EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM
INFORMATIKAI KAR

Simon Péter

Funkcionálanalízis az alkalmazott matematikában

egyetemi jegyzet

A jegyzet az ELTE IK 2010. évi *Jegyzettámogatási pályázat*
támogatásával készült

BUDAPEST, 2010

Tartalomjegyzék

Előszó

Ez a jegyzet a programtervező informatikus MSC-s hallgatóknak szóló *Funkcionálanalízis az alkalmazott matematikában* című tárgy előadásainak az anyagát öleli fel. Bár ebből a tárgyból gyakorlatok nincsenek, a jegyzet utolsó fejezete egy 118 feladatból álló feladatgyűjtemény, ami módot ad (különösen a tanultak iránt az előírtakon túl is érdeklődő hallgatóknak) az elméleti ismeretek mélyebb elsajátítására. Maga a jegyzet válogatást tartalmaz a funkcionálanalízis azon fejezeteiből, amelyek a matematikai alkalmazások (elsősorban a numerikus módszerek, a *Fourier*-analízis, stb.) szempontjából különösen fontos szerepet játszanak. Az itt tárgyalt anyag nagyban támaszkodik a szerző által az osztatlan képzésben a programtervező matematikus hallgatóknak ebben a témakörben éveken át tartott funkcionálanalízis-támájú előadásokra. A tárgyalás során a szokásos bevezető analízis és lineáris algebrai előadások anyagának az ismeretét tételezzük fel, azaz, hogy az Olvasó elsajátította már a vektorterekre, ill. az egy- és többváltozós függvényekre vonatkozó eleminek nevezhető analízisbeli ismereteket. Ez utóbbival kapcsolatban mind tartalmilag, terminológiailag, mind pedig az alkalmazott (és nem újonnan bevezetett) jelölésekkel kapcsolatban az előbb említett képzésben részt vett hallgatóknak (részben a szerző által) írt analízis jegyzetsorozat köteteire utalunk.

Kitűnő - többnyire idegen nyelvű - szakkönyvek, monográfiák állnak azok rendelkezésére, akik bizonyos fejezetek után mélyebben érdeklődnek, vagy esetleg csupán más aspektusból kívánják az itt tárgyaltakat áttekinteni. A teljesség igénye nélkül ezért álljon itt a mondottaknak (ill. a hivatkozásoknak) messzemenően megfelelő néhány mű:

- R. E. Edwards, *Functional Analysis*, Holt, Rinehart and Winston, New York-Chicago-San Francisco-Toronto-London, 1965.
- L. V. Kantorovich - G. P. Akhilov, *Functional Analysis*, Pergamon Press, Oxford-Elmsford, N. Y., 1982.
- Kérchy László, *Valós- és funkcionálanalízis*, Polygon Jegyzettár, Szegedi Egyetemi Kiadó, 2008.
- A. N. Kolmogorov–Sz. V. Fomin, *A függvényelmélet és a funkcionálanalízis elemei*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1981.
- K. Maurin, *Analysis I-II*, PWN-Polish Scientific Publishers, Warszawa, 1976-1980.
- Riesz Frigyes - Szőkefalvi-Nagy Béla, *Funkcionálanalízis*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1988.
- W. Rudin, *Functional Analysis*, Mc-Graw Hill, New York, 1973.
- Simon Péter, *Analízis V*, egyetemi jegyzet, ELTE Eötvös Kiadó, Budapest, 1996.
- Szili László, *Funkcionálanalízis - a jelfeldolgozás és a szimuláció matematikai alapjai,* egyetemi jegyzet, ELTE IK Kari Digitális Könyvtár, 2007.
- Szőkefalvi-Nagy Béla, *Valós függvények és függvénysorok*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1965.
- K. Yosida, *Functional Analysis*, Springer-Verlag, Berlin, 1966.

Budapest, 2010. április.

1. Absztrakt terek

1.1. Az absztrakció lehetséges útjai.

Röviden emlékeztetünk a többváltozós vektorfüggvények analízisének az alapját képező ún. topologiai háttérre. Legyen ehhez $0 < n \in \mathbf{N}$, $x = (x_1, ..., x_n)$, $y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbf{K}^n$, ekkor az x, y vektorok távolságát a $\rho_2(x, y) := \sqrt{\sum_{k=1}^n |x_k - y_k|^2}$ kifejezéssel értelmeztük. Speciálisan $\mathbf{R}$-ben két szám, $x, y \in \mathbf{R}$ távolságán az $|x - y|$ (nem)negatív számot értettük.

Ennek a távolságfogalomnak a segítségével aztán értelmezhetővé váltak az olyan, az elemi analízisben megismert fogalmak többváltozós megfelelői, mint a nyílt, zárt, kompakt halmazok, konvergencia, határérték, folytonosság, stb. Ezért az általánosítás egyik lehetséges útja lehet ennek a távolságfogalomnak az absztrakciója: a fenti, a vektorok távolságát meghatározó fogalom lényeges jegyeit megragadva eljutunk a távolság, ill. a *metrikus tér* absztrakt fogalmához.

Az előbb felidézett $\mathbf{K}^n$-beli távolság valójában a $\mathbf{K}^n$-beli vektorok *hosszának* a fogalmán alapult: ha a fenti $x \in \mathbf{K}^n$ vektor (euklideszi) *hosszán* a

$$\|x\|_2 := \sqrt{\sum_{k=1}^n |x_k|^2}$$

kifejezést értjük, akkor $x, y \in \mathbf{K}^n$ távolsága nem más, mint az $x - y$ vektor hossza:

$$\rho_2(x, y) = \|x - y\|_2.$$

Ez az észrevétel lehetőséget kínál az absztrakció egy másik lehetséges útjára, a vektorhosszúság fogalmának az absztrakciója révén, amelynek az eredményeként kapjuk az absztrakt *normált tereket.*

Már az elemi analízisből is jól tudjuk, hogy a vektorok euklideszi hossza szoros kapcsolatban van a $\mathbf{K}^n$-beli vektorok közötti *skaláris szorzással*: ha $x, y \in \mathbf{K}^n$ a fenti két vektor, akkor

$$\langle x, y \rangle_2 := \sum_{k=1}^n x_k \overline{y_k}$$

az x, y ún. *skaláris szorzata* és $\sqrt{\langle x, x \rangle_2}$ az x vektor $\|x\|_2$ euklideszi hossza. Ez az észrevétel kínálja az absztrakció harmadik lehetséges kiinduló pontját, a fenti skaláris szorzás fogalmát absztrahálva. Ennek a végeredménye az absztrakt *skaláris szorzat tér* vagy *euklideszi tér.*

A fentiekben vázolt absztrakciós utak egyre szűkebb teret engedtek az általánosításnak. Elindulhatunk azonban az ellentétes irányban is, emlékezve arra, hogy a többváltozós analízisben számos alapvető fontosságú fogalom (ilyen pl. a folytonosság) megfogalmazható pusztán pl. a *nyílt* halmazok segítségével. Ez utóbbi fogalom lényeges jegyeit kiragadva is eljuthatunk egy, az eddigi terek mindegyikét magába foglaló absztrakt tértípushoz, az ún. *topologikus tér* fogalmához. Ez utóbbiak a későbbi vizsgálódásainkban csak bizonyos fogalmak bevezetéséig, ill. néhány azokkal kapcsolatos alaptulajdonság tisztázásáig játszanak szerepet. A kicsit is mélyebb meggondolásokat igénylő fogalmak, tételek számára a legtágabb keretet aztán a metrikus terek fogják jelenteni.

1.2. Euklideszi terek.

Idézzük fel röviden a skaláris szorzás, ill. az euklideszi tér fogalmát. Legyen ehhez X lineáris tér (a továbbiakban is mindig a valós vagy komplex $\mathbf{K}$ testre vonatkozóan) és tekintsünk egy olyan

$$X^2 \ni (x, y) \mapsto \langle x, y\rangle \in \mathbf{K}$$

leképezést, amelyre bármely $x, y, z \in X$ és $\lambda \in \mathbf{K}$ mellett az alábbi tulajdonságok igazak:

1^o $\langle x, x\rangle \geq 0$,

2^o $\langle x, x\rangle = 0 \iff x = 0\,(\in X)$,

3^o $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$,

4^o $\langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$,

5^o $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$

(ahol $\overline{z}$ a $z = a + \imath b \in \mathbf{K}$ $\quad(a, b \in \mathbf{R}, \imath := \sqrt{-1})$ szám komplex konjugáltját jelöli: $\overline{z} = a - \imath b$). Ekkor $\langle , \rangle$-t *skaláris szorzásnak,* az $\langle x, y\rangle$ (valós vagy komplex) számot az x, y elemek *skaláris szorzatának,* az $(X, \langle , \rangle)$ párt pedig *skaláris szorzat térnek* (vagy *euklideszi térnek*) nevezzük. *Valós* vagy *komplex* euklideszi térről beszélünk, ha $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ vagy $\mathbf{K} = \mathbf{C}$.

A $3^o, 4^o$ tulajdonságokból rögtön következik, hogy $\langle x, \lambda y\rangle = \overline{\lambda}\langle x, y\rangle \quad (x, y \in X,\ \lambda \in \mathbf{K})$. Valós esetben a 3^o tulajdonság a skaláris szorzás *szimmetrikus* voltát fejezi ki: $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle \quad (x, y \in X)$. A most mondottak szerint $\langle \lambda x, \lambda y\rangle = |\lambda|^2\langle x, y\rangle \quad (x, y \in X, \lambda \in \mathbf{K})$. Ha 4^o-ben λ helyébe 0-t írunk, akkor az előbbieket is figyelembe véve (az X vektortér nullelemét is 0-val jelölve) $\langle 0, x\rangle = \overline{\langle x, 0\rangle} = 0$ $(x \in X)$ adódik. Speciálisan $\langle 0, 0\rangle = 0$ (ld. 2^o). Világos, hogy 3^o és 5^o alapján $\langle x, y+z\rangle = \overline{\langle y + z, x\rangle} = \overline{\langle y, x\rangle} + \overline{\langle z, x\rangle} = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle \quad (x, y, z \in X)$, azaz a skaláris szorzás *disztributív* az összeadásra nézve.

Emlékeztetünk az euklideszi terek vizsgálatában alapvető szerepet játszó *Cauchy-Bunyakovszkij*-egyenlőtlenségre:

$$|\langle x, y\rangle|^2 \leq \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle \qquad (x, y \in X).$$

A teljesség kedvéért bizonyítsuk is be itt ezt az egyenlőtlenséget. Ehhez nyilván feltehető, hogy (pl.) $x \neq 0$ (azaz 1^o és 2^o szerint $\langle x, x\rangle > 0$), különben (ld. az előbbi megjegyzéseket is) az egyenlőtlenség mindkét oldalán nulla áll. Legyen ekkor

$$P(\lambda) := \langle \lambda x + y, \lambda x + y\rangle = |\lambda|^2\langle x, x\rangle + \lambda\langle x, y\rangle + \overline{\lambda}\langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle \qquad (\lambda \in \mathbf{K}).$$

Mivel 1^o szerint P nem-negatív függvény, ezért a $\lambda_0 := -\dfrac{\langle y, x\rangle}{\langle x, x\rangle} = -\dfrac{\overline{\langle x, y\rangle}}{\langle x, x\rangle}$ választással

$$0 \leq P(\lambda_0) = \frac{|\langle x, y\rangle|^2}{\langle x, x\rangle} - \frac{|\langle x, y\rangle|^2}{\langle x, x\rangle} - \frac{|\langle x, y\rangle|^2}{\langle x, x\rangle} + \langle y, y\rangle = \langle y, y\rangle - \frac{|\langle x, y\rangle|^2}{\langle x, x\rangle},$$

amiből a *Cauchy-Bunyakovszkij*-egyenlőtlenség már nyilván következik. Érdemes megjegyezni, hogy a $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ (valós) esetben

$$P(\lambda) = \lambda^2\langle x, x\rangle + 2\lambda\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle \qquad (\lambda \in \mathbf{R}),$$

azaz P egy nem-negatív valós együtthatós másodfokú polinom. Következésképpen a

$$d := 4\langle x, y\rangle^2 - 4\langle x, x\rangle\langle y, y\rangle$$

diszkriminánsára $d \leq 0$ adódik, amiből a (valós) *Cauchy-Bunyakovszkij*-egyenlőtlenség már következik.

Például az 1.1. pontban szereplő $\mathbf{K}^n$ térben értelmezett $\langle , \rangle_2$ függvény skaláris szorzás, azaz $(\mathbf{K}^n, \langle , \rangle_2)$ euklideszi tér. Hasonlóan, ha valamilyen $(\mathcal{X}, \Omega, \mu)$ mértéktér esetén

$$\langle f, g\rangle := \int f\overline{g}\, d\mu \qquad (f, g \in L^2),$$

akkor $(L^2, \langle , \rangle)$ euklideszi tér (ami - megfelelően választva az $(\mathcal{X}, \Omega, \mu)$ mértékteret - megegyezik $(\mathbf{K}^n, \langle , \rangle_2)$-vel). Speciálisan legyen $[a, b]$ kompakt intervallum, $\mu := dx$ az $[a, b]$-beli *Lebesgue*-mérték, ekkor

$$\langle f, g\rangle := \int_a^b f(x)\overline{g(x)}\, dx \qquad (f, g \in L^2[a, b]),$$

ill. $(L^2[a, b], \langle , \rangle)$ a *Lebesgue*-féle euklideszi tér. Ha $C[a, b]$ a folytonos $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ függvények alkotta (az $\mathbf{R}$ testre vonatkozóan a „szokásos” függvényműveletekre nézve nyilván) lineáris tér, akkor az

$$\langle f, g\rangle := \int_a^b f(x)g(x)\, dx \qquad (f, g \in C[a, b])$$

skaláris szorzással $(C[a, b], \langle , \rangle)$ (valós) euklideszi tér, ami (a $\mathbf{K} := \mathbf{R}$ esetben) az előbbi $(L^2[a, b], \langle , \rangle)$ térnek altere.

Világos, hogy bármely $(X, \langle , \rangle)$ euklideszi tér és $Y \subset X$ altér esetén a $\langle , \rangle : X^2 \to \mathbf{K}$ függvény Y^2-re való $\langle , \rangle_{|_{Y^2}}$ leszűkítése is skaláris szorzás (az Y altéren), azaz $(Y, \langle , \rangle_{|_{Y^2}})$ is euklideszi tér (az $(X, \langle , \rangle)$ tér altere).

1.3. Normált terek.

Legyen X ismét egy lineáris tér $\mathbf{K}$-ra vonatkozóan és tegyük fel, hogy adott a

$$X \ni x \mapsto \|x\| \in \mathbf{R}$$

leképezés, amelyre minden $x, y \in X$ és $\lambda \in \mathbf{K}$ esetén a következő kikötések teljesülnek:

1^o $\|x\| \geq 0$,

2^o $\|x\| = 0 \iff x = 0\,(\in X)$,

3^o $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$,

4^o $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Ekkor $\|.\|$-t *normának,* $\|x\|$-t az x elem *normájának* (vagy *hosszának*), az $(X, \|.\|)$ párt pedig *normált térnek* nevezzük. 3^o-ból $\|0\| = 0$ (ld. 2^o), ill. $\|-x\| = \|x\|$ $(x \in X)$ rögtön következik. A 4^o egyenlőtlenséget *háromszög-egyenlőtlenségként* szokás említeni. Ennek egy átfogalmazása a következő:

4^{oo} $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\| \quad (x, y \in X)$.

Ui. az $x = (x - y) + y$ felbontásból 4^o alapján $\|x\| \leq \|x - y\| + \|y\|$, azaz $\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$. Az $x \leftrightarrow y$ szerepcsere után $\|y\| - \|x\| \leq \|y - x\| = \|x - y\|$ adódik. Fordítva, ha 4^{oo} igaz, akkor 4^{oo}-ben x helyett $(x + y)$-t írva $\|x + y\| - \|y\| \leq \|x\|$, azaz 4^o következik. Speciálisan $(y = -x)$ kapjuk, hogy $2\|x\| \geq 0$, azaz $\|x\| \geq 0$ $(x \in X)$ (ld. 1^o).

Az 1.1. pontban már tárgyalt $\mathbf{K}^n$ térben pl. $\|.\|_2$ norma. Ennek általánosításaként megmutatható, hogy bármely $1 \leq p \leq +\infty$ mellett

$$\|x\|_p := \begin{cases} \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p\right)^{1/p} & (p < +\infty) \\ \\ \max\{|x_k| : k = 1, ..., n\} & (p = +\infty) \end{cases}$$

norma, azaz $(\mathbf{K}^n, \|.\|_p)$ normált tér. Világos, hogy $n = 1$ esetén bármely $1 \leq p \leq +\infty$ választással $\|x\|_p = |x| \quad (x \in \mathbf{K})$, ill. kapjuk a $(\mathbf{K}, |.|)$ normált teret. Sőt, az 1.2.-ben említett $(\mathcal{X}, \Omega, \mu)$ mértéktér és $1 \leq p \leq +\infty$ esetén

$$\|f\|_p := \begin{cases} \left(\int |f|^p \, d\mu\right)^{1/p} & (p < +\infty) \\ \\ \inf\{\alpha \geq 0 : |f(x)| \leq \alpha \ \ (\text{m.m. } x \in \mathcal{X})\} & (p = +\infty) \end{cases} \qquad (f \in L^p)$$

norma, így $(L^p, \|.\|_p)$ normált tér (ami alkalmas $(\mathcal{X}, \Omega, \mu)$ mértéktér mellett megegyezik az előző $(\mathbf{K}^n, \|.\|_p)$ térrel). Speciális esetként kapjuk (ld. 1.2.) az $(L^p[a, b], \|.\|_p)$ tereket, ill. valós esetben ezek $(C[a, b], \|.\|_p)$ altereit:

$$\|f\|_p := \begin{cases} \left(\int_a^b |f(x)|^p \, dx\right)^{1/p} & (p < +\infty) \\ \\ \inf\{\alpha \geq 0 : |f(x)| \leq \alpha \ \ (\text{m.m. } x \in [a, b])\} & (p = +\infty) \end{cases} \qquad (f \in L^p[a, b]),$$

ill.

$$\|f\|_p := \begin{cases} \left(\int_a^b |f(x)|^p \, dx\right)^{1/p} & (p < +\infty) \\ \\ \max\{|f(x)| : x \in [a, b]\} & (p = +\infty) \end{cases} \qquad (f \in C[a, b]).$$

Ha valamely $(X, \|.\|)$ normált tér esetén adott az $Y \subset X$ altér, akkor nyilván $\|.\|_{|Y}$ is norma, azaz $(Y, \|.\|_{|Y})$ is normált tér (az $(X, \|.\|)$ tér altere).

A *Cauchy-Bunyakovszkij*-egyenlőtlenséget is felhasználva könnyen belátható, hogy ha $(X, \langle , \rangle)$ euklideszi tér és

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle} \qquad (x \in X),$$

akkor $(X, \|.\|)$ normált tér. Ezt így fogjuk röviden jelölni: $(X, \|.\|) \equiv (X, \langle , \rangle)$. (Megjegyezzük, hogy ekkor a *Cauchy-Bunyakovszkij*-egyenlőtlenség alakja a következő:

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\| \qquad (x, y \in X)).$$

Speciálisan (ld. 1.2.) az $(L^2, \langle,\rangle)$ vagy az $(L^2[a,b], \langle,\rangle)$ térből, ill. az utóbbi $(C[a,b], \langle,\rangle)$ (valós) alteréből kiindulva a fenti (ld. $p = 2$ eset) $(L^2, \|.\|_2)$, $(L^2[a,b], \|.\|_2)$, $(C[a,b], \|.\|_2)$ tereket kapjuk.

1.3.1. Megjegyzések.

i) Tegyük fel, hogy $(X, \|.\|) \equiv (X, \langle,\rangle)$, azaz $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ $(x \in X)$. Ekkor bármely $x, y \in X$ esetén

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle$$

és

$$\|x-y\|^2 = \langle x-y, x-y\rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 - \langle x, y\rangle - \langle y, x\rangle.$$

Ezt a két egyenlőséget kivonva egymásból azt kapjuk, hogy

$$\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 = 2\left(\langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle\right) = \begin{cases} 4\langle x, y\rangle & (\mathbf{K} = \mathbf{R}) \\ 4\mathrm{Re}\,\langle x, y\rangle & (\mathbf{K} = \mathbf{C}), \end{cases}$$

azaz

$$\frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right) = \begin{cases} \langle x, y\rangle & (\mathbf{K} = \mathbf{R}) \\ \mathrm{Re}\,\langle x, y\rangle & (\mathbf{K} = \mathbf{C}). \end{cases}$$

ii) Ha $\mathbf{K} := \mathbf{C}$, akkor az előbbiekben y helyett $\imath y$-t írva $(\imath := \sqrt{-1})$ azt mondhatjuk, hogy

$$\frac{1}{4}(\|x+\imath y\|^2 - \|x-\imath y\|^2) = \mathrm{Re}\,\langle x, \imath y\rangle = \mathrm{Re}\,(-\imath\langle x, y\rangle) = \mathrm{Im}\,\langle x, y\rangle.$$

Tehát

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + \imath(\|x+\imath y\|^2 - \|x-\imath y\|^2)\right).$$

1.3.1. Tétel (*Neumann-Jordan-paralelogramma-szabály*)**.** *Legyen $(X, \|\cdot\|)$ normált tér a $\mathbf{K}$ testre vonatkozóan és tegyük fel, hogy*

$$(*) \qquad \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right) \qquad (x, y \in X).$$

Ekkor megadható olyan $X^2 \ni (x, y) \mapsto \langle x, y\rangle \in \mathbf{K}$ skaláris szorzás, amelyre

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} \qquad (x \in X).$$

Bizonyítás. Az előző megjegyzéseket szem előtt tartva tekintsük a

$$p(x,y) := \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right) \quad (x,y \in X)$$

előírással definiált $p : X^2 \to \mathbf{R}$ leképezést. Azt fogjuk belátni, hogy tetszőleges $x,y,z \in X$ és $\lambda \in \mathbf{R}$ esetén

i) $p(x,x) \geq 0$ és $p(x,x) = 0 \iff x = 0$; ii) $p(x,y) = p(y,x)$;

iii) $p(x+y,z) = p(x,z) + p(y,z)$; iv) $p(\lambda x, y) = \lambda p(x,y)$.

Ugyanis

i) $4p(x,x) = \|x+x\|^2 - \|x-x\|^2 = \|2x\|^2 = 4\|x\|^2 \geq 0$, ill. $p(x,x) = 0 \iff \|x\| = 0 \iff x = 0$.

ii) $4p(y,x) = \|y+x\|^2 - \|y-x\|^2 = \|x+y\|^2 - \|-(x-y)\|^2 = \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 = 4p(x,y)$, azaz $p(x,y) = p(y,x)$.

iii) Megmutatjuk, hogy minden $x,y,z \in X$ mellett

$$\varphi(x,y,z) := 4\left(p(x+y,z) - p(x,z) - p(y,z)\right) = 0.$$

Valóban, a p definíciója alapján $\varphi(x,y,z) =$

$$(**) \qquad \|x+y+z\|^2 - \|x+y-z\|^2 - \|x+z\|^2 + \|x-z\|^2 - \|y+z\|^2 + \|y-z\|^2,$$

ahol a $(*)$ feltétel miatt

$$\|x+y+z\|^2 = \|(x+z)+y\|^2 = 2\left(\|x+z\|^2 + \|y\|^2\right) - \|x+z-y\|^2,$$

$$\|x+y-z\|^2 = \|(x-z)+y\|^2 = 2\left(\|x-z\|^2 + \|y\|^2\right) - \|x-z-y\|^2.$$

Innen tehát azt kapjuk, hogy $\varphi(x,y,z) =$

$$\|x-z-y\|^2 - \|x+z-y\|^2 + 2\left(\|x+z\|^2 - \|x-z\|^2\right) - \|x+z\|^2 + \|x-z\|^2 - \|y+z\|^2 + \|y-z\|^2 =$$

$$(***) \qquad \|x-z-y\|^2 - \|x+z-y\|^2 + \|x+z\|^2 - \|x-z\|^2 - \|y+z\|^2 + \|y-z\|^2.$$

A $(**), (***)$ egyenlőségeket összeadva az adódik, hogy $2\varphi(x,y,z) =$

$$\left(\|x+y+z\|^2 + \|x-z-y\|^2\right) - \left(\|x+y-z\|^2 + \|x+z-y\|^2\right) - 2\left(\|y+z\|^2 - \|y-z\|^2\right).$$

Itt a $(*)$ kikötést alkalmazva azt mondhatjuk, hogy

$$\|x+y+z\|^2 + \|x-z-y\|^2 = \|(y+z)+x\|^2 + \|(y+z)-x\|^2 = 2\left(\|y+z\|^2 + \|x\|^2\right)$$

és

$$\|x+y-z\|^2 + \|x+z-y\|^2 = \|(y-z)+x\|^2 + \|(y-z)-x\|^2 = 2\left(\|y-z\|^2 + \|x\|^2\right).$$

Az utóbbi két egyenlőségből oda jutunk, hogy

$$2\varphi(x,y,z) = 2\left(\|y+z\|^2 - \|y-z\|^2\right) - 2\left(\|y+z\|^2 - \|y-z\|^2\right) = 0,$$

tehát valóban $\varphi(x,y,z) = 0$.

iv) Valamely $x, y \in X$ esetén legyen

$$\Phi_{x,y}(t) := 4p(tx,y) = \|tx+y\|^2 - \|tx-y\|^2 \quad (t \in \mathbf{R}).$$

Ekkor egyrészt a $\Phi_{x,y} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvény folytonos, ui.

$$|\Phi_{x,y}(t) - \Phi_{x,y}(\tau)| \leq \left|\|tx+y\|^2 - \|\tau x+y\|^2\right| + \left|\|tx-y\|^2 - \|\tau x-y\|^2\right| =$$

$$|\|tx+y\| - \|\tau x+y\|| \left(\|tx+y\| + \|\tau x+y\|\right) + |\|tx-y\| - \|\tau x-y\|| \left(\|tx-y\| + \|\tau x-y\|\right) \leq$$

$$2|t-\tau|\cdot \|x\| \left((|t|+|\tau|)\|x\| + 2\|y\|\right) \to 0 \qquad (t \to \tau).$$

Másrészt $\Phi_{x,y}(0) = \|y\|^2 - \|-y\|^2 = 0$ és ha $t \in \mathbf{R}$, akkor

$$\Phi_{x,y}(-t) = \|-tx+y\|^2 - \|-tx-y\|^2 = \|tx-y\|^2 - \|tx+y\|^2 = -4p(tx,y) = -\Phi_{x,y}(t).$$

Teljes indukcióval megmutatjuk, hogy bármely $n \in \mathbf{N}$ esetén

$$\Phi_{x,y}(n) = n\Phi_{x,y}(1).$$

Ezt $n = 0$-ra az imént láttuk, ha viszont valamilyen $\mathbf{N} \ni n$-re igaz, akkor iii) miatt

$$\Phi_{x,y}(n+1) = 4p(nx+x,y) = 4p(nx,y) + 4p(x,y) = \Phi_{x,y}(n) + \Phi_{x,y}(1) =$$

$$n\Phi_{x,y}(1) + \Phi_{x,y}(1) = (n+1)\Phi_{x,y}(1).$$

Most lássuk be azt, hogy tetszőleges negatív $k \in \mathbf{Z}$ egész számra

$$\Phi_{x,y}(k) = k\Phi_{x,y}(1).$$

Ugyanis $-k \in \mathbf{N}$, ezért az előbbiek alapján $\Phi_{x,y}(k) = \Phi_{x,y}\left(-(-k)\right) = -\Phi_{x,y}(-k) = -(-k)\Phi_{x,y}(1) = k\Phi_{x,y}(1)$.

Tehát minden $x, y \in X, j \in \mathbf{Z}$ mellett

$$\Phi_{x,y}(j) = j\Phi_{x,y}(1).$$

Legyen $j, k \in \mathbf{Z}, k \neq 0$. Ekkor az előbb belátottakat felhasználva

$$\Phi_{x,y}\left(\frac{j}{k}\right) = 4p\left(j\frac{x}{k}, y\right) = \Phi_{x/k,y}(j) = j\Phi_{x/k,y}(1) =$$

$$\frac{j}{k}\left(k\Phi_{x/k,y}(1)\right) = \frac{j}{k}\Phi_{x/k,y}(k) = \frac{j}{k}4p\left(k\frac{x}{k}, y\right) = \frac{j}{k}4p(x,y) = \frac{j}{k}\Phi_{x,y}(1).$$

Ezzel megmutattuk, hogy bármely $x, y \in X, r \in \mathbf{Q}$ esetén

$$\Phi_{x,y}(r) = r\Phi_{x,y}(1).$$

Ha végül $t \in \mathbf{R}$ és $t_n \in \mathbf{Q} \quad (n \in \mathbf{N})$ olyan sorozat, amelyre $\lim(t_n) = t$, akkor $\Phi_{x,y}$ folytonossága miatt

$$\Phi_{x,y}(t) = \lim\left(\Phi_{x,y}(t_n)\right) = \lim\left(t_n\Phi_{x,y}(1)\right) = t\Phi_{x,y}(1).$$

Más szóval

$$p(tx, y) = tp(x, y) \qquad (x, y \in X,\ t \in \mathbf{R}).$$

A fentiek alapján nyilvánvaló, hogy a $\mathbf{K}$=$\mathbf{R}$ esetben

$$\langle x, y\rangle := p(x, y) \quad (x, y \in X)$$

olyan skaláris szorzás, amelyről a tételben szó van.

Legyen most $\mathbf{K} = \mathbf{C}$ és

$$\langle x, y\rangle := p(x, y) + \imath p(x, \imath y) \quad (x, y \in X).$$

Megmutatjuk, hogy $\langle , \rangle$ eleget tesz a tételbeli kívánalmaknak. Ehhez azt kell belátnunk, hogy bármely $x, y, z \in X$ és $\lambda \in \mathbf{C}$ esetén

v) $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$; vi) $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$;

vii) $\langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$; viii) $\langle x, x\rangle \geq 0$ és $\langle x, x\rangle = 0 \iff x = 0$.

Bizonyításképpen a következőket tudjuk mondani:

v) Ez a p-re fentebb igazolt iii) összefüggés nyilvánvaló következménye.

vi) $4\langle x, y\rangle = \|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + \imath\left(\|x + \imath y\|^2 - \|x - \imath y\|^2\right) =$

$$\|y + x\|^2 - \|y - x\|^2 + \imath\left(\|\imath(-\imath x + y)\|^2 - \|\imath(-\imath x - y)\|^2\right) =$$

$$\|y+x\|^2 - \|y-x\|^2 + \imath\left(\|y-\imath x\|^2 - \|\imath x+y\|^2\right) =$$

$$\|y+x\|^2 - \|y-x\|^2 - \imath\left(\|y+\imath x\|^2 - \|y-\imath x\|^2\right) = 4\overline{\langle y,x\rangle}.$$

vii) Mutassuk meg először, hogy $\langle \imath x, y\rangle = \imath\langle x,y\rangle \quad (x,y\in X)$. Valóban,

$$4\langle \imath x,y\rangle = \|\imath x+y\|^2 - \|\imath x-y\|^2 + \imath\left(\|\imath x+\imath y\|^2 - \|\imath x-\imath y\|^2\right) =$$

$$\|\imath x+y\|^2 - \|\imath x-y\|^2 + \imath\left(\|\imath(x+y)\|^2 - \|\imath(x-y)\|^2\right) =$$

$$\|\imath x+y\|^2 - \|\imath x-y\|^2 + \imath\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right) =$$

$$\imath\left(-\imath\left(\|\imath x+y\|^2 - \|\imath x-y\|^2\right) + \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right) =$$

$$\imath\left(-\imath\left(\|\imath(x-\imath y)\|^2 - \|\imath(x+\imath y)\|^2\right) + \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right) =$$

$$\imath\left(-\imath\left(\|x-\imath y\|^2 - \|x+\imath y)\|^2\right) + \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right) =$$

$$\imath\left(\imath\left(\|x+\imath y\|^2 - \|x-\imath y)\|^2\right) + \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right) = 4\imath\langle x,y\rangle.$$

Legyen most $\lambda = a+\imath b\in \mathbf{C} \quad (a,b\in\mathbf{R})$. Ekkor bármely $x,y\in X$ mellett a most mondottak és iv), ill. v) alapján

$$\langle \lambda x,y\rangle = \langle (a+\imath b)x,y\rangle = \langle ax+b(\imath x),y\rangle = \langle ax,y\rangle + \langle b(\imath x),y\rangle =$$

$$a\langle x,y\rangle + b\langle \imath x,y\rangle = a\langle x,y\rangle + b\imath\langle x,y\rangle = \lambda\langle x,y\rangle.$$

viii) Az előbb belátott vii) állítást felhasználva tetszőleges $x\in X$ esetén

$$4\langle x,x\rangle = \|2x\|^2 - \|x-x\|^2 + \imath\left(\|(1+\imath)x\|^2 - \|(1-\imath)x\|^2\right) =$$

$$4\|x\|^2 + \imath\left(|1+\imath|^2\|x\|^2 - |1-\imath|^2\|x\|^2\right) = 4\|x\|^2 + \imath\left(2\|x\|^2 - 2\|x\|^2\right) = 4\|x\|^2,$$

azaz $\langle x,x\rangle = \|x\|^2 \geq 0$ és $\langle x,x\rangle = 0 \iff x=0$. ■

1.3.2. Megjegyzések.

i) Egyszerű számolással ellenőrizhető, hogy tetszőleges $(X, \langle , \rangle)$ euklideszi tér esetén az $\|x\| := \sqrt{\langle x, x\rangle} \quad (x \in X)$ normára $(*)$ igaz. Ezért a $(*)$ feltétel szükséges és elégséges ahhoz, hogy egy norma skaláris szorzásból származzon.

ii) Pl. legyen $X := \{f : [0,1] \to \mathbf{R} : f$ folytonos$\}$ és $\|f\| := \max \mathcal{R}_{|f|} \quad (f \in X)$, ekkor $(*)$ nem igaz. Tekintsük ui. az $F(t) := t, G(t) := 1 - t \quad (t \in [0,1])$ függvényeket, amelyekre $\|F+G\|^2 + \|F-G\|^2 = 2$, de $2(\|F\|^2 + \|G\|^2) = 4$. Ezért $\|\cdot\|$-t nem skaláris szorzás generálja.

iii) Ha az előbbi megjegyzésben $\|f\| := \|f\|_p := \left(\int_0^1 |f|^p\right)^{1/p} \quad (f \in X)$ valamilyen rögzített $1 \le p < +\infty$ mellett, akkor $\|F+G\|^2 + \|F-G\|^2 = 1 + (p+1)^{-2/p} = 2(\|F\|^2 + \|G\|^2) = 4(p+1)^{-2/p} \iff (p+1)^2 = 3^p \iff p = 2$. Könnyen meggyőződhetünk arról, hogy $\langle f, g\rangle := \int_0^1 fg \quad (f, g \in X)$ skaláris szorzás és $\|f\|_2 = \sqrt{\langle f, f\rangle} \quad (f \in X)$.

iv) Legyen $2 \le n \in \mathbf{N}, X := \mathbf{K}^n, 1 \le p \le +\infty$ (ld. 1.3.) és

$$\|x\| := \|x\|_p := \begin{cases} \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p} & (p < +\infty) \\ \max\{|x_i| : i = 1, 2, ..., n\} & (p = +\infty) \end{cases} \qquad (x = (x_1, ..., x_n) \in X)\,.$$

Ekkor az $x := (1, 0, ..., 0), y := (0, 1, 0, ..., 0) \in X$ elemekre

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = \begin{cases} 2 \cdot 2^{2/p} & (p < +\infty) \\ 2 & (p = +\infty) \end{cases}, \ 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) = 4,$$

tehát $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \iff p < +\infty$ és $2^{2/p} = 2 \iff p = 2$. Ha (ld. 1.2.)

$$\langle x, y\rangle := \langle x, y\rangle_2 = \sum_{i=1}^n x_i \overline{y_i} \quad (x, y \in X),$$

akkor $\langle , \rangle$ nyilván skaláris szorzás és $\|x\|_2 = \sqrt{\langle x, x\rangle} \quad (x \in X)$.

v) Legyen az előbbi megjegyzésben $\mathbf{K} := \mathbf{R}, n := p := 2$, ekkor $x, y \in \mathbf{R}^2$ esetén $\|x+y\|_2^2 + \|x-y\|_2^2$ az x, y vektorok által kifeszített paralelogramma átlóinak a négyzetösszege, $2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$ pedig az oldalak négyzetösszege. Ismert elemi geometriai tény, hogy ezek az összegek egyenlők. (Ezért nevezik az 1.3.1. Tételt *paralelogramma-szabálynak.*)

1.4. Metrikus terek.

Tekintsünk egy $X \neq \emptyset$ halmazt és egy olyan $\rho : X^2 \to \mathbf{R}$ függvényt, amelyre bármely $x, y, z \in X$ esetén az alábbiak teljesülnek:

1^o $\rho(x, y) \geq 0$,

2^o $\rho(x, y) = 0 \iff x = y$,

3^o $\rho(x, y) = \rho(y, x)$,

4^o $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$.

Ekkor a ρ függvényt *metrikának,* a $\rho(x, y)$ számot az x, y elemek *távolságának*, az (X, ρ) párt pedig *metrikus térnek* nevezzük. (Könnyű meggondolni, hogy az $1^o - 4^o$ követelmények sem függetlenek.) A 4^o axióma az ún. *háromszög-egyenlőtlenség.* Az 1.3. pont 4^{oo} egyenlőtlenséghez hasonlóan lássuk be, hogy

4^{oo} $|\rho(x, y) - \rho(x, z)| \leq \rho(y, z) \quad (x, y, z \in X)$.

Valóban, 4^o szerint $\rho(x, y) - \rho(x, z) \leq \rho(y, z)$, ill. ugyanígy $-(\rho(x, y) - \rho(x, z)) = \rho(x, z) - \rho(x, y) \leq \rho(y, z)$, amiből 4^{oo} már triviálisan következik.

Bármely $X \neq \emptyset$ halmaz esetén megadható $\rho : X^2 \to \mathbf{R}$ metrika. Legyen ui.

$$\rho(x, y) := \begin{cases} 0 & (x = y) \\ \\ 1 & (x \neq y) \end{cases} \qquad (x, y \in X).$$

Egyszerű meggondolás mutatja, hogy ρ metrika, (X, ρ) az ún. *diszkrét metrikus tér.*

Bármely (X, ρ) metrikus tér és $\emptyset \neq Y \subset X$ esetén $\rho_{|_{Y^2}}$ is metrika, azaz $(Y, \rho_{|_{Y^2}})$ is metrikus tér (az (X, ρ) tér (metrikus) altere).

Ha pl. $(X, \|.\|)$ normált tér és $\rho(x, y) := \|x - y\| \quad (x, y \in X)$, akkor ρ metrika. Ezt a szituációt röviden az alábbi módon fogjuk jelölni: $(X, \rho) \equiv (X, \|.\|)$.

Tekintsük pl. a fenti $\mathbf{K}^n$ teret és az ott említett $x, y \in \mathbf{K}^n$ vektorokra

$$\rho(x, y) := \rho_2(x, y) = \|x - y\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|^2},$$

akkor könnyen beláthatóan egy $(\mathbf{K}^n, \rho_2)$ metrikus térhez jutunk. (Szokás a most bevezetett ρ_2 metrikát *euklideszi metrikának* is nevezni.) Ugyanígy metrika lesz a valamely $1 \leq p \leq +\infty$ mellett definiált

$$\rho_p(x, y) := \|x - y\|_p = \begin{cases} \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|^p\right)^{1/p} & (p < +\infty) \\ \\ \max\{|x_k - y_k| : k = 1, ..., n\} & (p = +\infty) \end{cases} \qquad (x, y \in \mathbf{K}^n)$$

függvény ($n = 1$ esetén $\rho_p(x, y) = |x - y| \quad (x, y \in \mathbf{K}, 1 \leq p \leq +\infty)$, ill. ennek általánosításaként (ld. 1.3.) a

$$\rho_p(f,g) := \begin{cases} \left(\int |f-g|^p \, d\mu\right)^{1/p} & (p < +\infty) \\ \inf\{\alpha \geq 0 : |f(x)-g(x)| \leq \alpha \text{ m.m. } x \in \mathcal{X}\} & (p = +\infty) \end{cases} \qquad (f,g \in L^p)$$

függvény is. Speciálisan (ld. 1.3.)

$$\rho_p(f,g) := \begin{cases} \left(\int_a^b |f(x)-g(x)|^p \, dx\right)^{1/p} & (p < +\infty) \\ \inf\{\alpha \geq 0 : |f(x)-g(x)| \leq \alpha \text{ m.m. } x \in [a,b]\} & (p = +\infty) \end{cases} \qquad (f,g \in L^p[a,b]),$$

ill.

$$\rho_p(f,g) := \begin{cases} \left(\int_a^b |f(x)-g(x)|^p \, dx\right)^{1/p} & (p < +\infty) \\ \max\{|f(x)-g(x)| : x \in [a,b]\} & (p = +\infty) \end{cases} \qquad (f,g \in C[a,b]).$$

Adott (X,ρ) metrikus tér esetén egy $a \in X$ elem ($r > 0$ sugarú) *környezetén* a

$$K(a) := K_r(a) := \{x \in X : \rho(x,a) < r\}$$

halmazt értjük. Világos, hogy minden esetben $a \in K_r(a)$. Könnyű ellenőrizni, hogy pl. az $(\mathbf{R}^2, \rho_p)$ metrikus terekben a $p = 1, 2, +\infty$ választással a $K_r(a)$ $(a \in \mathbf{R}^2, r > 0)$ környezetek geometriailag a *Descartes*-féle koordinátasíkon rendre egy a közepű, a koordinátatengelyekkel párhuzamos oldalú és $2r$ oldalhosszúságú négyzettel, egy a középpontú, r sugarú körrel, ill. egy a középpontú, a koordinátatengelyekkel párhuzamos átlójú és $r\sqrt{2}$ oldalhosszúságú rombusszal szemléltethetők. Ha (X,ρ) a diszkrét metrikus tér (ld. fent), akkor nyilván bármely $a \in X$ esetén $K_r(a) = X$, ha $r > 1$, különben $K_r(a) = \{a\}$.

Egy $A \subset X$ halmazt *nyíltnak* nevezünk, ha $A = \emptyset$ vagy tetszőleges $a \in A$ elemnek van olyan $K(a)$ környezete, amelyre $K(a) \subset A$ teljesül. Legyen

$$\mathcal{T}_\rho := \{A \subset X : A \text{ nyílt}\}.$$

Ekkor az alábbi állítások triviálisan teljesülnek:

1^o $X, \emptyset \in \mathcal{T}_\rho$,

2^o ha $\Gamma \neq \emptyset$ és minden $\gamma \in \Gamma$ esetén $A_\gamma \in \mathcal{T}_\rho$, akkor $\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma \in \mathcal{T}_\rho$,

3^o ha $\Gamma \neq \emptyset$ véges és minden $\gamma \in \Gamma$ esetén $B_\gamma \in \mathcal{T}_\rho$, akkor $\bigcap_{\gamma\in\Gamma} B_\gamma \in \mathcal{T}_\rho$.

1.5. Topologikus terek.

Az 1.4. pont végén a metrikus terek nyílt halmazaival kapcsolatban tett $1^o - 3^o$ kijelentések módot adnak arra, hogy a *nyílt halmaz* fogalmának az absztrakciója révén egy, a metrikus tereknél általánosabb tértípushoz jussunk. Legyen ehhez X halmaz, $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ pedig olyan halmazrendszer, amelyre fennállnak a következők:

1^o $X, \emptyset \in \mathcal{T}$,

2^o ha $\Gamma \neq \emptyset$ és minden $\gamma \in \Gamma$ esetén $A_\gamma \in \mathcal{T}$, akkor $\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma \in \mathcal{T}$,

3^o ha $\Gamma \neq \emptyset$ véges és minden $\gamma \in \Gamma$ esetén $B_\gamma \in \mathcal{T}$, akkor $\bigcap_{\gamma\in\Gamma} B_\gamma \in \mathcal{T}$.

Ekkor $\mathcal{T}$-t *topológiának,* $(X, \mathcal{T})$-t pedig *topologikus térnek* nevezzük. Az X (alap)halmaz valamely $A \subset X$ részhalmazát *nyíltnak* nevezzük ezután, ha $A \in \mathcal{T}$. Világos, hogy bármely (X, ρ) metrikus tér esetén $\mathcal{T}_\rho$ topológia, ill. $(X, \mathcal{T}_\rho)$ topologikus tér. Mindezt így fogjuk jelölni: $(X, \mathcal{T}) \equiv (X, \rho)$.

