.3.3. A c fázissebesség XII.3.16 egyenletének diszkriminánsa az $\varepsilon=1$ érték esetén

$$\begin{aligned} k^2 - 4k^2 (\coth 1 - 1) &= k^2 - 4k^2 \left(\frac{e + e^{-1}}{e - e^{-1}} - 1 \right) = \\ &= k^2 - 4k^2 0,313 = k^2 - 1,252k^2 = -0,252k^2. \end{aligned} \quad (\text{MXII.3.10})$$

Ha vertikális szélnyírás lép fel, akkor $k \neq 0$. Mivel k^2 minden $k \neq 0$ értékre pozitív, ezért a c fázissebesség karakterisztikus egyenletének diszkriminánsa $\varepsilon=1$ esetén negatív.

XII.3.4. A közeget összenyomhatatlannak tekintjük, kivéve a konvekció jelenségét. Ebből az következik, hogy az $e^{-\sigma} \equiv \exp(-\sigma)$ mennyiség értékét állandónak tekinthetjük, így az $(U - c)$ -vel szorzott háromtagú összeg utolsó tagjának deriválásakor

$$\frac{\partial e^{-\sigma}}{\partial \sigma} \approx 0. \quad (\text{MXII.3.11})$$

XII.3.5. A Γ kiemelhető a σ -szerinti deriválás tényezői közül az $(U - c)$ -vel szorzott háromtagú összeg utolsó tagjában.

XII.3.6. Az y -szerinti deriváltak értéke nulla lesz, azaz

$$\frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial y^2} = 0 \quad \text{és} \quad \frac{\partial \bar{q}}{\partial y} = 0. \quad (\text{MXII.3.12-13})$$

XII.3.7. Az előrejelzési tartományban az alsó és a felső határ áthatolhatatlansága matematikai alakban azt jelenti, hogy a $p = p_0$ és a $p = 0$ helyeken $\partial \sigma / \partial t = 0$. Ezek a megfontolások egyben a peremfeltételeket is megadják az egyenlet integrálásához.

XII.3.8. A Coriolis-paraméter állandó, ezért kiemelhető a σ -szerinti deriválás tényezői közül az $(U - c)$ -vel szorzott háromtagú összeg utolsó tagjában, és az $f = f_0$ értékkel helyettesíthető.

XII.3.9. A táblázat c) sorában megadott feltétel, azaz a **XII.3.6. feladat** megoldása alapján a következő egyenletet kell egyszerűsíteni:

$$(U - c) \left[-\mu^2 \Psi_0 + e^\sigma \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\frac{f_0^2}{\Gamma} e^{-\sigma} \frac{\partial \Psi_0}{\partial \sigma} \right) \right] = 0. \quad (\text{MXII.3.14})$$

A táblázat b) és e) sorában megadott feltételek, azaz a **XII.3.5.** és **XII.3.8. feladatok** megoldásának, továbbá a függvényszorzatok deriválási szabályainak alkalmazása után egyenletünk a következő alakú lesz:

$$(U - c) \left\{ \left[-\mu^2 \Psi_0 + e^\sigma \frac{f_0^2}{\Gamma} \left(\frac{\partial e^{-\sigma}}{\partial \sigma} \frac{\partial \Psi_0}{\partial \sigma} + e^{-\sigma} \frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial \sigma^2} \right) \right] \right\} = 0. \quad (\text{MXII.3.15})$$

A táblázat a) sorában megadott feltétel, azaz a **XII.3.4. feladat** megoldásában szereplő feltétel szerint az egyenlet így egyszerűsödik:

$$(U - c) \left(-\mu^2 \Psi_0 + \frac{f_0^2}{\Gamma} e^\sigma e^{-\sigma} \frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial \sigma^2} \right) = 0. \quad (\text{MXII.3.16})$$

Ezzel megkaptuk a XII.3.13 egyenletet, mivel $e^\sigma \cdot e^{-\sigma} = 1$.