Bármely X halmaz esetén $\mathcal{T} := \{\emptyset, X\}$, ill. $\mathcal{T} := \mathcal{P}(X)$ nyilván topológia, azaz $(X, \{\emptyset, X\})$ és $(X, \mathcal{P}(X))$ egy-egy topologikus tér. Továbbá egy $(X, \mathcal{T})$ topologikus tér és az X tetszőleges $Y \subset X$ részhalmazával $\mathcal{T}_Y := \{A \cap Y \in \mathcal{P}(Y) : A \in \mathcal{T}\}$ nyilván topológia, azaz $(Y, \mathcal{T}_Y)$ topologikus tér (az $(X, \mathcal{T})$ tér (topologikus) altere). A $\mathcal{T}_Y$ topológia elemeit az X halmaz (Y-ra nézve) *relatív nyílt* halmazainak nevezzük.

A későbbiekben többször szerepel majd példaként az $(\{a, b\}, \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}\})$ (nyilván) topologikus tér, ahol $a \neq b$.

A nyílt halmaz absztrakt fogalmának a segítségével különböző, az elemi analízisben fontos szerepet játszó pont-, ill. halmaztípusok absztrakt megfelelőit értelmezhetjük topologikus terekben.

i) Valamely $A \subset X$ halmaz *belsejét* (röviden: $\operatorname{int} A$) mindazon $T \in \mathcal{T}$ halmazok egyesítéseként definiáljuk, amelyekre $T \subset A$ igaz. Világos, hogy $\operatorname{int} \emptyset = \emptyset$, $\operatorname{int} X = X$, $\operatorname{int} A \subset A$, $\operatorname{int} A \in \mathcal{T}$, ill. ha $T \in \mathcal{T}$ és $T \subset A$, akkor $T \subset \operatorname{int} A$. (Az utóbbi tulajdonság miatt mondjuk azt, hogy $\operatorname{int} A$ az A halmaz *legbővebb* nyílt részhalmaza.) Továbbá A pontosan akkor nyílt, ha $A = \operatorname{int} A$.

ii) Legyen $x \in X$. Az x elem *környezetének* nevezünk minden olyan $A \subset X$ halmazt, amelyre $x \in \operatorname{int} A$. A környezetek jelölésére általában a $K(x)$ jelölést fogjuk használni. Nyilván $\operatorname{int} K(x)$ is környezete x-nek és $\operatorname{int} K(x) \subset K(x)$, azaz $x \in K(x)$. Világos, hogy ha $(X, \mathcal{T}) \equiv (X, \rho)$, akkor bármely $r > 0$ esetén $K_r(x)$ (nyílt) környezete x-nek.

iii) Egy $\emptyset \neq A \subset$ halmaz *belső pontjának* nevezzük az $a \in X$ elemet, ha van olyan $K(a)$, amelyre $K(a) \subset A$. Az eddigieket egybevetve azt kapjuk, hogy $\emptyset \neq A \in \mathcal{T}$ akkor és csak akkor igaz, ha A minden pontja belső pontja A-nak.

iv) A $B \subset X$ halmaz legyen *zárt,* ha $X \setminus B \in \mathcal{T}$. Jelöljük $\mathcal{C}$-vel az X zárt részhalmazainak a rendszerét, ekkor egyszerűen kapjuk az alábbiakat:

1^o $X, \emptyset \in \mathcal{C}$,

2^o ha $\Gamma \neq \emptyset$ és minden $\gamma \in \Gamma$ esetén $A_\gamma \in \mathcal{C}$, akkor $\bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma \in \mathcal{C}$,

3^o ha $\Gamma \neq \emptyset$ véges és minden $\gamma \in \Gamma$ esetén $B_\gamma \in \mathcal{C}$, akkor $\bigcup_{\gamma\in\Gamma} B_\gamma \in \mathcal{C}$.

Nyilvánvaló, hogy valamely $A \subset X$ halmazra $A \in \mathcal{T}$ azzal ekvivalens, hogy $X \setminus A \in \mathcal{C}$.

v) Valamely $A \subset X$ halmaz *lezárását* (röviden: $\overline{A}$) mindazon $B \in \mathcal{C}$ halmazok metszeteként definiáljuk, amelyekre $A \subset B$ igaz. Világos, hogy $\overline{\emptyset} = \emptyset$, $\overline{X} = X$, $A \subset \overline{A}$, $\overline{A} \in \mathcal{C}$, ill. ha $B \in \mathcal{C}$ és $A \subset B$, akkor $\overline{A} \subset B$. (Az utóbbi tulajdonság miatt mondjuk azt, hogy $\overline{A}$ az A halmazt lefedő *legszűkebb* zárt részhalmaza X-nek.) Továbbá A pontosan akkor zárt, ha $A = \overline{A}$. Azt mondjuk, hogy A *mindenütt sűrű* (X-ben), ha $\overline{A} = X$.

vi) Legyen $A \subset X, x \in X$. Azt mondjuk, hogy az x elem *érintkezési pontja* A-nak, ha bármely $K(x)$ környezet esetén $A \cap K(x) \neq \emptyset$. Nyilvánvaló, hogy az A halmaz minden pontja érintkezési pontja is A-nak.

vii) Az $x \in X$ elem *torlódási pontja* az $A \subset X$ halmaznak, ha tetszőleges $K(x)$ környezetre $A \cap (K(x) \setminus \{x\}) \neq \emptyset$. Legyen A' az A halmaz torlódási pontjainak a halmaza. Világos, hogy ha $x \in X \setminus A$ érintkezési pontja A-nak, akkor $x \in A'$.

1.5.1. Állítás. *Legyen $A \subset X, x \in X$. Ekkor $x \in \overline{A}$ akkor és csak akkor igaz, ha x érintkezési pontja A-nak.*

Bizonyítás. Tegyük fel először, hogy $x \in \overline{A}$ és (indirekt módon okoskodva) x nem érintkezési pontja A-nak. Ez azt jelenti, hogy egy alkalmas $K(x)$ környezettel $A \cap K(x) = \emptyset$. Feltehető, hogy $K(x) \in \mathcal{T}$, különben cseréljük ki $K(x)$-et $\operatorname{int} K(x)$-re. Így $X \setminus K(x) \in \mathcal{C}$, azaz $A \subset X \setminus K(x)$ miatt $\overline{A} \subset X \setminus K(x)$. Mivel $x \in \overline{A}$, ezért $x \notin K(x)$. Utóbbi viszont ellentmond $x \in K(x)$-nek, ezért x valóban érintkezési pontja A-nak.

Fordítva, most azt tegyük fel, hogy x érintkezési pontja A-nak és (ismét indirekt okoskodva) $x \notin \overline{A}$. Tehát $x \in X \setminus \overline{A} \in \mathcal{T}$. Van tehát olyan (feltehető, hogy nyílt) $K(x)$ környezete x-nek, amelyre $K(x) \subset X \setminus \overline{A} \in \mathcal{T}$. Tehát $K(x) \cap \overline{A} = \emptyset$. Mivel $A \subset \overline{A}$, ezért $K(x) \cap A = \emptyset$ is igaz, ami ellentmond annak, hogy x érintkezési pontja A-nak. Tehát $x \in \overline{A}$. ■

Tekintsük a következő példát: tegyük fel, hogy $a \neq b$ és legyen

$$X := \{a, b\}\ ,\ \mathcal{T} := \{\emptyset, X, \{a\}\}.$$

Ekkor az $(X, \mathcal{T})$ topologikus térben (ld. fent) b-nek egyetlen környezete létezik: $K(b) = X$. Következésképpen $X \cap (K(b) \setminus \{b\}) = \{a\} \neq \emptyset$, azaz $b \in X'$. Nem igaz tehát az az elemi analízisből megszokott jellemzése a torlódási pontoknak, hogy ti. egy halmaz valamely torlódási pontjának bármely környezetében végtelen sok pontja van az illető halmaznak.

Nevezzük a szóban forgó topologikus teret T_1-*térnek,* ha igaz az alábbi kijelentés: tetszőleges $x, y \in X$, $x \neq y$ esetén megadhatók olyan $K(x)$, $K(y)$ környezetek, hogy $x \notin K(y)$ és $y \notin K(x)$. Azt is mondjuk, hogy az $(X, \mathcal{T})$ topologikus térre teljesül a T_1-*axióma.*

1.5.2. Állítás. *Tegyük fel, hogy az $(X, \mathcal{T})$ topologikus tér T_1-tér és legyen $A \subset X$, $x \in X$. Ekkor $x \in A'$ azzal ekvivalens, hogy tetszőleges $K(x)$ környezetre az $A \cap K(x)$ halmaz végtelen.*

Bizonyítás. Nyilvánvaló, hogy ha tetszőleges $K(x)$ környezetre az $A \cap K(x)$ halmaz végtelen, akkor x torlódási pontja A-nak.

Tegyük fel ezért most azt, hogy $x \in A'$, de (indirekt módon) van olyan $K(x)$ környezete x-nek, amelyre az $A \cap K(x)$ metszethalmaz véges. Mivel x torlódási pontja A-nak, ezért $\emptyset \neq A \cap (K(x) \setminus \{x\})$ véges halmaz. Legyen valamilyen $n \in \mathbf{N}$ esetén

$$(*) \qquad A \cap (K(x) \setminus \{x\}) = \{a_0, ..., a_n\}.$$

A T_1-axióma miatt bármely $i = 0, ..., n$ mellett van olyan $K^{(i)}(x)$ környezet, amelyre $a_i \notin K^{(i)}(x)$. Ha $\widetilde{K}(x) := \bigcap_{i=0}^{n} K^{(i)}(x)$, akkor könnyen beláthatóan $\widetilde{K}(x)$ is környezete x-nek és $a_i \notin \widetilde{K}(x)$ $(i = 0, ..., n)$. Innen $(*)$ alapján rögtön adódik, hogy $A \cap (\widetilde{K}(x) \setminus \{x\}) = \emptyset$, ami ellentmond annak, hogy $x \in A'$. ■

1.5.1. Megjegyzések.

i) Könnyű meggondolni, hogy bármely $A \subset X$ esetén az alábbi ekvivalenciák igazak: A zárt $\iff$ $A' \subset A$, ill. $\overline{A} = X \iff$ tetszőleges $\emptyset \neq K \in \mathcal{T}$ halmazra $K \cap A \neq \emptyset$.

ii) Ha $(X, \mathcal{T}) \equiv (X, \rho)$, akkor teljesül a T_1-axióma. Valóban, legyen $x, y \in X$ és $x \neq y$. Ha $d := \rho(x, y)\,(> 0)$, akkor $y \notin K_{d/2}(x)$, $x \notin K_{d/2}(y)$. Ugyanakkor a fentebb már említett

$(\{a,b\},\{\emptyset,\{a\},\{a,b\}\})$ $(a \neq b)$ topologikus tér esetén nincs olyan $\rho : \{a,b\}^2 \to [0,+\infty)$ metrika, amellyel $(\{a,b\},\{\emptyset,\{a\},\{a,b\}\}) \equiv (\{a,b\},\rho)$ lenne. Ui. a szóban forgó topologikus térben nem igaz a T_1-axióma: $K(b) = \{a,b\}$ miatt $a \in K(b)$.

iii) Az előbbi megjegyzés szerint tehát egy topológia „metrizálhatóságának” szükséges feltétele az, hogy az illető topologikus tér T_1-tér legyen. (A metrizálhatóság kérdésével bővebben nem foglalkozunk.)

2. Konvergencia, teljes terek

2.1. Konvergencia.

Valamely $(X,\mathcal{T})$ topologikus tér esetén tekintsünk egy $x_n \in X \quad (n \in \mathbf{N})$ sorozatot. Egy $\alpha \in X$ elemet a szóban forgó sorozat *limeszpontjának* nevezünk, ha bármely $K(\alpha)$ esetén $x_n \in K(\alpha)$ majdnem minden n-re igaz. (Tehát van olyan $N \in \mathbf{N}$, amellyel $x_n \in K(\alpha) \quad (\mathbf{N} \ni n > N)$.) Az (x_n) sorozat limeszpontjainak a halmazát így jelöljük: $\mathrm{Lim}\,(x_n)$.

2.1.1. Állítás. *Tegyük fel, hogy az $A \subset X$ halmaz zárt. Ekkor bármely $x_n \in A \quad (n \in \mathbf{N})$ sorozatra* $\mathrm{Lim}\,(x_n) \subset A$.

Bizonyítás. Indirekt úton okoskodva tegyük fel, hogy egy alkalmas $x_n \in A \quad (n \in \mathbf{N})$ sorozatra és $\alpha \in \mathrm{Lim}\,(x_n)$ elemre $\alpha \notin A$. Tehát $\alpha \in X \setminus A \in \mathcal{T}$, így van olyan $K(\alpha)$ környezet, amelyre $K(\alpha) \subset X \setminus A$. Ugyanakkor $\alpha \in \mathrm{Lim}\,(x_n)$ miatt $x_n \in K(\alpha)$ majdnem minden $n \in \mathbf{N}$ esetén, azaz ilyen n-ekre $x_n \in A \cap (X \setminus A) = \emptyset$. Utóbbi nyilván nem lehetséges, ezért ilyen α nincs: $\mathrm{Lim}\,(x_n) \subset A$. ■

Tekintsük az 1.5.2. Állítás előtt mondott példát: $a \neq b$, $X := \{a,b\}$, $\mathcal{T} := \{\emptyset, X, \{a\}\}$ és legyen $x_n := a \quad (n \in \mathbf{N})$. Ekkor $\mathrm{Lim}\,(x_n) = X$. Ui. az $a \in \mathrm{Lim}\,(x_n)$ tartalmazás nem szorul magyarázatra. De $b \in \mathrm{Lim}\,(x_n)$ is igaz, ti. (ld. fent) b-nek egyetlen környezete létezik: $K(b) = X$, így $x_n \in K(b)$ $(n \in \mathbf{N})$.

Ez az egyszerű példa is azt mutatja, hogy egy sorozatnak lehetnek különböző limeszpontjai, szemben az elemi analízisben (persze speciális esetekben) „megszokottakkal.” Az illető topologikus teret T_2-*térnek* (vagy *Hausdorff-térnek*) nevezzük, ha teljesül a következő ún. T_2-*axióma*: tetszőleges $x, y \in X$, $x \neq y$ esetén alkalmas $K(x), K(y)$ környezetekre $K(x) \cap K(y) = \emptyset$. Világos, hogy a most mondott T_2-axióma „erősebb” a T_1-axiómánál: minden T_2-tér egyúttal T_1-tér is. Fordítva ugyanez nem igaz: ha pl. $X := [0,1]$ és $A \in \mathcal{T}$ akkor és csak akkor, ha $A = \emptyset$ vagy $A = [0,1] \setminus B$ valamilyen $B \subset [0,1]$ legfeljebb megszámlálható halmazzal, akkor világos, hogy $\mathcal{T}$ topológia. Ha $x, y \in X$ és $x \neq y$, akkor $K(x) := [0,1] \setminus \{y\}$, $K(y) := [0,1] \setminus \{x\}$ olyan környezetek, amelyekre $y \notin K(x)$, $x \notin K(y)$, azaz igaz a T_1-axióma. Ugyanakkor nem teljesül a T_2-axióma, ui. $a, b \in X$, $a \neq b$ esetén bármely $K(a)$, $K(b)$ környezetre $\mathrm{int}\,K(a) = [0,1] \setminus U$, $\mathrm{int}\,K(b) = [0,1] \setminus V$ alkalmas, legfeljebb megszámlálható $U, V \subset [0,1]$ halmazokkal. Mivel

$$([0,1] \setminus U) \cap ([0,1] \setminus V) = [0,1] \setminus (U \cup V)$$

és $U \cup V$ legfeljebb megszámlálható, ezért $[0,1] \setminus (U \cup V) \neq \emptyset$. Következésképpen $\mathrm{int}\,K(a) \cap \mathrm{int}\,K(b) \neq \emptyset$, így $K(a) \cap K(b) \neq \emptyset$.

Speciálisan az (X, ρ) metrikus terek T_2-terek is, hiszen (ld. fent) $x, y \in X$, $x \neq y$ esetén $K_{d/2}(x) \cap K_{d/2}(y) = \emptyset$ (ahol $d := \rho(x, y)$).

2.1.2. Állítás. *Tegyük fel, hogy* $(X, \mathcal{T})$ *Hausdorff-tér. Ekkor bármely* $x_n \in X \quad (n \in \mathbf{N})$ *sorozatra a* $\mathrm{Lim}\,(x_n)$ halmaz legfeljebb egy elemű.

Bizonyítás. Tegyük fel az állítással ellentétben, hogy $\alpha, \beta \in \mathrm{Lim}\,(x_n)$, $\alpha \neq \beta$ és legyenek a $K(\alpha)$, $K(\beta)$ környezetek diszjunktak. Ekkor alkalmas $N, M \in \mathbf{N}$ „küszöbindexekkel" $x_n \in K(\alpha)$ $(\mathbf{N} \ni n > N)$, $x_n \in K(\beta) \quad (\mathbf{N} \ni n > M)$ teljesül. Ha $P := \max\{N, M\}$, akkor minden $\mathbf{N} \ni n > P$ esetén $x_n \in K(\alpha) \cap K(\beta)$, ami $K(\alpha) \cap K(\beta) = \emptyset$ miatt nem lehetséges. ■

Legyen most $(X, \mathcal{T}) \equiv (X, \rho)$, $x_n \in X \quad (n \in \mathbf{N})$ pedig olyan sorozat, amelyre $\mathrm{Lim}\,(x_n) \neq \emptyset$. Az előbbi állítás miatt ekkor egyértelműen van olyan $\alpha \in X$ elem, hogy $\mathrm{Lim}\,(x_n) = \{\alpha\}$. Ezt az α elemet az $x := (x_n)$ sorozat *limeszének* (vagy *határértékének*,) magát az (x_n) sorozatot pedig *konvergensnek* nevezzük. Az elemi analízisből már jól ismert jelöléseket fogjuk absztrakt szituációban is használni: $\lim x := \lim(x_n) := \lim_{n\to\infty} x_n := \alpha$. Időnként azt is írjuk, hogy $x_n \to \alpha \quad (n \to \infty)$. Világos, hogy $\alpha = \lim(x_n)$ azzal ekvivalens, hogy

$$\rho(x_n, \alpha) \to 0 \qquad (n \to \infty). \tag{2.1.1}$$

Más szóval tehát: minden $\varepsilon > 0$ esetén van olyan $N \in \mathbf{N}$, hogy $\rho(x_n, \alpha) < \varepsilon \quad (N < n \in \mathbf{N})$.

2.1.3. Állítás. *Legyen adott egy tetszőleges* (X, ρ) *metrikus tér. Ekkor bármely* $\emptyset \neq A \subset X$ *halmazra igaz a következő ekvivalencia:* A *akkor és csak akkor zárt, ha minden* A*-beli konvergens sorozat határértéke eleme* A*-nak*

Bizonyítás. A 2.1.1. Állítás miatt elegendő már csak a következőt megmutatni: ha minden konvergens $x_n \in A \quad (n \in \mathbf{N})$ sorozatra $\lim(x_n) \in A$, akkor A zárt. Tegyük fel ui. indirekt módon, hogy A nem zárt, azaz $A \neq \overline{A}$. Van tehát olyan $\alpha \in \overline{A}$ elem, amelyre $\alpha \notin A$. Mivel (ld. 1.5.1. Állítás) α érintkezési pontja A-nak, ezért tetszőleges $n \in \mathbf{N}$ esetén létezik $x_n \in A \cap K_{1/(n+1)}(\alpha)$. Következésképpen az így definiált (x_n) sorozat A-beli és $\rho(x_n, \alpha) < 1/(n+1) \quad (n \in \mathbf{N})$. Tehát $\rho(x_n, \alpha) \to 0 \quad (n \to \infty)$, így $\alpha = \lim(x_n)$. A feltételek miatt ezért $\alpha \in A$, szemben az indirekt feltevéssel. ■

2.2. Teljes terek.

Tekintsük az (X, ρ) metrikus teret és benne egy $x_n \in X \quad (n \in \mathbf{N})$ konvergens sorozatot. Legyen $\alpha := \lim(x_n)$, ekkor tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $N \in \mathbf{N}$, hogy $\rho(x_n, \alpha) < \varepsilon/2 \quad (N < n \in \mathbf{N})$. A háromszög-egyenlőtlenség szerint

$$\rho(x_n, x_m) \leq \rho(x_n, \alpha) + \rho(x_m, \alpha) \qquad (n, m \in \mathbf{N}),$$

azaz

$$\rho(x_n, x_m) < \varepsilon \qquad (N < n, m \in \mathbf{N}). \tag{2.2.1}$$

következik.

A konvergens sorozatokra most kapott (2.2.1) tulajdonsággal nem konvergens sorozatok is rendelkezhetnek. Az egyik legyegyszerűbb elemi példa erre a következő: legyen $X := \mathbf{Q}$, $\rho(x,y) := |x-y|$ $(x, y \in X)$, ill. vegyük az

$$x_0 := 2\ ,\ x_{n+1} := \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n} \qquad (n \in \mathbf{N})$$

rekurzióval megadott sorozatot. Jól ismert, hogy $x_n \in \mathbf{Q}$ $(n \in \mathbf{N})$ és bármely $\varepsilon > 0$ esetén $|x_n - \sqrt{2}| < \varepsilon$, hacsak (egy alkalmas $\mathbf{N} \ni N$-nel) az n indexre $n > N$. Innen a fentiek szerint (2.2.1) következik. Ha az (x_n) sorozat konvergens lenne, akkor a határértéke csak $\sqrt{2}$ lehetne, ami viszont nem racionális szám: $\sqrt{2} \notin \mathbf{Q}$. Következésképpen nincs a $\mathbf{Q}$ halmaznak olyan α eleme, amellyel (2.1.1) teljesülne, azaz az (x_n) sorozat nem konvergens.

A (2.2.1) tulajdonsággal rendelkező sorozatokat *Cauchy-sorozatoknak* fogjuk nevezni, magát a (2.2.1) tulajdonságot *Cauchy-tulajdonságnak* (vagy *Cauchy-kritériumnak*). Tehát minden konvergens sorozat *Cauchy*-sorozat, de ez fordítva nem minden metrikus térben igaz. Nevezzük ezért a szóban forgó metrikus teret *teljes metrikus térnek,* ha benne minden *Cauchy*-sorozat konvergens.

Pl. a diszktér metrikus tér (ld. 1.4.) teljes, ui. egy (x_n) sorozat (könnyen ellenőrizhetően) akkor és csak akkor *Cauchy*-sorozat ebben a térben, ha *kvázikonstans*: van olyan $N \in \mathbf{N}$, hogy $x_n = x_N$ $(N \le n \in \mathbf{N})$. Világos ugyanakkor, hogy minden kvázikonstans sorozat (bármely metrikus térben) konvergens.

Tekintsük viszont a $[-1,1]$ intervallumon folytonos valós értékű függvények $C[-1,1]$ halmazát és legyen (ld. 1.4.)

$$\rho(f,g) := \int_{-1}^{1} |f-g| \qquad (f, g \in C[-1,1]).$$

Ekkor (a *Riemann*-integrál elemei tulajdonságai alapján) ρ metrika, de $(C[-1,1], \rho)$ nem teljes. Legyen ui.

$$f_n(x) := \begin{cases} 0 & (-1 \le x \le 0) \\ 1 & \left(\dfrac{1}{n+1} \le x \le 1\right) \\ nx & \left(0 \le x \le \dfrac{1}{n+1}\right) \end{cases} \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Egyszerű számolás mutatja, hogy $n, m \in \mathbf{N}, n \le m$ esetén

$$\rho(f_n, f_m) = \int_{-1}^{1} |f_n - f_m| = \int_{0}^{1/n} |f_n - f_m| \to 0 \qquad (n, m \to \infty),$$

azaz (f_n) *Cauchy*-sorozat. Tegyük fel indirekt módon, hogy valamilyen $f \in C[-1,1]$ függvénnyel $\rho(f_n, f) \to 0$ $(n \to \infty)$. Ekkor tetszőleges $-1 \le x < 0$ esetén $f(x) = 0$. Különben lenne olyan $x \in [-1, 0)$, hogy (pl.) $f(x) > 0$. Mivel f folytonos, ezért egy alkalmas $0 < \delta < |x|$ mellett $f(t) > f(x)/2$ $(t \in [x-\delta, x+\delta])$ is igaz lenne. Ekkor viszont minden $n \in \mathbf{N}$ indexre

$$\rho(f_n, f) = \int_{-1}^{1} |f_n - f| \ge \int_{x-\delta}^{x+\delta} |f_n - f| = \int_{x-\delta}^{x+\delta} |f| \ge 2\delta \frac{f(x)}{2} = f(x)\delta,$$

ami nyilván ellentmond a $\rho(f_n, f) \to 0 \quad (n \to \infty)$ feltételnek. Ugyanígy kapjuk, hogy $f(t) = 1$ $(0 < t \leq 1)$, amiből viszont $f \notin C\{0\}$ következik, szemben f feltételezett folytonosságával.

Tudjuk az elemi analízisbeli tanulmányokból, hogy bármely $1 \leq p \leq +\infty$ és $0 < n \in \mathbf{N}$ esetén (ld. 1.4.) a $(\mathbf{K}^n, \rho_p)$ metrikus tér teljes. Hasonlóan teljesek a (ld. 1.4.) valamely $(\mathcal{X}, \Omega, \mu)$ mértéktér esetén kapott $(L^p, \|.\|_p)$ terek, speciálisan az $(L^p[a,b], \|.\|_p)$, $(C[a,b], \|.\|_\infty)$ terek is. Jegyezzük meg, hogy a $(C[a,b], \|.\|_\infty)$ térben az $f_n \in C[a,b] \quad (n \in \mathbf{N})$ függvényekből álló sorozat konvergenciája a szóban forgó (f_n) függvénysorozat *egyenletes konvergenciáját* jelenti: tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $N \in \mathbf{N}$ „küszöbindex”, hogy $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$, hacsak $N < n, m \in \mathbf{N}$ és $x \in [a,b]$ tetszőleges.

Ha $(X, \rho) \equiv (X, \|.\|)$ és (X, ρ) teljes, akkor az $(X, \|.\|)$ teret *teljes normált térnek* (vagy *Banach-térnek*) nevezzük. Ha $(X, \|.\|) \equiv (X, \langle , \rangle)$ és $(X, \|.\|)$ *Banach*-tér, akkor $(X, \langle , \rangle)$ egy ún. *Hilbert-tér.*

Vezessük be a következő jelölést: valamely (X, ρ) metrikus tér, $a \in X$ és $r > 0$ esetén legyen

$$G_r(a) := \{x \in X : \rho(x, a) \leq r\}.$$

Könnyű meggondolni, hogy $G_r(a)$ zárt halmaz. Világos, hogy $K_r(a) \subset G_r(a)$ sőt, az is nyilvánvaló, hogy $\overline{K_r(a)} \subset G_r(a)$.

2.2.1. Tétel. *Az (X, ρ) metrikus tér akkor és csak akkor teljes, ha $\bigcap_{n=0}^{\infty} G_{r_n}(a_n) \neq \emptyset$ minden olyan $a_n \in X \quad (n \in \mathbf{N})$ elemsorozat és $r_n > 0 \quad (n \in \mathbf{N})$ számsorozat esetén, amelyekkel $G_{r_{n+1}}(a_{n+1}) \subset G_{r_n}(a_n) \quad (n \in \mathbf{N})$ és $\lim(r_n) = 0$ teljesül.*

Bizonyítás. Lássuk be először azt, hogy a tételben szereplő $G_n := G_{r_n}(a_n) \quad (n \in \mathbf{N})$ „zárt gömbökkel” megfogalmazott feltétel szükséges a tér teljességéhez. Tegyük fel tehát, hogy (X, ρ) teljes és (G_n) a tételben szereplő gömbsorozat. Ekkor bármely $n, m \in \mathbf{N}$, $n \leq m$ esetén $G_m \subset G_n$, azaz

$$\rho(a_n, a_m) \leq r_n \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

Ez éppen azt jelenti, hogy az (a_n) sorozat *Cauchy*-sorozat, következésképpen a tér feltételezett teljessége miatt létezik az $\alpha := \lim(a_n)$ határérték. Gondoljuk meg, hogy $\alpha \in G_n$ minden $\mathbf{N} \ni n$-re igaz. Ha ui. lenne olyan $N \in \mathbf{N}$, amelyre $\alpha \notin G_N$, akkor $\alpha \in X \setminus G_N \in \mathcal{T}_\rho$ miatt egy alkalmas $K(\alpha)$ környezettel $K(\alpha) \subset X \setminus G_N$. A (G_n) sorozatra tett feltétel miatt ekkor egyúttal minden $n \in \mathbf{N}$, $N \leq n$-re is

$$K(\alpha) \subset X \setminus G_n.$$

Mivel $\alpha = \lim(a_n)$, ezért egy alkalmas $M \in \mathbf{N}$ index mellett $a_n \in K(\alpha)$ teljesül, hacsak $n \in \mathbf{N}$ és $n > M$. Tehát $n \in \mathbf{N}$, $n > \max\{N, M\}$ esetén $a_n \in G_n \cap (X \setminus G_n)$, ami nyilvánvaló képtelenség. Tehát $\alpha \in \bigcap_{n=0}^{\infty} G_n$, így valóban $\bigcap_{n=0}^{\infty} G_n \neq \emptyset$.

Most lássuk be a tétel elégségesség-részét. Tegyük fel ehhez, hogy a (G_n) gömbsorozatra fennállnak a tételben megfogalmazott feltételek, és mutassuk meg a tér teljességét. Legyen ehhez (x_n) egy X-beli *Cauchy*-sorozat. A (2.2.1) *Cauchy*-kritérium miatt van olyan $n_0 \in \mathbf{N}$ index, amellyel

$$\rho(x_{n_0}, x_k) < 1 \qquad (k \in \mathbf{N}, k > n_0).$$

Legyen $r_0 := 2$ és $G_0 := G_{r_0}(x_{n_0})$. Megint csak (2.2.1) alapján találunk olyan $n_0 < n_1 \in \mathbf{N}$ indexet is, amellyel

$$\rho(x_{n_1}, x_k) < \frac{1}{2} \qquad (k \in \mathbf{N}, k > n_1).$$

Ha $r_1 := 1$ és $G_1 := G_{r_1}(x_{n_1})$, akkor $G_1 \subset G_0$. Valóban, legyen $t \in G_1$, azaz $\rho(t, x_{n_1}) \le 1$. Ekkor

$$\rho(t, x_{n_0}) \le \rho(t, x_{n_1}) + \rho(x_{n_1}, x_{n_0}) < 1 + 1 = r_0,$$

azaz $t \in G_0$.

Teljes indukcióval okoskodva így megadhatunk egy olyan $(G_k) = (G_{r_k}(x_{n_k}))$ gömbsorozatot, amelyre

$$G_{k+1} \subset G_k \ , \ r_{k+1} = \frac{r_k}{2} \qquad (k \in \mathbf{N})$$

igaz. Mivel az (r_k) sorozatra mondott rekurzív összefüggés alapján nyilván $r_k = r_0/2^k \to 0 \quad (k \to \infty)$, ezért egyúttal $\lim(r_k) = 0$ is teljesül. A feltételek miatt ezért van olyan $\alpha \in X$, hogy $\alpha \in G_k$ minden $\mathbf{N} \ni k$-ra. Más szóval tehát

$$\rho(x_{n_k}, \alpha) \le r_k \to 0 \qquad (k \to \infty).$$

Ez nem mást jelent mint azt, hogy $\alpha = \lim(x_{n_k})$, azaz, hogy az (x_n) sorozat (x_{n_k}) részsorozata konvergens. Vegyük figyelembe, hogy az (x_n) sorozat *Cauchy*-sorozat, azaz (2.2.1) teljesül: bármely $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $N \in \mathbf{N}$, amellyel $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon/2$, hacsak $N < n, m \in \mathbf{N}$. Ugyanakkor $\alpha = \lim(x_{n_k})$ miatt meg van olyan $M \in \mathbf{N}$, hogy

$$\rho(x_{n_k}, \alpha) < \varepsilon/2 \qquad (M < k \in \mathbf{N}).$$

A háromszög-egyenőtlenség alapján viszont $m, k \in \mathbf{N}, m, k > \max\{N, M\}$ esetén (figyelembe véve, hogy $n_k \ge k$)

$$\rho(x_m, \alpha) \le \rho(x_m, x_{n_k}) + \rho(x_{n_k}, \alpha) < 2\varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Ezért az (x_n) sorozat konvergens (és $\lim(x_n) = \alpha$). ■

2.2.1. Megjegyzések.

i) Könnyű meggondolni, hogy a 2.2.1. Tételben szereplő (G_n) sorozatra a $\bigcap_{n=0}^{\infty} G_n$ metszethalmaz egy elemű.

ii) Legyen $\emptyset \ne A \subset X$ és $d(A) := \sup\{\rho(x, y) : x, y \in A\}$ (az A halmaz *átmérője*). A fentiekkel analóg módon látható be az alábbi állítás: *tegyük fel, hogy* $\emptyset \ne A_{n+1} \subset A_n \subset X \quad (n \in \mathbf{N})$ *olyan zárt halmazokból álló sorozat, amelyre* $\lim(d(A_n)) = 0$ *és az* (X, ρ) *tér teljes. Ekkor* $\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n \ne \emptyset$. (A most mondott állításban szereplő (A_n) halmazsorozatról azt is szoktuk mondani, hogy *egymásbaskatulyázott.*)

iii) Világos, hogy bármely $a \in X$ és $r > 0$ esetén $d(G_r(a)) \le 2r$, azaz a a 2.2.1. Tételben szereplő $\lim(r_n) = 0$ feltételből $\lim(d(G_n)) = 0$ következik. Továbbá az említett tétel a ii) megjegyzésnek az a speciális esete, amikor $A_n := G_n \quad (n \in \mathbf{N})$.

iv) Emlékeztetünk a valós számok axiómarendszere kapcsán megismert *Cantor*-axiómára: *legyen* (I_n) *egymásbaskatulyázott zárt intervallumoknak a sorozata. Ekkor* $\bigcap_{n=0}^{\infty} I_n \neq \emptyset$. Ez nyilván a ii) megjegyzés azon speciális esete, amikor $A_n := I_n \quad (n \in \mathbf{N})$, azzal a különbséggel, hogy ekkor nincs szükség a $\lim(d(I_n)) = 0$ feltételre. (Világos, hogy most $d(I) = d([a,b]) = b-a$.)

v) A 2.2.1. Tétel általában nem igaz a $\lim(r_n) = 0$ feltétel nélkül.

vi) Ha $(X, \|.\|)$ *Banach*-tér, $x_n \in X \quad (n \in \mathbf{N})$ és $\sum_{n=0}^{\infty} \|x_n\| < +\infty$, akkor létezik a $\sum_{n=0}^{\infty} x_n \in X$ sorösszeg. Ui. a feltétel miatt

$$\left\| \sum_{k=n}^{m} x_k \right\| \leq \sum_{k=n}^{m} \|x_k\| \to 0 \qquad (n, m \to \infty),$$

azaz az $(\sum_{k=0}^{n} x_k)$ részletösszegek sorozata *Cauchy*-sorozat, így a tér feltételezett teljessége miatt konvergens. Nem nehéz belátni, hogy az előbbiek meg is fordíthatók: *az* $(X, \|.\|)$ *normált tér akkor és csak akkor teljes, ha a* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *sor minden olyan esetben konvergens, amikor az* $x_n \in X \quad (n \in \mathbf{N})$ *elemekre* $\sum_{n=0}^{\infty} \|x_n\| < +\infty$ *igaz.* Ti. az elégségességhez legyen $y_n \in X \quad (n \in \mathbf{N})$ *Cauchy*-sorozat és válasszuk az (n_k) indexsorozatot úgy, hogy

$$\|y_{n_{k+1}} - y_{n_k}\| < \frac{1}{2^k} \qquad (k \in \mathbf{N})$$

teljesüljön. Világos, hogy az $x_k := y_{n_{k+1}} - y_{n_k} \quad (k \in \mathbf{N})$ sorozatra $\sum_{k=0}^{\infty} \|x_k\| < +\infty$ igaz. Ezért a

$$\sum_{k=0}^{m} x_k = y_{n_{m+1}} - y_{n_0} \qquad (m \in \mathbf{N})$$

sorozat, következésképpen az (y_{n_m}) sorozat is konvergens. Mivel (y_n) *Cauchy*-sorozat, ezért innen már triviálisan adódik, hogy (y_n) is konvergens.

2.2.2. Tétel (*Baire*)**.** *Tegyük fel, hogy az* (X, ρ) *metrikus tér teljes és zárt halmazoknak egy* (F_n) *sorozatával* $X = \bigcup_{n=0}^{\infty} F_n$. *Ekkor van olyan* $n \in \mathbf{N}$, *amellyel* $\operatorname{int} F_n \neq \emptyset$.

Bizonyítás. Indirekt úton fogjuk az állítást bebizonyítani: tegyük fel, hogy tetszőleges $n \in \mathbf{N}$ esetén $\operatorname{int} F_n = \emptyset$. Ekkor $F_0 \neq X$, azaz van olyan $a_0 \in X$, amelyre $a_0 \notin F_0$. Következésképpen $a_0 \in X \setminus F_0 \in \mathcal{T}_\rho$, így egy alkalmas $r_0 > 0$ számmal $K_{r_0}(a_0) \subset X \setminus F_0$. Nem nehéz meggondolni (esetleg r_0-t kicserélve $r_0/2$-re), hogy egyúttal az is feltehető: $G_0 := G_{r_0}(a_0) \subset X \setminus F_0$, azaz $G_0 \cap F_0 = \emptyset$.

Az indirekt feltétel miatt a $K_{r_0}(a_0)$ környezet nem lehet részhalmaza F_1-nek, azaz $K_{r_0}(a_0) \setminus F_1 \neq \emptyset$. Legyen $a_1 \in K_{r_0}(a_0) \setminus F_1 \in \mathcal{T}_\rho$ és $r_1 > 0$ olyan, hogy $K_{r_1}(a_1) \subset K_{r_0}(a_0) \setminus F_1$. Feltehető, hogy egyúttal $G_1 := G_{r_1}(a_1) \subset K_{r_0}(a_0) \setminus F_1$, azaz $G_1 \cap F_1 = \emptyset$, $G_1 \subset G_0$ és $r_1 \leq r_0/2$ is igaz.

Teljes indukcióval így kapunk egy egymásbaskatulyázott $(G_n) := (G_{r_n}(a_n))$ gömbsorozatot, amelyre $r_{n+1} \leq r_n/2$ és $G_n \cap F_n = \emptyset \quad (n \in \mathbf{N})$ teljesül. Világos, hogy $\lim(r_n) = 0$, ezért a 2.2.1. Tétel miatt $\bigcap_{n=0}^{\infty} G_n \neq \emptyset$. Legyen $\alpha \in \bigcap_{n=0}^{\infty} G_n$. Az X-re tett felételből $\alpha \in F_n$ következik valamilyen $\mathbf{N} \ni n$-re. Tehát $\alpha \in G_n \cap F_n = \emptyset$, ami nem lehet. ■

2.2.2. Megjegyzések.

i) Azt mondjuk, hogy az $A \subset X$ halmaz

- *sehol sem sűrű,* ha $\operatorname{int} \overline{A} = \emptyset$;
- *első kategóriájú,* ha $A = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$, ahol $A_n \quad (n \in \mathbf{N})$ sehol sem sűrű;
- *második kategóriájú,* ha nem első kategóriájú.

ii) Legyen az (X, ρ) tér teljes, $X = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$. Ekkor egyúttal $X = \bigcup_{n=0}^{\infty} \overline{A_n}$ is igaz, ezért a 2.2.2. Tétel miatt valamilyen $n \in \mathbf{N}$ mellett $\operatorname{int} \overline{A_n} \neq \emptyset$. Az X halmaz tehát nem lehet első kategóriájú, más szóval második kategóriájú. Ezért szokták a 2.2.2. Tételt *Baire-féle kategória-tételként* is emlegetni.

iii) Ha A sehol sem sűrű, akkor $X \setminus \overline{A}$ mindenütt sűrű, azaz bármely $\emptyset \neq K \subset X$ nyílt halmazra $K \cap (X \setminus \overline{A}) \neq \emptyset$ (különben ui. egy alkalmas nyílt K-ra $K \subset \overline{A}$ lenne). Ha tehát X első kategóriájú, azaz $X = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$ és $\operatorname{int} \overline{A}_n = \emptyset \quad (n \in \mathbf{N})$, akkor $\emptyset = \bigcap_{n=0}^{\infty} (X \setminus \overline{A}_n)$. Itt minden $\mathbf{N} \ni n$-re $X \setminus \overline{A}_n$ nyílt mindenütt sűrű halmaz.

iv) A 2.2.2. Tételhez hasonlóan látható be, hogy ha (X, ρ) *teljes metrikus tér,* $K_i \subset X \quad (i \in \mathbf{N})$ *nyílt és mindenütt sűrű* X*-ben, akkor a* $\bigcap_{i=0}^{\infty} K_i$ *metszethalmaz is mindenütt sűrű* X*-ben.* Az előbbi megjegyzés szerint ez utóbbi állításból a 2.2.2. Tétel következik.

Induljunk ki most egy tetszőleges (X, ρ) metrikus térből és legyen $\mathcal{C}$ az $x : \mathbf{N} \to X$ *Cauchy*-sorozatok halmaza.

2.2.1. Lemma *Bármely* $x = (x_n), y = (y_n) \in \mathcal{C}$ *esetén létezik és véges a* $\lim(\rho(x_n, y_n))$ *határérték.*

Bizonyítás. A háromszög-egyenlőtlenség alapján

$$\rho(x_n, y_n) \leq \rho(x_n, x_m) + \rho(x_m, y_m) + \rho(y_m, y_n) \qquad (n, m \in \mathbf{N}),$$

azaz $\rho(x_n, y_n) - \rho(x_m, y_m) \leq \rho(x_n, x_m) + \rho(y_n, y_m)$. Ha itt végrahajtjuk az $n \leftrightarrow m$ cserét, akkor a jobb oldal nem változik, a bal oldal pedig (-1)-gyel szorzódik, így

$$|\rho(x_n, y_n) - \rho(x_m, y_m)| \leq \rho(x_n, x_m) + \rho(y_n, y_m) \to 0 \qquad (n, m \to \infty).$$

Ez azt jelenti, hogy a (valós) $(\rho(x_n, y_n))$ sorozat *Cauchy*-sorozat (az $\mathbf{R}$ halmaz „szokásos” metrikájára nézve), tehát valóban konvergens. ■

Nevezzük az $x = (x_n), y = (y_n) \in \mathcal{C}$ sorozatokat *ekvivalenseknek* (jelölésben: $x \sim y$), ha $\lim(\rho(x_n, y_n)) = 0$.

2.2.2. Lemma. *Az előbb értelmezett* $\sim$ *reláció ekvivalencia.*

Bizonyítás. Az Olvasóra bízzuk az állítás ellenőrzését. ■

Jelöljük $\hat{\mathcal{C}}$-val az előbbi ekvivalencia által meghatározott ekvivalencia-osztályok halmazát. Ha $x \in \mathcal{C}$, akkor legyen $\hat{x} \in \hat{\mathcal{C}}$ az x sorozat által meghatározott ekvivalencia-osztály.

2.2.3. Lemma. *Legyen* $x, y \in \mathcal{C}, u \in \hat{x}, v \in \hat{y}$. *Ekkor* $\lim(\rho(x_n, y_n)) = \lim(\rho(u_n, v_n))$.

Bizonyítás. Mivel (ld. háromszög-egyenlőtlenség)

$$\rho(x_n, y_n) \leq \rho(x_n, u_n) + \rho(u_n, v_n) + \rho(v_n, y_n) \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

ezért (az $x \leftrightarrow u$, ill. $y \leftrightarrow v$ csere után) az $x \sim u$ és $y \sim v$ ekvivalenciát felhasználva

$$|\rho(x_n, y_n) - \rho(u_n, v_n)| \leq \rho(x_n, u_n) + \rho(v_n, y_n) \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

Innen valóban következik már, hogy $\lim(\rho(x_n, y_n)) = \lim(\rho(u_n, v_n))$. ■

A 2.2.3. Lemma alapján korrekt az alábbi definíció:

$$\hat{\rho}(\hat{x}, \hat{y}) := \lim(\rho(x_n, y_n)) \qquad (\hat{x}, \hat{y} \in \hat{\mathcal{C}}).$$

2.2.4. Lemma. $(\hat{\mathcal{C}}, \hat{\rho})$ *metrikus tér.*

Bizonyítás. Legyen $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z} \in \hat{\mathcal{C}}$. Ha $\hat{\rho}(\hat{x}, \hat{y}) = 0$, akkor $\lim(\rho(x_n, y_n)) = 0$. Ez azt jelenti, hogy $x \sim y$, következésképpen $y \in \hat{x}$. Ezért $\hat{x} = \hat{y}$.

A $\hat{\rho}(\hat{x}, \hat{x}) = 0 \leq \hat{\rho}(\hat{x}, \hat{y}) = \hat{\rho}(\hat{y}, \hat{x})$ relációk nyilvánvalóak.

Végül $\rho(x_n, y_n) \leq \rho(x_n, z_n) + \rho(z_n, y_n)$ $(n \in \mathbf{N})$ miatt

$$\hat{\rho}(\hat{x}, \hat{y}) = \lim(\rho(x_n, y_n)) \leq \lim(\rho(x_n, z_n)) + \lim(\rho(z_n, y_n)) = \hat{\rho}(\hat{x}, \hat{z}) + \hat{\rho}(\hat{z}, \hat{y}). \blacksquare$$

2.2.3. Megjegyzések.

i) Legyen $\sigma(x, y) := \lim(\rho(x_n, y_n)$ $(x = (x_n), y = (y_n) \in \mathcal{C})$, ekkor σ egy ún. *félmetrika,* azaz a „$\sigma(x, y) = 0 \implies x = y$” következtetéstől eltekintve rendelkezik a metrika tulajdonságaival.

ii) Legyen valamely $Y \neq \emptyset$ esetén $\sigma : Y^2 \to \mathbf{R}$ félmetrika, ekkor (Y, σ) egy ún. *félmetrikus tér.* Könnyű meggondolni, hogy az $x \sim y \iff \sigma(x, y) = 0$ $(x, y \in Y)$ reláció ekvivalencia. Ha $\hat{x}, \hat{y}$ az $x, y \in Y$ elemek által meghatározott ekvivalencia-osztályokat jelentik, akkor bármely $z \in \hat{x}, s \in \hat{y}$ esetén $\sigma(z, s) = \sigma(x, y)$. Innen azt kapjuk, hogy az ekvivalencia-osztályok $\widehat{Y}$ halmazában $\hat{\sigma}(\hat{x}, \hat{y}) := \sigma(x, y)$ $(\hat{x}, \hat{y} \in \widehat{Y})$ metrika, azaz $(\widehat{Y}, \hat{\sigma})$ metrikus tér.

iii) Legyen pl. $[a, b]$ egy kompakt intervallum, Y pedig az $[a, b]$-n *Riemann*-integrálható függvények halmaza. Ekkor $\sigma(f, g) := \int_a^b |f - g|$ $(f, g \in Y)$ félmetrika.

iv) A 2.2.4. Lemma a ii) megjegyzés speciális esete.

Ha $\alpha \in X$, akkor a konstans (α) sorozat nyilván $\mathcal{C}$-beli. Legyen $\hat{\alpha} := \widehat{(\alpha)} \in \hat{\mathcal{C}}$. Világos, hogy $(x_n) \in \hat{\alpha}$ azzal ekvivalens, hogy az (x_n) sorozat konvergens és $\lim(x_n) = \alpha$. Továbbá bármely $\alpha, \beta \in X$ esetén $\rho(\alpha, \beta) = \hat{\rho}(\hat{\alpha}, \hat{\beta})$.

Vezessük be a következő jelölést: $\widehat{X} := \{\hat{\alpha} \in \hat{\mathcal{C}} : \alpha \in X\}$, ekkor az $X \ni \alpha \mapsto \hat{\alpha} \in \widehat{X}$ megfeleltetés izometria, azaz bijekció és távolságtartó leképezés.

2.2.5. Lemma. *Bármely* $x = (x_n) \in \mathcal{C}$ *esetén* $\lim(\hat{\rho}(\widehat{x_n}, \hat{x})) = 0$.

Bizonyítás. A $\hat{\rho}$ metrika definíciója szerint tetszőleges $n \in \mathbf{N}$ esetén

$$\hat{\rho}(\widehat{x_n}, \hat{x}) = \lim_{k\to\infty} \rho(x_n, x_k).$$

Legyen $\varepsilon > 0$. Az x sorozat *Cauchy*-sorozat, ezért alkalmas $\mathbf{N} \ni N$-et választva $\rho(x_n, x_k) < \varepsilon$ $(N < n, k \in \mathbf{N})$. Ha tehát $N < n \in \mathbf{N}$ (rögzített), akkor

$$\lim_{k\to\infty} \rho(x_n, x_k) \le \varepsilon.$$

Következésképpen $\hat{\rho}(\widehat{x_n}, \hat{x})) \le \varepsilon \quad (N < n \in \mathbf{N})$. Ez éppen a bizonyítandó állítást jelenti. ■

2.2.4. Megjegyzés.

Az előbbi lemma alapján szokták (főleg idegen nyelvű terminológiában) a *Cauchy*-sorozatokat *önmagukban konvergens* sorozatoknak is nevezni.

2.2.6. Lemma. *Az* $\widehat{X}$ *halmaz mindenütt sűrű* $\hat{\mathcal{C}}$*-ben.*

Bizonyítás. A 2.2.5. Lemma alapján az állítás nyilvánvaló. ■

2.2.7. Lemma. *A* $(\hat{\mathcal{C}}, \hat{\rho})$ *tér teljes.*

Bizonyítás. Legyen $\xi_n = \widehat{(x_{nk})} \in \hat{\mathcal{C}} \;\; (n \in \mathbf{N})$ *Cauchy*-sorozat $\hat{\mathcal{C}}$-ben, azaz

$$\hat{\rho}(\xi_n, \xi_m) \to 0 \qquad (n, m \to \infty).$$

A 2.2.5. Lemma miatt minden $n \in \mathbf{N}$ esetén van olyan $k_n \in \mathbf{N}$, amellyel

$$\hat{\rho}(\widehat{x_{nk_n}}, \xi_n) < \frac{1}{n+1}.$$

Mutassuk meg, hogy $x := (x_{nk_n}) \in \mathcal{C}$. Valóban, ha $n, m \in \mathbf{N}$, akkor

$$\rho(x_{nk_n}, x_{mk_m}) = \hat{\rho}(\widehat{x_{nk_n}}, \widehat{x_{mk_m}}) \le \hat{\rho}(\widehat{x_{nk_n}}, \xi_n) + \hat{\rho}(\xi_n, \xi_m) + \hat{\rho}(\xi_m, \widehat{x_{mk_m}}) <$$

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{m+1} + \hat{\rho}(\xi_n, \xi_m) \to 0 \qquad (n, m \to \infty).$$

Legyen $\xi := \hat{x} \in \hat{\mathcal{C}}$ és lássuk be, hogy $\hat{\rho}(\xi_n, \xi) \to 0 \quad (n \to \infty)$. Legyen ehhez $n \in \mathbf{N}$, ekkor

$$\hat{\rho}(\xi_n, \xi) \le \hat{\rho}(\xi_n, \widehat{x_{nk_n}}) + \hat{\rho}(\widehat{x_{nk_n}}, \xi) < \frac{1}{n+1} + \hat{\rho}(\widehat{x_{nk_n}}, \xi),$$

ahol a 2.2.5. Lemma szerint $\hat{\rho}(\widehat{x_{nk_n}}, \xi) \to 0 \quad (n \to \infty)$. Tehát valóban $\hat{\rho}(\xi_n, \xi) \to 0 \quad (n \to \infty)$. ■

Foglaljuk össze egyetlen tételben a fent mondottakat.

2.2.3. Tétel (*Hausdorff*)**.** *Tetszőleges (X, ρ) metrikus térhez megadható olyan $(\mathbf{X}, \sigma)$ teljes metrikus tér és olyan $\mathcal{X} \subset \mathbf{X}$ halmaz, hogy $\mathcal{X}$ mindenütt sűrű $\mathbf{X}$-ben és X izometrikus $\mathcal{X}$-szel.*

2.2.5. Megjegyzések.

i) Szokás a 2.2.3. Tételt *Hausdorff*-féle *beágyazási tételnek* is nevezni.

ii) Belátható, hogy egyfajta egyértelműség is igaz az alábbi értelemben: *ha $(\mathbf{X}, \sigma)$, ill. $\mathcal{X}$ helyett $(\mathbf{X}^*, \sigma^*)$, ill. $\mathcal{X}^*$ is eleget tesz a tétel feltételeinek, akkor $\mathbf{X}$ és $\mathbf{X}^*$ izometrikus.*

iii) Ha $X := \mathbf{Q}$, $\rho(x, y) := |x - y|$ $(x, y \in \mathbf{Q})$, akkor $\mathbf{X}$ a valós számok halmazának egy modellje.

2.2.4. Tétel (*Banach-Tyihonov-Cacciopoli*)**.** *Legyen (X, ρ) teljes metrikus tér, $f : X \to X$ egy ún. kontrakció (azaz alkalmas $0 \leq q < 1$ számmal $\rho(f(u), f(v)) \leq q \cdot \rho(u, v) \quad (u, v \in X)$). Ekkor*

- *egyértelműen létezik olyan $\alpha \in X$ elem, amelyre $f(\alpha) = \alpha$;*

- *bármely $x_0 \in X$ mellett az $x_{n+1} := f(x_n) \quad (n \in \mathbf{N})$ rekurzióval definiált (x_n) sorozat konvergens és $\lim(x_n) = \alpha$;*

- $\rho(x_n, \alpha) \leq \dfrac{q^n}{1 - q} \cdot \rho(x_0, x_1) \quad (n \in \mathbf{N})$.

Bizonyítás. A tételben megadott (x_n) sorozatról a következőt mondhatjuk: tetszőleges $0 < k \in \mathbf{N}$ esetén

$$\rho(x_{k+1}, x_k) = \rho(f(x_k), f(x_{k-1})) \leq q \cdot \rho(x_k, x_{k-1}).$$

Innen teljes indukcióval rögtön kapjuk az alábbi becslést:

$$\rho(x_{k+1}, x_k) \leq q^k \cdot \rho(x_0, x_1).$$

Legyen most $n, m \in \mathbf{N}$ és $n < m$, ekkor a háromszög-egyenlőtlenség alapján

$$(*) \qquad \rho(x_n, x_m) \leq \sum_{k=n}^{m-1} \rho(x_{k+1}, x_k) \leq \rho(x_0, x_1) \cdot \sum_{k=n}^{m-1} q^k \leq \rho(x_0, x_1) \cdot \sum_{k=n}^{\infty} q^k = \frac{q^n}{1 - q} \cdot \rho(x_0, x_1).$$

Mivel $0 \leq q < 1$, ezért $q^n \to 0 \ (n \to \infty)$, azaz az előző becslés miatt $\rho(x_n, x_m) \to 0 \quad (n, m \to \infty)$. Tehát az (x_n) sorozat *Cauchy*-sorozat, így a tér teljessége következtében konvergens.

Legyen $\alpha := \lim(x_n)$ és mutassuk meg, hogy $f(\alpha) = \alpha$. Valóban, egyrészt $\alpha = \lim(x_{n+1}) = \lim(f(x_n))$, más szóval $\rho(f(x_n), \alpha) \to 0 \quad (n \to \infty)$. Másrészt

$$\rho(f(\alpha), \alpha) \leq \rho(f(\alpha), f(x_n)) + \rho(f(x_n), \alpha) \leq q \cdot \rho(\alpha, x_n) + \rho(f(x_n), \alpha) \to 0 \qquad (n \to \infty),$$

azaz $\rho(f(\alpha), \alpha) = 0$. Tehát $f(\alpha) = \alpha$.

Lássuk be, hogy tetszőleges $n \in \mathbf{N}$ mellett

$$\rho(x_n, x_m) \to \rho(x_n, \alpha) \qquad (m \to \infty).$$

Valóban, $\rho(x_n, x_m) \le \rho(x_n, \alpha) + \rho(\alpha, x_m)$, ill. $\rho(x_n, \alpha) \le \rho(x_n, x_m) + \rho(\alpha, x_m)$, azaz

$$|\rho(x_n, x_m) - \rho(x_n, \alpha)| \le \rho(\alpha, x_m) \to 0 \qquad (m \to \infty).$$

Innen az állításunk már nyilvánvaló. Ezt felhasználva a $(*)$ becslésből (az $m \to \infty$ határátmenettel) $\rho(x_n, \alpha) \le \dfrac{q^n}{1-q} \cdot \rho(x_0, x_1) \quad (n \in \mathbf{N})$ adódik.

Azt kell még megmutatnunk, hogy ha $\alpha, \beta \in X$ és $f(\alpha) = \alpha$, $f(\beta) = \beta$, akkor $\alpha = \beta$. Viszont

$$\rho(\alpha, \beta) = \rho(f(\alpha), f(\beta)) \le q \cdot \rho(\alpha, \beta),$$

amiből $0 \le q < 1$ miatt $\rho(\alpha, \beta) = 0$, azaz $\alpha = \beta$ valóban következik. ■

2.2.6. Megjegyzések.

i) A tételben szereplő α-t (érthetően) az f kontrakció *fixpontjának* nevezzük. Ezért a 2.2.4. Tételt *fixpont-tételként* is szokták emlegetni.

ii) Tekintsük a fenti tételben szereplő (x_n) sorozatot, legyen $n \in \mathbf{N}$ és $y_0 := x_n$, $y_{k+1} := f(y_k)$ $(k \in \mathbf{N})$. Nyilvánvaló, hogy $y_k = x_{n+k} \quad (k \in \mathbf{N})$. A tétel hibabecslő formulája szerint

$$\rho(y_k, \alpha) \le \frac{q^k}{1-q} \cdot \rho(y_0, y_1) \qquad (k \in \mathbf{N}),$$

azaz

$$\rho(x_{n+k}, \alpha) \le \frac{q^k}{1-q} \cdot \rho(x_n, x_{n+1}) \qquad (n, k \in \mathbf{N}).$$

iii) Legyen pl. $X := [1, +\infty)$, $\rho(x, y) := |x - y| \ (x, y \in X)$. Ekkor (X, ρ) teljes metrikus tér, az

$$f(t) := \frac{t}{2} + \frac{1}{t} \qquad (t \in X)$$

függvény pedig kontrakció: az elemi úton ellenőrizhető $\frac{t}{2} + \frac{1}{t} \ge 1 \quad (t \ge 1)$ egyenlőtlenség miatt $f : X \to X$, ill.

$$|f(t) - f(x)| = \left| \frac{t-x}{2} + \frac{x-t}{tx} \right| = |t - x| \cdot \left| \frac{1}{2} - \frac{1}{tx} \right| \le \frac{1}{2}|t - x| \qquad (t, x \in X).$$

A $q := \frac{1}{2}$ együttható tehát kielégíti a tételben szereplő feltételt. Így bármely $x_0 \ge 1$ esetén az

$$x_{n+1} := \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n} \qquad (n \in \mathbf{N})$$

sorozat konvergens, az $\alpha := \lim(x_n) \geq 1$ határértékre pedig teljesül az

$$\alpha = f(\alpha) = \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{\alpha}$$

egyenlőség. Innen világos, hogy $\alpha = \sqrt{2}$. Ezért pl. $x_0 := 2$ esetén $x_1 = 3/2$, azaz

$$\left| x_n - \sqrt{2} \right| \leq \frac{1}{2^n} \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

iv) Az előbbi megjegyzésben szereplő (x_n) sorozatra kapott $|x_n - \sqrt{2}| \leq \frac{1}{2^n}$ $(n \in \mathbf{N})$ „hibabecslésnél" jóval „erősebb" hibabecslés is adható. Ui. (ld. iii)) $x_n \geq 1$ $(n \in \mathbf{N})$ miatt

$$|x_{n+1} - \sqrt{2}| = \frac{|x_n^2 - 2\sqrt{2}x_n + 2|}{2x_n} = \frac{(x_n - \sqrt{2})^2}{2x_n} \leq \frac{(x_n - \sqrt{2})^2}{2} \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

azaz a $\delta_n := |x_n - \sqrt{2}|$ $(n \in \mathbf{N})$ jelöléssel

$$\frac{\delta_{n+1}}{2} \leq \left(\frac{\delta_n}{2}\right)^2 \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Innen teljes indukcióval kapjuk a

$$\frac{\delta_n}{2} \leq \frac{\delta_0}{2^{2^n}} \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

azaz az $|x_n - \sqrt{2}| \leq 2|x_0 - \sqrt{2}|2^{-2^n}$ $(n \in \mathbf{N})$ hibabecslést. Pl. a iii)-ban szereplő $x_0 := 2$ „kezdő" értékkel $|x_n - \sqrt{2}| \leq 2^{-2^n+1}$ $(n \in \mathbf{N})$. Tehát $|x_{10} - \sqrt{2}| \leq 2^{-1023}$, míg iii)-ból csak $|x_{10} - \sqrt{2}| \leq 2^{-9}$ következik. Ez a példa is mutatja azt a természetesnek mondható körülményt, hogy a konkrét esetekben az aktuális modell esetleg kihasználható specialitásai az absztrakt tételben kapott hibabecslésnél jobb becslést is eredményezhetnek.

3. Szeparábilis terek, bázisok

3.1. Szeparábilis terek.

Tekintsük az $(X, \mathcal{T})$ topologikus teret. A $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ halmazrendszert *topologikus bázisnak* nevezzük, ha bármely $A \in \mathcal{T}$ nyílt halmaz előállítható $\mathcal{B}$-beli halmazok egyesítéseként. Nyilvánvaló, hogy pl. $\mathcal{T}$ egyúttal topologikus bázis is. Mivel $\emptyset \in \mathcal{T}$, ezért $\emptyset \in \mathcal{B}$. Az elemi analízisből jól ismert, hogy (a számegyenes „szokásos" topológiájára nézve) bármely $A \subset \mathbf{R}$ nyílt halmaz előáll nyílt intervallumok uniójaként. Következésképpen a nyílt intervallumok rendszere (az üres halmazzal együtt) topologikus bázis ebben a térben.

3.1.1. Tétel. *Legyen $\mathcal{B}$ az $(X,\mathcal{T})$ térben topologikus bázis és válasszunk ki minden $\emptyset \neq A \in \mathcal{B}$ halmazból egy elemet: $x_A \in A$. Ekkor az $Y := \{x_A \in X : A \in \mathcal{B}\}$ halmaz mindenütt sűrű, azaz $\overline{Y} = X$.*

Bizonyítás. Tegyük fel indirekt módon, hogy $\emptyset \neq X \setminus \overline{Y}$. Mivel $X \setminus \overline{Y} \in \mathcal{T}$, ezért alkalmas $\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{B}$ halmazzal

$$X \setminus \overline{Y} = \bigcup_{A \in \mathcal{B}_0} A.$$

Ha itt $\emptyset \neq A \in \mathcal{B}_0$, akkor $x_A \in A$ miatt $x_A \in X \setminus \overline{Y}$. Viszont az Y halmaz definíciója szerint $x_A \in Y \subset \overline{Y}$. Így $x_A \in (X \setminus \overline{Y}) \cap \overline{Y}$, ami nyilván nem lehet. ■

3.1.1. Megjegyzések.

i) Ha $X = \emptyset$, akkor $\mathcal{T} = \mathcal{B} = \{\emptyset\}$, azaz $Y = \emptyset$. Mivel $\overline{\emptyset} = \emptyset$, ezért a tétel ebben a szélsőséges esetben is igaz.

ii) Az 1.5.1. Állítás szerint $\overline{Y} = X$ azt jelenti, hogy X minden x pontja érintkezési pontja Y-nak, azaz tetszőleges $K(x)$ környezetre $Y \cap K(x) \neq \emptyset$.

Az $(X,\mathcal{T})$ topologikus teret *szeparábilisnek* nevezzük, ha van olyan legfeljebb megszámlálható $Y \subset X$ halmaz, amely mindenütt sűrű X-ben: $\overline{Y} = X$. A 3.1.1. Tétel szerint tehát igaz a következő: *ha van a térnek legfeljebb megszámlálható topologikus bázisa, akkor a tér szeparábilis.*

Az alábbi szellemes példa azt mutatja, hogy ez a kijelentés nem megfordítható. Legyen ui. $X := \mathbf{R}$, a $\mathcal{T}$ topológiát pedig definiáljuk a következőképpen: legyen az $A \subset \mathbf{R}$ halmaz *nyílt,* ha $A = \emptyset$ vagy minden $a \in A$ esetén van olyan $r > 0$, hogy $[a, a+r) \subset A$. Egyszerűen meggondolható, hogy valóban topológiát definiáltunk és $\overline{\mathbf{Q}} = \mathbf{R}$, azaz $(\mathbf{R},\mathcal{T})$ szeparábilis. Mutassuk meg, hogy ebben a térben minden topologikus bázis számossága legalább kontinuum. Legyen ehhez $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ topologikus bázis. Ekkor tetszőleges $a \in \mathbf{R}$ esetén $[a, a+1) \in \mathcal{T}$, azaz alkalmas $\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{B}$ halmazzal $[a, a+1) = \bigcup_{B \in \mathcal{B}_0} B$. Így van olyan $B_a \in \mathcal{B}_0$, amellyel $a \in B_a$. Mivel $B_a \subset [a, a+1)$, ezért a B_a halmaznak van minimuma: $\min B_a = a$. Világos, hogy $a, c \in \mathbf{R}$, $a \neq c$ esetén $B_a \neq B_c$. Tehát $\mathcal{B}$-ben „legalább” annyi halmaznak kell lenni, mint ahány valós szám van, azaz $\mathcal{B}$ számossága legalább kontinuum.

3.1.2. Tétel. *Az $(X,\mathcal{T}) \equiv (X,\rho)$ metrikus tér akkor és csak akkor szeparábilis, ha van a térben legfeljebb megszámlálható topologikus bázis.*

Bizonyítás. Az előzmények miatt elegendő már csak azt belátni, hogy ha (X,ρ) szeparábilis, akkor van a térben legfeljebb megszámlálható topologikus bázis. Legyen tehát $Y \subset X$ legfeljebb megszámlálható, $\overline{Y} = X$ és

$$\mathcal{B} := \{K_r(y) : y \in Y\,,\ 0 < r \in \mathbf{Q}\} \cup \{\emptyset\}.$$

Világos, hogy $\mathcal{B}$ legfeljebb megszámlálható. Ha $\emptyset \neq A \subset X$ nyílt, akkor tetszőleges $a \in A$ ponthoz van olyan $\delta > 0$, hogy $K_\delta(a) \subset A$. Az $\overline{Y} = X$ feltétel miatt ugyanakkor tetszőleges $\sigma > 0$ számhoz megadható az $y \in Y$ elem úgy, hogy $\rho(a, y) < \sigma$. Tehát $a \in K_\sigma(y)$. Ha itt $\sigma < \delta/2$, akkor $K_\sigma(y) \subset K_\delta(a)$. Valóban, legyen $t \in K_\sigma(y)$, ekkor

$$\rho(t, a) \leq \rho(t, y) + \rho(y, a) < 2\sigma < \delta.$$

Így $a \in K_\sigma(y) \subset K_\delta(a) \subset A$. A σ „sugárról” feltehető, hogy racionális, különben válasszunk helyette egy tetszőleges racionális számot a $(\sigma, \delta/2)$ intervallumból. Következésképpen $K^{(a)} := K_\sigma(y) \in \mathcal{B}$. A konstrukcióból nyilvánvaló, hogy $A = \bigcup_{a\in A} K^{(a)}$, azaz $\mathcal{B}$ valóban topologikus bázis. ■

3.1.2. Megjegyzések.

i) Érdemes külön is megfogalmazni, hogy mit is jelent egy (X, ρ) metrikus tér szeparábilitása (ld. 3.1.1. ii) megjegyzés): van olyan $\mathcal{N} \subset \mathbf{N}$ (azaz legfeljebb megszámlálható) „indexhalmaz” és X-nek olyan $Y := \{y_n \in X : n \in \mathcal{N}\}$ részhalmaza, hogy bármely $x \in X$ és $\varepsilon > 0$ esetén egy alkalmas $\mathcal{N} \ni n$-nel $\rho(x, y_n) < \varepsilon$.

ii) Ha pl. a szóban forgó tér a valós számok tere a „szokásos” metrikával, akkor $\overline{\mathbf{Q}} = \mathbf{R}$ miatt a „számegyenes” szeparábilis. Innen rögtön következik, hogy bármely $0 < n \in \mathbf{N}$ és $1 \leq p \leq +\infty$ esetén a $(\mathbf{K}^n, \rho_p)$ tér is szeparábilis (ld. 1.4.).

iii) Legyen

$$X := \{x = (x_n) : \mathbf{N} \to \mathbf{K} : \sup_{n\in\mathbf{N}} |x_n| < +\infty\},$$

$$\rho(x, y) := \sup_{n\in\mathbf{N}} |x_n - y_n| \qquad (x = (x_n), y = (y_n) \in X).$$

Könnyen belátható, hogy (X, ρ) metrikus tér. Mutassuk meg, hogy ez a tér nem szeparábilis. Ha ui.

$$S := \{x = (x_n) \in X : x_n \in \{0, 1\} \ \ (n \in \mathbf{N})\},$$

akkor pl. a $[0, 1]$-beli valós számok diadikus kifejtésére gondolva rögtön adódik, hogy S kontinuum számosságú. Ti. az $S_0 := \{x \in S : \lim x = 1\}$ jelöléssel az

$$S \setminus S_0 \ni x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n}{2^{n+1}} \in [0, 1)$$

megfeleltetés bijekció. Továbbá nyilvánvaló, hogy az $x, z \in S$, $x \neq z$ sorozatokra $\rho(x, z) = 1$. Ha tehát $Y \subset X$ és $\overline{Y} = X$, akkor minden $S \ni x$-hez kell lennie olyan $y_x \in Y$ elemnek, amellyel $\rho(x, y_x) < 1/2$. Legyen $x, z \in S$, $x \neq z$, ekkor $y_x \neq y_z$, különben (az $u := y_x = y_z$ jelöléssel)

$$1 = \rho(x, z) \leq \rho(x, u) + \rho(u, z) < 2 \cdot \frac{1}{2} = 1,$$

ami nem lehet. Az $\{y_x \in Y : x \in S\}$ halmaz tehát kontinuum számosságú, ezért Y is legalább kontinuum számosságú.

3.2. Zárt rendszerek, bázisok.

A továbbiakban legyen $(X, \rho) \equiv (X, \|.\|)$. Ha $Y \subset X$, akkor jelöljük $\mathcal{L}(Y)$-nal az Y halmaz *lineáris burkát,* azaz az Y elemeiből alkotott véges lineáris kombinációk halmazát. Nyilván $\mathcal{L}(Y)$ altere X-nek, ill. $Y \subset \mathcal{L}(Y)$. Ha Y mindenütt sűrű, azaz $\overline{Y} = X$, akkor $\overline{Y} \subset \overline{\mathcal{L}(Y)}$ miatt $\mathcal{L}(Y)$ is mindenütt sűrű X-ben. Tehát $\overline{\mathcal{L}(Y)} = X$, azaz bármely $x \in X$ és $\varepsilon > 0$ esetén van olyan $z \in \mathcal{L}(Y)$, hogy $\|x - z\| < \varepsilon$.

Azt mondjuk, hogy $\mathcal{X} \subset X$ *zárt rendszer,* ha $\mathcal{L}(\mathcal{X})$ mindenütt sűrű X-ben: $\overline{\mathcal{L}(\mathcal{X})} = X$. Ha tehát $(X, \|.\|)$ szeparábilis, akkor van benne egy legfeljebb megszámlálható zárt rendszer. Megmutatjuk, hogy ez fordítva is igaz.

3.2.1. Tétel *Az $(X, \|.\|)$ normált tér akkor és csak akkor szeparábilis, ha van benne egy legfeljebb megszámlálható zárt rendszer.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy valamilyen $\mathcal{N} \subset \mathbf{N}$ indexhalmazzal $Y = \{y_n \in X : n \in \mathcal{N}\}$ zárt rendszer és legyen $\mathcal{L}_r(Y)$ az Y halmaz *racionális burka,* azaz az Y elemeiből alkotott olyan véges $\sum_k \alpha_k y_k$ lineáris kombinációk halmaza, amelyekben minden α_k együtthatóra $\operatorname{Re}\alpha_k$, $\operatorname{Im}\alpha_k$ racionális számok. Világos, hogy $\mathcal{L}_r(Y)$ legfeljebb megszámlálható. Lássuk be, hogy $\overline{\mathcal{L}_r(Y)} = X$. Legyen ehhez $x \in X$, $\varepsilon > 0$ és $y := \sum_k \alpha_k y_k \in \mathcal{L}(Y)$ olyan lineáris kombináció, amelyre $\|x - y\| < \varepsilon/2$. Ha $z := \sum_k \beta_k y_k \in \mathcal{L}_r(Y)$, akkor

$$\|x - z\| \leq \|x - y\| + \|y - z\| < \varepsilon/2 + \sum_k |\alpha_k - \beta_k| \|y_k\|.$$

Ha $\delta > 0$ és az itt szereplő valamennyi (véges sok) k indexre a β_k „racionális” együtthatók olyanok, hogy $|\alpha_k - \beta_k| < \delta$, akkor

$$\|x - z\| < \varepsilon/2 + \delta \sum_k \|y_k\| =: \varepsilon/2 + M\delta.$$

Válasszuk a δ számot úgy, hogy $M\delta < \varepsilon/2$, ekkor $\|x - z\| < \varepsilon$. Mivel $\varepsilon > 0$ tetszőleges volt, ez éppen azt jelenti, hogy $\overline{\mathcal{L}_r(Y)} = X$. Tehát a tér valóban szeparábilis. ■

3.2.1. Megjegyzések.

i) Legyen (a fenti bizonyításban használt jelölésekkel) $Y = \{y_n \in X : n \in \mathcal{N}\}$ zárt rendszer, $x \in X$ és $\varepsilon > 0$, $\sum_k \alpha_k y_k \in \mathcal{L}(Y)$ pedig olyan, hogy

$$\left\| x - \sum_k \alpha_k y_k \in \mathcal{L}(Y) \right\| < \varepsilon.$$

Ha $0 < \tilde{\varepsilon} < \varepsilon$ és $\sum_j \widetilde{\alpha}_j \widetilde{y}_j \in \mathcal{L}(Y)$ olyan, hogy $\|x - \sum_j \widetilde{\alpha}_j \widetilde{y}_j\| < \tilde{\varepsilon}$, akkor a $\sum_k \alpha_k y_k$, $\sum_j \widetilde{\alpha}_j \widetilde{y}_j$ kombinációknak általában „semmi közük egymáshoz”.

ii) Tegyük fel, hogy $x \in X$ és $e_n \in X \quad (n \in \mathbf{N})$ olyan sorozat, hogy alkalmas $\alpha_k \in \mathbf{K} \quad (k \in \mathbf{N})$ együtthatókkal $x = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k e_k$. Tehát bármely $\varepsilon > 0$ esetén van olyan $n \in \mathbf{N}$, amellyel az $S_n := \sum_{k=0}^{n} \alpha_k e_k \in \mathcal{L}(\{e_k \in X : k \in \mathbf{N}\})$ lineáris kombinációra $\|x - S_n\| < \varepsilon$. Mivel a feltételezés szerint $S_n \to x \quad (n \to \infty)$, ezért tetszőleges $0 < \tilde{\varepsilon} < \varepsilon$ számot megadva van olyan $k \in \mathbf{N}$, amellyel $\|x - S_{n+k}\| < \tilde{\varepsilon}$. A közelítés kívánt „pontosságát” javítva, azaz ε-t $\tilde{\varepsilon}$-ra cserélve az

$$S_{n+k} = S_n + \sum_{j=n+1}^{n+k} \alpha_j e_j$$

közelítés meghatározásakor a „régi” adatokat (tehát az $\alpha_0, ..., \alpha_n$ együtthatókat) fel tudtuk használni.

Az utolsó megjegyzésből kiindulva nevezzük az $e_k \in X \quad (k \in \mathcal{N}$, ahol $\mathcal{N} := \{0, ..., N\}$ valamilyen $N \in \mathbf{N}$ esetén vagy $\mathcal{N} := \mathbf{N}$) elemek rendszerét *Schauder-bázisnak* (a továbbiakban röviden *bázisnak*), ha bármely $x \in X$ elem egyértelműen állítható elő

$$x = \sum_{k=0}^{N} \alpha_k e_k \ \ (\text{ha } \ \mathcal{N} = \{0, ..., N\}) \ \ \text{vagy} \ \ x = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k e_k \ \ (\text{ha } \ \mathcal{N} = \mathbf{N})$$

alakban alkalmas $\alpha_k \in \mathbf{K} \quad (k \in \mathcal{N}$ vagy $k \in \mathbf{N})$ együtthatókkal (ld. 6.6.2. viii) megjegyzés). (Az $\mathcal{N} = \mathbf{N}$ esetben tehát x egy konvergens sor összege: $\|x - \sum_{k=0}^{n} \alpha_k e_k\| \to 0 \quad (n \to \infty)$.)

Ha $\mathcal{N} = \{0, ..., N\}$, akkor az $X \ni x \mapsto \alpha := (\alpha_0, ..., \alpha_N) \in \mathbf{K}^{N+1}$ megfeleltetés nyilván izomorfia ($(X, \|.\|)$ *véges dimenziós*), ill.

$$\|x\| \le \sum_{k=0}^{N} |\alpha_k| \|e_k\| \le \max_{k=0,\ldots,N} |\alpha_k| \sum_{k=0}^{N} \|e_k\| =: M \cdot \max_{k=0,\ldots,N} |\alpha_k| = M\|\alpha\|_\infty.$$

Legyen $\|x\|_\infty := \|\alpha\|_\infty$, ekkor könnyen meggondolhatóan $X \ni x \mapsto \|x\|_\infty$ norma. Tehát minden $x \in X$ esetén $\|x\| \le M\|x\|_\infty$.

3.2.1. Lemma. *Van olyan $m > 0$ szám, amellyel $m\|x\|_\infty \le \|x\| \quad (x \in X)$.*

Bizonyítás. Definiáljuk az $f : \mathbf{K}^{N+1} \to [0, +\infty)$ függvényt a következőképpen:

$$f(\alpha) := \|x\| \qquad \left(\alpha = (\alpha_0, ..., \alpha_N) \in \mathbf{K}^{N+1}, \, x := \sum_{k=0}^{N} \alpha_k e_k \right).$$

Az f függvény folytonos, ui. $\alpha, \beta \in \mathbf{K}^{N+1}$ esetén az $x := \sum_{k=0}^{N} \alpha_k e_k$, $y := \sum_{k=0}^{N} \beta_k e_k$ jelölésekkel

$$|f(\alpha) - f(\beta)| = |\|x\| - \|y\|| \le \|x - y\| = \left\| \sum_{k=0}^{N} (\alpha_k - \beta_k) e_k \right\| \le M\|\alpha - \beta\|_\infty.$$

Az $E := \{\alpha \in \mathbf{K}^{N+1} : \|\alpha\|_\infty = 1\}$ halmaz korlátos és zárt, ezért a jól ismert *Weierstrass*-tétel alapján létezik az

$$(0 \le)\, m := \min\{f(\alpha) : \alpha \in E\}$$

minimum. Ha $\gamma \in E$ olyan, hogy $f(\gamma) = m$, akkor $m = \left\|\sum_{k=0}^{N} \gamma_k e_k\right\|$ miatt $m > 0$, különben $\sum_{k=0}^{N} \gamma_k e_k = 0$, azaz $\gamma = (0, ..., 0)$. Ekkor viszont $\|\gamma\|_\infty = 0$ lenne, ami ellentmond annak, hogy $\gamma \in E$.

Legyen $0 \ne x = \sum_{k=0}^{N} \alpha_k e_k \in X$, ekkor $0 \ne \alpha = (\alpha_0, ..., \alpha_N) \in \mathbf{K}^{N+1}$ és $\alpha/\|\alpha\|_\infty \in E$. Következésképpen

$$m \leq f(\alpha/\|\alpha\|_\infty) = \frac{f(\alpha)}{\|\alpha\|_\infty} = \frac{\|x\|}{\|x\|_\infty},$$

amiből $\|x\| \geq m\|x\|_\infty$ már következik (és az utóbbi egyenlőtlenség az $x = 0$ esetben is triviálisan igaz). ■

3.2.2. Megjegyzések.

i) Tegyük fel, hogy az X vektortéren $\|.\|$, ill. $\|.\|_*$ egyaránt norma. Azt mondjuk, hogy $\|.\|, \|.\|_*$ *ekvivalensek* ($\|.\| \sim \|.\|_*$), ha alkalmas $M, m > 0$ konstansokkal

$$m\|x\|_* \leq \|x\| \leq M\|x\|_* \qquad (x \in X).$$

ii) Ha $0 < n \in \mathbf{N}$, $X := \mathbf{K}^n$ és $1 \leq p, q \leq +\infty$ (ld. 1.3.), akkor $\|.\|_p \sim \|.\|_q$ (ami egyszerű számolással ellenőrizhető).

iii) Legyen

$$X := \left\{ x = (x_n) : \mathbf{N} \to \mathbf{K} : \sum_{n=0}^{\infty} |x_n| < +\infty \right\},$$

$$\|x\| := \sum_{n=0}^{\infty} |x_n| \ , \ \|x\|_* := \sup_{n \in \mathbf{N}} |x_n| \qquad (x \in X).$$

Világos, hogy $\|.\|$ és $\|.\|_*$ norma X-en, ill. $\|x\|_* \leq \|x\| \quad (x \in X)$. Ugyanakkor az

$$x_k^{(n)} := \begin{cases} 1 & (k = 0, ..., n) \\ \\ 0 & (k > n) \end{cases} \qquad (n, k \in \mathbf{N})$$

(nyilván X-beli) $x^{(n)} = \left(x_k^{(n)}\right)$ sorozatokra $\|x^{(n)}\| = n + 1$ és $\|x^{(n)}\|_* = 1$ igaz. A fenti tulajdonságú M konstans tehát ebben az esetben nem létezik, azaz $\|.\|$, $\|.\|_*$ nem ekvivalensek.

iv) Ekvivalens $\|.\|, \|.\|_*$ normák esetén az $(X, \|.\|)$, $(X, \|.\|_*)$ normált terek topologiailag azonosak: ha $(X, \rho) \equiv (X, \|.\|)$ és $(X, \rho_*) \equiv (X, \|.\|_*)$, akkor $\mathcal{T}_\rho = \mathcal{T}_{\rho_*}$.

Ha $(X, \|.\|)$ véges dimenziós, akkor a 3.2.1. Lemma, ill. az előtte mondottak szerint $\|.\| \sim \|.\|_*$. Mivel (az X feletti normák között) $\sim$ nyilván ekvivalencia, ezért innen rögtön következik a

3.2.2. Tétel. *Tegyük fel, hogy $(X, \|.\|)$ véges dimenziós. Ekkor tetszőleges $X \ni x \mapsto \|x\|_*$ normára igaz, hogy $\|.\| \sim \|.\|_*$.*

Tekintsük valamely korlátos és zárt $[a, b] \subset \mathbf{R}$ intervallum esetén az

$$X := C[a, b] := \{f : [a, b] \to \mathbf{R} : f \text{ folytonos}\}$$

($\mathbf{R}$-re vonatkozóan nyilván) lineáris teret és az $\|f\|_\infty := \max_{x \in [a,b]} |f(x)| \qquad (f \in X)$ normát (ami szintén könnyen ellenőrizhetően valóban norma). Tegyük fel, hogy a $t_n \in [a, b] \quad (n \in \mathbf{N})$ „alappontokra” igaz a következő: $t_0 := a$, $t_1 := b$, $t_n \neq t_m \quad (n \neq m \in \mathbf{N})$ és

$$\overline{\{t_n \in [a,b] : n \in \mathbf{N}\}} = [a,b]$$

(ahol az utóbbi $\overline{\{...\}}$ lezárás a számegyenes „szokásos" topológiája szerint értendő). Definiáljuk a $\varphi_n \in X \quad (n \in \mathbf{N})$ függvényeket a következőképpen: $\varphi_0(a) := \varphi_1(b) := 1$, $\varphi_0(b) := \varphi_1(a) := 0$ és φ_0, ill. φ_1 grafikonja egy-egy szakasz. Ha $2 \leq n \in \mathbf{N}$, akkor jelöljük u-val, ill. v-vel a $t_0, ..., t_{n-1}$ pontok közül a t_n pont két „szomszédját" $(u < t_n < v)$ és legyen φ_n az alábbi függvény: $\varphi_n(x) := 0$ $(x \in [a,u] \cup [v,b])$, $\varphi_n(t_n) := 1$, az $[u, t_n]$, $[t_n, v]$ intervallumokon pedig legyen a φ_n grafikonja egy-egy szakasz. Az így definiált (folytonos töröttvonalakból álló) (φ_n) függvénysorozatot *Schauder-szerű rendszernek* nevezzük.

3.2.3. Tétel. *A (φ_n) Schauder-szerű rendszer bázis a $(C[a,b], \|.\|_\infty)$ térben.*

Bizonyítás. Azt kell belátnunk, hogy tetszőleges $f \in C[a,b]$ függvényhez egyértelműen adhatók meg az $\alpha_k \in \mathbf{R} \quad (k \in \mathbf{N})$ együtthatók úgy, hogy

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \varphi_k$$

(ahol tehát az

$$S_n := \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \varphi_k \quad (n \in \mathbf{N})$$

részletösszegek egyenletesen konvergálnak f-hez). Ha ilyen előállítás egyáltalán létezik, akkor egyszerű behelyettesítéssel kapjuk a $\varphi_k \quad (k \in \mathbf{N})$ függvények definíciója alapján, hogy

$$(*) \qquad \alpha_0 = f(a)\ ,\ \alpha_1 = f(b)\ ,\ \alpha_n = f(t_n) - \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \varphi_k(t_n) \qquad (2 \leq n \in \mathbf{N}).$$

Vegyük észre, hogy ezzel egyrészt „elintéztük" a keresett együtthatók egyértelműségét, másrészt $(*)$ egy rekurzív összefüggést határoz meg α_k-kra.

Tekintsük most már a $(*)$ együtthatókkal definiált fenti $S_n \quad (n \in \mathbf{N})$ részletösszegeket (a $t_0, ..., t_n$ pontokra nézve lineáris *spline*-okat). A $(*)$ rekurzióból rögtön következik, hogy S_n „interpolál":

$$S_n(x) = f(x) \qquad (x \in \{t_0, ..., t_n\}).$$

Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges, $\delta > 0$ pedig az f függvény egyenletes folytonossága szerint $\varepsilon/2$-höz létező olyan szám, hogy

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon/2 \qquad (x, y \in [a,b], |x-y| < \delta).$$

Az alappontok sűrűn vannak $[a,b]$-ben, ezért megadható olyan $N \in \mathbf{N}$, amellyel minden $\mathbf{N} \ni n > N$ esetén az $[a,b]$ intervallumnak a $t_0, ..., t_n$ pontok által meghatározott $\tau_n := \{t_0, ..., t_n\}$ felosztása már δ-nál finomabb: ha $x, y \in \tau_n$ szomszédosak ebben a felosztásban, akkor $|x-y| < \delta$.

Legyen $t \in [a,b], n \in \mathbf{N}, n > N,\ x, y \in \tau_n$ pedig olyan szomszédos alappontok a τ_n felosztásban, hogy $x \leq t \leq y$. Ekkor

$$|f(t) - S_n(t)| \leq |f(t) - f(x)| + |f(x) - S_n(t)| = |f(t) - f(x)| + |S_n(x) - S_n(t)| \leq$$

$$|f(t) - f(x)| + |S_n(x) - S_n(y)| = |f(t) - f(x)| + |f(y) - f(x)| < \varepsilon.$$

Tehát $\|f - S_n\|_\infty < \varepsilon \ \ (\mathbf{N} \ni n > N)$, ami éppen a bizonyítandó állítást jelenti. ■

3.2.3. Megjegyzések.

i) Könnyű meggondolni, hogy ha φ_0-t kicseréljük a $\varphi_0 \equiv 1$ függvényre, akkor a 3.2.2. Tétel továbbra is igaz marad.

ii) (*Haar Alfréd* (1910).) Legyen $h_n : [0,1] \to \mathbf{R} \ \ (n \in \mathbf{N})$ az alábbi függvényrendszer: $h_0 \equiv 1$, az $\mathbf{N} \ni n = 2^k + j \quad (k \in \mathbf{N},\ j = 0, ..., 2^k - 1)$ esetben pedig

$$h_n(x) := \begin{cases} \sqrt{2^k} & (j/2^k \leq x < (2j+1)/2^{k+1}) \\ \\ -\sqrt{2^k} & ((2j+1)/2^{k+1} \leq x < (j+1)/2^k)\ , \\ \\ 0 & (x \in [0,1) \setminus [j/2^k, (j+1)/2^k)) \end{cases}$$

ill. legyen $h_n(1) := \lim_{x \to 1-0} h_n(x)$. Ha $f \in C[0,1]$, $\hat{f}(n) := \int_0^1 f h_n \quad (n \in \mathbf{N})$, akkor a $\sum_{k=0}^n \hat{f}(k) h_k \quad (n \in \mathbf{N})$ *Haar-Fourier-részletösszegek* egyenletesen konvergálnak f-hez.

iii) A (h_n) *Haar-rendszer* természetesen nem *Schauder*-bázis $(C[0,1], \|.\|_\infty)$-ben, hiszen $h_n \notin C[0,1] \quad (1 \leq n \in \mathbf{N})$.

iv) (*J. Schauder* (1927).) Tekintsük az (s_n) *Schauder-rendszert,* ahol $s_0 \equiv 1$ és $s_n(x) := \int_0^x h_n$ $(x \in [0,1], 1 \leq n \in \mathbf{N})$. Világos, hogy (s_n) egyúttal *Schauder*-szerű rendszer, azaz a 3.2.2. Tétel (ld. az i) megjegyzést is) szerint (s_n) *Schauder*-bázis $(C[0,1], \|.\|_\infty)$-ben.

v) Világos, hogy ha egy $(X, \|.\|)$ normált térben van bázis, akkor az illető tér szeparábilis. Hosszú ideig megoldatlan volt az ún. *bázisprobléma*: igaz-e mindez fordítva? A nemleges választ 1973-ban *P. Enflo* adta meg.

3.3. Ortogonális rendszerek, Fourier-sorok.

Tegyük fel, hogy $(X, \|.\|) \equiv (X, \langle , \rangle)$ és az $(X, \|.\|)$ tér szeparábilis. Ekkor a 3.2.1. Tétel szerint van olyan $\mathcal{N} := \{0, ..., N\}$ (valamilyen $N \in \mathbf{N}$ mellett) vagy $\mathcal{N} := \mathbf{N}$ indexhalmaz és elemeknek olyan $e_k \in X \quad (k \in \mathcal{N})$ rendszere, hogy $(e_k, k \in \mathcal{N})$ zárt rendszer. A *Schmidt*-féle ortogonalizációs eljárást alkalmazva $(e_k, k \in \mathcal{N})$-re alkalmas $\alpha_{jk} \in \mathbf{K} \quad (k \in \mathcal{N},\ j = 0, ..., k)$ együtthatókkal az $f_k := \sum_{j=0}^k \alpha_{jk} e_j \quad (k \in \mathcal{N})$ elemek $(f_k, k \in \mathcal{N})$ rendszere *ortonormált*:

$$\langle f_k, f_j \rangle = \begin{cases} 0 & (k \neq j) \\ \\ 1 & (k = j) \end{cases} \qquad (k, j \in \mathcal{N}).$$

Nyilvánvaló, hogy

$$\mathcal{L}(\{e_k \in X : k \in \mathcal{N}\}) = \mathcal{L}(\{f_k \in X : k \in \mathcal{N}\}),$$

sőt tetszőleges $n \in \mathcal{N}$ esetén

$$\mathcal{L}(\{e_k \in X : k = 0, ..., n\}) = \mathcal{L}(\{f_k \in X : k = 0, ..., n\}).$$

Speciálisan az $(f_k, k \in \mathcal{N})$ rendszer is zárt rendszer. Ezért a továbbiakban feltesszük, hogy a zárt $(e_k, k \in \mathcal{N})$ rendszer egyúttal *ortonormált rendszer*: ONR.

Valamely $x \in X$ és $k, n \in \mathcal{N}$ esetén legyen $\hat{x}(k) := \langle x, e_k \rangle$ az x elem k-adik *Fourier-együtthatója,*

$$S_n(x) := \sum_{k=0}^{n} \hat{x}(k) e_k$$

az n-edik *Fourier-részletösszege.*

3.3.1. Lemma (*Bessel*)**.** *Tetszőleges $x \in X$, $n \in \mathcal{N}$ mellett igaz, hogy*

$$\|x - S_n(x)\| = \min \left\{ \left\| x - \sum_{k=0}^{n} \alpha_k e_k \right\| : \alpha_0, ..., \alpha_n \in \mathbf{K} \right\} = \sqrt{\|x\|^2 - \sum_{k=0}^{n} |\hat{x}(k)|^2}.$$

Bizonyítás. Egyszerű számolással ellenőrizhető, hogy bármely $\alpha_0, ..., \alpha_n \in \mathbf{K}$ választással

$$\left\| x - \sum_{k=0}^{n} \alpha_k e_k \right\|^2 = \|x - S_n(x)\|^2 + \sum_{k=0}^{n} |\alpha_k - \hat{x}(k)|^2,$$

amiből a lemmabeli első egyenlőség már nyilvánvaló.

A második egyenlőséghez hasonlóan jutunk:

$$\|x - S_n(x)\|^2 = \langle x - S_n(x), x - S_n(x) \rangle =$$

$$\langle x, x \rangle + \sum_{k,j=0}^{n} \langle \hat{x}(k) e_k, \hat{x}(j) e_j \rangle - \sum_{k=0}^{n} \langle x, \hat{x}(k) e_k \rangle - \sum_{k=0}^{n} \langle \hat{x}(k) e_k, x \rangle =$$

$$\|x\|^2 + \sum_{k,j=0}^{n} \hat{x}(k) \overline{\hat{x}(j)} \langle e_k, e_j \rangle - \sum_{k=0}^{n} \overline{\hat{x}(k)} \hat{x}(k) - \sum_{k=0}^{n} \overline{\hat{x}(k)} \hat{x}(k) = \|x\|^2 - \sum_{k=0}^{n} |\hat{x}(k)|^2. \blacksquare$$

3.3.1. Megjegyzések.

i) Mivel $0 \leq \|x - S_n(x)\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=0}^{n} |\hat{x}(k)|^2$, ezért innen rögtön adódik a *Bessel-egyenlőtlenség*:

$$\sum_{k=0}^{n} |\hat{x}(k)|^2 \leq \|x\|^2 \qquad (x \in X, k \in \mathcal{N}).$$

Ha itt $\mathcal{N} = \mathbf{N}$, akkor $n \to \infty$ határátmenet után

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\hat{x}(k)|^2 \leq \|x\|^2 \qquad (x \in X).$$

ii) Világos, hogy a 3.3.1. Lemma bizonyításában, ill. az előző megjegyzésben sehol sem hivatkoztunk az $(e_k, k \in \mathcal{N})$ rendszer zártságára, ezért mindezek tetszőleges ONR esetén igazak.

iii) Legyen $n \in \mathcal{N}$ és

$$\delta_n := \min \left\{ \left\| x - \sum_{k=0}^{n} \alpha_k e_k \right\| : \alpha_0, ..., \alpha_n \in \mathbf{K} \right\}.$$

Ha az $(e_k, k \in \mathcal{N})$ rendszer zárt, akkor tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $M \in \mathcal{N}$ és $\sum_{k=0}^{M} \alpha_k e_k$ lineáris kombináció, hogy $\|x - \sum_{k=0}^{M} \alpha_k e_k\| < \varepsilon$. Nyilvánvaló, hogy bármely $n \in \mathcal{N}$, $n \geq M$ esetén

$$\|x - S_n(x)\| = \delta_n \leq \delta_M \leq \left\| x - \sum_{k=0}^{M} \alpha_k e_k \right\| < \varepsilon.$$

Ha $\mathcal{N} := \{0, ..., N\}$ valamilyen $\mathbf{N} \ni N$-nel, akkor egyúttal

$$\|x - S_N(x)\| = \delta_N \leq \delta_M < \varepsilon.$$

Mivel itt $\varepsilon > 0$ tetszőleges, ezért $\|x - S_N(x)\| = 0$, következésképpen $x = S_N(x)$. Ekkor tehát bármely $x \in X$ elemre $x = \sum_{k=0}^{N} \hat{x}(k) e_k$.

Ha viszont $\mathcal{N} = \mathbf{N}$, akkor az előzőzekben kapott $\|x - S_n(x)\| = \delta_n < \varepsilon \quad (\mathbf{N} \ni n \geq M)$ becslés éppen azt jelenti, hogy $\delta_n \to 0 \quad (n \to \infty)$. Így $S_n(x) \to x \quad (n \to \infty)$, azaz

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{x}(k) e_k.$$

3.3.1. Tétel. *Tegyük fel, hogy az $(X, \langle, \rangle)$ euklideszi térben az $e_k \in X \quad (k \in \mathcal{N})$ ONR zárt. Ekkor $(e_k, k \in \mathcal{N})$ bázis.*

Bizonyítás. A 3.3.1. iii) megjegyzés alapján azt kell már csak belátni, hogy ha valamely $x \in X$ esetén $x = \sum_{k=0}^{N} \hat{\alpha}_k e_k \quad$ (ha $\mathcal{N} = \{0, ..., N\}$ valamilyen $N \in \mathbf{N}$ esetén) vagy $x = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{x}(k) e_k \quad$ (ha $\mathcal{N} = \mathbf{N}$), akkor $\alpha_k = \hat{x}(k) \quad (k \in \mathcal{N})$.

Legyen ehhez $n \in \mathcal{N}, j = 0, ..., n$. Ekkor

$$\langle x - \sum_{k=0}^{n} \alpha_k e_k, e_j \rangle = \hat{x}(j) - \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \langle e_k, e_j \rangle = \hat{x}(j) - \alpha_j.$$

Az $\mathcal{N} = \{0, ..., N\}$ esetben $n = N$-et írva $x - \sum_{k=0}^{N} \alpha_k e_k = 0$ miatt $\hat{x}(j) - \alpha_j = 0$, azaz $\hat{x}(j) = \alpha_j \quad (j = 0, ..., N)$ adódik. Ha $\mathcal{N} = \mathbf{N}$, akkor a *Cauchy-Bunyakovszkij*-egyenlőtlenséget (ld. 1.2.) felhasználva

$$|\hat{x}(j) - \alpha_j| = \left| \langle x - \sum_{k=0}^{n} \alpha_k e_k, e_j \rangle \right| \leq \left\| x - \sum_{k=0}^{n} \alpha_k e_k \right\| \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

miatt $\hat{x}(j) - \alpha_j = 0$, azaz $\hat{x}(j) = \alpha_j \quad (j \in \mathbf{N})$. ∎

3.3.2. Megjegyzések.

i) A 3.3. pont bevezetőjében mondottakra is utalva tehát bármely szeparábilis euklideszi térben van zárt ONR, ami a 3.3.1. Tétel szerint bázis.

ii) Ha (az eddigi jelöléseket használva) az $(e_k, k \in \mathcal{N})$ ONR bázis az $(X, \langle, \rangle)$ térben, akkor a 3.3.1. *Bessel-azonosságot* alkalmazva $n := N$-re (ha $\mathcal{N} = \{0, ..., N\}$), ill. $n \to \infty$ határátmenet után (ha $\mathcal{N} = \mathbf{N}$) kapjuk az ún. *Parseval-egyenlőséget*:

$$\sum_{k=0}^{N} |\hat{x}(k)|^2 = \|x\|^2, \quad \text{ill.} \quad \sum_{k=0}^{\infty} |\hat{x}(k)|^2 = \|x\|^2 \qquad (x \in X).$$

Az $\emptyset \neq Y \subset X$ halmazt („rendszert”) *teljes rendszernek* nevezzük, ha egyértelműen van olyan $x \in X$ elem, hogy $\langle x, y \rangle = 0 \quad (y \in Y)$. Ha $\langle x, y \rangle = 0$, akkor azt mondjuk, hogy x *ortogonális* (*merőleges*) y-ra. Világos, hogy minden (nem üres) Y esetén $\langle 0, y \rangle = 0 \quad (y \in Y)$, ezért más szóval: Y akkor és csak akkor teljes rendszer, ha egyedül a nulla elem ortogonális az Y halmaz minden elemére.

3.3.2. Lemma. *Tetszőleges $(X, \langle, \rangle)$ euklideszi térben bármely $(e_k, k \in \mathcal{N})$ zárt ONR teljes rendszer. Ha az $(X, \langle, \rangle)$ tér Hilbert-tér, akkor minden teljes ONR zárt rendszer.*

Bizonyítás. Tegyük fel először, hogy $(e_k, k \in \mathcal{N})$ zárt ONR. Ha $x \in X$ és $\hat{x}(k) = \langle x, e_k \rangle = 0$ $(k \in \mathcal{N})$, akkor a 3.3.1. Tétel miatt $x = \sum_{k=0}^{N} \hat{x}(k) e_k = 0 \qquad$ (ha $\mathcal{N} = \{0, ..., N\}$), ill. $x = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{x}(k) e_k = 0 \quad$ (ha $\mathcal{N} = \mathbf{N}$). Tehát $(e_k, k \in \mathcal{N})$ teljes rendszer.

Most azt tegyük fel, hogy $(X, \langle, \rangle)$ *Hilbert*-tér és az $(e_k, k \in \mathcal{N})$ ONR teljes rendszer. Ha $\mathcal{N} = \{0, ..., N\}$, akkor tetszőleges $x \in X$ elemre legyen $y := \sum_{k=0}^{N} \hat{x}(k) e_k$. Legyen továbbá $j = 0, ..., N$, ekkor

$$\langle x-y, e_j\rangle = \hat{x}(j) - \sum_{k=0}^{N} \hat{x}(k)\langle e_k, e_j\rangle = \hat{x}(j) - \hat{x}(j) = 0.$$

Az $(e_k, k \in \mathcal{N})$ rendszer feltételezett teljessége miatt innen $x - y = 0$, azaz $x = y$ következik. Tehát bármely $x \in X$ elem előállítható $x = \sum_{k=0}^{N} \hat{x}(k)e_k$ alakban, így a rendszer valóban zárt.

Legyen most $\mathcal{N} = \mathbf{N}$, $x \in X$ és $m, n \in \mathbf{N}, n \le m$. Ekkor

$$\left\| \sum_{k=n}^{m} \hat{x}(k)e_k \right\|^2 = \left\langle \sum_{k=n}^{m} \hat{x}(k)e_k, \sum_{k=n}^{m} \hat{x}(k)e_k \right\rangle = \sum_{k=n}^{m} |\hat{x}(k)|^2.$$

A *Bessel*-egyenlőtlenség (ld. 3.3.1. i) megjegyzés) szerint $\sum_{k=0}^{\infty} |\hat{x}(k)|^2 < +\infty$, ezért

$$\sum_{k=n}^{m} |\hat{x}(k)|^2 \to 0 \qquad (n, m \to \infty).$$

Így $\|\sum_{k=n}^{m} \hat{x}(k)e_k\| \to 0 \ \ (n, m \to \infty)$ is igaz. Az $(X, \langle, \rangle)$ tér teljessége miatt tehát a $\sum_{k=0}^{n} \hat{x}(k)e_k$ $(n \in \mathbf{N})$ részletösszegek konvergálnak, legyen $z := \sum_{k=0}^{\infty} \hat{x}(k)e_k$. Ha $j \in \mathbf{N}$, akkor

$$\langle x-z, e_j\rangle = \hat{x}(j) - \sum_{k=0}^{\infty} \hat{x}(k)\langle e_k, e_j\rangle = \hat{x}(j) - \hat{x}(j) = 0.$$

Az $(e_k, k \in \mathbf{N})$ rendszer feltételezett teljessége miatt innen $x - z = 0$, azaz $x = z$ következik. Tehát bármely $x \in X$ elem előállítható $x = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{x}(k)e_k$ alakban, azaz a rendszer valóban zárt. ■

3.3.3. Megjegyzések.

i) A bizonyítás végén az alábbi egyszerűen belátható tényt használtuk fel: ha alkalmas $x_k \in X$ elemekkel $\sum_{k=0}^{\infty} x_k \in X$, akkor tetszőleges $y \in X$ elemre

$$\left\langle \sum_{k=0}^{\infty} x_k, y \right\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \langle x_k, y\rangle.$$

Ui. a *Cauchy-Bunyakovszkij*-egyenlőtlenséget (ld. 1.2.) alkalmazva

$$\left\langle \sum_{k=0}^{\infty} x_k, y \right\rangle = \left\langle \sum_{k=0}^{n-1} x_k + \sum_{k=n}^{\infty} x_k, y \right\rangle = \sum_{k=0}^{n-1} \langle x_k, y\rangle + \left\langle \sum_{k=n}^{\infty} x_k, y \right\rangle \qquad (n \in \mathbf{N})$$

és $\|\sum_{k=n}^{\infty} x_k\| \to 0 \qquad (n \to \infty)$ alapján

$$\left| \left\langle \sum_{k=0}^{\infty} x_k, y \right\rangle - \sum_{k=0}^{n-1} \langle x_k, y\rangle \right| = \left| \left\langle \sum_{k=n}^{\infty} x_k, y \right\rangle \right| \le \left\| \sum_{k=n}^{\infty} x_k \right\| \cdot \|y\| \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

Így valóban

$$\sum_{k=0}^{\infty}\langle x_k, y\rangle = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\langle x_k, y\rangle = \left\langle \sum_{k=0}^{\infty} x_k, y\right\rangle.$$

ii) Az ortonormáltság fogalma is kiterjeszthető bármilyen $\emptyset \neq Y \subset X$ „rendszerre”: Y ONR, ha

$$\langle y, z\rangle = \begin{cases} 0 & (y \neq z) \\ \\ 1 & (y = z) \end{cases} \qquad (y, z \in Y).$$

Ugyanakkor igaz a következő állítás: *bármely $x \in X$ esetén az*

$$Y_0 := \{y \in Y : \langle x, y\rangle \neq 0\}$$

halmaz legfeljebb megszámlálható. Ehhez ui. nyilván elegendő azt megmutatni, hogy tetszőleges $\delta > 0$ mellett

$$Y_\delta := \{y \in Y : |\langle x, y\rangle| \geq \delta\}$$

legfeljebb véges, hiszen $Y_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_{1/n}$. Indirekt módon okoskodva legyen $\delta > 0$ olyan, hogy Y_δ legalább megszámlálható. Ekkor választhatunk Y_δ-ban egy $e_n \in Y_\delta \quad (n \in \mathbf{N})$ ortonormált rendszert. A *Bessel*-egyenlőtlenség (ld. 3.3.1. i) megjegyzés) szerint viszont

$$+\infty > \|x\|^2 \geq \sum_{n=0}^{\infty} |\langle x, e_n\rangle|^2 \geq \sum_{n=0}^{\infty} \delta^2 = +\infty,$$

ami nyilván nem lehet.

iii) Érdemes külön is kiemelni a 3.3.2. Lemma bizonyításából, hogy

$$\left\| \sum_{k=n}^{m} \hat{x}(k) e_k \right\| \to 0 \qquad (n, m \to \infty).$$

Világos, hogy itt csak a következőt használtuk ki: $e_n \in X \quad (n \in \mathbf{N})$ ortonormált rendszer és $\sum_{n=0}^{\infty} |\hat{x}(n)|^2 < +\infty$. Más szóval tehát bármely (x_n) ONR és $\alpha_n \in \mathbf{K} \quad (n \in \mathbf{N},$ $\sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_n|^2 < +\infty)$ együtthatósorozat esetén

$$\left\| \sum_{k=n}^{m} \alpha_k e_k \right\| \to 0 \qquad (n, m \to \infty),$$

azaz a $\sum_{k=0}^{n} \alpha_k e_k \quad (n \in \mathbf{N})$ részletösszegek *Cauchy*-sorozatot alkotnak. Ha a szóban forgó $(X, \langle,\rangle)$ tér *Hilbert*-tér, akkor tehát a $(\sum_{k=0}^{n} \alpha_k e_k)$ sorozat konvergens. Speciálisan, ekkor tetszőleges $x \in X$ elem $\sum(\hat{x}(n) e_n)$ *Fourier-sora* konvergens.

iv) Nem nehéz meggondolni, hogy a 3.3.2. Lemma akkor is igaz, ha az $(e_k, k \in \mathcal{N})$ rendszer nem ortonormált.

Foglaljuk össze a 3.3. pontban mondottakat az alábbi tételben.

3.3.2. Tétel (*Riesz-Fischer*). *Legyen $(X, \langle , \rangle)$ szeparábilis Hilbert-tér, $e_k \in X \quad (k \in \mathcal{N})$ zárt ONR. Ekkor*

- *tetszőleges $x \in X$ esetén $x = \sum_{k=0}^{N} \hat{x}(k)e_k$ (ha $\mathcal{N} = \{0, ..., N\}$) vagy $x = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{x}(k)e_k$ (ha $\mathcal{N} = \mathbf{N}$);*
- *minden $X \ni x$-re $\sum_{k=0}^{N} |\hat{x}(k)|^2 = \|x\|^2$ (ha $\mathcal{N} = \{0, ..., N\}$) vagy $\sum_{k=0}^{\infty} |\hat{x}(k)|^2 = \|x\|^2$ (ha $\mathcal{N} = \mathbf{N}$);*
- *bármely $\alpha_k \in \mathbf{K} \quad (k = 0, ..., N)$, ill. $\beta_k \in \mathbf{K} \quad (k \in \mathbf{N}, \sum_{k=0}^{\infty} |\beta_k|^2 < +\infty)$ esetén egyértelműen van olyan $x \in X$ elem, amelyre $\hat{x}(k) = \alpha_k \quad (k = 0, ..., N)$ (ha $\mathcal{N} = \{0, ..., N\}$) vagy $\hat{x}(k) = \beta_k \quad (k \in \mathbf{N})$ (ha $\mathcal{N} = \mathbf{N}$).*

3.3.4. Megjegyzések.

i) A 3.3.2. Lemma alapján a *Riesz-Fischer*-tételben zárt rendszer helyett teljes rendszert is feltételezhetünk.

ii) Legyen $\mathcal{N} = \mathbf{N}$ és

$$\ell_2 := \left\{ x = (x_n) : \mathbf{N} \to \mathbf{K} : \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^2 < +\infty \right\},$$

$$\|x\|_2 := \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^2} \qquad (x \in \ell_2).$$

Ezzel egy $(\ell_2, \|.\|_2)$ *Banach*-teret definiáltunk. Ha a skaláris szorzást a következőképpen értelmezzük:

$$\langle x, y \rangle_2 := \sum_{n=0}^{\infty} x_n \overline{y_n} \qquad (x, y \in \ell_2),$$

akkor $(\ell_2, \|.\|_2) \equiv (\ell_2, \langle , \rangle_2)$ *Hilbert*-tér. Tekintsünk egy $(e_n, n \in \mathbf{N})$ zárt ONR-t X-ben, ekkor bármely $x \in X$ esetén

$$\hat{x} := (\hat{x}(n)) \in \ell_2, \quad \|\hat{x}\|_2 = \|x\|,$$

ill. tetszőleges $\alpha = (\alpha_n) \in \ell_2$ sorozathoz egyértelműen van olyan $x \in X$, amellyel $\alpha = \hat{x}$. Könnyű meggondolni, hogy az

$$X \ni x \mapsto \hat{x} \in \ell_2$$

megfeleltetés izomorfia is, azaz $(X, \langle , \rangle)$ izomorf és izometrikus $(\ell_2, \langle , \rangle_2)$-vel. Továbbá igaz az általánosított *Parseval*-egyenlőség is: tetszőleges $x, y \in X$ esetén $\langle x, y \rangle = \langle \hat{x}, \hat{y} \rangle_2$, azaz

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{x}(n)\overline{\hat{y}(n)} \qquad (x, y \in X).$$

4. Kompaktság

4.1. A kompaktság fogalma.

Adott $(X, \mathcal{T})$ topologikus tér esetén egy $A \subset X$ halmaz *nyílt lefedésén* olyan $T_\gamma \in \mathcal{T}$ $(\gamma \in \Gamma)$ nyílt halmazokból álló halmazrendszert értünk (jelölésben $(T_\gamma, \gamma \in \Gamma)$ valamilyen $\emptyset \neq \Gamma$ „indexhalmazzal"), amelyre $A \subset \bigcup_{\gamma\in\Gamma} T_\gamma$ teljesül. Azt mondjuk, hogy ebből a lefedésből *kiválasztható véges lefedés,* ha Γ-nak van olyan véges $\Gamma_0 \subset \Gamma$ részhalmaza, hogy $A \subset \bigcup_{\gamma\in\Gamma_0} T_\gamma$ igaz.

4.1.1. Lemma (*Lindelöf*)**.** *Tegyük fel, hogy $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ topologikus bázis, legyen κ a $\mathcal{B}$ halmazrendszer számossága. Ekkor tetszőleges $A \subset X$ halmaz bármely $(T_\gamma, \gamma \in \Gamma)$ nyílt lefedése esetén van a Γ halmaznak olyan $\widetilde{\Gamma} \subset \Gamma$ részhalmaza, amelynek a számossága legfeljebb κ és $A \subset \bigcup_{\gamma\in\widetilde{\Gamma}} T_\gamma$.*

Bizonyítás. Legyen ui. valamely $A \subset X$ halmaz esetén $(T_\gamma, \gamma \in \Gamma)$ nyílt lefedése A-nak. Ekkor bármely $\gamma \in \Gamma$ indexre $T_\gamma = \bigcup_{\nu\in\Gamma_\gamma} B_{\nu\gamma}$, ahol $\Gamma_\gamma \neq \emptyset$ és $B_{\nu\gamma} \in \mathcal{B}\quad (\nu \in \Gamma_\gamma)$. Tehát

$$A \subset \bigcup_{\gamma\in\Gamma} \bigcup_{\nu\in\Gamma_\gamma} B_{\nu\gamma}.$$

Legyen

$$\mathcal{B}_0 := \{B_{\nu\gamma} \in \mathcal{B} : \gamma \in \Gamma, \nu \in \Gamma_\gamma\}.$$

Világos, hogy $\mathcal{B}_0$ számossága legfeljebb κ. Minden $B \in \mathcal{B}_0$ halmazhoz legyen $\gamma_B \in \Gamma$ egy olyan index, amelyre $B \subset T_{\gamma_B}$ és $\widetilde{\Gamma}$ az így definiált $\gamma_B\quad (B \in \mathcal{B}_0)$ indexek halmaza. Ekkor $\widetilde{\Gamma}$ legfeljebb κ-számosságú és nyilván $A \subset \bigcup_{\gamma\in\widetilde{\Gamma}} T_\gamma$. ■

4.1.1. Megjegyzések.

i) Legyen $(X, \mathcal{T}) \equiv (X, \rho)$ és tegyük fel, hogy (X, ρ) szeparábilis. Ekkor a 4.1.1. Lemma, ill. a 3.1.2. Tétel alapján bármely $A \subset X$ halmaz tetszőleges $(T_\gamma, \gamma \in \Gamma)$ nyílt lefedéséből kiválasztható egy legfeljebb megszámlálható lefedés: van olyan legfeljebb megszámlálható $\widetilde{\Gamma} \subset \Gamma$, amellyel $A \subset \bigcup_{\gamma\in\widetilde{\Gamma}} T_\gamma$.

ii) Az előző megjegyzés alkalmazható a $(\mathbf{K}^n, \rho_p)$ terekre bármely $0 < n \in \mathbf{N}$, $1 \leq p \leq +\infty$ esetén (ld. 1.3., ill. 3.1.2. ii) megjegyzés).

iii) Világos, hogy minden véges $A \subset X$ halmaz kompakt. Ha a $\mathcal{T}$ topológia véges, akkor nyilván bármely $A \subset X$ halmaz kompakt.

4.1.2. Lemma. *Tegyük fel, hogy $A \subset X$ kompakt, $B \subset A$ pedig zárt részhalmaza A-nak. Ekkor B kompakt.*

Bizonyítás. Legyen ui. $(T_\gamma, \gamma \in \Gamma)$ nyílt lefedése B-nek. Ekkor $X \setminus B \in \mathcal{T}$ miatt

$$(X \setminus B, T_\gamma, \gamma \in \Gamma)$$

nyilván nyílt lefedése A-nak. Ezért ebből kiválasztható véges lefedés, azaz van olyan véges $\Gamma_0 \subset \Gamma$ részhalmaza Γ-nak, hogy

$$A \subset \left(\bigcup_{\gamma \in \Gamma_0} T_\gamma \right) \bigcup (X \setminus B) .$$

Mivel $B \bigcap (X \setminus B) = \emptyset$, ezért nyilván igaz egyúttal az is, hogy $B \subset \bigcup_{\gamma \in \Gamma_0} T_\gamma$. ■

4.1.2. Megjegyzés.

Egy kompakt halmaz nem feltétlenül zárt. Tekintsük ui. valamely $a \neq b$ esetén az $X := \{a, b\}$ halmazt és a $\mathcal{T} := \{\emptyset, X, \{a\}\}$ topológiát (ld. 1.5.). Ekkor pl. az $\{a\}$ halmaz kompakt, de nem zárt, ui. $X \setminus \{a\} = \{b\} \notin \mathcal{T}$.

4.1.3. Lemma. *Ha az $(X, \mathcal{T})$ tér T_2-tér, akkor tetszőleges $A \subset X$ kompakt halmaz zárt.*

Bizonyítás. Indirekt módon tegyük fel ui., hogy valamilyen $A \subset X$ kompakt halmazra $A \neq \overline{A}$ és legyen $x \in \overline{A} \setminus A$. Ekkor bármely $a \in A$ esetén a T_2-tulajdonság (ld. 2.1.) miatt vannak olyan (feltehető, hogy nyílt) $K(a)$, $K^{(a)}(x)$ környezetek, amelyek diszjunktak. Mivel $A \subset \bigcup_{a \in A} K(a)$ nyilván igaz, ezért $(K(a), a \in A)$ nyílt lefedése A-nak. Tehát van olyan véges $A_0 \subset A$ részhalmaz, amellyel $A \subset \bigcup_{a \in A_0} K(a)$. Ha

$$K(x) := \bigcap_{a \in A_0} K^{(a)}(x),$$

akkor $K(x)$ is környezete x-nek és nyilván $K(x) \bigcap K(a) = \emptyset \quad (a \in A_0)$. Következésképpen

$$A \cap K(x) \subset \bigcup_{a \in A_0} (K(a) \cap K(x)) = \emptyset$$

miatt $A \bigcap K(x) = \emptyset$, ami ellentmond annak, hogy $x \in \overline{A}$, azaz annak (ld. 1.5.1. Állítás), hogy x érintkezési pontja A-nak. ■

4.1.4. Lemma. *Tegyük fel, hogy az $A \subset X$ halmaz kompakt. Ekkor bármely $B \subset A$ végtelen halmaznak van A-beli torlódási pontja.*

Bizonyítás. Az állítással ellentétben tegyük fel, hogy valamely kompakt $A \subset X$ halmaz és végtelen $B \subset A$ részhalmaz esetén $A \bigcap B' = \emptyset$. Tehát bármely $a \in A$ esetén $a \notin B'$, azaz van olyan $K(a)$ környezet, hogy

$$(K(a) \setminus \{a\}) \cap B = \emptyset.$$

Nyilván feltehető, hogy az itt szereplő $K(a)$ környezetek valamennyien nyíltak. Világos továbbá, hogy $(K(a), a \in A)$ nyílt lefedése A-nak, így A kompaktsága miatt egy alkalmas véges $A_0 \subset A$ halmazzal $A \subset \bigcup_{a \in A_0} K(a)$. Egyúttal persze

$$B = B \cap A = \bigcup_{a \in A_0} (K(a) \cap B).$$

Mivel $K(a) \bigcap B \quad (a \in A_0)$ legfeljebb véges (ti. $K(a) \cap B = \emptyset$ vagy $K(a) \cap B = \{a\}$), ezért innen B végessége következne, szemben a feltételezéssel. ■

4.2. Kompaktság metrikus terekben.

A továbbiakban tegyük fel, hogy $(X, \mathcal{T}) \equiv (X, \rho)$. Nevezzünk egy $A \subset X$ halmazt *korlátosnak,* ha van olyan $z \in X$ elem és $K(z)$ környezet, hogy $A \subset K(z)$. Könnyű meggondolni, hogy ez ekvivalens az alábbiakkal: az A halmaz akkor és csak akkor korlátos, ha lefedhető véges sok környezettel.

4.2.1. Lemma. *Tegyük fel, hogy $A \subset X$ kompakt. Ekkor A korlátos és zárt.*

Bizonyítás. A 4.1.3. Lemma miatt elegendő már csak a korlátosságra vonatkozó állítást belátni. Mivel $(K_1(a), a \in A)$ nyilván nyílt lefedése A-nak, ezért egy alkalmas véges $A_0 \subset A$ halmazzal $A \subset \bigcup_{a \in A_0} K_1(a)$, azaz A korlátos. ■

4.2.1. Megjegyzés.

Az előző lemmabeli állítás nem megfordítható. Legyen ui. (ld. 3.3.4. ii) megjegyzés) $(X, \rho) \equiv (\ell_2, \|.\|_2)$, azaz

$$X := \left\{ x = (x_n) : \mathbf{N} \to \mathbf{K} : \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^2 < +\infty \right\},$$

$$\rho(x, y) := \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} |x_n - y_n|^2} \qquad (x, y \in X).$$

Ha $Y := \{(\delta_{nk}) \in X : n \in \mathbf{N}\}$ (ahol δ_{nk} a jól ismert *Kronecker*-szimbólum), akkor Y nyilván korlátos, végtelen halmaz. Továbbá bármely $x, y \in Y$, $x \neq y$ esetén $\rho(x, y) = \sqrt{2}$, ezért $Y' = \emptyset$, azaz Y zárt is. Mivel az előbbi $x \neq y \in Y$ elemekre

$$K_{\sqrt{2}/2}(x) \cap K_{\sqrt{2}/2}(y) = \emptyset,$$

ezért az Y-t nyilván lefedő $K_{\sqrt{2}/2}(z) \quad (z \in Y)$ nyílt halmazok közül nem választható ki véges sok Y-t lefedő halmaz. Így Y nem kompakt.

Metrikus terekben kompakt halmazokra vonatkozóan a korlátosságnál erősebb tulajdonság is igaz. Legyen ui. $A \subset X$ kompakt és egy tetszőleges $\varepsilon > 0$ szám mellett tekintsük az A halmaz alábbi nyílt lefedését:

$$A \subset \bigcup_{x \in X} K_\varepsilon(x).$$

Ekkor az A kompaktsága miatt van olyan véges $X_0 \subset X$ halmaz, amellyel

$$A \subset \bigcup_{x \in X_0} K_\varepsilon(x).$$

Következésképpen A lefedhető véges sok ε-sugarú gömbbel.

Ez utóbbi tulajdonságot mintegy „kiemelve” nevezzük az $Y \subset X$ halmazt *teljesen korlátosnak,* ha tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén van olyan véges $X_0 \subset X$ halmaz, hogy $Y \subset \bigcup_{x \in X_0} K_\varepsilon(x)$. Azt mondjuk, hogy az (X, ρ) metrikus tér *teljesen korlátos,* ha X teljesen korlátos.

4.2.2. Megjegyzések.

i) A teljesen korlátosság tehát szükséges feltétele a kompaktságnak.

ii) Világos, hogy minden teljesen korlátos halmaz egyúttal korlátos is. A 4.2.1. megjegyzésbeli példa mutatja, hogy ez fordítva nem igaz.

iii) Könnyű belátni, hogy bármely $A \subset X$ esetén A akkor és csak akkor teljesen korlátos, ha $\overline{A}$ is az.

iv) Egyszerűen adódik az is, hogy a $(\mathbf{K}^n, \rho_p)$ $\quad (0 < n \in \mathbf{N}, 1 \leq p \leq +\infty)$ térben (ld. 1.4.) a korlátosság és a teljesen korlátosság fogalma ugyanazt jelenti.

4.2.1. Tétel. *Az $\emptyset \neq Y \subset X$ halmaz akkor és csak akkor teljesen korlátos, ha tetszőleges $x_n \in Y$ $(n \in \mathbf{N})$ sorozatnak van olyan (x_{ν_n}) részsorozata, amely Cauchy-tulajdonságú.*

Bizonyítás. Lássuk be először a tételben jelzett tulajdonság elégségességét. Tegyük fel tehát, hogy bármely $x_n \in Y \quad (n \in \mathbf{N})$ sorozatból kiválaszthatunk egy *Cauchy*-tulajdonságú részsorozatot. Indirekt gondolkodva tegyük fel továbbá, hogy Y nem teljesen korlátos, azaz valamilyen $\varepsilon > 0$ esetén Y nem fedhető le véges sok ε-sugarú környezettel. Legyen $x_0 \in A$. Ekkor Y nem lehet részhalmaza $K_\varepsilon(x_0)$-nak, azaz $A \setminus K_\varepsilon(x_0) \neq \emptyset$. Ha $x_1 \in A \setminus K_\varepsilon(x_0)$, akkor $\rho(x_0, x_1) \geq \varepsilon$. Mivel Y a $K_\varepsilon(x_0) \bigcup K_\varepsilon(x_1)$ halmaznak sem lehet részhalmaza, ezért van olyan $x_2 \in Y$ elem is, amelyre $\rho(x_0, x_2) \geq \varepsilon$, $\rho(x_1, x_2) \geq \varepsilon$.

Teljes indukcióval így kapunk egy olyan $x_n \in Y \quad (n \in \mathbf{N})$ sorozatot, amelyre

$$\rho(x_n, x_m) \geq \varepsilon \qquad (n, m \in \mathbf{N}, n \neq m)$$

igaz. Ekkor bármely (ν_n) indexsorozattal is fennáll, hogy $\rho(x_{\nu_n}, x_{\nu_m}) \geq \varepsilon \quad (n, m \in \mathbf{N}, n \neq m)$. Következésképpen (x_{ν_n}) egyetlen (ν_n) indexsorozatra sem *Cauchy*-sorozat, szemben a kiinduló feltételünkkel.

Most a tétel szükségességéhez azt tegyük fel, hogy Y teljesen korlátos és $x_n \in Y \quad (n \in \mathbf{N})$. Azt kell belátnunk, hogy alkalmas (ν_n) indexsorozattal (x_{ν_n}) *Cauchy*-sorozat. Mivel ez triviális akkor, ha valamilyen $N \in \mathbf{N}$ esetén végtelen sok $\mathbf{N} \ni m$-re $x_m = x_N$, ezért mindjárt feltehetjük azt is, hogy $x_n \neq x_m \quad (n, m \in \mathbf{N}, n \neq m)$. Ekkor egyúttal az $x := (x_n)$ sorozat $\mathcal{R}_x$ értékkészlete végtelen halmaz.

Tekintsük az Y halmaz $Y \subset \bigcup_{y \in X_0} K_1(y)$ lefedését, ahol $X_0 \subset X$ véges halmaz. Mivel

$$\mathcal{R}_x \subset \bigcup_{y \in X_0} (K_1(y) \cap \mathcal{R}_x),$$

ezért alkalmas $y_0 \in X$ elemmel $K_1(y_0) \cap \mathcal{R}_x$ végtelen halmaz. Van tehát olyan $\nu^{(0)}$ indexsorozat, amelyre

$$\mathcal{R}_{x \circ \nu^{(0)}} \subset K_1(y_0).$$

Hasonlóan, véve az Y halmaz $Y \subset \bigcup_{y \in X_1} K_{1/2}(y)$ lefedését valamilyen $X_1 \subset X$ véges halmazzal, kapunk olyan $y_1 \in X$ elemet és olyan $\nu^{(1)}$ indexsorozatot, amelyekkel

$$\mathcal{R}_{x \circ \nu^{(0)} \circ \nu^{(1)}} \subset K_{1/2}(y_1).$$

Az eljárást teljes indukcióval folytatva konstruálhatunk minden $n \in \mathbf{N}$ esetén olyan $y_n \in X$ elemet és olyan $\nu^{(n)}$ indexsorozatot, amelyekkel

$$\mathcal{R}_{x\circ\nu^{(0)}\circ\ldots\circ\nu^{(n)}} \subset K_{1/2^n}(y_n) \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Legyen $n \in \mathbf{N}$ és $\nu_n := \nu^{(0)} \circ \ldots \circ \nu^{(n)}(n)$. Könnyű meggondolni, hogy $\nu := (\nu_n)$ indexsorozat. Továbbá bármely $n, m \in \mathbf{N}$, $n < m$ esetén

$$x_{\nu_m} = x \circ \nu^{(0)} \circ \ldots \circ \nu^{(n)} \circ \nu^{(n+1)} \circ \ldots \circ \nu^{(m)}(m),$$

azaz $x_{\nu_m} \in \mathcal{R}_{x\circ\nu^{(0)}\circ\ldots\circ\nu^{(n)}}$, így

$$x_{\nu_m} \in K_{1/2^n}(y_n).$$

Ezért

$$\rho(x_{\nu_n}, x_{\nu_m}) \leq \rho(x_{\nu_n}, y_n) + \rho(y_n, x_{\nu_m}) < \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}} \to 0 \qquad (n \to \infty),$$

tehát $x \circ \nu$ *Cauchy*-sorozat. ■

4.2.3. Megjegyzések.

i) Ha tehát az (X, ρ) tér teljes, akkor $\emptyset \neq A \subset X$ teljesen korlátossága azzal ekvivalens, hogy bármely A-beli sorozatnak van konvergens részsorozata.

ii) Ha az előbbi megjegyzésben A még zárt is, akkor a teljesen korlátossága azt jelenti, hogy tetszőleges A-beli sorozatnak van olyan konvergens részsorozata, amelynek a határértéke A-ban van.

iii) Speciálisan, ha (X, ρ) teljes, az $\emptyset \neq A \subset X$ halmaz pedig kompakt, akkor (lévén A teljesen korlátos és zárt) minden A-beli sorozatnak van olyan konvergens részsorozata, amelynek a határértéke A-ban van.

Megmutatjuk, hogy az előbbi iii) megjegyzés végkövetkeztetése szempontjából a tér teljessége nem lényeges, sőt igaz a

4.2.2. Tétel. *Legyen (X, ρ) tetszőleges metrikus tér, $\emptyset \neq A \subset X$. Ekkor A kompaktságának szükséges és elégséges feltétele az, hogy bármely A-beli sorozatnak legyen olyan konvergens részsorozata, amelynek a határértéke A-ban van.*

Bizonyítás. Tegyük fel először, hogy a szóban forgó halmaz kompakt és legyen $x_n \in A \quad (n \in \mathbf{N})$ tetszőleges. Ha az $\mathcal{R}_{(x_n)}$ értékkészlethalmaz véges, akkor van az (x_n) sorozatnak olyan részsorozata, amely konstans sorozat, következésképpen konvergens és a határértéke A-ban van.

Feltehető tehát, hogy $\mathcal{R}_{(x_n)}$ nem véges. Ekkor a 4.1.4. Lemma miatt van az $\mathcal{R}_{(x_n)}$ halmaznak A-beli torlódási pontja: $a \in \mathcal{R}'_{(x_n)} \bigcap A$. Tehát bármely $n \in \mathbf{N}$ esetén létezik olyan $x_{\nu_n} \in A$, hogy $\rho(x_{\nu_n}, a) < 1/(n+1)$. Nyilván feltehetjük, hogy $\nu_n < \nu_{n+1} \quad (n \in \mathbf{N})$, azaz, hogy (ν_n) indexsorozat. Világos, hogy $\lim(x_{\nu_n}) = a \in A$.

Most azt tegyük fel, hogy bármely A-beli sorozatnak van olyan konvergens részsorozata, amelynek a határértéke A-ban van és legyen $A \subset \bigcup_{\gamma\in\Gamma} T_\gamma$ az A halmaz egy nyílt lefedése. Mutassuk meg először, hogy

alkalmas $r > 0$ számmal minden $a \in A$ elemhez van olyan $\gamma \in \Gamma$, hogy $K_r(a) \subset T_\gamma$.

Ha ui. ez nem lenne igaz, akkor bármely $n \in \mathbf{N}$ esetén valamilyen $A \ni x_n$-re a $K_{1/(n+1)}(x_n)$ környezet egyetlen T_γ halmaznak sem lenne részhalmaza. Legyen (ν_n) olyan indexsorozat, amellyel (x_{ν_n}) konvergens és $a := \lim(x_{\nu_n}) \in A$. Mivel $A \subset \bigcup_{\gamma\in\Gamma} T_\gamma$, ezért valamilyen $\gamma \in \Gamma$ mellett $a \in T_\gamma$. A T_γ halmaz nyíltsága miatt viszont létezik olyan $\sigma > 0$, hogy $K_\sigma(a) \subset T_\gamma$.

Lássuk be, hogy alkalmas $n \in \mathbf{N}$ indexre $K_{1/(\nu_n+1)}(x_{\nu_n}) \subset K_\sigma(a)$. Legyen ehhez $n \in \mathbf{N}$ egyelőre tetszőleges, $t \in K_{1/(\nu_n+1)}(x_{\nu_n})$. Ekkor

$$\rho(t, a) \leq \rho(t, x_{\nu_n}) + \rho(x_{\nu_n}, a) < \frac{1}{\nu_n + 1} + \rho(x_{\nu_n}, a).$$

Mivel $\dfrac{1}{\nu_n + 1} + \rho(x_{\nu_n}, a) \to 0 \quad (n \to \infty)$, ezért valamilyen $n \in \mathbf{N}$ esetén $\dfrac{1}{\nu_n + 1} + \rho(x_{\nu_n}, a) < \sigma$, azaz ekkor $\rho(t, a) < \sigma$. Így valóban $K_{1/(\nu_n+1)}(x_{\nu_n}) \subset K_\sigma(a)$. Következésképpen $K_{1/(\nu_n+1)}(x_{\nu_n}) \subset T_\gamma$, szemben az (x_n) sorozatra vonatkozó feltételezéssel.

A most belátott észrevételt szem előtt tartva tegyük fel indirekt módon, hogy az $A \subset \bigcup_{\gamma\in\Gamma} T_\gamma$ nyílt lefedésből nem választható ki véges lefedés. Ha $x_0 \in A$ tetszőleges, akkor az A halmaz nem lehet részhalmaza $K_r(x_0)$-nak, különben az előbb belátott észrevétel alapján lenne olyan $\gamma \in \Gamma$, amellyel $A \subset T_\gamma$. Létezik ezért A-nak olyan x_1 pontja, amely nem eleme $K_r(x_0)$-nak: $\rho(x_0, x_1) \geq r$. Viszont ugyanilyen okoknál fogva $A \subset K_r(x_0) \bigcup K_r(x_1)$ sem teljesülhet, azaz alkalmas $x_2 \in A$ esetén

$$\rho(x_0, x_2) \geq r, \ \rho(x_1, x_2) \geq r.$$

Teljes indukcióval így eljutunk egy olyan $x_n \in A \quad (n \in \mathbf{N})$ sorozathoz, amelyre

$$\rho(x_n, x_m) \geq r \qquad (n, m \in \mathbf{N}, n \neq m)$$

igaz. A 4.2.1. Tétel bizonyításának az elején mondottaknak megfelelően tehát az (x_n) sorozatnak nincs olyan részsorozata, amely *Cauchy*-sorozat lenne. Ezért konvergens részsorozata sincs (x_n)-nek, ami ellentmond a feltételezésünknek. ■

4.2.2. Lemma. *Tegyük fel, hogy az $A \subset X$ halmaz minden végtelen részhalmazának van A-beli torlódási pontja. Ekkor A kompakt.*

Bizonyítás. A 4.2.2. Tétel alapján elegendő azt belátnunk, hogy bármely $x_n \in A \quad (n \in \mathbf{N})$ sorozatnak van A-ban konvergens részsorozata. Ezt viszont a 4.2.2. Tétel bizonyításának az elején már valójában megmutattuk. ■

Foglaljuk össze egyetlen állításban a metrikus terekbeli kompaktsággal kapcsolatban eddig mondottakat.

4.2.3. Tétel. *Legyen (X, ρ) tetszőleges metrikus tér, $\emptyset \neq A \subset X$. Ekkor az alábbi kijelentések egymással ekvivalensek:*

- *az A halmaz kompakt;*
- *az A halmaz minden végtelen részhalmazának van A-beli torlódási pontja;*
- *tetszőleges A-beli sorozatnak van A-ban konvergens részsorozata.*

Ha az (X, ρ) tér teljes, akkor az eddig mondottak ekvivalensek a következővel:

- *az A halmaz teljesen korlátos és zárt.*

4.2.4. Megjegyzések.

i) Ha az (X, ρ) metrikus térben X kompakt (nevezzük ekkor magát a teret *kompakt metrikus térnek*), akkor a szóban forgó tér teljes. Ui. (ld. 4.2.2. Tétel) bármely (x_n) *Cauchy*-sorozatnak van konvergens részsorozata, amiből (x_n) konvergens volta már következik (ld. 2.2.1. Tétel bizonyítása).

ii) Bármely kompakt (X, ρ) metrikus tér szeparábilis. Ui. (ld. 4.2.2. i) megjegyzés) tetszőleges $n \in \mathbf{N}$ esetén van olyan véges $X_n \subset X$ halmaz, hogy

$$X = \bigcup_{x \in X_n} K_{1/(n+1)}(x).$$

Az $Y := \bigcup_{n=0}^{\infty} X_n$ (legfeljebb megszámlálható) halmazról viszont nem nehéz belátni, hogy mindenütt sűrű.

iii) Fogalmazzuk meg a 4.2.3. Tételt arra az esetre, amikor $A = X$. Ekkor

az (X, ρ) tér kompaktsága ekvivalens az alábbi kijelentések bármelyikével:

- *tetszőleges $Y \subset X$ végtelen halmaznak van torlódási pontja;*
- *bármely sorozatnak van konvergens részsorozata;*
- *(X, ρ) teljes és teljesen korlátos.*

4.3. Kompaktság normált terekben.

Tegyük fel a továbbiakban, hogy $(X, \rho) \equiv (X, \|.\|)$. Ha $(X, \|.\|)$ véges dimenziós, akkor a 3.2.2. Tétel alapján X-en bármely két norma ekvivalens. Speciálisan (ld. 3.2.) $\|.\| \sim \|.\|_\infty$. Ha tehát valamilyen $0 < n \in \mathbf{N}$ esetén $e_1, ..., e_n$ bázis $(X, \|.\|)$-ben, akkor $(X, \|.\|)$ topologiailag azonosítható a $(\mathbf{K}^n, \|.\|_\infty)$ térrel. Mivel az utóbbi térben a kompaktság ekvivalens a korlátosság+zártsággal, ezért igaz a

4.3.1. Tétel. *Tegyük fel, hogy $(X, \|.\|)$ véges dimenziós. Ekkor egy $A \subset X$ halmaz kompaktsága ekvivalens azzal, hogy A korlátos és zárt.*

Láttuk (ld. 4.2.1. megjegyzés), hogy ebben az állításban a dimenzióra vonatkozó feltétel általában nem hagyható el. A következő tételben megmutatjuk, hogy ennél erősebb a viszony a kompaktság és a dimenzió között.

4.3.2. Tétel (*Riesz*). *Ha az* $(X, \|.\|)$ *tér nem véges dimenziós, akkor létezik olyan* $A \subset X$ *halmaz, amely korlátos és zárt, de nem kompakt.*

A bizonyításhoz szükségünk lesz az alábbi lemmára.

4.3.1. Lemma (*Riesz*). *Bármely* $(X, \|.\|)$ *normált tér,* $L \subset X$ *valódi zárt altér és* $0 < \varepsilon < 1$ *esetén van olyan* $x \in X$*, amelyre* $\|x\| = 1$ *és* $\rho(x, L) := \inf\{\|x - a\| : a \in L\} > 1 - \varepsilon$.

Bizonyítás. Legyen $z \in X \setminus L$, ekkor $\rho(z, L) > 0$. Különben lenne olyan $(a_n) : \mathbf{N} \to L$ sorozat, amelyre $\|x - a_n\| < \dfrac{1}{n+1}$ $(n \in \mathbf{N})$ teljesül. Ekkor viszont $\lim(a_n) = x$, amiből az L zártsága miatt $x \in L$ következne, ami nem igaz.

Az infimum definíciója miatt bármely $\delta > 0$ mellett van olyan $l_\delta \in L$, amelyre $\|z - l_\delta\| < \rho(z, L) + \delta$. Mivel $z \notin L$, ezért $\|z - l_\delta\| > 0$. Tekintsük az $x_\delta := \dfrac{z - l_\delta}{\|z - l_\delta\|}$ elemet, ekkor $\|x_\delta\| = 1$ és tetszőleges $l \in L$ mellett

$$\|x_\delta - l\| = \left\| \frac{z - l_\delta - \|z - l_\delta\| l}{\|z - l_\delta\|} \right\| = \frac{1}{\|z - l_\delta\|} \|z - (l_\delta + \|z - l_\delta\| l)\| \geq \frac{\rho(z, L)}{\|z - l_\delta\|},$$

hiszen L altér volta miatt $l_\delta + \|z - l_\delta\| l \in L$. Tehát

$$\|x_\delta - l\| \geq \frac{\rho(z, L)}{\rho(z, L) + \delta} > 1 - \varepsilon,$$

hacsak $\delta < \dfrac{\rho(z, L)\varepsilon}{1 - \varepsilon}$. Innen

$$\rho(x_\delta, L) \geq \frac{\rho(z, L)}{\rho(z, L) + \delta} > 1 - \varepsilon$$

adódik, így ezzel a δ-val $x := x_\delta$ megfelelő. ■

A 4.3.2. Tétel bizonyítása. Legyen $e_0 \in X, \|e_0\| = 1$. A feltétel szerint $X \neq \mathcal{L}(\{e_0\})$. Mivel $\mathcal{L}(\{e_0\})$ véges dimenziós, így zárt altere X-nek, azaz a *Riesz*-lemma miatt egy alkalmas $e_1 \in X$, $\|e_1\| = 1$ elemre $\rho(e_1, \mathcal{L}(\{e_0\})) > 1/2$. De $X \neq \mathcal{L}(\{e_0, e_1\})$, ezért megint csak a *Riesz*-lemma alapján egy $e_2 \in X$, $\|e_2\| = 1$ elemmel $\rho(e_2, \mathcal{L}(\{e_0, e_1\})) > 1/2$. Az eljárást folytatva kapunk egy $e := (e_s) : \mathbf{N} \to X$, $\|e_s\| = 1$ $(s \in \mathbf{N})$ sorozatot, amelyre

$$\rho(e_{k+1}, \mathcal{L}(\{e_0, ..., e_k\}) > 1/2 \qquad (k \in \mathbf{N})$$

igaz. Tehát többek között az is teljesül, hogy $\|e_k - e_j\| > 1/2$ $(j, k \in \mathbf{N}, j \neq k)$. Ez azt is jelenti, hogy e-ből nem választható ki olyan részsorozat, amely *Cauchy*-tulajdonságú, ezért e-nek konvergens részsorozata sincs. Ugyanakkor az $A := \{e_k \in X : k \in \mathbf{N}\}$ halmaz nyilván korlátos és zárt (hiszen bármely $a, b \in A, a \neq b$ esetén $\|a - b\| > 1/2$ miatt A-nak nincs torlódási pontja). Az e-ről mondottak miatt viszont a 4.2.3. Tétel alapján az A halmaz nem kompakt. ■

Legyen $a, b \in \mathbf{R}, a < b$ és tekintsük a $(C[a, b], \|\cdot\|_\infty)$ *Banach*-teret (ld. 1.3.). Mit jelent az, hogy ebben a térben egy $\emptyset \neq \mathcal{F} \subset C[a, b]$ függvényhalmaz kompakt? Tudjuk (ld. 4.2.3. Tétel), hogy mindez ekvivalens azzal, hogy az $\mathcal{F}$ halmaz zárt és teljesen korlátos.

Tegyük fel a továbbiakban, hogy $\mathcal{F}$ zárt, ekkor $\mathcal{F}$ akkor és csak akkor kompakt, ha $\mathcal{F}$ teljesen korlátos. Tehát egyrészt $\mathcal{F}$ korlátos, azaz van olyan $K > 0$, hogy bármely $f \in \mathcal{F}$ függvényre $\|f\|_\infty < K$. Ez utóbbi más szóval azt jelenti, hogy alkalmas $K > 0$ számmal minden $f \in \mathcal{F}$, $x \in [a, b]$ esetén

$$|f(x)| < K. \tag{1}$$

Az (1) feltétel teljesülésekor röviden azt fogjuk mondani, hogy az $\mathcal{F}$ elemei *egyenletesen korlátosak.*

Az $\mathcal{F}$ teljesen korlátos volta miatt másrészt minden $\varepsilon > 0$ esetén van olyan véges $\mathcal{F}_0 \subset C[a, b]$ halmaz, hogy tetszőleges $f \in \mathcal{F}$ függvényhez megadható egy $f_0 \in \mathcal{F}_0$, amellyel

$$\|f - f_0\|_\infty < \varepsilon.$$

Mivel minden $\mathcal{F}_0$-beli függvény egyenletesen folytonos, ezért bármely $g \in \mathcal{F}_0$ függvényre egy alkalmas $0 < \delta_g$-vel teljesül a következő egyenlőtlenség:

$$|g(x) - g(t)| < \varepsilon \qquad (x, t \in [a, b], |x - t| < \delta_g).$$

Ha $\delta := \min\,\{\delta_g : g \in \mathcal{F}_0\}$, akkor tetszőleges $f \in \mathcal{F}, x, t \in [a, b]$ és $|x - t| < \delta$ mellett a fenti f_0-val

$$|f(x) - f(t)| \le |f(x) - f_0(x)| + |f_0(x) - f_0(t)| + |f_0(t) - f(t)| \le$$

$$2\|f - f_0\|_\infty + |f_0(x) - f_0(t)| < 3\varepsilon,$$

hiszen $|x - t| < \delta \le \delta_{f_0}$, azaz $|f_0(x) - f_0(t)| < \varepsilon$.

Összefoglalva azt kaptuk, hogy akármilyen $\sigma > 0$ esetén van olyan $\delta > 0$, hogy minden $\mathcal{F} \ni f$-re

$$|f(x) - f(t)| < \sigma \qquad (x, t \in [a, b], |x - t| < \delta). \tag{2}$$

Azt mondjuk, hogy az $\mathcal{F}$ halmaz elemei *egyenlő mértékben egyenletesen folytonosak,* ha (2) igaz.

4.3.3. Tétel (*Arzelà*). *A zárt $\emptyset \ne \mathcal{F} \subset C[a, b]$ halmaz akkor és csak akkor kompakt, ha az $\mathcal{F}$ elemei egyenletesen korlátosak és egyenlő mértékben egyenletesen folytonosak.*

Bizonyítás. A szükségességet a tétel kimondása előtt már beláttuk.

Tegyük most fel, hogy a szóban forgó zárt $\mathcal{F}$ halmazra (1) és (2) igaz. Legyen $\sigma > 0$ és $K > 0$ az (1)-nek, $\delta > 0$ pedig a (2)-nek eleget tevő egy-egy szám. Válasszuk az $n, m \in \mathbf{N}$ pozitív számokat úgy, hogy $\frac{b-a}{n} < \delta$ és $\frac{2K}{m} < \sigma$ teljesüljön, ill. vezessük be a következő jelöléseket:

$$x_k := a + k \cdot \frac{b-a}{n} \;\; (k = 0, ..., n)\;,\; y_j := -K + j \cdot \frac{2K}{m} \;\; (j = 0, ..., m).$$

Jelentse továbbá $\mathcal{L} \subset C[a, b]$ az összes olyan L töröttvonal (lineáris spline) által meghatározott halmazt, amelynek a töréspontjai (legfeljebb) az x_k $(k = 0, ..., n)$ pontok és bármely $k = 0, ..., n$ esetén valamilyen $j = 0, ..., m$ indexre

$$L(x_k) = y_j.$$

Világos, hogy $\mathcal{L}$ véges halmaz.

Ha $f \in \mathcal{F}$, akkor minden $k = 0, ..., n$ indexhez egyértelműen van olyan $j_k = 0, ..., m-1$, amellyel

$$y_{j_k} \leq f(x_k) < y_{j_k+1}.$$

Legyen $L \in \mathcal{L}$ olyan, hogy $L(x_k) := y_{j_k} \quad (k = 0, ..., n)$. Ekkor tetszőleges $k = 0, ..., n-1$ és $x \in [x_k, x_{k+1}]$ esetén

$$|f(x) - L(x)| \leq |f(x) - f(x_k)| + |f(x_k) - y_{j_k}| + |L(x_k) - L(x)| \leq$$

$$|f(x) - f(x_k)| + |f(x_k) - y_{j_k}| + |L(x_k) - L(x_{k+1})| \leq |f(x) - f(x_k)| + |f(x_k) - y_{j_k}| +$$

$$|L(x_k) - f(x_k)| + |f(x_k) - f(x_{k+1})| + |f(x_{k+1}) - L(x_{k+1})| =$$

$$|f(x) - f(x_k)| + 2|f(x_k) - y_{j_k}| + |f(x_k) - f(x_{k+1})| + |f(x_{k+1}) - y_{j_{k+1}}| \leq 5\sigma,$$

hiszen $|x - x_k|, |x_k - x_{k+1}| < \delta$, $|f(x_k) - y_{j_k}|, |f(x_{k+1}) - y_{j_{k+1}}| < \sigma$.

Azt láttuk tehát be, hogy ha $\varepsilon > 0$ és $f \in \mathcal{F}$, akkor (az előbbiekben a $0 < \sigma < \varepsilon/5$ választással) alkalmas $L \in \mathcal{L}$ függvénnyel $\|f - L\|_\infty < \varepsilon$. Ez éppen azt jelenti, hogy $\mathcal{F}$ teljesen korlátos. ■

4.3.1. Megjegyzések.

i) Nyilván bármely véges $\emptyset \neq \mathcal{F} \subset C[a, b]$ halmaz elemei egyenlő mértékben egyenletesen folytonosak.

ii) Legyen $0 < n \in \mathbf{N}$,

$$f_n(x) := \begin{cases} 2nx & (0 \leq x \leq \frac{1}{2n}) \\ 2n\left(\frac{1}{n} - x\right) & \left(\frac{1}{2n} \leq x \leq \frac{1}{n}\right) \\ 0 & \left(\frac{1}{n} < x \leq 1\right) \end{cases}$$

és $\mathcal{F} := \{f_n \in C[0, 1] : 0 < n \in \mathbf{N}\}$. Ekkor $\mathcal{F}$-re (2) nem áll fenn, azaz van olyan $\sigma > 0$, hogy minden $\delta > 0$ mellett egy-egy megfelelő $0 < n \in \mathbf{N}$ és $x, t \in [0, 1]$, $|x - t| < \delta$ esetén

$$|f_n(x) - f(t)| \geq \sigma.$$

Ugyanis

$$f_n(1/(2n)) - f_n(0)| = 1 =: \sigma \qquad (0 < n \in \mathbf{N}),$$

de bármely $\delta > 0$ esetén $1/(2n) \to 0 \quad (n \to \infty)$ miatt alkalmas $\mathbf{N} \ni n$-re a $t := 0, x := 1/(2n)$ választással $|x - t| < \delta$.

iii) Valamely $f \in C[a, b], \delta > 0$ esetén legyen

$$\omega(f, \delta) := \sup\{|f(x) - f(t)| : x, t \in [a, b], |x - t| < \delta\}$$

(az f függvény *folytonossági modulusa*). Mivel f egyenletesen folytonos, ezért $\lim_{\delta\to 0} \omega(f, \delta) = 0$. Továbbá a (2) feltétel pontosan azt jelenti, hogy ez a $\lim_{\delta\to 0} \omega(f, \delta) = 0$ egyenlőség az $f \in \mathcal{F}$ függvényekre *egyenletesen* teljesül: bármely $\varepsilon > 0$ számhoz megadható a $\delta_0 > 0$ úgy, hogy ha $0 < \delta < \delta_0$, akkor $\omega(f, \delta) < \varepsilon \quad (f \in \mathcal{F})$.

5. Az approximációelmélet alapjai

5.1. Halmazok távolsága.

Legyen (X, ρ) metrikus tér, $\emptyset \neq A, B \subset X$ és

$$\rho(A, B) := \inf\{\rho(x, y) : x \in A, y \in B\}.$$

Azt mondjuk, hogy $a \in A, b \in B$ *extremális pontok,* ha $\rho(a, b) = \rho(A, B)$. Speciálisan, ha $z \in X$, akkor legyen

$$\rho(z, B) := \rho(\{z\}, B) = \inf\{\rho(z, y) : y \in B\},$$

ill. nevezzük a $b \in B$ pontot *extremálisnak,* ha $\rho(z, b) = \rho(z, B)$. Nyilvánvaló, hogy $z \in B$ esetén $b := z$ extremális, $\rho(z, B) = 0$ és ekkor ez az egyetlen extremális elem. Sőt, ha $\rho(z, B) = 0$ és van extremális elem ($b \in B$), akkor $0 = \rho(z, B) = \rho(z, b)$ miatt $z = b \in B$.

Azt a kérdést vizsgáljuk a továbbiakban, hogy milyen feltételekkel lehet garantálni extremális pontok létezését? Ehhez azt fogjuk mondani, hogy a B halmaz *kvázikompakt,* ha tetszőleges $x_n \in B$ $(n \in \mathbf{N})$ korlátos sorozatnak van olyan (x_{ν_n}) konvergens részsorozata, hogy $\lim(x_{\nu_n}) \in B$. Világos, hogy

- minden kvázikompakt halmaz zárt;
- (ld. 4.2.3. Tétel) minden kompakt halmaz kvázikompakt.

Az utóbbi észrevétel nyilván nem megfordítható: ha ui. $(X, \rho) \equiv (\mathbf{R}, |.|)$, akkor pl. $\mathbf{R}$ kvázikompakt (ld. a klasszikus *Bolzano-Weierstrass*-féle kiválasztási tételt), de nem kompakt, hiszen nem korlátos.

5.1.1. Tétel. *Tegyük fel, hogy a fenti A halmaz kompakt, B pedig kvázikompakt. Ekkor léteznek $a \in A$, $b \in B$ extremális pontok: $\rho(a,b) = \rho(A,B)$.*

Bizonyítás. Az infimum tulajdonságai miatt minden $n \in \mathbf{N}$ esetén vannak olyan $a_n \in A$, $b_n \in B$ elemek, amelyekkel

$$\rho(A,B) \leq \rho(a_n,b_n) < \rho(A,B) + \frac{1}{n+1}.$$

Következésképpen $\lim(\rho(a_n,b_n)) = \rho(A,B)$.

Az A halmaz kompaktsága miatt egy alkalmas (ν_n) részsorozattal (ld. 4.3.2. Tétel) (a_{ν_n}) konvergens és $a := \lim(a_{\nu_n}) \in A$. Mutassuk meg, hogy a (b_{ν_n}) sorozat korlátos. Ui.

$$\rho(b_{\nu_n},a) \leq \rho(b_{\nu_n},a_{\nu_n}) + \rho(a_{\nu_n},a) < \frac{1}{\nu_n+1} + \rho(a_{\nu_n},a) \to 0 \qquad (n \to \infty),$$

azaz alkalmas $M > 0$ számmal $\rho(b_{\nu_n},a) \leq M \quad (n \in \mathbf{N})$.

A B halmaz kvázikompaktsága miatt van tehát olyan (μ_n) indexsorozat, amellyel $(b_{\nu_{\mu_n}})$ konvergens és $b := \lim(b_{\nu_{\mu_n}}) \in B$. Továbbá minden $\mathbf{N} \ni n$-re

$$\rho(a,b) \leq \rho(a,a_{\nu_{\mu_n}}) + \rho(a_{\nu_{\mu_n}},b_{\nu_{\mu_n}}) + \rho(b_{\nu_{\mu_n}},b),$$

azaz (megfelelő szerepcserét is alkalmazva)

$$|\rho(a,b) - \rho(a_{\nu_{\mu_n}},b_{\nu_{\mu_n}})| \leq \rho(a,a_{\nu_{\mu_n}}) + \rho(b_{\nu_{\mu_n}},b) \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

Így

$$\rho(a,b) = \lim(\rho(a_{\nu_{\mu_n}},b_{\nu_{\mu_n}})) = \lim(\rho(a_n,b_n)) = \rho(A,B),$$

azaz a,b extremálisak. ■

Mivel tetszőleges $z \in X$ esetén a $\{z\}$ halmaz kompakt, ezért az előbbi tételből speciális esetként rögtön adódik az

5.1.2. Tétel. *Tegyük fel, hogy a B halmaz kvázikompakt. Ekkor minden $z \in X$ elemhez létezik $b \in B$ extremális pont: $\rho(z,b) = \rho(z,B)$.*

5.2. Approximáció normált terekben.

Legyen a továbbiakban $(X,\rho) \equiv (X,\|.\|)$, $L \subset X$ véges dimenziós altér. Ekkor a 3.2.2. Tétel szerint az $(L,\|.\|_{|_L})$ tér topologiailag azonosítható (alkalmas $0 < n \in \mathbf{N}$ mellett) a $(\mathbf{K}^n,\|.\|_\infty)$ térrel. Ebből rögtön következik, hogy L zárt és „működik" benne a *Bolzano-Weierstrass*-féle kiválasztási tétel: bármely $x_n \in L \quad (n \in \mathbf{N})$ korlátos sorozatnak van L-ben konvergens részsorozata. Más szóval L kvázikompakt. Az 5.1.2. Tétel alapján tehát igaz az

5.2.1. Tétel. *Bármely véges dimenziós $L \subset X$ altér és $x \in X$ elem esetén van olyan $l \in L$, amely extremális:* $\|l - x\| = \rho(x, L)$.

5.2.1. Megjegyzés.

Igen tanulságos az 5.2.1. Tétel alábbi bizonyítása is. Legyen $e_1, ..., e_n \in L$ (valamilyen $0 < n \in \mathbf{N}$ mellett) bázis L-ben és rögzített $x \in L$ esetén

$$f(\alpha) := \left\| x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \right\| \qquad (\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbf{K}^n).$$

Ekkor az $M := \sum_{k=1}^{n} \|e_k\|$ jelöléssel

$$|f(\alpha) - f(\beta)| \leq \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k - \beta_k| \cdot \|e_k\| \leq M\|\alpha - \beta\|_\infty \qquad (\alpha, \beta \in \mathbf{K}^n),$$

amiből az f függvény (egyenletes) folytonossága rögtön következik. Mivel

$$f(\alpha) \geq \left\| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \right\| - \|x\| = \|\alpha\|_\infty \cdot \left\| \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{\|\alpha\|_\infty} e_k \right\| - \|x\| =$$

$$\|\alpha\|_\infty \cdot f(\alpha/\|\alpha\|_\infty) - \|x\| \qquad (0 \neq \alpha \in \mathbf{K}^n),$$

ezért m-mel jelölve az f függvény minimumát a ($\mathbf{K}^n$-ben kompakt)

$$\{\beta \in \mathbf{K}^n : \|\beta\|_\infty = 1\}$$

halmazon azt kapjuk, hogy $f(\alpha) \geq m\|\alpha\|_\infty - \|x\|$. Világos, hogy $m > 0$, így az $\|\alpha\|_\infty > 2\|x\|/m$ vektorokra $f(\alpha) > \|x\|$. Következésképpen a

$$\rho(x, L) = \inf\{f(\alpha) : \alpha \in \mathbf{K}^n\} \leq f(0) = \|x\|$$

becslés miatt

$$\rho(x, L) = \inf\{f(\alpha) : \alpha \in \mathbf{K}^n, \|\alpha\|_\infty \leq 2\|x\|/m\}.$$

Az $E := \{\alpha \in \mathbf{K}^n : \|\alpha\|_\infty \leq 2\|x\|/m\}$ halmaz is ($\mathbf{K}^n$-ben) kompakt, tehát az f függvény folytonossága miatt létezik a

$$\rho(x, L) = \min\{f(\alpha) : \alpha \in E\} = f(\tilde{\alpha})$$

minimum valamilyen $\tilde{\alpha} \in E$ vektorral. Ez azt jelenti, hogy a $\sum_{k=1}^{n} \tilde{\alpha}_k e_k \in L$ elem extremális.

Az előbbi tétel alkalmazását illetően tekintsük a következő példákat.

1^o Legyen $\emptyset \neq U \subset \mathbf{R}$ kompakt halmaz (a számegyenes „szokásos” topológiájára nézve),

$$X := \{f : U \to \mathbf{R} : f \text{ folytonos}\}\ ,\ \|f\| := \max_{x\in U} |f(x)| \quad (f \in X).$$

Legyenek továbbá valamely $0 < n \in \mathbf{N}$ esetén adottak a $g_1, ..., g_n \in X$ függvények és definiáljuk az $L \subset X$ alteret úgy, mint a $g_1, ..., g_n$ függvények lineáris burkát:

$$L := \mathcal{L}\left(\{g_1, ..., g_n\}\right).$$

Világos, hogy L véges dimenziós, ezért az 5.2.1. Tétel alapján tetszőleges $f \in X$ függvényhez vannak olyan $a_1, ..., a_n \in \mathbf{R}$ együtthatók, hogy a $g := \sum_{k=1}^{n} a_k g_k \in L$ függvény extremális: $\|f - g\| = \rho(f, L)$, azaz

$$\max_{x\in U} \left| f(x) - \sum_{k=1}^{n} a_k g_k(x) \right| = \min_{\alpha_1,...,\alpha_n\in\mathbf{R}} \max_{x\in U} \left| f(x) - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k g_k(x) \right|.$$

2^o Tegyük fel, hogy az előbbi példában az U halmaz véges: $U = \{x_1, ..., x_m\}$ (valamilyen $0 < m \in \mathbf{N}$ mellett). Ekkor az előbbi feladat a következő alakot ölti (*min-max-feladat*):

$$\max_{i=1,...,m} \left| f(x_i) - \sum_{k=1}^{n} a_k g_k(x_i) \right| = \min_{\alpha_1,...,\alpha_n\in\mathbf{R}} \max_{i=1,...,m} \left| f(x_i) - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k g_k(x_i) \right|.$$

Ha

$$y := (f(x_1), ..., f(x_m)) \in \mathbf{R}^m\ ,\ a := (a_1, ..., a_n) \in \mathbf{R}^n,$$

$$A := (g_k(x_i))_{i=1,k=1}^{m,n} \in \mathbf{R}^{m\times n}\ ,\ \alpha := (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbf{R}^n,$$

akkor a min-max-feladat a következőképpen írható:

$$\|y - Aa\|_\infty = \min_{\alpha\in\mathbf{R}^n} \|y - A\alpha\|_\infty.$$

Nyilván bármely $y \in \mathbf{R}^m$ vektor és $A \in \mathbf{R}^{m\times n}$ mátrix felírható ilyen alakban alkalmas $g_1, ..., g_n$ függvényekkel és $x_1, ..., x_m$ „alappontokkal”. Világos továbbá, hogy ha az $Az = y$ lineáris egyenletrendszernek van megoldása, azaz valamilyen $\hat{z} \in \mathbf{R}^n$ esetén $A\hat{z} = y$, akkor a fenti min-max-feladatban $a = \hat{z}$ írható. Ha ilyen $\hat{z}$ nincs, akkor nevezzük a min-max-feladat bármely $a \in \mathbf{R}^n$ megoldását a szóban forgó lineáris egyenletrendszer *approximatív megoldásának.*

Tekintsük pl. a (klasszikus értelemben nem megoldható)

$$\begin{aligned} 2x &= 3 \\ 3x &= 4 \end{aligned}$$

egyenletrendszert. A min-max-feladat most az alábbi elemi feladatot jelenti: határozzunk meg olyan $\mathbf{R} \ni a$-t, amellyel

$$\min_{x \in \mathbf{R}} \max\{|2x-3|, |3x-4|\} = \max\{|2a-3|, |3a-4|\}.$$

A $\varphi(x) := \max\{|2x-3|, |3x-4|\}$ $(x \in \mathbf{R})$ függvény vizsgálatából rövid meggondolás után adódik az $a = 7/5$ megoldás.

3^o Ha az 1^o példában $g_k(x) := x^{k-1}$ $(x \in U, k = 1, ..., n)$, akkor legyen (az ottani jelölésekkel)

$$P(x) := \sum_{k=1}^{n} a_k x^{k-1} \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

Ekkor P legfeljebb $(n-1)$-edfokú polinom, ill. $g = P_{|_U}$. A P polinomot az f-et (az U halmazon) *egyenletesen legjobban közelítő legfeljebb* $(n-1)$*-edfokú polinomnak* nevezzük. Ennek a feladatnak a klasszikus esete az, amikor U egy kompakt intervallum. Ha a most vizsgált *polinomapproximációt* a 2^o példában tekintjük, akkor $m = n$ esetén P nem más, mint az f függvény *Lagrange*-féle interpolációs polinomja az $x_1, ..., x_n$ alappontokon. Ekkor a 2^o min-max-feladat megoldása egyértelmű. (Ha $m < n$, akkor szintén tudunk interpolálni, de a feladat megoldása már nem egyértelmű.)

4^o Írjunk a 2^o feladatban szereplő $\mathbf{R}^m$-beli $\|.\|_\infty$ vektornorma helyett $\|.\|_2$-t:

$$\|z\|_2 := \sqrt{\sum_{k=1}^{m} |z_k|^2} \qquad (z = (z_1, ..., z_m) \in \mathbf{R}^m).$$

Ekkor az

$$\|y - Aa\|_2 = \min_{\alpha \in \mathbf{R}^n} \|y - A\alpha\|_2$$

feladatra jutunk, azaz

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{m} \left| f(x_i) - \sum_{k=1}^{n} a_k g_k(x_i) \right|^2} = \min_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbf{R}} \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \left| f(x_i) - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k g_k(x_i) \right|^2}.$$

Ez nem más, mint a *legkisebb négyzetek módszere* néven jól ismert feladat.

Azt mondjuk, hogy az $(X, \|.\|)$ normált tér *szigorúan normált,* ha az $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$ egyenlőség valamely $x, y \in X$ esetén akkor és csak akkor áll fenn, ha alkalmas $\lambda \geq 0$ számmal $y = \lambda x$ vagy $x = \lambda y$. Könnyen látható, hogy pl. az $(\mathbf{R}^2, \|.\|_\infty)$ tér nem szigorúan normált. Ui. az $x := (1, 0)$, $y := (1, 1) \in \mathbf{R}^2$ vektorokkal $\|x\| = \|y\| = 1$, $x + y = (2, 1)$, azaz $\|x+y\| = 2 = \|x\| + \|y\|$. Ugyanakkor bármely $\lambda \geq 0$ számmal $x \neq \lambda y$ és $y \neq \lambda x$.

Megmutatjuk azonban, hogy igaz az

5.2.1. Lemma. *Legyen* $(X, \|.\|) \equiv (X, \langle, \rangle)$. *Ekkor* $(X, \|.\|)$ *szigorúan normált.*

Bizonyítás. Ha $x, y \in X$, $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$ és $y = 0$, akkor a $\lambda := 0$ választással $y = \lambda x$. Feltehető ezért, hogy $y \neq 0$. Tekintsük ebben az esetben a

$$h(t) := \|x - ty\|^2 \qquad (t \in \mathbf{R})$$

függvényt:

$$h(t) = \langle x - ty, x - ty\rangle = \|x\|^2 - 2t\,\mathrm{Re}\,\langle x, y\rangle + t^2\|y\|^2.$$

Mivel az $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$ feltételezés szerint

$$\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y\rangle = \|x\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,\langle x, y\rangle + \|y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\cdot\|y\|,$$

ezért $\mathrm{Re}\,\langle x, y\rangle = \|x\|\cdot\|y\|$. Következésképpen

$$h(t) = \|x\|^2 - 2t\|x\|\cdot\|y\| + t^2\|y\|^2 = (\|x\| - t\|y\|)^2.$$

Ez azt jelenti, hogy a $\lambda := \dfrac{\|x\|}{\|y\|}$ (≥ 0) jelöléssel

$$0 = h(\lambda) = \|x - \lambda y\|^2,$$

azaz $x = \lambda y$. ■

5.2.2. Tétel. *Tegyük fel, hogy az $(X, \|.\|)$ tér szigorúan normált. Ekkor bármely $L \subset X$ altér és $x \in X$ esetén legfeljebb egy olyan $l \in L$ létezik, amelyre $\|x - l\| = \rho(x, L)$.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy valamely $x \in X, l_1, l_2 \in L$ esetén

$$\|x - l_1\| = \|x - l_2\| = \rho(x, L)$$

és legyen $l := \dfrac{l_1 + l_2}{2}$. Mivel L altér, ezért $l \in L$, következésképpen

$$\rho(x, L) \leq \|x - l\| = \left\|x - \frac{l_1 + l_2}{2}\right\| = \frac{1}{2}\|(x - l_1) + (x - l_2)\| \leq$$

$$\frac{1}{2}\left(\|x - l_1\| + \|x - l_2\|\right) = \rho(x, L).$$

Innen azt kapjuk, hogy

$$\|(x - l_1) + (x - l_2)\| = \|x - l_1\| + \|x - l_2\|,$$

azaz a szigorú normáltság miatt van olyan $\lambda \geq 0$, amellyel (pl.) $x - l_1 = \lambda(x - l_2)$.
Ha itt $\lambda = 1$, akkor $l_1 = l_2$ rögtön következik. Ha viszont $\lambda \neq 1$, akkor

$$x = \frac{l_1 - \lambda l_2}{1 - \lambda} \in L.$$

Világos (ahogyan azt már korábban is megjegyeztük), hogy tetszőleges $y \in L$ esetén az egyetlen extremális elem is y, azaz ekkor $x = l_1 = l_2$. ■

5.2.2. Megjegyzések.

i) Tekintsük az $(X, \|.\|) := (C[0,1], \|.\|_\infty)$ teret és az $L := \{f \in X : f(0) = 0\}$ (nyilván) alteret, valamint az $f \in X$, $f \equiv 1$ függvényt. Könnyű meggondolni, hogy ha $g \in L$ olyan függvény, amelyre $\mathcal{R}_g \subset [0,1]$, akkor g extremális. Legyen ui. g ilyen, $x \in [0,1]$, ekkor

$$1 = |f(0) - g(0)| \leq \max_{x \in [0,1]} |f(x) - g(x)| = \|f - g\| = \max_{x \in [0,1]} |1 - g(x)| \leq 1,$$

azaz $\|f - g\| = 1$. Ugyanakkor tetszőleges $h \in L$ esetén

$$1 = |f(0) - h(0)| \leq \max_{x \in [0,1]} |f(x) - h(x)| = \|f - h\|.$$

Egybevetve a fentieket $\rho(f, L) = 1 = \|f - g\|$ következik. Világos, hogy a jelzett tulajdonságú g függvényből (azaz egyúttal extremális elemből is) végtelen sok van.

ii) Az 5.2.2. Tétel alapján tehát az i) megjegyzésbeli tér nem szigorúan normált, ami a hivatkozott tétel nélkül is könnyen belátható: az előbbi f és a $g(x) := x \ \ (x \in [0,1])$ függvényre

$$\|f + g\| = 2 = \|f\| + \|g\|,$$

de nyilván nem létezik olyan $\lambda \in \mathbf{R}$, amellyel $f = \lambda g$ vagy $g = \lambda f$ teljesülne.

5.3. Approximáció euklideszi terekben.

Legyen az $(X, \langle , \rangle)$ euklideszi térben $L \subset X$ altér. Azt fogjuk mondani, hogy L *teljes altér,* ha bármely $x_n \in L \ \ (n \in \mathbf{N})$ *Cauchy*-sorozat konvergens és $\lim(x_n) \in L$. Nyilvánvaló, hogy

- minden teljes altér zárt;
- ha $(X, \langle , \rangle)$ *Hilbert*-tér, akkor az $L \subset X$ altér akkor és csak akkor teljes altér, ha zárt.

5.3.1. Tétel. *Tegyük fel, hogy $L \subset X$ teljes altér az $(X, \langle , \rangle)$ euklideszi térben. Ekkor bármely $x \in X$ esetén egyértelműen létezik olyan $l \in L$, amely extremális, azaz $\|x - l\| = \rho(x, L)$.*

Bizonyítás. Az egyértelműség az 5.2.1. Lemma, ill. az 5.2.2. Tétel alapján már következik.

Legyen $l_n \in L \ \ (n \in \mathbf{N})$ olyan elem, amelyre

$$\rho(x, L) \leq \|x - l_n\| < \rho(x, L) + \frac{1}{n+1}.$$

Ekkor $\lim(\|x - l_n\|) = \rho(x, L)$. A paralelogramma-szabály (ld. 1.3.1. Tétel) alapján minden $n, m \in \mathbf{N}$ esetén a következőt mondhatjuk:

$$\|l_n - l_m\|^2 = \|(x - l_n) - (x - l_m)\|^2 = 2(\|x - l_n\|^2 + \|x - l_m\|^2) - \|2x - (l_n + l_m)\|^2.$$

Az l_n, l_m elemek konstrukciója miatt

$$2(\|x-l_n\|^2+\|x-l_m\|^2)\to 4\rho^2(x,L) \qquad (n,m\to\infty).$$

Megmutatjuk, hogy

$$\|2x-(l_n+l_m)\|^2\to 4\rho^2(x,L) \qquad (n,m\to\infty)$$

is igaz. Valóban,

$$\|2x-(l_n+l_m)\|^2=4\left\|x-\frac{l_n+l_m}{2}\right\|^2,$$

ahol $\frac{l_n+l_m}{2}\in L$ miatt

$$4\left\|x-\frac{l_n+l_m}{2}\right\|^2\geq 4\rho^2(x,L).$$

Mivel

$$\|2x-(l_n+l_m)\|^2=\|(x-l_n)+(x-l_m)\|^2\leq$$

$$(\|x-l_n\|+\|x-l_m\|)^2\to 4\rho^2(x,L) \qquad (n,m\to\infty),$$

ezért $\|2x-(l_n+l_m)\|^2\to 4\rho^2(x,L)$ $(n,m\to\infty)$ már valóban következik.

Azt kaptuk tehát, hogy $\|l_n-l_m\|\to 0$ $(n,m\to\infty)$. Az L altér teljessége miatt így létezik az $l:=\lim(l_n)$ határérték és $l\in L$. Az

$$|\|x-l\|-\|x-l_n\||\leq\|l-l_n\|\to 0 \qquad (n\to\infty)$$

becslés miatt azonban $\|x-l\|=\lim(\|x-l_n\|)=\rho(x,L)$, azaz l extremális. ■

5.3.1. Megjegyzések.

i) Ha az $(X,\langle,\rangle)$ tér *Hilbert*-tér, akkor az 5.3.1. Tétel az alábbi alakot ölti: *bármely $L\subset X$ zárt altér és $x\in X$ esetén egyértelműen létezik olyan $l\in L$, amely extremális, azaz $\|x-l\|=\rho(x,L)$.*

ii) Az előbbi megjegyzésben az L altér zártsága, ill. az 5.3.1. Tételben az illető altér teljessége nem hagyható el. Legyen ui. (ld. 3.3.4. ii) megjegyzés) $(X,\langle,\rangle):=(\ell_2,\langle,\rangle_2)\equiv(\ell_2,\|.\|_2)$, $L:=\ell_1$, azaz

$$L:=\left\{(x_n)\in\ell_2:\sum_{n=0}^{\infty}|x_n|<+\infty\right\}.$$

Ha $x:=(1/(n+1))\in\ell_2$, akkor tetszőleges $n\in\mathbf{N}$ esetén az

$$x_k^{(n)} := \begin{cases} x_k & (k = 0, ..., n) \\ \\ 0 & (k > n) \end{cases} \qquad (n \in \mathbf{N})$$

előírással definiált nyilván L-beli $x^{(n)}$ sorozatokra

$$\|x - x^{(n)}\|_2^2 = \sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k|^2 \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

Ezért bármely $\varepsilon > 0$ mellett vehetünk olyan n-et, amellyel $\rho(x, L) \leq \|x - x^{(n)}\|_2 < \varepsilon$. Tehát $\rho(x, L) = 0$. Mivel $x \notin L$, ezért nincs extremális elem, hiszen ha $l \in L$ ilyen volna, akkor $0 = \rho(x, L) = \|x - l\|_2$ miatt $x = l \in L$ lenne.

5.3.2. Tétel. *Legyen $(X, \langle , \rangle)$ tetszőleges euklideszi tér, $L \subset X$ altér, $x \in X$, $l \in L$. Az l elem akkor és csak akkor extremális, ha bármely $y \in L$ esetén $\langle x - l, y\rangle = 0$.*

Bizonyítás. Tegyük fel először, hogy $\|x - l\| = \rho(x, L)$ és (indirekt módon) valamilyen $y \in L$ elemre $\langle x - l, y\rangle \neq 0$, pl. $\alpha := \operatorname{Re}\langle x - l, y\rangle > 0$. (A többi eset hasonlóan kezelhető.) Ekkor minden $\lambda > 0$ esetén

$$\|x - (l + \lambda y)\|^2 = \langle (x - l) - \lambda y, (x - l) - \lambda y\rangle =$$

$$\|x - l\|^2 + \lambda^2\|y\|^2 - 2\alpha\lambda = \|x - l\|^2 + \lambda(\lambda\|y\|^2 - 2\alpha).$$

Mivel $\lambda\|y\|^2 \to 0$ $(\lambda \to +0)$, ezért alkalmas λ-ra $\lambda\|y\|^2 - 2\alpha < 0$, azaz $\|x - (l + \lambda y)\|^2 < \|x - l\|^2$. Ez azt jelentené, hogy az $l + \lambda y \in L$ elemre $\rho(x, L) = \|x - l\| < \|x - (l + \lambda y)\|$, ami nem lehet.

Most azt tegyük fel, hogy bármely $y \in L$ esetén $\langle x - l, y\rangle = 0$ és legyen $z \in L$. Ekkor

$$\|x - (z + l)\|^2 = \langle (x - l) - z, (x - l) - z\rangle = \|x - l\|^2 + \|z\|^2,$$

ui. a feltétel szerint $\langle x - l, z\rangle = \langle z, x - l\rangle = 0$. Tehát $\|x - (z + l)\| \geq \|x - l\|$. Világos, hogy az L altér minden eleme felírható alkalmas $L \ni z$-vel $z + l$ alakban, így az előbbi eredmény másképpen fogalmazva azt jelenti, hogy $\|x - l\| \leq \|x - s\| \quad (s \in L)$. Ezért l extremális elem. ■

5.3.2. Megjegyzések.

i) Geometriai hasonlattal élve az $\langle u, v\rangle = 0$ esetben azt mondjuk, hogy az $u, v \in X$ elemek *ortogonálisak* (vagy *merőlegesek*), és mindezt az $u \perp v$ szimbólummal jelöljük.

ii) Valamely $\emptyset \neq A \subset X$ esetén legyen $A^{\perp} := \{x \in X : x \perp a \quad (a \in A)\}$. Világos, hogy $A^{\perp}$ altér. Azt sem nehéz belátni, hogy $A^{\perp}$ zárt. Ha ui. $x_n \in A^{\perp} \quad (n \in \mathbf{N})$ konvergens és $x := \lim(x_n)$, akkor tetszőleges $a \in A$ és $n \in \mathbf{N}$ esetén

$$|\langle x, a\rangle| = |\langle x, a\rangle - \langle x_n, a\rangle| = |\langle x - x_n, a\rangle| \leq \|x - x_n\| \cdot \|a\| \to 0 \qquad (n \to \infty),$$

azaz $\langle x, a\rangle = 0$. Tehát $x \in A^{\perp}$, így $A^{\perp}$ valóban zárt. Az $A^{\perp}$ zárt alteret az A halmaz *ortogonális kiegészítő alterének* nevezzük.

iii) Legyen pl. $(X, \langle , \rangle) \equiv (\mathbf{R}^2, \langle , \rangle_2)$ és (pl.) L „egy origón átmenő egyenes”. Ekkor az 5.3.2. Tétel az elemi matematikából jól ismert tényt jelenti: valamely $x \in \mathbf{R}^2$ vektor esetén x és L (euklideszi) távolságát úgy kapjuk meg, hogy x-ből merőlegest bocsátunk L-re és ha ennek a talppontja az $l \in L$ vektor, akkor a keresett távolság $\|x - l\|_2$.

iv) A most bevezetett terminológiával élve tehát az 5.3.2. Tétel a következőképpen fogalmazható meg: $\|x - l\| = \rho(x, L)$ *akkor és csak akkor igaz, ha* $x - l \in L^\perp$.

Az utolsó megjegyzésből kiindulva legyen valamely $L \subset X$ teljes altér és $x \in X$ esetén $l \in L$ extremális elem: $\|x-l\| = \rho(x, L)$ és $x_1 := l$, $x_2 := x-l$. Ekkor $x_1 \in L$, $x_2 \in L^\perp$ és nyilván $x = x_1+x_2$. Nem nehéz belátni, hogy az x elem előbbi tulajdonságú felbontása egyértelmű: ha valamely $u_1 \in L$, $u_2 \in L^\perp$ elemekkel is igaz az $x = u_1 + u_2$ előállítás, akkor

$$L \ni x_1 - u_1 = u_2 - x_2 \in L^\perp$$

miatt $x_1 - u_1 \in L \cap L^\perp$, azaz $\|x_1 - u_1\|^2 = \langle x_1 - u_1, x_1 - u_1\rangle = 0$. Következésképpen $x_1 = u_1$ és hasonlóan $x_2 = u_2$.

Ezzel beláttuk az alábbi állítást:

5.3.3. Tétel (*Riesz*). *Legyen $L \subset X$ teljes altér az $(X, \langle , \rangle)$ euklideszi térben. Ekkor bármely $x \in X$ esetén egyértelműen léteznek olyan $x_1 \in L$, $x_2 \in L^\perp$ elemek, amelyekkel $x = x_1 + x_2$.*

5.3.3. Megjegyzések.

i) A fenti tétel alapján azt mondjuk, hogy az X tér az $L, L^\perp$ alterek *ortogonális direkt összege*: $X = L \oplus L^\perp$.

ii) Ha $x = x_1 + x_2$ az $x \in X$ elemnek az 5.3.3. Tétel szerinti felbontása, akkor igaz az $\|x\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2$ *Pitagoraszi-összefüggés.* Ui. $\langle x_2, x_1\rangle = \langle x_1, x_2\rangle = 0$ miatt

$$\|x\|^2 = \langle x_1 + x_2, x_1 + x_2\rangle = \langle x_1, x_1\rangle + \langle x_2, x_2\rangle = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2.$$

iii) Speciálisan bármely $(X, \langle , \rangle)$ *Hilbert*-tér és zárt $L \subset X$ altér esetén $X = L \oplus L^\perp$.

iv) Legyen valamely $(X, \langle , \rangle)$ euklideszi tér és teljes $L \subset X$ altér mellett $P_L : X \to L$ az a leképezés, amelyre $P_L(x) := x_1 \quad (x \in X)$, ha $x = x_1 + x_2$ az x elem előbbi felbontása: $x_1 \in L$, $x_2 \in L^\perp$. A P_L leképezést (operátort) az L altérre való *projekciónak* (vagy *vetítésnek*) nevezzük. Az eddigiek alapján már eléggé nyilvánvaló, hogy P_L *lineáris,* azaz

$$P_L(\mu x + \lambda y) = \mu P_L(x) + \lambda P_L(y) \qquad (x, y \in X, \mu, \lambda \in \mathbf{K}).$$

Továbbá $\|P_L(x)\| \le \|x\| \;\; (x \in X)$, azaz (ld. 6.2.) P_L *korlátos lineáris operátor.* Ha $x \in L$, akkor az $x = x + 0$ felbontásból az 5.3.3. Tételbeli egyértelműség alapján $P_L x = x$ adódik. Ez azt is jelenti egyúttal, hogy $\mathcal{R}_{P_L} = L$. A P projekció *idempotens,* azaz $P^2 := P \circ P = P$, ui. bármely $x \in X$ esetén $P_L x \in L$ lévén az előbb mondottak szerint $P_L^2 x = P_L(P_L x) = P_L x$. Az $L^\perp$ altér a P_L projekció *magtere*: $L^\perp = \{x \in X : P_L x = 0\}$. Valóban, ha $x \in L^\perp$, akkor $x = x + 0$ az x elem ortogonális felbontása: $0 \in L, x \in L^\perp$, ezért $P_L x = 0$. Tehát $L^\perp \subset \{x \in X : P_L x = 0\}$. Fordítva, ha $x \in X$ és $P_L x = 0$, akkor az

$$x = x_1 + x_2 = P_L x + x_2 = x_2 \qquad (x_2 \in L^\perp)$$

felbontásból $x = x_2$, azaz $x \in L^\perp$ következik. Így $\{x \in X : P_L x = 0\} \subset L^\perp$ is igaz. Könnyű meggondolni, hogy a most kapott következmények jellemzik is a projekciókat: *a $P : X \to X$ lineáris leképezés akkor és csak akkor projekció az L teljes altérre, ha P idempotens, $\mathcal{R}_P = L$ és $L^\perp = \{x \in X : Px = 0\}$*. Ha ui. P ilyen, akkor bármely $X \ni x$-re $Px \in L$, ill. $P(x - Px) = Px - P^2 x = Px - Px = 0$ miatt $x - Px \in L^\perp$. Ezért $x = Px + (x - Px)$ az (L altérre vonatkozó) ortogonális felbontása x-nek. Következésképpen $Px = P_L x$.

v) Tegyük fel, hogy az előbbi megjegyzésben $e_k \in X \quad (k \in \mathcal{N})$ ONR (ld. 3.3.) és legyen valamely $n \in \mathcal{N}$ esetén $L := \mathcal{L}(\{e_0, ..., e_n\})$. Ekkor a 3.3.1. Lemma szerint bármely $x \in X$ esetén igaz, hogy $\|x - S_n(x)\| = \rho(x, L)$, azaz

$$x = S_n(x) + (x - S_n(x))$$

az x elem ortogonális felbontása. (Emlékeztetünk az $S_n(x)$ *Fourier*-részletösszeg definíciójára: $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \hat{x}(k) e_k \in L$, ahol $\hat{x}(k) = \langle x, e_k \rangle \quad (k \in \mathcal{N})$.) Más szóval tehát $P_L = S_n$ (*Fourier-projekció*).

vi) Ha az v) megjegyzésben $(X, \langle , \rangle)$ *Hilbert*-tér és $\mathcal{N} = \mathbf{N}$, akkor legyen

$$L := \overline{\mathcal{L}(\{e_n \in X : n \in \mathbf{N}\})}.$$

Ekkor L zárt (azaz teljes) altér. A 3.3.3. iii) megjegyzés szerint bármely $x \in X$ elemre létezik az $S(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \hat{x}(n) e_n$ *Fourier-összeg.* Ha $k, n \in \mathbf{N}$ és $k \le n$, akkor

$$0 \le |\langle x - S(x), e_k \rangle| = |\hat{x}(k) - \langle S(x), e_k \rangle| =$$

$$|\hat{x}(k) - \langle S(x) - S_n(x), e_k \rangle - \langle S_n(x), e_k \rangle| =$$

$$|\langle S(x) - S_n(x), e_k \rangle| \le \|S(x) - S_n(x)\| \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

Következésképpen $\langle x - S(x), e_k \rangle = 0$, azaz $x - S(x) \perp e_k \ \ (k \in \mathbf{N})$. Világos, hogy innen

$$x - S(x) \perp \mathcal{L}(\{e_n \in X : n \in \mathbf{N}\})$$

is rögtön adódik. Ha viszont $z \in L$, akkor alkalmas $z_n \in \mathcal{L}(\{e_n \in X : n \in \mathbf{N}\}) \quad (n \in \mathbf{N})$ sorozattal $\|z - z_n\| \to 0 \quad (n \to \infty)$, azaz $\langle x - S(x), z_n \rangle = 0 \ \ (n \in \mathbf{N})$ miatt

$$|\langle x - S(x), z \rangle| = |\langle x - S(x), z - z_n \rangle + \langle x - S(x), z_n \rangle| =$$

$$|\langle x - S(x), z - z_n \rangle| \le \|x - S(x)\| \cdot \|z - z_n\| \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

Tehát $\langle x - S(x), z \rangle = 0$, így $x - S(x) \perp L$ is teljesül. Mivel $S_n(x) \in L \ \ (n \in \mathbf{N})$ és L zártsága alapján

$$S(x) = \lim(S_n(x)) \in L$$

nyilván igaz, ezért (ld. 5.3.2. Tétel) $\rho(x, L) = \|x - S(x)\|$, ill. az

$$x = S(x) + (x - S(x))$$

felbontás miatt $P_L = S$.

vii) Tudjuk (ld. 3.3.2. Tétel), hogy ha az v) megjegyzésbeli (e_n) ONR zárt (vagy ami ugyanaz: teljes) rendszer, akkor $S(x) = x$. Ekkor tehát $\rho(x, L) = 0$ minden $x \in X$ elemre igaz, azaz $x \in L = X$ és $P_L = P_X = \mathrm{id}$.

viii) Legyen $(X, \langle , \rangle)$ tetszőleges euklideszi tér, $x_0, ..., x_n \in X \quad (n \in \mathbf{N})$ lineárisan független rendszer, $L := \mathcal{L}(\{x_0, ..., x_n\})$. Ekkor (ld. 5.2.1., 5.2.2. Tételek) bármely $x \in X$ esetén egyértelműen megadhatók olyan $\alpha_0, ..., \alpha_n \in \mathbf{K}$ együtthatók, amelyekkel az $l := \sum_{k=0}^n \alpha_k x_k$ jelöléssel $\rho(x, L) = \|x - l\|$. Az 5.3.2. Tétel alapján azt mondhatjuk, hogy

$$0 = \langle x - l, x_j \rangle = \langle x, x_j \rangle - \sum_{k=0}^n \alpha_k \langle x_k, x_j \rangle \qquad (j = 0, ..., n),$$

azaz

$$(*) \qquad \sum_{k=0}^n \langle x_k, x_j \rangle \alpha_k = \langle x, x_j \rangle \qquad (j = 0, ..., n).$$

Továbbá $\langle x - l, l \rangle = 0$ miatt

$$\rho^2(x, L) = \|x - l\|^2 = \langle x - l, x - l \rangle = \langle x - l, x \rangle = \|x\|^2 - \sum_{k=0}^n \alpha_k \langle x_k, x \rangle,$$

amiből

$$(**) \qquad \rho^2(x, L) + \sum_{k=0}^n \langle x_k, x \rangle \alpha_k = \langle x, x \rangle$$

következik. Vegyük észre, hogy $(*), (**)$ együtt egy $(n+2) \times (n+2)$-es lineáris egyenletrendszer a $\rho^2(x, L)$, $\alpha_0, ..., \alpha_n$ ismeretlenekre:

$$\begin{aligned}
1 \cdot \rho^2(x, L) + \langle x_0, x \rangle \alpha_0 + ... + \langle x_n, x \rangle \alpha_n &= \langle x, x \rangle \\
0 \cdot \rho^2(x, L) + \langle x_0, x_0 \rangle \alpha_0 + ... + \langle x_n, x_0 \rangle \alpha_n &= \langle x, x_0 \rangle \\
&\dots\dots\dots\dots \\
0 \cdot \rho^2(x, L) + \langle x_0, x_n \rangle \alpha_0 + ... + \langle x_n, x_n \rangle \alpha_n &= \langle x, x_n \rangle.
\end{aligned}$$

Ennek az egyenletrendszernek a determinánsa nem más, mint az $x_0, ..., x_n$ elemrendszer *Gram*-determinánsa: $\Gamma(x_0, ..., x_n)$ (> 0). A *Cramer*-szabály szerint kiszámítva $\rho^2(x, L)$-et azt kapjuk, hogy

$$\rho^2(x, L) = \frac{\Gamma(x, x_0, ..., x_n)}{\Gamma(x_0, ..., x_n)},$$

ahol értelemszerűen $\Gamma(x, x_0, ..., x_n)$ az $x, x_0, ..., x_n$ elemrendszer által meghatározott *Gram*-determináns. Következésképpen

$$\rho(x, L) = \sqrt{\frac{\Gamma(x, x_0, ..., x_n)}{\Gamma(x_0, ..., x_n)}}.$$

ix) Ha viii)-ban $x_0, ..., x_n$ ONR, akkor (könnyen ellenőrizhetően)

$$\Gamma(x_0, ..., x_n) = 1\ ,\ \Gamma(x, x_0, ..., x_n) = \|x\|^2 - \sum_{k=0}^{n} |\hat{x}(k)|^2,$$

ahol most $\hat{x}(k) := \langle x, x_k \rangle\ \ (k = 0, ..., n)$. Tehát

$$\rho(x, L) = \sqrt{\|x\|^2 - \sum_{k=0}^{n} |\hat{x}(k)|^2},$$

ami nem más, mint a *Bessel*-azonosság (ld. 3.3.1. Lemma).

6. Lineáris operátorok

6.1. Folytonos leképezések.

Legyen (X, ρ) és (Y, σ) egy-egy metrikus tér, $f \in X \to Y$, $a \in \mathcal{D}_f$. Azt mondjuk, hogy f *folytonos a-ban,* ha minden $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $\delta > 0$, hogy tetszőleges $x \in \mathcal{D}_f$, $\rho(x, a) < \delta$ esetén $\sigma(f(x), f(a)) < \varepsilon$. Mindezt az $f \in C\{a\}$ szimbólummal fogjuk jelölni. Ha az előbbi definícióban megkövetelt tulajdonság bármely $a \in \mathcal{D}_f$ helyen igaz, akkor röviden azt mondjuk, hogy f *folytonos* és erre az $f \in C$ jelölést használjuk.

Világos, hogy a leképezések folytonosságának ez a definíciója az elemi analízisben „megszokott" folytonosság kiterjesztése absztrakt függvényekre. A pontbeli folytonosság egy ekvivalens megfogalmazása a következő: $f \in C\{a\}$ akkor és csak akkor igaz, ha bármely $K(f(a))$ környezethez megadható olyan $k(a)$ környezet, hogy

$$f[k(a) \cap \mathcal{D}_f] \subset K(f(a)).$$

6.1.1. Megjegyzések.

i) Tegyük fel, hogy $f : X \to Y$ (azaz $\mathcal{D}_f = X$) és $f \in C$. Ha $\emptyset \neq Z \subset Y$ nyílt és valamely $a \in X$ esetén $f(a) \in Z$, akkor egy alkalmas $K(f(a))$ környezettel $K(f(a)) \subset Z$. Mivel $f \in C\{a\}$, ezért van olyan $k(a)$ környezet, amellyel $f[k(a)] \subset K(f(a))$. Világos, hogy az $A := \bigcup_{a \in X} k(a)$

halmaz nyílt és $f^{-1}[Z] = A$. Fordítva, ha azt tudjuk, hogy tetszőleges $Z \subset Y$ nyílt halmazra $f^{-1}[Z]$ nyílt, akkor bármely $a \in \mathcal{D}_f$ és $K(f(a))$ esetén $f^{-1}[K(f(a))]$ nyílt. Van tehát olyan $k(a)$ környezet, amelyre $k(a) \subset f^{-1}[K(f(a))]$, azaz $f[k(a)] \subset K(f(a))$. Ez éppen azt jelenti, hogy $f \in C\{a\}$. Mivel itt $a \in \mathcal{D}_f$ tetszőleges volt, ezért $f \in C$.

ii) Az i) megjegyzésben tehát a folytonosság alábbi ekvivalens megfogalmazását kaptuk: *az $f : X \to Y$ függvény akkor és csak akkor folytonos, ha bármely $Z \subset Y$ nyílt halmaz esetén az $f^{-1}[Z]$ őskép is nyílt.*

iii) Nem nehéz belátni, hogy ha $f \in X \to Y$ (azaz f nem feltétlenül az egész X-en van értelmezve), akkor a ii)-beli ekvivalencia a következőképpen módosul: *$f \in C$ akkor és csak akkor, ha tetszőleges $Z \subset Y$ nyílt halmaz esetén $f^{-1}[Z] = A \bigcap \mathcal{D}_f$ alkalmas $A \subset X$ nyílt halmazzal.*

iv) Legyen $\emptyset \neq U \subset X$. Nevezzük a $V \subset U$ halmazt (U-ra nézve) *relatív nyíltnak* (ld. 1.5.), ha van olyan $A \subset X$ nyílt halmaz, hogy $V = A \cap U$. Ha $\rho_U(x, y) := \rho(x, y) \quad (x, y \in U)$, akkor (U, ρ_U) metrikus tér és ebben a térben a nyílt halmazok pontosan az U-ra nézve relatív nyílt halmazok:

$$\mathcal{T}_{\rho_U} = \{A \cap U \in \mathcal{P}(U) : A \in \mathcal{T}_\rho\}.$$

Az $U \in \mathcal{T}_\rho$ esetben $\mathcal{T}_{\rho_U} = \{V \in \mathcal{P}(U) : V \in \mathcal{T}_\rho\}$. Legyen pl. $(X, \rho) \equiv (\mathbf{R}, |.|)$, $U := [0, 1]$, ekkor $V := [0, 1/2)$ relatív nyílt, ui. $V = U \cap (-1, 1/2)$ és $A := (-1, 1/2)$ nyílt.

v) Nyilvánvaló, hogy ha iv)-ben $U = X$, akkor a nyílt és a relatív nyílt halmazok egybeesnek.

vi) A fenti termionológiával élve ezért egy $f \in X \to Y$ leképezés folytonosságának szükséges és elégséges feltétele az, hogy bármely $Z \subset Y$ nyílt halmaz $f^{-1}[Z]$ ősképe ($\mathcal{D}_f$-re nézve) relatív nyílt egyen. Ha itt $\mathcal{D}_f$ nyílt, akkor a „($\mathcal{D}_f$-re nézve) relatív" jelző elhagyható.

vii) Legyen $f \in X \to Y$ és $\alpha \in \mathcal{D}'_f$. Azt mondjuk, hogy f-nek az α torlódási pontban van *határértéke,* ha alkalmas $y \in Y$ mellett tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén megadható olyan $\delta > 0$, hogy $\sigma(f(x), y) < \varepsilon$, hacsak $x \in \mathcal{D}_f$ és $0 < \rho(x, \alpha) < \delta$. Az elemi analízisben látottakkal analóg módon következik, hogy mindez legfeljebb egyetlen $y \in Y$ esetén teljesülhet, amikor is y-t az f leképezés α-beli *határértékének* nevezzük: $\lim_\alpha f := y$. (Időnként használatos minderre az $f(x) \to y \quad (x \to \alpha)$ vagy a $\lim_{x \to \alpha} f(x) = y$ jelölés is.)

viii) Világos, hogy $a \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}'_f$ esetén $f \in C\{a\}$ azzal ekvivalens, hogy f-nek a-ban van határértéke és $\lim_a f = f(a)$.

ix) Legyen pl. $a \in X$ és $f(x) := \rho(x, a) \ \ (x \in X)$. Ekkor $f \in C$. Valóban, ha $x, z \in X$, akkor

$$f(z) = \rho(z, a) \le \rho(z, x) + \rho(x, a) = \rho(z, x) + f(x),$$

amiből (a $z \leftrightarrow x$ szerepcsere után) $|f(x) - f(z)| \le \rho(x, z)$ következik. Ha tehát $\varepsilon > 0$, akkor (pl.) a $\delta := \varepsilon$ választással $\rho(x, z) < \delta$ esetén $\sigma(f(x), f(z)) := |f(x) - f(z)| < \varepsilon$, azaz $f \in C\{z\}$.

x) Ha $(X, \rho) \equiv (X, \|.\|)$ és $f(x) := \|x\| \quad (x \in X)$, akkor $f \in C$. Ui. tetszőleges $a, x \in X$ esetén

$$|f(x) - f(a)| = |\|x\| - \|a\|| \le \|x - a\|,$$

amiből az állításunk már nyilvánvaló.

xi) Legyen most $(X, \rho) \equiv (X, \langle , \rangle)$ és valamely $a \in X$ esetén $f(x) := \langle x, a \rangle \quad (x \in X)$. Ekkor tetszőleges $x, z \in X$ elemekre

$$|f(x) - f(z)| = |\langle x - z, a \rangle| \leq \|a\| \cdot \|x - z\| \to 0 \qquad (x \to z),$$

amiből $f \in C\{z\}$, azaz $f \in C$ már következik.

Az alábbiakban felsorolunk néhány olyan állítást leképezésekkel kapcsolatban, amelyek (a bizonyításaikkal együtt) pontos megfelelői az egy-és többváltozós függvényekkel kapcsolatban korábban tanult tételeknek.

- (*Átviteli elv.*) *Az $f \in X \to Y$ függvény valamely $a \in \mathcal{D}_f$ helyen akkor és csak akkor folytonos, ha* $\lim(f(x_n)) = f(a)$ *teljesül minden olyan $x_n \in \mathcal{D}_f \quad (n \in \mathbf{N})$ sorozatra, amelyre* $\lim(x_n) = a$.

- (*Átviteli elv.*) *Az $f \in X \to Y$ függvénynek valamely $\alpha \in \mathcal{D}'_f$ helyen akkor és csak akkor van határértéke (ami $y \in Y$), ha* $\lim(f(x_n)) = y$ *teljesül minden olyan $\alpha \neq x_n \in \mathcal{D}_f \quad (n \in \mathbf{N})$ sorozatra, amelyre* $\lim(x_n) = \alpha$.

- (*Weierstrass*-tétel.) *Ha az $f \in X \to Y$ leképezés folytonos és $\mathcal{D}_f$ kompakt, akkor $\mathcal{R}_f$ is kompakt.* Speciálisan, *ha* $(Y, \sigma) \equiv (\mathbf{R}, |.|)$, *akkor léteznek a* $\max \mathcal{R}_f$ $\min \mathcal{R}_f$, *szélsőértékek.*

- (*Heine*-tétel.) *Ha az $f \in X \to Y$ leképezés folytonos és $\mathcal{D}_f$ kompakt, akkor f egyenletesen folytonos, azaz tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $\delta > 0$,* amellyel *minden $x, y \in \mathcal{D}_f$, $\rho(x, y) < \delta$ esetén $\sigma(f(x), f(y)) < \varepsilon$.*

- *Tegyük fel, hogy $f \in X \to Y$ folytonos, invertálható és $\mathcal{D}_f$ kompakt. Ekkor az f^{-1} inverzfüggvény is folytonos.*

A klasszikus *Bolzano*-tétel absztrakt megfelelőjének a megfogalmazásához vezessük be a következő fogalmat. Az (X, ρ) metrikus tér valamely $\emptyset \neq A \subset X$ részhalmazát *nem összefüggőnek* nevezzük, ha $A = B \cup C$, ahol $B \cap C = \emptyset$, $B \neq \emptyset$, $C \neq \emptyset$ és a B, C halmazok (az A halmazra nézve) relatív nyíltak. Más szóval tehát $B = A \cap \mathcal{B}$, $C = A \cap \mathcal{C}$, ahol a $\mathcal{B}, \mathcal{C} \subset X$ halmazok nyíltak. Ha az előbbi A halmazra mindez nem igaz, akkor A-t *összefüggőnek* nevezzük. Nyílt halmaz nem összefüggőségének a definíciójában a B, C halmazok is nyíltak.

Nem nehéz belátni, hogy ha $(X, \rho) \equiv (\mathbf{R}, |.|)$, akkor egy $A \subset \mathbf{R}$ halmaz pontosan akkor összefüggő, ha A intervallum.

- (*Bolzano*-tétel.) *Tegyük fel, hogy az $f \in X \to Y$ függvény folytonos és $\mathcal{D}_f$ összefüggő. Ekkor $\mathcal{R}_f$ is összefüggő.* Speciálisan, *ha* $(Y, \sigma) \equiv (\mathbf{R}, |.|)$ *és valamilyen $a, b \in \mathcal{D}_f$ esetén $f(a) < 0 < f(b)$, akkor alkalmas $c \in \mathcal{D}_f$ helyen $f(c) = 0$.*

Mivel a klasszikus *Bolzano*-tétel „szokásos” igazolása nem vihető át erre az absztrakt esetre, ezért röviden vázoljuk a fenti tétel egy bizonyítását. Tegyük fel ehhez indirekt módon, hogy $\mathcal{R}_f$ nem összefüggő: $\mathcal{R}_f = B \cup C$, ahol $B \cap C = \emptyset$, $B \neq \emptyset$, $C \neq \emptyset$ és a B, C halmazok (az $\mathcal{R}_f$ halmazra nézve) relatív nyíltak. Tehát $B = \mathcal{R}_f \cap \mathcal{B}$, $C = \mathcal{R}_f \cap \mathcal{C}$, ahol a $\mathcal{B}, \mathcal{C} \subset Y$ halmazok nyíltak. Világos, hogy

$$\mathcal{D}_f = f^{-1}[\mathcal{R}_f] = f^{-1}[B \cup C] = f^{-1}[(\mathcal{R}_f \cap \mathcal{B}) \cup (\mathcal{R}_f \cap \mathcal{C})] = f^{-1}[\mathcal{B}] \cup f^{-1}[\mathcal{C}],$$

ahol (ld. 6.1.1. iii) megjegyzés) $f^{-1}[\mathcal{B}] = U \cap \mathcal{D}_f$, $f^{-1}[\mathcal{C}] = V \cap \mathcal{D}_f$ alkalmas $U, V \subset X$ nyílt halmazokkal. Nyilván igaz, hogy $U \cap \mathcal{D}_f$, $V \cap \mathcal{D}_f$ egyike sem az üres halmaz, ill. $U \cap \mathcal{D}_f$, $V \cap \mathcal{D}_f$ diszjunktak. Mivel

$$\mathcal{D}_f = (U \cap \mathcal{D}_f) \cup (V \cap \mathcal{D}_f),$$

ezért $\mathcal{D}_f$ nem összefüggő, szemben a feltétellel. Ha f valós értékű, akkor $\mathcal{R}_f$ intervallum. Ha ez tartalmaz negatív számot is $(f(a))$ meg pozitív számost is $(f(b))$, akkor tartalmazza a nullát is, azaz valamilyen $c \in \mathcal{D}_f$ helyen $f(c) = 0$.

6.2. Lineáris operátorok.

Tegyük fel, hogy X_1, X_2 lineáris terek $\mathbf{K}$ felett, $A : X_1 \to X_2$. Azt mondjuk, hogy A *lineáris,* ha

- *additív,* azaz bármely $x, y \in X_1$ esetén $A(x+y) = A(x) + A(y)$

és

- *homogén,* azaz tetszőleges $\lambda \in \mathbf{K}$ és $x \in X$ választással $A(\lambda x) = \lambda A(x)$.

Tehát $A(\mu x + \lambda y) = \mu A(x) + \lambda A(y)$ $(x, y \in X_1, \mu, \lambda \in \mathbf{K})$. Az $X_1 \to X_2$ lineáris operátorok halmazát $\mathcal{L}(X_1, X_2)$-vel fogjuk jelölni. Világos, hogy $\mathcal{L}(X_1, X_2)$ vektortér $\mathbf{K}$ felett, ill. bármely $A \in \mathcal{L}(X_1, X_2)$ esetén $A(0) = 0$ (ahol az „első” nulla az X_1 tér, a „második” nulla az X_2 tér nulleleme).

Állapodjunk meg a következő jelölésben: $A \in \mathcal{L}(X_1, X_2), x \in X_1$ esetén (hacsak nem okoz félreértést) $A(x)$ helyett Ax-et írunk. Jegyezzük meg, hogy az $A \in \mathcal{L}(X_1, X_2)$ operátor $\{x \in X_1 : Ax = 0\}$ *magtere,* ill. $\{Ax \in X_2 : x \in X_1\}$ *képtere* (könnyen beláthatóan) egyaránt lineáris tér, X_1-nek, ill. X_2-nek altere.

Az alábbi példákban a szóban forgó (nyilván lineáris) operátorok definíciójából világos, hogy milyen X_1, X_2 terekről van szó:

1^o $Hf := f(0)$ $(f \in C[0,1])$; 2^o $If := \int_0^1 f$ $(f \in C[0,1])$; 3^o $Df := f'$ $(f \in C^1[0,1])$;

4^o $Lf := \sum_{k=0}^n f(x_k) g_k$ $(f \in C[a,b])$, ahol $n \in \mathbf{N}$, $a \le x_0 < ... < x_n \le b$ és $g_0, ..., g_n \in C[a,b]$;

5^o $Qf := \sum_{k=0}^n \alpha_k f(x_k)$ $(f \in C[a,b])$, ahol $n \in \mathbf{N}$, $a \le x_0 < ... < x_n \le b$ és $\alpha_0, ..., \alpha_n \in \mathbf{R}$;

6^o $Tf(x) := \int_a^b f(t) K(t,x)\,dt$ $(f \in C[a,b], x \in [c,d])$, ahol $K : [a,b] \times [c,d] \to \mathbf{R}$ folytonos *magfüggvény*;

7^o $R_a x := \langle x, a \rangle$ $(x \in X)$, ahol $(X, \langle , \rangle)$ euklideszi tér, $a \in X$;

8^o $(X, \langle , \rangle)$ euklideszi tér, $L \subset X$ teljes altér, $P_L : X \to L$ (ld. 5.3.3. iv) megjegyzés).

Speciálisan, ha 4^o-ben a $g_0, ..., g_n$ függvények az $x_0, ..., x_n$ „alappontokra” vonatkozó *Lagrange*-féle alappolinomok, akkor az L operátor nem más, mint a *Lagrange*-féle interpolációs operátor. Ezért a 4^o-beli L lineáris operátort *általánosított interpolációs operátornak* nevezzük.

Világos, hogy a 4^o-beli példából kiindulva a

$$Qf := \int_a^b Lf = \sum_{k=0}^n \left(\int_a^b g_k \right) f(x_k) \qquad (f \in C[a,b])$$

definícióval értelmezett operátor egy 5^o-típusú lineáris operátor: $\alpha_k := \int_a^b g_k \quad (k = 0, ..., n)$. Ha itt Lf egy *Lagrange*-polinom (ld. az előbbi észrevételt), akkor Qf a megfelelő *Newton-Cotes*-formula. Ennek alapján nevezzük az 5^o-beli lineáris operátort *kvadratúra operátornak.*

A 6^o-beli *folytonos magú integráloperátort* a későbbiekben még részletesebben is vizsgálni fogjuk.

Azt mondjuk, hogy az $A : X_1 \to X_2$ leképezés *korlátos lineáris operátor,* ha $A \in \mathcal{L}(X_1, X_2)$ és megadható olyan $M \geq 0$ konstans, amellyel

$$\|Ax\|_2 \leq M\|x\|_1 \qquad (x \in X_1).$$

Jelöljük az $X_1 \to X_2$ korlátos lineáris operátorok halmazát $L(X_1, X_2)$-vel. Világos, hogy $L(X_1, X_2)$ altere $\mathcal{L}(X_1, X_2)$-nek.

Emlékeztetünk a korlátos halmaz fogalmára (ld. 4.2.): valamely (X, ρ) metrikus tér esetén az $Y \subset X$ halmaz *korlátos,* ha van olyan $K(z)$ környezet, hogy $Y \subset K(z)$. Könnyű meggondolni, hogy mindez normált terek esetén (tehát, amikor $(X, \rho) \equiv (X, \|.\|)$) azzal ekvivalens, hogy létezik olyan $r > 0$, amellyel $Y \subset K_r(0) = \{x \in X : \|x\| < r\}$. Ha $A \in L(X_1, X_2)$ és $K_r(0) \supset Y \subset X_1$, akkor (a fenti M-mel) $\|Ax\|_2 \leq M\|x\|_1 \leq Mr \quad (x \in Y)$. Más szóval $\{Ax \in X_2 : x \in Y\} \subset K_\delta(0)$ (ahol $Mr < \delta$ tetszőleges), azaz az $A[Y]$ halmaz korlátos. Sőt, ha $A \in \mathcal{L}(X_1, X_2)$ és bármely korlátos $Y \subset X_1$ halmazra $A[Y]$ korlátos, akkor $A \in L(X_1, X_2)$. Ekkor ui. $A[K_1(0)]$ korlátos, azaz alkalmas $r > 0$ mellett $\|At\|_2 \leq r \quad (t \in K_1(0))$. Ha $0 \neq x \in X_1$, akkor nyilván igaz, hogy (pl.) $x/(2\|x\|_1) \in K_1(0)$, ezért

$$\|A(x/(2\|x\|_1))\|_2 = \frac{\|Ax\|_2}{2\|x\|_1} \leq r.$$

Innen $\|Ax\|_2 \leq 2r\|x\|_1$ következik (ami nyilván igaz $x = 0$ esetén is), azaz $A \in L(X_1, X_2)$.

Emeljük ki külön is a most mondottakat: *egy $A \in \mathcal{L}(X_1, X_2)$ operátor akkor és csak akkor korlátos lineáris operátor, ha tetszőleges korlátos $Y \subset X_1$ halmazra az $A[Y]$ képhalmaz korlátos.* Az indoklásból világos, hogy itt „tetszőleges korlátos $Y \subset X_1$" helyett $K_1(0)$ (vagy: bármely $r > 0$ esetén $K_r(0)$ írható).

Legyen pl. a fenti 3^o példában definiált D *differenciáloperátor* esetén

$$X_1 := C^1[0,1]\ ,\ X_2 := C[0,1],$$

az $X_i \quad (i = 1, 2)$ tereken egyaránt az

$$\|f\|_i := \max_{x \in [0,1]} |f(x)| \qquad (f \in X_i, i = 1, 2)$$

normát vezetve be. Ekkor $D \notin L(X_1, X_2)$. Valóban, ha $n \in \mathbf{N}$ és $f_n(x) := \sin(nx) \quad (0 \leq x \leq 1)$, akkor $\|f_n\|_1 \leq 1$, ill.

$$\|Df_n\|_2 = \max_{x \in [0,1]} |f_n'(x)| = n \max_{x \in [0,1]} |\cos(nx)| \geq n.$$

Innen nyilvánvaló, hogy nem létezik olyan $M \geq 0$ konstans, amellyel

$$n \leq \|Df_n\|_2 \leq M\|f_n\|_1 \leq M \qquad (n \in \mathbf{N})$$

teljesülne.

Ugyanakkor pl. az 5^o-beli Q kvadratúra operátor az

$$X_1 := C[a,b]\ ,\ X_2 := \mathbf{R}\ ,\ \|f\|_1 := \max_{x\in[a,b]} |f(x)| \quad (f \in X_1)\ ,\ \|\alpha\|_2 := |\alpha| \quad (\alpha \in \mathbf{R})$$

szereposztással korlátos lineáris operátor: $Q \in L(X_1, X_2)$. Ui. bármely $f \in X_1$ esetén

$$\|Qf\|_2 = |Qf| \leq \sum_{k=0}^{n} |\alpha_k| \cdot |f(x_k)| \leq \left(\sum_{k=0}^{n} |\alpha_k|\right) \cdot \|f\|_1,$$

azaz pl. az $M := \sum_{k=0}^{n} |\alpha_k|$ konstanssal $\|Qf\|_2 \leq M\|f\|_1 \quad (f \in X_1)$ igaz.

Ugyanígy kapjuk a 4^o-ben definiált általánosított interpolációs operátorra, hogy $L \in L(X_1, X_2)$, ha $(X_1, \|.\|_1)$ ugyanaz, mint az előbb és $(X_2, \|.\|_2) := (X_1, \|.\|_1)$. Ti. ha $f \in X_1$, akkor

$$\|Lf\|_2 \leq \left\|\sum_{k=0}^{n} |f(x_k)||g_k|\right\|_\infty \leq \left\|\sum_{k=0}^{n} |g_k|\right\|_\infty \cdot \|f\|_1,$$

azaz most pl. az $M := \|\sum_{k=0}^{n} |g_k|\|_\infty$ konstanssal $\|Lf\|_2 \leq M\|f\|_1 \quad (f \in X_1)$ teljesül.

A 6^o-beli folytonos magú integráloperátorral kapcsolatban legyen ismét $(X_1, \|.\|_1)$ az előbbi tér,

$$X_2 := C[c,d]\ ,\ \|f\|_2 := \max_{x\in[c,d]} |f(x)| \qquad (f \in X_2).$$

Ekkor először is jegyezzük meg, hogy a paraméteres integrálokról tanultak szerint minden $f \in X_1$ esetén valóban igaz, hogy $Tf \in X_2$. Továbbá

$$\|Tf\|_2 \leq \max_{x\in[c,d]} \int_a^b |f(t)||K(t,x)|\, dt \leq \left(\max_{x\in[c,d]} \int_a^b |K(t,x)|\, dt\right) \|f\|_1 \qquad (f \in X_1).$$

Következésképpen az

$$M := \max_{x\in[c,d]} \int_a^b |K(t,x)|\, dt$$

konstanssal $\|Tf\|_2 \leq M\|f\|_1 \quad (f \in X_1)$, azaz T korlátos lineáris operátor: $T \in L(X_1, X_2)$.

Speciális esetként kapjuk a $T := S_n \ (n \in \mathbf{N})$ trigonometrikus *Fourier*-részletösszeg-operátorokat:

$$S_n f(x) = \int_0^{2\pi} f(t) D_n(x-t)\, dt \qquad (x \in \mathbf{R}),$$

ahol tehát $K(t,x) := D_n(x-t)$ és

$$D_n(z) := \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos(kz)\right) \qquad (z \in \mathbf{R})$$

a *Dirichlet*-féle magfüggvény. Mivel D_n periodikus 2π-szerint, ezért

$$L_n := \max_{x \in \mathbf{R}} \int_0^{2\pi} |D_n(x-t)|\, dt = \int_0^{2\pi} |D_n|.$$

Így

$$\|S_n f\| := \max_{x \in \mathbf{R}} |S_n f(x)| \le L_n \max_{x \in \mathbf{R}} |f(x)| = L_n \|f\| \qquad (f \in C_{2\pi}),$$

ahol $C_{2\pi}$ a 2π-szerint periodikus $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvények halmazát jelenti. Mutassuk meg, hogy az L_n ún. *Lebesgue-konstansokra* $L_n \sim \ln n$, azaz alkalmas $c_1, c_2 > 0$ állandókkal

$$c_1 \ln n \le L_n \le c_2 \ln n \qquad (2 \le n \in \mathbf{N})$$

igaz. Legyen ehhez először $0 < t < 2\pi$, ekkor

$$\pi D_n(t) \sin(t/2) = \frac{\sin(t/2)}{2} + \sum_{k=1}^{n} \sin(t/2)\cos(kt) =$$

$$\frac{\sin(t/2)}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} [\sin((k+1/2)t) - \sin((k-1/2)t)] =$$

$$\frac{\sin(t/2)}{2} + \frac{1}{2}(\sin((n+1/2)t) - \sin(t/2)) = \frac{\sin((n+1/2)t)}{2},$$

azaz

$$D_n(t) = \frac{\sin((n+1/2)t)}{2\pi \sin(t/2)}.$$

Világos, hogy

$$D_n(0) = \lim_{t \to 0} D_n(t) = \frac{n+1/2}{\pi} =: \left.\frac{\sin((n+1/2)t)}{2\pi \sin(t/2)}\right|_{t=0}.$$

Ezért

$$L_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{|\sin((n+1/2)t)|}{\sin(t/2)}\, dt \ge \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{|\sin((n+1/2)t)|}{\sin(t/2)}\, dt =$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2}\frac{|\sin((2n+1)t)|}{\sin t}\,dt \geq \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{I_{nk}}\frac{|\sin((2n+1)t)|}{t}\,dt,$$

ahol

$$I_{nk} := \left[\frac{\pi/4+k\pi}{2n+1}, \frac{3\pi/4+k\pi}{2n+1}\right] =: [a_{nk}, b_{nk}] \qquad (k=0,...,n-1).$$

Innen $|\sin((2n+1)t)| \geq \sqrt{2}/2 \quad (t \in I_{nk}) \ \ (k=0,...,n-1)$ alapján

$$L_n \geq \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\sqrt{2}/2}{b_{nk}}\cdot\frac{\pi}{2(2n+1)} = \frac{\sqrt{2}}{4\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{3/4+k} \geq$$

$$\frac{\sqrt{2}}{4\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \geq \frac{\sqrt{2}}{4\pi}\int_1^n\frac{dx}{x} = \frac{\sqrt{2}}{4\pi}\ln n.$$

Az $L_n \leq c_2 \ln n \ \ (2 \leq n \in \mathbf{N})$ felső becslés hasonlóan kapható meg. Ui.

$$L_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{|\sin((n+1/2)t)|}{\sin(t/2)}\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{|\sin((2n+1)t)|}{\sin t}\,dt =$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\frac{|\sin((2n+1)t)|}{\sin t}\,dt =$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{1/n}\frac{|\sin((2n+1)t)|}{\sin t}\,dt + \frac{2}{\pi}\int_{1/n}^{\pi/2}\frac{|\sin((2n+1)t)|}{\sin t}\,dt.$$

A sin függvény $[0,\pi]$ feletti konkávitása miatt $\sin z \geq 2z/\pi \ \ (0 < z \leq \pi/2)$, ezért

$$L_n \leq \int_0^{1/n}\frac{(2n+1)t}{t}\,dt + \int_{1/n}^{\pi/2}\frac{1}{t}\,dt =$$

$$\frac{2n+1}{n} + \ln(\pi/2) + \ln n \leq 3 + \ln(\pi/2) + \ln n,$$

amiből az $L_n \leq c_2 \ln n$ felső becslés már nyilvánvalóan teljesül alkalmas c_2 (abszolút) konstanssal.

Tekintsük az $(X, \langle,\rangle)$ euklideszi téren 7^o-ben definiált R_a lineáris operátort:

$$R_a x = \langle x, a\rangle \qquad (x \in X_1),$$

ahol $X_1 := X$, $\|x\|_1 := \sqrt{\langle x,x\rangle} \quad (x \in X_1)$, $(X_2, \|.\|_2) \equiv (\mathbf{K}, |.|)$ és $a \in X_1$ rögzített. A *Cauchy-Bunyakovszkij*-egyenlőtlenség alapján

$$\|R_a x\|_2 = |R_a x| = |\langle x, a\rangle| \leq \|a\|\cdot\|x\|_1 \qquad (x \in X_1),$$

azaz az $M := \|a\|$ konstanssal $\|R_a x\|_2 \leq M\|x\|_1 \ \ (x \in X_1)$. Így $R \in L(X_1, \mathbf{K})$.

A 8^o-beli P_L projekcióra láttuk (5.3.3. iv) megjegyzés), hogy $\|P_L x\| \leq \|x\| \quad (x \in X)$, azaz P_L is korlátos lineáris operátor: $P_L \in L(X, X)$.

6.3. Az $(L(X_1, X_2), \|.\|)$ operátor-tér.

Tetszőleges $(X_i, \|.\|_i)$ $(i = 1, 2)$ normált terek esetén igaz a

6.3.1. Tétel. *Legyen $A \in \mathcal{L}(X_1, X_2)$. Ekkor az alábbi feltételek egymással ekvivalensek:*

i) $A \in L(X_1, X_2)$; ii) A folytonos ; iii) $A \in C\{0\}$.

Bizonyítás. Tegyük fel először, hogy $A \in L(X_1, X_2)$. Ekkor bármely $x, y \in X_1$ esetén

$$\|Ax - Ay\|_2 = \|A(x - y)\|_2 \le M\|x - y\|_1,$$

ahol M olyan konstans, amellyel $\|At\|_2 \le M\|t\|_1 \quad (t \in X_1)$. Következésképpen $\|Ax - Ay\|_2 \to 0$ $(x \to y)$, azaz $Ax \to Ay \quad (x \to y)$. Ez azt jelenti, hogy $A \in C\{y\}$. Mivel $y \in X_1$ tetszőleges volt, ezért $A \in C$.

Fordítva, legyen most $A \in C$ és indirekt módon tegyük fel (az indirekt feltevést mindjárt célszerűen alkalmazva), hogy bármely $n \in \mathbf{N}$ esetén van olyan $x_n \in X_1$, amellyel $\|Ax_n\|_2 > n\|x_n\|_1$. Mivel $x_n = 0$ esetén $Ax_n = 0$, azaz $\|Ax_n\|_2 = 0$, ezért a nyilván nem igaz $0 > 0$ állna fenn. Így $x_n \ne 0 \quad (n \in \mathbf{N})$. Átalakítás után (az A operátor homogenitása alapján) azt kapjuk, hogy

$$\left\| A\left(\frac{x_n}{n\|x_n\|_1}\right)\right\|_2 > 1 \qquad (0 < n \in \mathbf{N}).$$

Mivel $\left\|\frac{x_n}{n\|x_n\|_1}\right\|_1 = \frac{1}{n} \to 0 \quad (n \to \infty)$, ezért az A operátor feltételezett folytonossága szerint (ld. 6.1.1. x) megjegyzést is)

$$\left\| A\left(\frac{x_n}{n\|x_n\|_1}\right)\right\|_2 \to \|A0\|_2 = 0 \qquad (n \to \infty).$$

Ez nyilván ellentmond annak, hogy $\left\| A\left(\frac{x_n}{n\|x_n\|_1}\right)\right\|_2 > 1 \;\; (0 < n \in \mathbf{N})$. Tehát $A \in L(X_1, X_2)$.

Ha $A \in C$, akkor nyilván $A \in C\{0\}$ is igaz. Fordítva, ha $A \in C\{0\}$, akkor tetszőleges $x \in X_1$ esetén legyen $x_n \in X_1 \quad (n \in \mathbf{N})$ olyan sorozat, amelyre $\lim(x_n) = x$. Ekkor $\lim(x - x_n) = 0$, azaz $A \in C\{0\}$ miatt (ld. átviteli elv)

$$A(x - x_n) = Ax - Ax_n \to A0 = 0 \qquad (n \to \infty),$$

azaz $Ax_n \to Ax \quad (n \to \infty)$. Ez azt jelenti, hogy $A \in C\{x\}$. Mivel $x \in X_1$ tetszőleges volt, ezért $A \in C$. ■

6.3.1. Megjegyzések.

i) A bizonyítás nyilvánvaló módosításával a iii) feltétel a következőre cserélhető: *van olyan $z \in X_1$, hogy $A \in C\{z\}$.*

ii) Az 5.3.3. iv) megjegyzésben mondottakra utalva legyen $(X, \langle , \rangle)$ *Hilbert*-tér, $P \in L(X, X)$ idempontens és az $L := \mathcal{R}_P$ jelöléssel tegyük fel, hogy $L^\perp = \{x \in X : Px = 0\}$. Ekkor P az L zárt altérre való projekció. Ehhez ui. az idézett megjegyzés szerint elegendő azt meggondolni, hogy L zárt (azaz teljes) altér. Mivel L nyilván altér, ezért csak a zártságot kell megindokolnunk. Legyen ehhez $y_n \in L \quad (n \in \mathbf{N})$ konvergens sorozat: $y := \lim(y_n)$. Ha $x_n \in X$ és $y_n = Px_n \quad (n \in \mathbf{N})$, akkor P folytonossága miatt $Py = \lim(Py_n) = \lim(P^2 x_n) = \lim(Px_n) = \lim(y_n) = y$, azaz $y \in L$. Tehát L valóban zárt.

Legyen $A \in L(X_1, X_2)$ és $\mathcal{M}_A := \{M \in \mathbf{R} : \|Ax\|_2 \le M\|x\|_1 \ (x \in X_1)\}$.

6.3.2. Tétel. *Tetszőleges $A \in L(X_1, X_2)$ esetén az $\mathcal{M}_A$ halmaznak van minimuma és az*

$$L(X_1, X_2) \ni A \mapsto \|A\| := \min \mathcal{M}_A$$

megfeleltetés norma.

Bizonyítás. Legyen $m_A := \inf \mathcal{M}_A$. Azt kell megmutatnunk, hogy $m_A \in \mathcal{M}_A$, azaz bármely $x \in X_1$ elemre $\|Ax\|_2 \le m_A\|x\|_1$. Tegyük fel ehhez indirekt módon, hogy valamilyen $x \in X_1$ esetén $\|Ax\|_2 > m_A\|x\|_1$. Ekkor egyrészt $x \ne 0$ (különben $\|Ax\|_2 = \|0\|_2 = 0 > m_A\|x\|_1 = 0$ lenne, ami nem igaz), másrészt alkalmas $\varepsilon > 0$ számmal

$$\|Ax\|_2 > (m_A + \varepsilon)\|x\|_1$$

is teljesül. Az m_A infimum definíciója alapján viszont van olyan $M \in \mathcal{M}_A$, $M < m_A + \varepsilon$, amellyel $\|Az\|_2 \le M\|z\|_1 \quad (z \in X_1)$. Tehát a $z := x$ választással

$$(m_A + \varepsilon)\|x\|_1 < \|Ax\|_2 \le M\|x\|_1,$$

azaz $m_A + \varepsilon < M < m_A + \varepsilon$, ami nyilván nem igaz. Ezért $m_A \in \mathcal{M}_A$, így valóban van az $\mathcal{M}_A$ halmaznak minimuma: $\|A\| := m_A = \min \mathcal{M}_A$. Ez azt is jelenti egyúttal, hogy

$$\|Ax\|_2 \le \|A\|\|x\|_1 \qquad (x \in X_1).$$

Mutassuk meg, hogy $L(X_1, X_2) \ni A \mapsto m_A = \|A\|$ norma. Ha $A \equiv 0$, akkor $\|Ax\|_2 = \|0\|_2 = 0 \le 0 \cdot \|x\|_1 \quad (x \in X_1)$ miatt $0 \in \mathcal{M}_A$, azaz $m_A = \|A\| = 0$.

Fordítva, ha $m_A = \|A\| = 0$, akkor $0 \in \mathcal{M}_A$, azaz tetszőleges $x \in X_1$ elemre $\|Ax\|_2 \le 0 \cdot \|x\|_1$. Ezért $\|Ax\|_2 = 0$, tehát $Ax = 0$. Következésképpen $A \equiv 0$.

Ha $\lambda \in \mathbf{K}$, akkor

$$\|(\lambda A)x\|_2 = \|\lambda Ax\|_2 = |\lambda| \cdot \|Ax\|_2 \le |\lambda| \cdot \|A\| \cdot \|x\|_1 \qquad (x \in X_1),$$

azaz $|\lambda| \cdot \|A\| \in \mathcal{M}_{\lambda A}$. Ezért $\|\lambda A\| \le |\lambda| \cdot \|A\|$. Ha $\lambda = 0$, akkor $\lambda A \equiv 0$, így $\|\lambda A\| = 0 = \lambda \cdot \|A\|$ triviálisan igaz. A $\lambda \ne 0$ esetben

$$\|Ax\|_2 = \frac{\|(\lambda A)x\|_2}{|\lambda|} \le \frac{\|\lambda A\|}{|\lambda|}\|x\|_1 \qquad (x \in X_1)$$

miatt $\dfrac{\|\lambda A\|}{|\lambda|} \in \mathcal{M}_A$. Innen $\|A\| \le \dfrac{\|\lambda A\|}{|\lambda|}$, azaz $|\lambda| \cdot \|A\| \le \|\lambda A\|$ következik. Utóbbi egyenlőtlenség fordítottját az előbb kaptuk, ezért $\|\lambda A\| = |\lambda| \cdot \|A\|$.

Végül, ha $A, B \in L(X_1, X_2)$, akkor bármely $x \in X_1$ esetén

$$\|(A+B)x\|_2 = \|Ax + Bx\|_2 \leq \|Ax\|_2 + \|Bx\|_2 \leq (\|A\| + \|B\|)\|x\|_1.$$

Ez azt jelenti, hogy $\|A\| + \|B\| \in \mathcal{M}_{A+B}$, azaz $\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$. ■

6.3.2. Megjegyzések.

i) Emeljük ki külön is azt, hogy minden $A \in L(X_1, X_2)$ korlátos lineáris operátor esetén

$$\|Ax\|_2 \leq \|A\| \cdot \|x\|_1 \qquad (x \in X_1).$$

ii) Ha $A \in L(X_1, X_2)$, akkor tetszőleges $M \in \mathcal{M}_A$ „korlátra” $\|A\| \leq M$. Világos, hogy ha valamilyen $M \in \mathcal{M}_A$ és $0 \neq x \in X_1$ mellett $\|Ax\|_2 = M\|x\|_1$, akkor $\|A\| = M$. Ui. $M\|x\|_1 \leq \|A\| \cdot \|x\|_1$ miatt ekkor $(\|A\| \leq) M \leq \|A\|$. Nem nehéz belátni, hogy

$$\|A\| = \sup\{\|Ax\|_2 : x \in X_1, \|x\|_1 = 1\} = \sup\{\|Ax\|_2 : x \in X_1, \|x\|_1 \leq 1\}$$

(de itt „sup” helyett általában nem írható „max”).

iii) Pl. a 6.2. pontban mondottakat figyelembe véve (az ottani jelölésekkel)

$$\|Q\| \leq \sum_{k=0}^{n} |\alpha_k| \quad ; \quad \|L\| \leq \left\| \sum_{k=0}^{n} |g_k| \right\|_\infty ;$$

$$\|T\| \leq \max_{x \in [c,d]} \int_a^b |K(t,x)|\, dt \quad ; \quad \|R_a\| \leq \|a\| \quad ; \quad \|P_L\| \leq 1.$$

iv) Mutassuk meg pl., hogy $\|Q\| = \sum_{k=0}^{n} |\alpha_k|$. Legyen ehhez $f \in C[a,b]$ „töröttvonal” az $a, x_0, ..., x_n, b$ „töréspontokra” nézve, ahol $f(x_k) := \operatorname{sign} \alpha_k \quad (k = 0, ..., n)$ és $f(a) := f(x_0)$, $f(b) := f(x_n)$. Ekkor $\|f\|_1 = \|f\|_\infty \leq 1$, ill.

$$Qf = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k f(x_k) = \sum_{k=0}^{n} |\alpha_k| \leq \|Q\| \cdot \|f\|_\infty \leq \|Q\|.$$

Tehát $\sum_{k=0}^{n} |\alpha_k| \leq \|Q\|$, amiből iii) miatt már következik a $\|Q\| = \sum_{k=0}^{n} |\alpha_k|$ egyenlőség.

Hasonlóan kapjuk, hogy $\|L\| = \|\sum_{k=0}^{n} |g_k|\|_\infty$. Legyen ui. $z \in [a,b]$ olyan (ld. *Weiertstrass*-tétel), hogy

$$\left\| \sum_{k=0}^{n} |g_k| \right\|_\infty = \sum_{k=0}^{n} |g_k(z)|,$$

ill. legyen $f \in C[a,b]$ „töröttvonal” az $a, x_0, ..., x_n, b$ „töréspontokra” nézve, ahol $f(x_k) := \operatorname{sign} g_k(z) \quad (k = 0, ..., n)$ és $f(a) := f(x_0)$, $f(b) := f(x_n)$. Ekkor $\|f\|_1 = \|f\|_\infty \leq 1$ és

$$Lf(z) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k)g_k(z) = \sum_{k=0}^{n} |g_k(z)| = \left\| \sum_{k=0}^{n} |g_k| \right\|_\infty \leq$$

$$\|Lf\|_\infty \leq \|L\| \cdot \|f\|_\infty \leq \|L\|,$$

amiből a iii) megjegyzés alapján a mondott állításunk már nyilván következik.

v) Egy $A \in L(X_1, X_2)$ operátor $\|A\|$ normájának az alkalmazások szempontjából is fontos szerepe van. Pl. a Q kvadratúrák esetén (ld. 6.2.) megvilágítva mindezt tegyük fel, hogy $Qf = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k f(x_k)$ kiszámításakor valamilyen $f \in C[a,b]$ függvényre csak az

$$y_k \sim f(x_k) \qquad (k = 0, ..., n)$$

közelítő értékek állnak a rendelkezésünkre. Ha az említett közelítésekre az

$$|f(x_k) - y_k| \leq \varepsilon \qquad (k = 0, ..., n)$$

hibabecslés ismert (valamilyen $\varepsilon > 0$ mellett), akkor Qf helyett csak a $q := \sum_{k=0}^{n} \alpha_k y_k$ közelítő értéket tudjuk kiszámítani. (A számolás közben fellépő kerekítési hibáktól most eltekintünk.) Ekkor

$$|Qf - q| = \left| \sum_{k=0}^{n} \alpha_k (f(x_k) - y_k) \right| \leq \sum_{k=0}^{n} |\alpha_k||f(x_k) - y_k| \leq \varepsilon \sum_{k=0}^{n} |\alpha_k| = \|Q\|\varepsilon.$$

A $|Qf - q|$ „öröklött” hiba az ε „mérési” hibához képest ezért (a „legrosszabb” esetben) $\|Q\|$-szorozódik.

vi) Legyen $0 < n, m \in \mathbf{N}, (X_1, \|.\|_1) := (\mathbf{K}^n, \|.\|_1), (X_2, \|.\|_2) := (\mathbf{K}^m, \|.\|_2)$ valamilyen $\mathbf{K}^n$ feletti $\|.\|_1$-, ill. $\mathbf{K}^m$ feletti $\|.\|_2$-vektornormával. Ha $\mathbf{A} \in \mathbf{K}^{m \times n}$, akkor az

$$Ax := \mathbf{A}x \qquad (x \in X_1)$$

definícióval értelmezett $A : \mathbf{K}^n \to \mathbf{K}^m$ operátorra $A \in L(X_1, X_2)$ igaz. Ui. $A \in \mathcal{L}(X_1, X_2)$ a mátrix-vektor-szorzás szabályai alapján triviális. Ugyanakkor a 3.2.2. Tétel miatt

$$\|.\|_1 \sim \|.\| \ , \ \|.\|_2 \sim \|.\|_*,$$

ahol

$$\|x\| := \max_k |x_k| \ \ (x = (x_1, ..., x_n) \in X_1),$$

$$\|y\|_* := \max_j |y_j| \ \ (y = (y_1, ..., y_m) \in X_2).$$

Legyen $\mathbf{A} = (a_{il})_{i=1,l}^{m,n}$, ekkor alkalmas $c_1 > 0, c_2 > 0$ konstansokkal az előbbi x vektorokra

$$\|Ax\|_2 \le c_1\|Ax\|_* \le c_1 \max_j \left|\sum_{k=1}^n a_{jk}x_k\right| \le c_1\|x\| \max_j \sum_{k=1}^n |a_{jk}| \le$$

$$c_1c_2\|x\|_1 \max_j \sum_{k=1}^n |a_{jk}| =: M\|x\|_1,$$

azaz valóban $A \in L(X_1, X_2)$. Nem nehéz belátni, hogy az

$$\mathbf{K}^{m\times n} \ni \mathbf{A} \mapsto A \in L(X_1, X_2)$$

megfeleltetés izomorfia. Ha itt $\|\mathbf{A}\| := \|A\|$, akkor a $\mathbf{K}^{m\times n} \ni \mathbf{A} \mapsto \|\mathbf{A}\|$ *mátrixnormára* nézve az előbbi $\mathbf{K}^{m\times n} \ni \mathbf{A} \mapsto A \in L(X_1, X_2)$ leképezés izometria is.

6.3.3. Tétel. *Tekintsük az $[a,b],[c,d]$ kompakt intervallumok és a $K : [a,b]\times[c,d] \to \mathbf{R}$ folytonos magfüggvény esetén a $Tf(x) := \int_a^b f(t)K(t,x)\,dt \quad (f \in C[a,b], x \in [c,d])$ folytonos magú integráloperátort. Legyen $(X_1, \|.\|_1) \equiv (C[a,b], \|.\|_\infty)$, $(X_2, \|.\|_2) \equiv (C[c,d], \|.\|_\infty)$. Ekkor $T \in L(X_1, X_2)$ és $\|T\| = \max_{x\in[c,d]} \int_a^b |K(t,x)|\,dt$.*

Bizonyítás. A 6.2., 6.3. pontokban eddig mondottak szerint azt kell már csak belátnunk, hogy az

$$M := \max_{x\in[c,d]} \int_a^b |K(t,x)|\,dt$$

jelöléssel $M \le \|T\|$. Legyen ehhez (a *Weierstrass*-tétel szerint létező) $x_0 \in [c,d]$ olyan, hogy $M = \int_a^b |K(t,x_0)|\,dt$ és

$$g(t) := \operatorname{sign} \int_a^b K(t,x_0)\,dt \qquad (t \in [a,b]).$$

Ekkor bármely $f \in X_1$, $\|f\|_\infty \le 1$ esetén

$$M = \int_a^b g(t)K(t,x_0)\,dt = \int_a^b (g(t)-f(t))K(t,x_0)\,dt + \int_a^b f(t)K(t,x_0)\,dt =$$

$$\int_a^b (g(t)-f(t))K(t,x_0)\,dt + Tf(x_0).$$

Innen azt kapjuk, hogy

$$M \le \int_a^b |g(t)-f(t)||K(t,x_0)|\,dt + |Tf(x_0)| \le \int_a^b |g(t)-f(t)||K(t,x_0)|\,dt + \|Tf\|_\infty \le$$

$$\int_a^b |g(t)-f(t)||K(t,x_0)|\,dt + \|T\|\cdot\|f\|_\infty \le \int_a^b |g(t)-f(t)||K(t,x_0)|\,dt + \|T\|.$$

Mivel a $[a, b] \ni t \mapsto \varphi(t) := K(t, x_0)$ függvény folytonos, ezért a *Heine*-tétel miatt tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén megadható olyan $\delta > 0$, hogy

$$|K(t, x_0) - K(\tau, x_0)| < \varepsilon,$$

hacsak a $t, \tau \in [a, b]$ pontokra $|t - \tau| < \delta$ teljesül. Válasszuk az $[a, b]$ intervallum

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$$

felosztását (valamilyen $n \in \mathbf{N}$ mellett) úgy, hogy $x_{i+1} - x_i < \delta \quad (i = 0, ..., n - 1)$ igaz legyen. Ha $I = [x_k, x_{k+1}] \quad (k = 0, ..., n - 1)$ egy osztásintervallum ebben a felosztásban, akkor legyen $I' := I$, ha az I intervallumon φ nem vált előjelet. Különben legyen $I'' := I$. Az utóbbi esetben a φ függvény folytonossága és a *Bolzano*-tétel alapján egy alkalmas $c \in I''$ helyen $\varphi(c) = 0$. Következésképpen bármely $t \in I''$ esetén

$$|\varphi(t)| = |\varphi(t) - \varphi(c)| < \varepsilon,$$

ui. $|t - c| < \delta$.

A fentieket figyelembe véve legyen $f \in C[a, b]$ olyan töröttvonal az $x_0, ..., x_n$ „töréspontokra" nézve, amelyre minden I' osztásintervallum esetén $f(t) := g(t) = \operatorname{sign} \varphi(t) \;\; (t \in I')$ és $\|f\|_\infty \leq 1$. Az előbbiek szerint

$$M \leq \|T\| + \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} |g(t) - f(t)| \cdot |K(t, x_0)| \, dt =$$

$$\|T\| + \sum_{I''} \int_{I''} |g(t) - f(t)| \cdot |K(t, x_0)| \, dt \leq \|T\| + 2\varepsilon \sum_{I''} |I''| \leq \|T\| + 2(b - a)\varepsilon.$$

Mivel ez a becslés minden $\varepsilon > 0$ mellett teljesül, ezért $M \leq \|T\|$, azaz $M = \|T\|$. ■

6.3.4. Tétel. *Tegyük fel, hogy az* $(X_i, \|.\|_i) \;\; (i = 1, 2)$ *normált terek közül* $(X_2, \|.\|_2)$ *Banach-tér. Ekkor az* $(L(X_1, X_2), \|.\|)$ *operátor-tér is Banach-tér.*

Bizonyítás. Azt kell tehát belátnunk, hogy ha az $A_n \in L(X_1, X_2) \quad (n \in \mathbf{N})$ sorozatra $\|A_n - A_m\| \to 0 \quad (n, m \to \infty)$, akkor alkalmas $A \in L(X_1, X_2)$ mellett $\|A_n - A\| \to 0 \quad (n \to \infty)$. Jegyezzük meg, hogy $\sup_n \|A_n\| < +\infty$. Ui. valamilyen $N \in \mathbf{N}$ mellett $\|A_N - A_m\| < 1$ $(m \in \mathbf{N}, N \leq m)$, azaz

$$\|A_m\| = \|A_N + (A_m - A_N)\| \leq \|A_N\| + \|A_N - A_m\| < \|A_N\| + 1 \qquad (m \in \mathbf{N}, N \leq m).$$

Ezért $\sup_n \|A_n\| \leq \max\{\|A_0\|, ..., \|A_{N-1}\|, \|A_N\| + 1\}$.

Legyen $x \in X_1, n, m \in \mathbf{N}$ tetszőleges. Ekkor

$$\|A_n x - A_m x\|_2 = \|(A_n - A_m)x\|_2 \leq \|A_n - A_m\| \|x\|_1 \to 0 \qquad (n, m \to \infty),$$

ezért (az X_2-beli) $(A_n x)$ sorozat *Cauchy*-sorozat. Az $(X_2, \|.\|_2)$ tér telessége miatt így létezik a $\lim(A_n x)$ határérték.

Világos, hogy az $Ax := \lim(A_n x) \quad (x \in X_1)$ módon definiált $A : X_1 \to X_2$ operátorra $A \in \mathcal{L}(X_1, X_2)$ igaz. Mivel (ld. 6.1.1. x) megjegyzés) $\|Ax\|_2 = \lim(\|A_n x\|_2)$, ezért

$$\|Ax\|_2 \leq \limsup(\|A_n\| \cdot \|x\|_1) \leq \sup_n \|A_n\| \cdot \|x\|_1.$$

Ezzel beláttuk, hogy $A \in L(X_1, X_2)$.

Legyen $\varepsilon > 0$, $M \in \mathbf{N}$ pedig olyan, hogy $\|A_n - A_m\| < \varepsilon \quad (M < n, m \in \mathbf{N})$. Ekkor a már előbb is alkalmazott $\|A_n x - A_m x\|_2 \leq \|A_n - A_m\| \cdot \|x\|_1$ becslés miatt

$$\|A_n x - A_m x\|_2 \leq \varepsilon \|x\|_1 \qquad (M < n, m \in \mathbf{N}).$$

Ha itt rögzített $M < n \in \mathbf{N}$ mellett $m \to \infty$, akkor

$$\|(A_n - A)x\|_2 = \|A_n x - Ax\|_2 = \lim_{m \to \infty} \|A_n x - A_m x\|_2 \leq \varepsilon \|x\|_1 \qquad (M < m \in \mathbf{N}).$$

Következésképpen $\|A_n - A\| \leq \varepsilon \quad (M < n \in \mathbf{N})$. Ez pontosan azt jelenti, hogy $\|A_n - A\| \to 0$ $(n \to \infty)$. ■

6.4. Duális terek.

Legyen $(X, \|.\|)$ normált tér, ekkor a $(\mathbf{K}, |.|)$ tér teljessége és a 6.3.4. Tétel miatt az $(L(X, \mathbf{K}), \|.\|)$ tér *Banach*-tér. (Az X vektortér feletti normát és az $L(X, \mathbf{K})$ tér feletti normát ugyanazzal a $\|.\|$ szimbólummal jelölve.) Az $X^* := (L(X, \mathbf{K}), \|.\|)$ *Banach*-teret az $(X, \|.\|)$ tér *duálisának* (*duális terének* vagy *konjugált terének*), az X^* duális elemeit *korlátos lineáris funkcionáloknak* nevezzük.

Ha pl. $(X, \|.\|) \equiv (X, \langle , \rangle)$ és $a \in X$, akkor (ld. 6.2.) bármely $a \in X$ esetén az $R_a x := \langle x, a \rangle$ $(x \in X)$ funkcionál X^*-beli és $\|R_a\| \leq \|a\|$. Ha itt $x := a$, akkor

$$R_a a = \langle a, a \rangle = \|a\|^2 \leq \|R_a\| \cdot \|a\|$$

miatt $\|a\| \leq \|R_a\|$, azaz $\|R_a\| = \|a\|$ adódik. Sőt, igaz a

6.4.1. Tétel (*Riesz*)**.** *Tegyük fel, hogy $(X, \langle , \rangle)$ Hilbert-tér. Ekkor bármely $R \in X^*$ funkcionálhoz egyértelműen létezik olyan $a \in X$, hogy $R = R_a$ és $\|R\| = \|a\|$.*

Bizonyítás. Legyen $R \in X^*$ és $Y := \{x \in X : Rx = 0\}$ az R funkcionál magtere. Ekkor Y altér (ld. 6.2.), sőt zárt altér: ha $x_n \in Y \quad (n \in \mathbf{N})$ és létezik az $x := \lim(x_n)$ határérték, akkor R folytonossága és az átviteli elv miatt (ld. 6.3.1. Tétel, ill. 6.1.) $Rx = \lim(Rx_n) = \lim(0) = 0$ miatt $x \in Y$.

Két eset lehetséges:

1^o $Y = X$, amikor is $R \equiv 0$. Ekkor az $a := 0$ elem nyilván megfelelő.

2^o $Y \neq X$. Legyen (ld. 5.3.1. i) megjegyzés) $u \in X \setminus Y$ és $y \in Y$ extremális: $\|u - y\| = \rho(u, Y)$. Ekkor az 5.3.2. Tétel miatt a $b := u - y \neq 0$ elemre $b \in Y^{\perp}$, azaz $\langle z, b \rangle = 0$ minden $z \in Y$ mellett igaz. Vegyük észre, hogy

$$bRx - xRb \in Y \qquad (x \in X).$$

Ezért tetszőleges $x \in X$ esetén

$$0 = \langle bRx - xRb, b\rangle = \langle bRx, b\rangle - \langle xRb, b\rangle = Rx\langle b, b\rangle - \langle x, b\overline{Rb}\rangle = \|b\|^2 Rx - \langle x, b\overline{Rb}\rangle.$$

Innen $Rx = \dfrac{\langle x, b\overline{Rb}\rangle}{\|b\|^2} = \left\langle x, \dfrac{b\overline{Rb}}{\|b\|^2}\right\rangle$, más szóval az $a := \dfrac{b\overline{Rb}}{\|b\|^2}$ elem megfelelő.

Ezzel a tételben szereplő a elem egzisztenciáját beláttuk. Ha $c \in X$ is olyan, hogy $Rx = \langle x, c\rangle$ $(x \in X)$, akkor $\langle x, a - c\rangle = 0 \quad (x \in X)$, speciálisan az $x := a - c$ választással innen $\|a - c\| = 0$ adódik. Tehát $a = c$, amivel az a elem unicitását is megmutattuk.

Az $\|R\| = \|R_a\| = \|a\|$ egyenlőséget már a tétel kimondása előtt megindokoltuk. ∎

6.4.1. Megjegyzések.

i) Világos, hogy $a, b \in X$ esetén $R_{a+b} = R_a + R_b$. Ha $\lambda \in \mathbf{K}$, akkor

$$R_{\lambda a}x = \langle x, \lambda a\rangle = \overline{\lambda}\langle x, a\rangle = \overline{\lambda}R_a x \qquad (x \in X)$$

miatt $R_{\lambda a} = \overline{\lambda}R_a$.

ii) Állapodjunk meg abban, hogy bármely $(X, \|.\|)$ normált tér esetén az $A \in X^*$ funkcionál és a $\lambda \in \mathbf{K}$ szám szorzatán azt a $\lambda A \in X^*$ funkcionált értjük, amelyre $(\lambda A)x := \overline{\lambda}Ax \quad (x \in X)$. Világos, hogy mindez nem változtat azon a tényen, hogy X^* *Banach*-tér.

iii) Az előbbi megjegyzéseket is figyelembe véve most már azt mondhatjuk, hogy bármely $(X, \langle,\rangle)$ *Hilbert*-tér esetén az $X \ni a \mapsto R_a \in X^*$ megfeleltetés izomorfia és izometria.

iv) Jelöléstechnikailag is gyakran kiemeljük, ha egy duális tér elemeiről van szó: ezeket általában kis betűkkel jelöljük, ill. a lineáris operátorokra bevezetett Ax írásmód helyett $f \in X^*$, $x \in X$ esetén a hagyományos $f(x)$ szimbólumot használjuk.

v) Legyen $(X, \|.\|)$ tetszőleges normált tér, $f \in \mathcal{L}(X, \mathbf{K})$,

$$X_0 := X_0^f := \{x \in X : f(x) = 0\}$$

pedig legyen az f lineáris funkcionál magtere. Ekkor $f \in X^*$ azzal ekvivalens, hogy X_0 zárt. Ha ui. $f \in X^*$, akkor X_0 zártsága ugyanúgy adódik, mint azt láttuk a 6.4.1. Tétel bizonyításában. Fordítva, ha X_0 zárt, akkor két eset lehetséges: $X_0 = X$, ekkor $f \equiv 0$, azaz nyilván $f \in X^*$. Ha viszont $X_0 \neq X$, akkor bármely $a \in X \setminus X_0$ esetén alkalmas $r > 0$ mellett $K_r(a) \cap X_0 = \emptyset$. Mivel $f(a) \neq 0$, ezért (legfeljebb a-t $a/f(a)$-ra cserélve) feltehető, hogy $f(a) = 1$. Legyen $x \in X \setminus X_0$, ekkor $f(x) \neq 0$ és $a - x/f(x) \in X_0$. Így $a - x/f(x) \notin K_r(a)$, azaz $\|(a - x/f(x)) - a\| \geq r$. Ez azt jelenti, hogy $\|x\|/|f(x)| \geq r$, azaz $|f(x)| \leq \|x\|/r$. Ez utóbbi becslés nyilván igaz $x \in X_0$ esetén is, tehát $f \in X^*$.

vi) Az előző megjegyzésbeli $f \in \mathcal{L}(X, \mathbf{K})$ funkcionálra $f \notin X^*$ akkor és csak akkor igaz, ha (ld. v)) $X_0 \neq X$ és $\overline{X_0} = X$. Valóban, ha $\overline{X_0} = X$ és $f \in X^*$, azaz f folytonos, akkor tetszőleges $x \in X$ esetén egy alkalmas $x_n \in X_0 \quad (n \in \mathbf{N})$ sorozattal $\lim(x_n) = x$. Innen $f(x) = \lim(f(x_n)) = \lim(0) = 0$ adódik, azaz $f \equiv 0$. Ha tehát $X \neq X_0$ mindenütt sűrű

X-ben, akkor f nem lehet folytonos, így $f \notin X^*$. Ha viszont $\overline{X_0} \neq X$, akkor van olyan $a \in X \setminus X_0$ és $r > 0$, hogy $K_r(a) \cap X_0 = \emptyset$. Innen az v)-ben látottak szerint $f \in X^*$ következik. Ezért $f \notin X^*$ esetén $\overline{X_0} = X$. Világos, hogy ekkor $X_0 \neq X$ is szükségszerűen igaz, hiszen $X_0 = X$ esetén az $f \equiv 0$ funkcionál nyilván X^*-ban lenne.

vii) A lineáris funkcionálok magterének a szerepére világít rá az alábbi megjegyzés is. Legyen ui. (ld. v)) $f, g \in \mathcal{L}(X, \mathbf{K})$. Ekkor $X_0^f = X_0^g$ azzal ekvivalens, hogy alkalmas $\alpha \in \mathbf{K}$ konstanssal $f = \alpha g$. Ha ui. a két funkcionál közül az egyik a másiknak konstansszorosa, akkor az $X_0^f = X_0^g$ egyenlőség meglehetősen nyilvánvaló. Fordítva, legyen $X_0 := X_0^f = X_0^g$. Feltehető, hogy $X_0 \neq X$, különben $f \equiv g \equiv 0$, azaz (pl.) az $\alpha := 1$ választás megfelelő. Tehát legyen $X_0 \neq X$, $a \in X \setminus X_0$ és $x \in X$ esetén

$$z := x - \frac{f(x)}{f(a)} a.$$

Ekkor egy egyszerű behelyettesítés után azt kapjuk, hogy $z \in X_0^f$, azaz $z \in X_0^g$. Ezért

$$g(x) = \frac{f(x)}{f(a)} g(a) + g(z) = \frac{f(x)}{f(a)} g(a),$$

így az $\alpha := \dfrac{g(a)}{f(a)}$ konstans megfelelő.

Emlékeztetünk az $(\ell_p, \|.\|_p)$ $(1 \leq p \leq +\infty)$ *Banach*-terek definíciójára:

$$\ell_p := \begin{cases} \left\{x = (x_n) : \mathbf{N} \to \mathbf{K} : \|x\|_p := \left(\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p\right)^{1/p} < +\infty\right\} & (p < +\infty) \\ \{x = (x_n) : \mathbf{N} \to \mathbf{K} : \|x\|_\infty := \sup_n |x_n| < +\infty\} & (p = +\infty). \end{cases}$$

6.4.2. Tétel. *Legyen* $1 \leq p, q \leq +\infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *Ekkor*

i) *bármely* $a \in \ell_q$ *esetén az* $f_a(x) := \sum_{n=0}^{\infty} x_n \overline{a_n}$ $(x \in \ell_p)$ *előírás egy* $f_a \in \ell_p^*$ *funkcionált határoz meg, amelyre* $\|f_a\| = \|a\|_q$;

ii) *ha* $p < +\infty$, *akkor minden* $f \in \ell_p^*$ *funkcionálhoz egyértelműen létezik olyan* $a \in \ell_q$ *sorozat, hogy* $f = f_a$.

Bizonyítás. Elöljáróban a jól ismert *Hölder*-egyenlőtlenségre hivatkozva azt mondhatjuk, hogy a tételben jelzett $a \in \ell_q$, $x \in \ell_p$ sorozatok esetén

$$|f_a(x)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |x_n a_n| \leq \|a\|_q \|x\|_p < +\infty,$$

azaz $f_a : \ell_p \to \mathbf{K}$. Világos, hogy f_a lineáris, ill. az előző becslés miatt $f_a \in \ell_p^*$ és $\|f_a\| \leq \|a\|_q$.

Tegyük fel, hogy $1 < p < +\infty$, ekkor $1 < q < +\infty$ is nyilván igaz. Legyen (x_n) a következő sorozat:

$$x_n := \begin{cases} 0 & (a_n = 0) \\ \dfrac{|a_n|^q}{\overline{a_n}} & (a_n \neq 0) \end{cases} \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Könnyen adódik, hogy $x := (x_n) \in \ell_p$. Ui.

$$\|x\|_p^p = \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^{p(q-1)} = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^q = \|a\|_q^q < +\infty.$$

Az is kiderült, hogy $\|x\|_p = (\|a\|_q)^{q/p}$. Mindezt egybevetve a fentiekkel azt mondhatjuk, hogy

$$f_a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^q = \|a\|_q^q \leq \|f_a\| \cdot \|x\|_p = \|f_a\| \left(\|a\|_q\right)^{q/p},$$

amiből $\|f_a\| \geq (\|a\|_q)^{q-q/p} = \|a\|_q$ következik. Ezért $\|f_a\| = \|a\|_q$.

Ha $p = +\infty$, akkor $q = 1$. Legyen ekkor

$$x_n := \begin{cases} 0 & (a_n = 0) \\ \dfrac{|a_n|}{\overline{a_n}} & (a_n \neq 0) \end{cases} \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Mivel $|x_n| \leq 1 \quad (n \in \mathbf{N})$, ezért $x := (x_n) \in \ell_\infty$ és $\|x\|_\infty \leq 1$. Továbbá $f_a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| = \|a\|_1$ miatt

$$f_a(x) = \|a\|_1 \leq \|f_a\| \cdot \|x\|_\infty \leq \|f_a\|$$

alapján $\|a\|_1 \leq \|f_a\|$, azaz $\|f_a\| = \|a\|_1$.

Ha $p = 1$, akkor $q = +\infty$. Ebben az esetben (a $\delta_{nk} \quad (n, k \in \mathbf{N})$ *Kronecker*-szimbólummal) tekintsük az

$$e^{(n)} := (\delta_{nk}, k \in \mathbf{N}) \qquad (n \in \mathbf{N})$$

(nyilván ℓ_1-beli) sorozatokat. Ha $n \in \mathbf{N}$, akkor

$$|f_a(e^{(n)})| = |a_n| \leq \|f_a\| \cdot \|e^{(n)}\|_1 = \|f_a\|$$

alapján $\|a\|_\infty = \sup_n |a_n| \leq \|f_a\|$, azaz $\|f_a\| = \|a\|_\infty$.

Ezzel a tétel i) állítását beláttuk. A ii) bizonyításához vegyük figyelembe, hogy $p < +\infty$ esetén az előbb defininált $e^{(n)} \quad (n \in \mathbf{N})$ sorozatok *Schauder*-bázist alkotnak ℓ_p-ben: $x = (x_n) \in \ell_p$ esetén $x = \sum_{n=0}^{\infty} x_n e^{(n)}$, hiszen

$$\left\| x - \sum_{k=0}^{n} x_k e^{(k)} \right\|_p^p = \sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k|^p \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

Ha tehát $f \in \ell_p^*$, akkor f folytonossága (ld. 6.3.1. Tétel) alapján

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n f(e^{(n)}) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n \overline{a_n},$$

ahol tehát $a_n := \overline{f(e^{(n)})}$ $(n \in \mathbf{N})$. Mutassuk meg, hogy az $a := (a_n)$ sorozat ℓ_q-beli, azaz $f = f_a$. Legyen ehhez először $1 < p$. Ekkor tekintsük valamely $N \in \mathbf{N}$ mellett azt az $x = (x_n)$ sorozatot, amelyre

$$x_n := \begin{cases} 0 & (a_n = 0 \text{ vagy } n > N) \\ \dfrac{|a_n|^q}{\overline{a_n}} & (n \leq N, a_n \neq 0) \end{cases} \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Nyilván $x \in \ell_p$ és

$$f(x) = s_N := \sum_{n=0}^{N} |a_n|^q \leq \|f\| \cdot \|x\|_p = \|f\| \left(\sum_{n=0}^{N} |a_n|^{p(q-1)} \right)^{1/p} =$$

$$\|f\| \left(\sum_{n=0}^{N} |a_n|^q \right)^{1/p} = \|f\| s_N^{1/p}.$$

Következésképpen $s_N \leq \|f\|^q$, azaz

$$\|a\|_q^q = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^q = \lim_{N \to \infty} s_N \leq \|f\|^q < +\infty,$$

így $a \in \ell_q$.

Ha $p = 1$, akkor

$$|a_n| = |f(e^{(n)})| \leq \|f\| \cdot \|e^{(n)}\|_1 = \|f\| \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

amiből

$$\|a\|_\infty = \sup_n |a_n| \leq \|f\| < +\infty,$$

tehát $a \in \ell_\infty$ következik.

Ha ii)-ben $b = (b_n) \in \ell_q$ is olyan sorozat, hogy $f = f_b$, akkor minden $x = (x_n) \in \ell_p$ esetén $f_a(x) = f_b(x)$, azaz

$$f_a(x) - f_b(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k \overline{a_k - b_k} = 0.$$

Legyen $n \in \mathbf{N}$ és $x := e^{(n)}$, akkor $f_a(x) - f_b(x) = \overline{a_n - b_n} = 0$, amiből $a_n = b_n$ következik. Tehát $a = b$. ■

6.4.2. Megjegyzések.

i) Az előző tétel ii) állítása a $p = +\infty$ esetben nem igaz. Tehát van olyan $f \in \ell_\infty^*$ funkcionál, amely egyetlen $a \in \ell_1$ esetén sem állítható elő $f = f_a$ alakban. Legyen ui.

$$c := \{x \in \ell_\infty : x \text{ konvergens}\}$$

és $g(x) := \lim x \quad (x \in c)$. Világos, hogy c altere ℓ_∞-nek, g lineáris funkcionál ezen az altéren és $|g(x)| \leq \|x\|_\infty \quad (x \in c)$ miatt $g \in c^*$. Az is meglehetősen nyilvánvaló, hogy nincs olyan $a = (a_n) \in \ell_1$ sorozat, amellyel

$$g(x) = \lim x = \sum_{n=0}^{\infty} x_n \overline{a_n} \qquad (x \in c)$$

igaz lenne. Később megmutatjuk (ld. 6.5.1. *Hahn-Banach*-tétel), hogy van olyan $f \in \ell_\infty^*$ funkcionál, amelyre $f(x) = g(x) \quad (x \in c)$.

ii) Tehát $\{f_a \in \ell_\infty^* : a \in \ell_1\}$ valódi altere ℓ_∞^*-nak.

iii) Röviden vázoljuk az ℓ_∞^* duális tér szerkezetét. Legyen ehhez $f \in \ell_\infty^*$ és valamely $A \subset \mathbf{N}$ esetén $\mu(A) := f(\chi_A)$, ahol $\chi_A \in \ell_\infty$ az A halmaz karakterisztikus sorozata:

$$\chi_A(n) := \begin{cases} 1 & (n \in A) \\ \\ 0 & (n \notin A) \end{cases} \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Az így definiált $\mu : \mathcal{P}(\mathbf{N}) \to \mathbf{K}$ függvényről nem nehéz megmutatni, hogy $\mu(\emptyset) = 0$ és μ

- *additív*, azaz $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) \quad (A, B \subset \mathbf{N}, A \cap B = \emptyset)$;
- *korlátos változású,* azaz

$$[\mu] := \sup \sum_{k=0}^{n} |\mu(A_k)| < +\infty,$$

sőt, $[\mu] \leq \|f\|$, ahol a szuprémum a páronként diszjunkt halmazokból álló $\mathbf{N} = \bigcup_{k=0}^{n} A_k \quad (n \in \mathbf{N})$ felbontásokra vonatkozik.

Ha $\ell := \{x \in \ell_\infty : \mathcal{R}_x \text{ véges}\}$, akkor bármely $x \in \ell$ sorozatra

$$|f(x)| = \left| f\left(\sum_{\alpha \in \mathcal{R}_x} \alpha \chi_{\{x_k = \alpha\}} \right) \right| = \left| \sum_{\alpha \in \mathcal{R}_x} \alpha f\left(\chi_{\{x_k=\alpha\}}\right) \right| \leq$$

$$\sum_{\alpha \in \mathcal{R}_x} |\alpha| \mu\left(\{x_k = \alpha\}\right) \leq [\mu] \cdot \|x\|_\infty.$$

Mivel (könnyen beláthatóan) ℓ mindenütt sűrű ℓ_∞-ben, ezért tetszőleges $x \in \ell_\infty$ elemhez van olyan $x^{(n)} \in \ell \quad (n \in \mathbf{N})$ sorozat, hogy $\|x - x^{(n)}\|_\infty \to 0 \quad (n \to \infty)$. Így az előbbiek alapján

$$|f(x)| = |\lim(f(x^{(n)}))| \le \lim([\mu]\cdot \|x^{(n)}\|_\infty) = [\mu]\cdot \|x\|_\infty,$$

amiből $\|f\| \le [\mu]$ következik. Mindezt egybevetve a fentiekkel azt mondhatjuk, hogy $\|f\| = [\mu]$. Legyen $\mathcal{M}$ a (fenti értelemben) korlátos változású additív $\mu : \mathcal{P}(\mathbf{N}) \to \mathbf{K}$ *komplex mértékek* halmaza és $\mu \in \mathcal{M}$ esetén

$$f_\mu(x) := \sum_{\alpha\in\mathcal{R}_x} \alpha\mu(\{x_k = \alpha\}) \qquad (x \in \ell).$$

Ekkor $f_\mu \in \ell^*$, ill. $x \in \ell_\infty$ esetén az előbbi $x^{(n)} \in \ell \quad (n \in \mathbf{N})$, $\lim(x^{(n)}) = x$ sorozattal

$$|f_\mu(x^{(n)}) - f_\mu(x^{(m)})| = |f_\mu(x^{(n)} - x^{(m)})| \le [\mu]\cdot \|x^{(n)} - x^{(m)}\|_\infty \to 0 \qquad (n, m \to \infty)$$

miatt létezik a $\lim(f_\mu(x^{(n)})) \in \mathbf{K}$ határérték. Nem nehéz belátni, hogy ez csak x-től függ, ezért „értelmes” az $f(x) := \lim(f_\mu(x^{(n)}))$ definíció. Az f funkcionál nyilván lineáris, ill.

$$|f_\mu(x)| = \lim(|f_\mu(x^{(n)})|) \le [\mu]\lim(\|x^{(n)}\|_\infty) = [\mu]\cdot \|x\|_\infty$$

alapján $f_\mu \in \ell_\infty^*$ és (az előzőek szerint) $\|f_\mu\| = [\mu]$.

iv) Megmutatható, hogy $\mathcal{M} \ni \mu \mapsto [\mu]$ norma, ill. $(\mathcal{M}, [.])$ *Banach*-tér és (ld. iii))

$$\mathcal{M} \ni \mu \mapsto f_\mu \in \ell_\infty^*$$

izomorfia és izometria.

v) Speciálisan bármely $a = (a_n) \in \ell_1$ sorozat esetén a

$$\mu_a(A) := \sum_{k\in A} \overline{a_k} \qquad (A \in \mathcal{P}(\mathbf{N}))$$

definícióval értelmezett μ_a függvény $\mathcal{M}$-beli és $[\mu] = \|a\|_1$. Nyilván $f_{\mu_a} = f_a$.

vi) Legyen $c_0 := \{x \in c : \lim x = 0\}$, $a \in \ell_1$ és $\mathbf{f}_a(x) := f_a(x) \quad (x \in c_0)$. Mutassuk meg, hogy $c_0^* = \{\mathbf{f}_a : a \in \ell_1\}$ és $a \in \ell_1$ esetén $\|\mathbf{f}_a\| = \|a\|_1$. Valóban, ha $a \in \ell_1$, akkor az $\mathbf{f}_a \in c_0^*$, $\|\mathbf{f}_a\| = \|a\|_1$ állítások ugyanúgy láthatók be, mint a 6.4.2. Tétel i) állításának a $p = +\infty$-re vonatkozó része: $\|\mathbf{f}_a\| \le \|a\|_1$, ill. legyen $N \in \mathbf{N}$ és

$$x_n^{(N)} := \begin{cases} 0 & (a_n = 0 \text{ vagy } n > N) \\ \dfrac{|a_n|}{\overline{a_n}} & (n \le N\,,\ a_n \ne 0) \end{cases} \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Mivel $\lim_{n\to\infty} x_n^{(N)} = 0$, ezért $x^{(N)} := (x_n^{(N)}) \in c_0$ és $\|x^{(N)}\|_\infty \le 1$. Továbbá

$$\mathbf{f}_a(x) = \sum_{n=0}^{N} |a_n| \le \|\mathbf{f}_a\|\cdot \|x^{(N)}\|_\infty \le \|\mathbf{f}_a\|$$

alapján $\|a\|_1 = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^N |a_n| \leq \|\mathbf{f}_a\|$, azaz $\|\mathbf{f}_a\| = \|a\|_1$.

Fordítva, legyen $\mathbf{f} \in c_0^*$, ekkor a 6.4.2. Tétel bizonyításában bevezetett $e^{(n)} \in c_0 \quad (n \in \mathbf{N})$ sorozatok segítségével

$$\mathbf{f}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n \mathbf{f}(e^{(n)}) =: \sum_{n=0}^{\infty} x_n \overline{a_n},$$

ahol tehát $a_n := \overline{\mathbf{f}(e^{(n)})} \quad (n \in \mathbf{N})$. Ha itt $N \in \mathbf{N}$ és (a most definiált a_n-ekkel) $x^{(N)}$ az előbbi sorozat, akkor

$$\mathbf{f}(x^{(N)}) = \sum_{n=0}^{N} |a_n| \leq \|\mathbf{f}\| \|x^{(N)}\|_\infty \leq \|\mathbf{f}\|,$$

tehát $\|a\|_1 = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^N |a_n| \leq \|\mathbf{f}\|$. Ez azt jelenti, hogy $a \in \ell_1$ és

$$\mathbf{f}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n \overline{a_n} = \mathbf{f}_a(x) \qquad (x \in c_0),$$

azaz $\mathbf{f} = \mathbf{f}_a$.

vii) A vi) megjegyzésben értelmezett $\mathbf{f}_a \ (a \in \ell_1)$ funkcionálok c_0 helyett a konvergens sorozatok c terén is nyilván értelmezhetők. Sőt, ha $q \in \mathbf{K}$, akkor (az előbbi $\ell_1 \ni a$-val) az

$$f_{q,a}(x) := q \lim x + \sum_{n=0}^{\infty} x_n a_n \qquad (x = (x_n) \in c)$$

definícióval értelmezett $f_{q,a} : c \to \mathbf{K}$ funkcionál nyilván lineáris, ill. a triviális

$$|f_{q,a}(x)| \leq (|q| + \|a\|_1)\|x\|_\infty \qquad (x \in c)$$

becslés miatt $f_{q,a} \in c^*$ és $\|f_{q,a}\| \leq |q| + \|a\|_1$. Nem nehéz meggondolni, hogy

$$\|f_{q,a}\| = |q| + \|a\|_1.$$

Ez $q = 0$-ra ugyanúgy „mehet”, mint fent az $\mathbf{f}_a$ funkcionálokra. Ha $q \neq 0$, akkor legyen $N \in \mathbf{N}$ és

$$y_n^{(N)} := \begin{cases} s(a_n) & (n \leq N) \\ & \\ s(q) & (n > N) \end{cases} \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

ahol valamely $v \in \mathbf{K}$ esetén $s(v) := 0$, ha $v = 0$ és $s(v) := |v|/v$, ha $v \neq 0$. Ekkor $y^{(N)} \in c$, $\lim y^{(N)} = s(q)$ és

$$\left|f_{q,a}(y^{(N)})\right| = |q| + \sum_{n=0}^{N} |a_n| \leq \|f_{q,a}\| \cdot \|y^{(N)}\|_\infty \leq \|f_{q,a}\|,$$

amiből $\|f_{q,a}\| \geq |q| + \|a\|_1$ következik.

Legyen most $f \in c^*$ tetszőleges és mutassuk meg, hogy egyértelműen megadható olyan $q \in \mathbf{K}$ szám és olyan $a \in \ell_1$ sorozat, hogy $f = f_{q,a}$. Valóban, ha $x = (x_n) \in c$, akkor az $e := (1)$ (azaz $e \in c$ a konstans 1 sorozat), $\alpha := \lim x$ jelölésekkel $x - \alpha e = (x_n - \alpha) \in c_0$, tehát

$$x - \alpha e = \sum_{n=0}^{\infty} (x_n - \alpha) e^{(n)}.$$

Következésképpen

$$f(x - \alpha e) = f(x) - \alpha f(e) = \sum_{n=0}^{\infty} (x_n - \alpha) f\left(e^{(n)}\right).$$

Az $\left(f\left((e^{(n)})\right)\right)$ sorozatról a fentiekhez hasonlóan látható be, hogy ℓ_1-beli, így

$$f(x) = \alpha \left(f(e) + \sum_{n=0}^{\infty} f\left(e^{(n)}\right) \right) + \sum_{n=0}^{\infty} x_n f(e^{(n)}) =:$$

$$q \lim x + \sum_{n=0}^{\infty} x_n a_n = f_{q,a}(x),$$

ahol értelemszerűen $q := f(e) + \sum_{n=0}^{\infty} f(e^{(n)})$ és $a_n := f(e^{(n)}) \quad (n \in \mathbf{N})$.

Ha $\tilde{q} \in \mathbf{K}, \tilde{a} \in \ell_1$ és $f_{q,a} = f_{\tilde{q},\tilde{a}}$, azaz

$$q \lim x + \sum_{n=0}^{\infty} x_n a_n = \tilde{q} \lim x + \sum_{n=0}^{\infty} x_n \tilde{a_n} \qquad (x = (x_n) \in c),$$

akkor

$$(q - \tilde{q}) \lim x + \sum_{n=0}^{\infty} x_n (a_n - \tilde{a}_n) = 0 \qquad (x = (x_n) \in c).$$

Ha itt x helyébe rendre az $e^{(n)} \ (n \in \mathbf{N}), e$ sorozatokat írjuk, akkor az $a_n - \tilde{a}_n = 0 \ (n \in \mathbf{N})$, azaz az $a = \tilde{a}$ és a $q - \tilde{q} = 0$, azaz a $q = \tilde{q}$ egyenlőségeket kapjuk.

viii) Mivel $p = 2$ esetén $q = 2$ és $(\ell_2, \|.\|_2) \equiv (\ell_2, \langle,\rangle_2)$ *Hilbert*-tér, ezért ekkor a 6.4.2. Tétel a 6.4.1. Tétel speciális esete.

6.5. Funkcionálok kiterjesztése.

Legyen a továbbiakban $(X, \|.\|)$ normált tér a $\mathbf{K}$ testre vonatkozóan ($\mathbf{K} = \mathbf{R}$ vagy $\mathbf{K} = \mathbf{C}$), $Y \subset X$ altér és $f \in Y^*$. Ha $Z \subset X$ is altér, $Y \subset Z$, továbbá van olyan $F \in Z^*$ funkcionál, amely kiterjesztése f-nek (azaz $F(x) = f(x) \quad (x \in Y)$) és $\|F\| = \|f\|$, akkor mindezt az $f \subset F$ szimbólummal juttatjuk kifejezésre. Világos, hogy ha $f \subset F$ és $F \subset V$, akkor $f \subset V$.

Nyilván minden olyan $\Phi \in Z^*$ funkcionálra, amelyre $\Phi_{|Y} = f$ igaz, egyúttal

$$|f(x)| = |\Phi(x)| \leq \|\Phi\| \cdot \|x\| \qquad (x \in Y),$$

azaz $\|f\| \leq \|\Phi\|$ is fennáll. Ezért ahhoz, hogy $f \subset F$ teljesüljön, két dolgot kell megmutatni: $F_{|Y} = f$ és $\|F\| \leq \|f\|$.

6.5.1. Tétel (*Hahn-Banach*)**.** *Bármely $(X, \|.\|)$ normált tér és tetszőleges $Y \subset X$ altér, $f \in Y^*$ funkcionál esetén van olyan $F \in X^*$, amelyre $f \subset F$.*

Csak szeparábilis $(X, \|.\|)$ tér esetén fogjuk maradéktalanul bebizonyítani a tételt. Ebből a szempontból (is) alapvető az alábbi

6.5.1. Lemma. *Tegyük fel, hogy a fentiekben szereplő Y altér mindenütt sűrű X-ben és $f \in Y^*$. Ekkor megadható olyan $F \in X^*$, amelyre $f \subset F$.*

Az 6.5.1. Lemma bizonyítása. A feltétel miatt minden $X \ni x$-hez van olyan $y_n \in Y \quad (n \in \mathbf{N})$ sorozat, amely konvergál x-hez. Ha $m, n \in \mathbf{N}$, akkor

$$|f(y_n) - f(y_m)| = |f(y_n - y_m)| \leq \|f\| \cdot \|y_n - y_m\|,$$

azaz $\|y_n - y_m\| \to 0 \quad (n, m \to \infty)$ miatt $(f(y_n))$ egy ($\mathbf{K}$-beli) *Cauchy*-sorozat. Létezik tehát a $\lim(f(y_n)) \in \mathbf{K}$ határérték. Könnyű belátni, hogy ez utóbbi csak x-től függ. Ha ui. $z_n \in Y \quad (n \in \mathbf{N})$ is egy olyan sorozat, amelyre $\lim(z_n) = x$, akkor

$$|f(y_n) - f(z_n)| = |f(y_n - z_n)| \leq \|f\| \cdot \|y_n - z_n\| \to 0 \qquad (n \to \infty),$$

azaz valóban $\lim(f(y_n)) = \lim(f(z_n))$.

Értelmes tehát (a fenti szereplőkkel) az

$$F(x) := \lim(f(y_n))$$

definíció. Az így definiált $F : X \to \mathbf{K}$ funkcionál egyrészt lineáris, hiszen $z \in X$, $z = \lim(t_n) \quad (t_n \in Y \ (n \in \mathbf{N}))$ és $\mu, \lambda \in \mathbf{K}$ esetén $\mu x + \lambda z = \lim(\mu y_n + \lambda t_n)$, ezért

$$F(\mu x + \lambda z) = \lim(f(\mu y_n + \lambda t_n)) = \lim(\mu f(y_n) + \lambda f(t_n)) =$$

$$\mu \lim(f(y_n)) + \lambda \lim(f(t_n)) = \mu F(x) + \lambda F(z).$$

Másrészt $|F(x)| = |\lim(f(y_n))| = \lim(|f(y_n)|)$ és $|f(y_n)| \leq \|f\| \cdot \|y_n\| \quad (n \in \mathbf{N})$ miatt

$$|F(x)| \le \|f\| \lim(\|y_n\|) = \|f\| \cdot \|x\|.$$

Ezért $F \in X^*$ és $\|F\| \le \|f\|$. Ha $x \in Y$, akkor az $y_n := x \quad (n \in \mathbf{N})$ választással $\lim(y_n) = x$, így $F(x) = \lim(f(y_n)) = f(x)$. Ez azt jelenti, hogy $F_{|Y} = f$, azaz $f \subset F$. ■

6.5.2. Lemma. *Legyen $\mathbf{K} = \mathbf{R}$, $z \in X \setminus Y$, $Y_1 := \{y + \lambda z \in X : y \in Y, \lambda \in \mathbf{R}\}$ (az Y altér egydimenziós bővítése). Ekkor minden $f \in Y^*$ esetén van olyan $F_1 \in Y_1^*$, amelyre $f \subset F_1$.*

A 6.5.2. Lemma bizonyítása. Ha $F_1 \in Y_1^*$ és $f \subset F_1$, akkor

$$F_1(y + \lambda z) = F_1(y) + \lambda F_1(z) = f(y) + m\lambda \qquad (y \in Y, \lambda \in \mathbf{R}),$$

ahol $m := F_1(z) \in \mathbf{R}$. Jegyezzük meg, hogy bármely $\xi \in Y_1$ esetén egyértelműen van olyan $y \in Y$ és $\lambda \in \mathbf{R}$, hogy $\xi = y + \lambda z$. Ha ui. $\tilde{y} \in Y$, $\tilde{\lambda} \in \mathbf{R}$ is olyan, hogy $\xi = \tilde{y} + \tilde{\lambda} z$, akkor $y - \tilde{y} = (\tilde{\lambda} - \lambda) z$. Ha $\tilde{\lambda} \neq \lambda$ lenne, akkor $z = \dfrac{y - \tilde{y}}{\tilde{\lambda} - \lambda} \in Y$ teljesülne, ami nem igaz. Tehát $\tilde{\lambda} = \lambda$ és így $y - \tilde{y} = 0$. Következésképpen bármely $q \in \mathbf{R}$ mellett a

$$h(\xi) = h(y + \lambda z) := f(y) + q\lambda \qquad (\xi = y + \lambda z \in Y_1 \ \ (y \in Y, \lambda \in \mathbf{R}))$$

funkcionál definíciója korrekt, $h : Y_1 \to \mathbf{R}$ lineáris és

$$h(y) = h(y + 0 \cdot z) = f(y) \qquad (y \in Y)$$

teljesül. Így $h_{|Y} = f$.

Ezért $f \subset F_1$ érdekében a fenti m-et kell csupán úgy megválasztani, hogy $\|F_1\| \le \|f\|$, azaz

$$|f(y) + m\lambda| \le \|f\| \cdot \|y + \lambda z\| \qquad (y \in Y, \lambda \in \mathbf{R})$$

igaz legyen. Mivel $f : X \to \mathbf{R}$, ezért az utóbbi egyenlőtlenség azzal ekvivalens, hogy

$$(1) \qquad -\|f\| \cdot \|y + \lambda z\| \le f(y) + m\lambda \le \|f\| \cdot \|y + \lambda z\| \qquad (y \in Y, \lambda \in \mathbf{R}).$$

Az itteni bal oldali egyenlőtlenség azt jelenti, hogy

$$-f(y) - m\lambda = f(-y) + m(-\lambda) \le \|f\| \cdot \|y + \lambda z\| = \|f\| \cdot \|(-y) + (-\lambda) z\| \qquad (y \in Y, \lambda \in \mathbf{R}),$$

ami $(-y) + (-\lambda) z \in Y_1$ miatt persze következik az (1)-beli jobb oldali becslésből. Elegendő tehát (1)-ben a jobb oldali egyenlőtenséget biztosítani az m alkalmas megválasztásával.

Ez $\lambda = 0$-ra a triviálisan igaz $f(y) \le \|f\| \cdot \|y\| \quad (y \in Y)$ egyenlőtlenséget jelenti. Ha (1)-ben $\lambda > 0$, akkor az előbb említett jobb oldali egyenlőtlenséget ekvivalens módon átalakítva azt kapjuk, hogy

$$(2) \qquad m \le -\frac{f(y)}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}\|f\| \cdot \|y + \lambda z\| = -f\left(\frac{y}{\lambda}\right) + \|f\| \cdot \left\|\frac{y}{\lambda} + z\right\| \qquad (y \in Y, \lambda > 0).$$

Világos, hogy $\left\{\frac{y}{\lambda} \in X : y \in Y, \lambda > 0\right\} = Y$, azaz (2) azt jelenti, hogy

$$(3) \qquad m \leq -f(t) + \|f\|\cdot\|t+z\| \qquad (t \in Y).$$

Ha viszont (1)-ben $\lambda < 0$, akkor az ekvivalens átalakítás (1) jobb oldalán azt eredményezi, hogy a $\mu := -\lambda$ jelöléssel

$$m \geq \frac{f(y)}{\mu} - \frac{1}{\mu}\|f\|\cdot\|y - \mu z\| = f\left(\frac{y}{\mu}\right) - \|f\|\cdot\left\|\frac{y}{\mu} - z\right\| \qquad (y \in Y, \mu > 0),$$

azaz (a (3)-hoz vezető meggondolással analóg módon)

$$(4) \qquad m \geq f(x) - \|f\|\cdot\|x - z\| \qquad (x \in Y).$$

A *Dedekind*-axiómára hivatkozva (3) és (4) együttes teljesüléséhez elegendő már csak azt meggondolni, hogy

$$f(x) - \|f\|\cdot\|x-z\| \leq -f(t) + \|f\|\cdot\|t+z\| \qquad (x, t \in Y).$$

Ez viszont azzal ekvivalens, hogy $f(t) + f(x) = f(t+x) \leq \|f\|(\|t+z\| + \|x-z\|) \quad (t, x \in Y)$, ami a háromszög-egyenlőtlenség miatt fennálló

$$\|t+z\| + \|x-z\| \geq \|(t+z) + (x-z)\| = \|t+x\|$$

becslést és a nyilván teljesülő $f(t+x) \leq \|f\|\cdot\|t+x\| \quad (t, x \in Y)$ egyenlőtlenséget is figyelembe véve igaz. ■

6.5.3. Lemma. *A Hahn-Banach-tétel* $\mathbf{K} = \mathbf{C}$ *(komplex) esete következik a* $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ *(valós) esetből.*

A 6.5.3. Lemma bizonyítása. Legyen $\mathbf{K} = \mathbf{C}$ és $f \in Y^*$, ekkor bármely $x \in Y$ esetén

$$f(x) = f_1(x) + \imath f_2(x),$$

ahol $\imath := \sqrt{-1}$, $f_1(x)$ az $f(x)$ valós részét, $f_2(x)$ pedig a képzetes részét jelöli. Értelmeztük ezzel az $f_j : Y \to \mathbf{R} \quad (j = 1, 2)$ funkcionálokat. Az $f = f_1 + \imath f_2$ felbontás alapján

$$\imath f_1(x) - f_2(x) = \imath f(x) = f(\imath x) = f_1(\imath x) + \imath f_2(\imath x) \qquad (x \in Y).$$

Ezért $f_2(x) = -f_1(\imath x) \quad (x \in Y)$, azaz

$$f(x) = f_1(x) - \imath f_1(\imath x) \qquad (x \in X).$$

Továbbá az f linearitását figyelembe véve

$$f_1(y+\lambda x)+\imath f_2(y+\lambda x)=f(y+\lambda x)=f(y)+\lambda f(x)=$$

$$f_1(y)+\lambda f_1(x)+\imath(f_2(y)+\lambda f_2(x)) \qquad (\lambda\in\mathbf{C}, x,y\in Y),$$

amiből $\lambda\in\mathbf{R}$ esetén

$$f_j(y+\lambda x)=f_j(y)+\lambda f_j(x) \qquad (x,y\in Y, j=1,2)$$

következik. Ha tehát az $(X,\|.\|)$ teret, ill. az Y alteret mint $\mathbf{R}$ feletti normált teret, ill. alteret tekintjük, akkor az $f_j : Y\to\mathbf{R}$ $(j=1,2)$ funkcionálok lineárisak. Korlátosak is, hiszen

$$|f_j(x)|\le\sqrt{f_1^2(x)+f_2^2(x)}=|f(x)|\le\|f\|\cdot\|x\| \qquad (x\in Y, j=1,2).$$

Ez azt is jelenti egyúttal, hogy pl. $\|f_1\|\le\|f\|$. Sőt, $\|f_1\|=\|f\|$, ui. bármely $x\in Y$, $f(x)\ne 0$ esetén $f(x)=re^{\imath\alpha}$ (alkalmas $r>0$, $\alpha\in(-\pi,\pi]$ paraméterekkel). Következésképpen

$$|f(x)|=r=e^{-\imath\alpha}f(x)=f(e^{-\imath\alpha}x)=f_1(e^{-\imath\alpha}x)\le\|f_1\|\cdot\|e^{-\imath\alpha}x\|=\|f_1\|\cdot\|x\|,$$

azaz $\|f\|\le\|f_1\|$ is igaz, így valóban $\|f\|=\|f_1\|$.

Ezért, ha a *Hahn-Banach*-tétel igaz a $\mathbf{K}=\mathbf{R}$ esetben, akkor van olyan $F_1 : X\to\mathbf{R}$, $F_1\in X^*$ funkcionál, amelyre $f_1\subset F_1$. Más szóval F_1-re a következők teljesülnek:

$$F_1(x+\lambda y)=F_1(x)+\lambda F_1(y)\ ,\ F_1(t)=f_1(t) \qquad (x,y\in X, t\in Y, \lambda\in\mathbf{R})$$

és $|F_1(x)|\le\|f_1\|\cdot\|x\|$ $(x\in X)$.

Legyen

$$F(x):=F_1(x)-\imath F_1(\imath x) \qquad (x\in X).$$

Ekkor F_1 ($\mathbf{R}$ feletti) linearitása miatt

$$F(x+\lambda y)=F_1(x+\lambda y)-\imath F_1\left(\imath(x+\lambda y)\right)=F_1(x)+\lambda F_1(y)-\imath F_1(\imath x)-\lambda\imath F_1(\imath y)=$$

$$(F_1(x)-\imath F_1(\imath x))+\lambda\left(F_1(y)-\imath F_1(\imath y)\right)=F(x)+\lambda F(y) \qquad (x,y\in X, \lambda\in\mathbf{R}).$$

Ezt felhasználva viszont $\lambda=a+\imath b\in\mathbf{C}$ $(a,b\in\mathbf{R})$, $x,y\in Y$ esetén azt mondhatjuk, hogy

$$F(x+\lambda y)=F(x+ay+\imath by)=F(x)+aF(y)+bF(\imath y)=$$

$$F(x)+aF(y)+bF_1(\imath y)-\imath bF_1(-y)=F(x)+aF(y)+bF_1(\imath y)+\imath bF_1(y)=$$

$$F(x) + aF(y) + \imath b\,(F_1(y) - \imath F_1(\imath y)) = F(x) + aF(y) + \imath bF(y) = F(x) + \lambda F(y).$$

Ezzel beláttuk, hogy $F : X \to \mathbf{C}$ lineáris. Ha $y \in Y$, akkor $\imath y \in Y$ és

$$F(y) = F_1(y) - \imath F_1(\imath y) = f_1(y) - \imath f_1(\imath y) = f(y),$$

azaz $F_{|_Y} = f$. Az F funkcionál korlátos is, ui.

$$|F(x)| \leq |F_1(x)| + |F_1(\imath x)| \leq \|F_1\|(\|x\| + \|\imath x\|) = 2\|F_1\|\cdot\|x\| \qquad (x \in X).$$

Az $\|F\| = \|F_1\|$ egyenlőséget ugyanazzal a gondolatmenettel kapjuk, amivel $\|f\| = \|f_1\|$-hoz jutottunk. Így

$$\|F\| = \|F_1\| = \|f_1\| = \|f\|,$$

azaz $f \subset F$. ■

A Hahn-Banach-tétel bizonyítása. Tegyük fel, hogy $(X, \|.\|)$ szeparábilis és $\mathbf{K} = \mathbf{R}$. Ekkor megadható egy $e_n \in X \quad (n \in \mathcal{N})$ zárt rendszer, ahol $\mathcal{N} = \mathbf{N}$ vagy egy alkalmas $N \in \mathbf{N}$ mellett $\mathcal{N} = \{1, ..., N\}$. Ha $e_n \in Y \quad (n \in \mathcal{N})$, akkor Y nyilván sűrű X-ben és alkalmazható az 6.5.1. Lemma. Egyébként valamilyen $\mathcal{N} \ni n$-re $e_n \notin Y_0 := Y$. Írjunk ekkor a 6.5.2. Lemmában z helyébe e_n-et és legyen ugyanott $F_0 := f$. Így a jelzett lemma szerint kapunk egy Y_1 alteret és egy $F_1 \in Y_1^*$ funkcionált úgy, hogy $Y_0 \subset Y_1$ és $F_0 \subset F_1$. Ha van olyan $n \in \mathcal{N}$, hogy $e_n \notin Y_1$, akkor a 6.5.2. Lemmából az előzőekhez hasonlóan adódik $Y_2, F_2 \in Y_2^*$ úgy, hogy $Y_1 \subset Y_2$ és $F_1 \subset F_2$. Az eljárást folytatva az vagy véges sok lépés után befejeződik, amikor is egy $X_\infty \subset X$ alteret és egy $F_\infty \in X_\infty^*$ funkcionált kapunk úgy, hogy $f \subset F_\infty$, vagy előáll egy Y_n altér- és egy $F_n \in Y_n^* \quad (n \in \mathbf{N})$ funkcionálsorozat, amelyekre $Y_n \subset Y_{n+1}$, $F_n \subset F_{n+1} \quad (n \in \mathbf{N})$ teljesül. Legyen az utóbbi esetben $X_\infty := \bigcup_{n=0}^\infty Y_n$ (ami nyilván altér) és $F_\infty : X_\infty \to \mathbf{R}$ az a funkcionál, amelyre

$$F_\infty(x) := F_n(x) \qquad (x \in X_n, n \in \mathbf{N}).$$

Az F_∞ funkcionál értelmezése korrekt, mert $n, m \in \mathbf{N}$, $n < m$ esetén $X_n \subset X_m$, $F_n \subset F_m$, azaz $x \in X_n$ mellett $x \in X_m$ és $F_n(x) = F_m(x)$. Az F_∞ funkcionál nyilván lineáris, ill. $f = F_0 \subset F_n$ $(n \in \mathbf{N})$ miatt $\|f\| = \|F_n\|$, azaz

$$|F_\infty(x)| \leq \|F_n\|\cdot\|x\| = \|f\|\cdot\|x\| \qquad (x \in X_n, n \in \mathbf{N}).$$

Így $\|F_\infty\| \leq \|f\|$. Továbbá $x \in Y$ esetén $F_\infty(x) = F_0(x) = f(x)$, tehát $f \subset F_\infty$.

Világos, hogy $e_n \in X_\infty \quad (n \in \mathcal{N})$, ezért X_∞ sűrű altér X-ben. Az 6.5.1. Lemma szerint van tehát olyan $F \in X^*$, amelyre $F_\infty \subset F$, azaz $\|F\| = \|F_\infty\| = \|f\|$ és $F(x) = F_\infty(x) = f(x) \quad (x \in Y)$. Mindez azt jelenti, hogy $f \subset F$. A 6.5.3. Lemmát is figyelembe véve, ezzel a szeparábilis esetben a tételt bebizonyítottuk. ■

6.5.1. Megjegyzések.

i) Ha a szóban forgó normált térről nem tudjuk, hogy szeparábilis, akkor a *Hahn-Banach*-tétel bizonyításában az ún. *Zorn-lemma* alkalmazható:

tegyük fel, hogy $\mathcal{A} \neq \emptyset$, $\leq$ pedig rendezés $\mathcal{A}$-ban. Ha az $\mathcal{A}$ minden teljesen rendezett részhalmaza felülről korlátos, akkor $\mathcal{A}$-nak van maximuma.

ii) Legyen pl. $\mathcal{A} := \{(U, g) : U \subset X$ altér, $g \in U^*, f \subset g\}$ és definiáljuk az alábbi (nyilván) rendezést $\mathcal{A}$-ban: ha $(U, g), (V, h) \in \mathcal{A}$, akkor

$$(U, g) \leq (V, h) \iff U \subset V \text{ és } g \subset h.$$

Ha $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ a most definiált értelemben teljesen rendezett, akkor bármely $\mathcal{B}$-beli (U, g), (V, h) esetén vagy $U \subset V$ és $g \subset h$, vagy pedig $V \subset U$ és $h \subset g$. Ez azt jelenti, hogy az $A := \bigcup_{(U,g)\in\mathcal{B}} U$ halmaz altér, az $s(x) := g(x) \quad (x \in U, (U, g) \in \mathcal{B})$ definíció pedig korrekt módon értelmez egy $s : A \to \mathbf{K}$ funkcionált. Az s-ről a *Hahn-Banach*-tétel fenti bizonyításában szereplő F_∞-ről mondottakhoz hasonlóan látható be, hogy $s \in A^*$ és bármely $(U, g) \in \mathcal{B}$ választással $g \subset s$. Mivel minden, az előbb említett (U, g) esetén nyilván $U \subset A$, ezért $(U, g) \leq (A, s)$. Tehát (A, s) felső korlátja $\mathcal{B}$-nek. Ezért a *Zorn*-lemma szerint létezik $\mathcal{A}$-nak maximuma, azaz olyan $(Z, F) \in \mathcal{A}$, hogy ha $(U, g) \in \mathcal{A}$ és (Z, F) a $\leq$ rendezés értelmében összehasonlítható (U, g)-vel, akkor $(U, g) \leq (Z, F)$. Mutassuk meg, hogy $Z = X$. Különben ui. lenne olyan $z \in X$ elem, amelyre $z \notin Z$ igaz. A 6.5.2. Lemma alapján viszont ekkor a Z altér egydimenziós Y_1 bővítéséhez megadható lenne egy $F_1 \in Y_1^*$ funkcionál úgy, hogy $F \subset F_1$. Mivel $f \subset F$, ezért $f \subset F_1$, azaz $(Y_1, F_1) \in \mathcal{A}$ és $(Z, F) \leq (Y_1, F_1)$. Ugyanakkor Z valódi altere Y_1-nek, ezért $(Z, F) \neq (Y_1, F_1)$, azaz nem lehet igaz, hogy $(Y, F_1) \leq (Z, F)$. Mindez viszont ellentmond annak, hogy (Z, F) maximális elem $\mathcal{A}$-ban. Így $Z = X$, tehát $F \in X^*$ és $f \subset F$.

iii) Megemlítjük a *Hahn-Banach*-tétel egy általánosítását: *legyen X lineáris tér $\mathbf{K}$ felett, $Y \subset X$ altér, $f : Y \to \mathbf{K}$ pedig olyan lineáris leképezés, amelyre $|f(t)| \leq p(t) \quad (t \in Y)$ igaz, ahol a $p : X \to [0, +\infty)$ függvényre $p(x + y) \leq p(x) + p(y) \quad (x, y \in X)$ és $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$ $(x \in X, \lambda \in \mathbf{K})$ teljesül. Ekkor van olyan $F : X \to \mathbf{K}$ lineáris leképezés, hogy $F(t) = f(t)$ $(t \in Y)$ és $|F(x)| \leq p(x) \quad (x \in X)$.*

iv) Világos, hogy ha iii)-ban $\|.\|$ norma X-en, akkor tetszőleges $\alpha \geq 0$ számmal a $p(x) := \alpha\|x\| \ (x \in X)$ függvény rendelkezik az előbb említett tulajdonságokkal. Ha ezzel a p-vel $|f(t)| \leq p(t) \ (t \in Y)$ is fennáll, akkor nyilván $\|f\| \leq \alpha$, azaz a iii)-beli F kiterjesztésre is $\|F\| \leq \alpha$. Speciálisan az $\alpha := \|f\|$ választással $\|F\| \leq \|f\|$, azaz $\|F\| = \|f\| : \ f \subset F$.

v) Az $f \subset F$ kiterjesztés egyértelműségét illetően a következőket mondhatjuk. A 6.5.1. Lemma bizonyításából az is kiderül, hogy ha a szóban forgó $Y \subset X$ altér mindenütt sűrű X-ben, akkor egyértelműen létezik olyan $F \in X^*$, hogy $f \subset F$. Hasonlóan, ha a 6.5.2. Lemma bizonyításában jelzett (3), (4) egyenlőtlenségeknek egyetlen m szám tesz eleget, azaz (az ottani jelölésekkel)

$$m_0 := \sup\{f(x) - \|f\| \cdot \|x - z\| : x \in Y\} =$$

$$m_1 := \inf\{-f(t) + \|f\| \cdot \|t + z\| : t \in Y\},$$

akkor a kiterjesztés egyértelmű, egyébként végtelen sok $F \in X^*$ funkcionállal (minden $m \in [m_0, m_1]$ mellett) lesz $f \subset F$.

Az alábbiakban a *Hahn-Banach*-tétel néhány következményét tárgyaljuk.

6.5.1. Következmény. *Legyen $(X, \|.\|)$ normált tér. Ekkor bármely $0 \neq x \in X$ elemhez van olyan $F \in X^*$ funkcionál, amelyre $\|F\| = 1$ és $F(x) = \|x\|$ igaz.*

Bizonyítás. Tekintsük az $Y := \{cx \in X : c \in \mathbf{K}\}$ (nyilván) alteret és az

$$f(cx) := c\|x\| \qquad (c \in \mathbf{K})$$

funkcionált. Világos, hogy $f \in Y^*$ és $|f(cx)| = |c|\cdot \|x\| = \|cx\| \quad (c \in \mathbf{K})$ miatt $\|f\| = 1$, ill. $f(x) = f(1\cdot x) = \|x\|$. Következésképpen minden olyan $F \in X^*$ megfelelő, amelyre $f \subset F$. ■

6.5.2. Következmény. *Az $(X_i, \|.\|_i) \quad (i = 1, 2)$ normált terekről tegyük fel, hogy $X_1 \neq \{0\}$ és az $(L(X_1, X_2), \|.\|)$ operátor-tér teljes. Ekkor az $(X_2, \|.\|_2)$ tér is teljes.*

Bizonyítás. Az előbbi megjegyzés szerint van olyan $f \in X^*$ funkcionál, amely nem azonosan nulla. Tekintsük valamely $y \in X_2$ elemmel az $A_y x := f(x)y \quad (x \in X_1)$ operátort. Az f linearitása miatt A_y nyilván lineáris. Továbbá

$$\|A_y x\|_2 = \|f(x)y\|_2 = |f(x)|\cdot \|y\|_2 \leq \|f\|\cdot \|y\|_2\cdot \|x\|_1 \qquad (x \in X_1).$$

Ez azt jelenti, hogy $A_y \in L(X_1, X_2)$ és $\|A_y\| \leq \|f\|\cdot \|y\|_2$.

Tegyük fel, hogy az $y_n \in X_2 \quad (n \in \mathbf{N})$ sorozat *Cauchy*-sorozat, azaz

$$\|y_n - y_m\|_2 \to 0 \qquad (n, m \to \infty).$$

Ekkor

$$\|A_{y_n} - A_{y_m}\| = \|A_{y_n - y_m}\| \leq \|f\|\cdot \|y_n - y_m\|_2 \to 0 \quad (n, m \to \infty),$$

tehát (A_{y_n}) *Cauchy*-sorozat az $(L(X_1, X_2).\|.\|)$ operátor-térben. A feltétel miatt ezért van olyan $A \in L(X_1, X_2)$ operátor, amellyel $\|A_{y_n} - A\| \to 0 \quad (n \to \infty)$. Ekkor viszont bármely $x \in X_1$ elemre $A_{y_n} x \to Ax \quad (n \to \infty)$ is igaz. Ha itt x olyan, amelyre $f(x) \neq 0$, akkor az

$$y_n = \frac{1}{f(x)} f(x) y_n = \frac{1}{f(x)} A_{y_n} x \qquad (n \in \mathbf{N})$$

egyenlőség alapján az (y_n) sorozat is konvergens. ■

6.5.2. Megjegyzések.

i) Ha tehát $X \neq \{0\}$, akkor a 6.5.1. Következmény miatt van olyan X^*-beli funkcionál, amely nem azonosan nulla. Ugyanez más megfogalmazásban: bármely $x, y \in X$, $x \neq y$ esetén van olyan $F \in X^*$, amelyre $F(x) \neq F(y)$. Valóban, a 6.5.1. Következményt az $x - y \neq 0$ elemre alkalmazva kapunk olyan $X^* \ni F$-et, amelyre $F(x - y) = F(x) - F(y) = \|x - \|y\| > 0$.

ii) Emlékeztetünk a 6.3.4. Tételre: ha $(X_2, \|.\|_2)$ *Banach*-tér, akkor az $(L(X_1, X_2), \|.\|)$ operátor-tér teljes. A 6.5.2. Következmény szerint (egy partikuláris esettől eltekintve) ez a tétel meg is fordítható: $(L(X_1, X_2), \|.\|)$ akkor és csak akkor teljes, ha $(X_2, \|.\|)$ *Banach*-tér.

6.5.3. Következmény. *Legyen $(X, \|.\|)$ normált tér, $Y \subset X$ valódi zárt altér, $z \in X \setminus Y$. Ekkor van olyan $F \in X^*$ funkcionál, amelyre az alábbiak teljesülnek: $F(y) = 0 \quad (y \in Y)$, $F(z) = 1$ és $\|F\| = 1/\rho(z, Y)$.*

Bizonyítás. Tudjuk, hogy $\rho(z, Y) > 0$. Legyen

$$L := \{cz + y \in X : y \in Y, c \in \mathbf{K}\}.$$

Ekkor $L \subset X$ altér, minden $l \in L$ egyértelműen állítható elő $l = cz + y$ alakban alkalmas $y \in Y, c \in \mathbf{K}$ elemekkel, az $f(cz + y) := c \quad (cz + y \in L)$ funkcionál pedig lineáris. Korlátos is, ui.

$$|f(cz + y)| = |c| \leq \frac{1}{\rho(z, Y)} \|cz + y\| \qquad (cz + y \in Y).$$

Ez utóbbi indoklásához nyilván feltehető, hogy $c \neq 0$. Ekkor

$$\|cz + y\| = |c| \cdot \|z + y/c\| = |c| \cdot \|z - (-y/c)\|$$

alapján azt kell meggondolni, hogy $\rho(z, Y) \leq \|z - (-y/c)\|$, ami $-y/c \in Y \quad (y \in Y)$ miatt nyilvánvaló. Ezért $\|f\| \leq 1/\rho(z, Y)$.

Lássuk be, hogy $\|f\| = 1/\rho(z, Y)$. Valóban, ha $y_n \in Y \quad (n \in \mathbf{N})$ olyan sorozat, amelyre $\lim(\|z - y_n\|) = \rho(z, Y)$, akkor

$$|f(-z + y_n)| = 1 \leq \|f\| \cdot \|z - y_n\| \to \|f\| \cdot \rho(z, Y) \qquad (n \to \infty),$$

azaz $\|f\| \geq 1/\rho(z, Y)$.

Mivel $f(z) = f(1 \cdot z + 0) = 1$, $f(y) = f(0 \cdot z + y) = 0 \quad (y \in Y)$, ezért bármely $F \in X^*$, $f \subset F$ olyan funkcionál, amely a szóban forgó állításban szerepel. ■

6.5.3. Megjegyzés.

Emeljük ki külön is, hogy bármely valódi zárt $Y \subset X$ altér esetén van olyan $F \in X^*$ funkcionál, amely nem azonosan nulla és $F(y) = 0 \quad (y \in Y)$.

Tegyük fel, hogy adott $(X_i, \|.\|_i) \ (i = 1, 2)$ normált terek esetén $A \in L(X_1, X_2)$ és legyen $f \in X_2^*$. Ekkor

$$A^* f := f \circ A \in X_1^*.$$

Valóban, A és f linearitása miatt $A^* f \in \mathcal{L}(X_1, \mathbf{K})$ nyilvánvaló. Ha $x \in X_1$, akkor

$$|A^* f(x)| = |f(Ax)| \leq \|f\| \cdot \|Ax\|_2 \leq \|f\| \cdot \|A\| \cdot \|x\|_1,$$

amiből $A^* f \in X_1^*$ és egyúttal $\|A^* f\| \leq \|A\| \cdot \|f\|$ következik. (Felhívjuk a figyelmet arra, hogy az utolsó becslésben háromféle norma szerepel, mindegyiket $\|.\|$-val jelöltük.)

Ha $f, g \in X_2^*$, $\mu, \lambda \in \mathbf{K}$, akkor nyilván $A^*(\mu f + \lambda g) = \mu A^* f + \lambda A^* g$, azaz az

$$X_2^* \ni f \mapsto A^* f \in X_1^*$$

leképezés lineáris: $A^* \in \mathcal{L}(X_2^*, X_1^*)$. Sőt, az előző becslés miatt $A^* \in L(X_2^*, X_1^*)$ és $\|A^*\| \le \|A\|$.

6.5.4. Következmény. *Tetszőleges* $(X_i, \|.\|_i)$ $(i = 1, 2)$ *normált terek és* $A \in L(X_1, X_2)$ *esetén* $A^* \in L(X_2^*, X_1^*)$ *és* $\|A^*\| = \|A\|$.

Bizonyítás. Azt kell már csak belátnunk, hogy $\|A\| \le \|A^*\|$. Legyen ehhez $x \in X_1$ olyan, hogy $0 \ne Ax \in X_2$ (nyilván feltehető, hogy A nem az azonosan nulla operátor, különben az állításunk triviális) és $f \in X_2^*$ olyan funkcionál (ld. 6.5.1. Következmény), amelyre $\|f\| = 1$, $f(Ax) = \|Ax\|_2$. Ekkor

$$\|Ax\|_2 = |f(Ax)| = |A^* f(x)| \le \|A^* f\| \cdot \|x\|_1 \le \|A^*\| \cdot \|f\| \cdot \|x\|_1 = \|A^*\| \cdot \|x\|_1 \qquad (x \in X_1),$$

azaz valóban $\|A\| \le \|A^*\|$. ∎

Az $A^* \in L(X_2^*, X_1^*)$ korlátos lineáris operátort az $A \in L(X_1, X_2)$ operátor *adjungáltjának* nevezzük. Vizsgáljuk meg az alábbi speciális eseteket.

1^o Legyen $0 < n, m \in \mathbf{N}, (X_1, \|.\|_1) := (\mathbf{K}^n, \|.\|_1), (X_2, \|.\|_2) := (\mathbf{K}^m, \|.\|_2)$ valamilyen $\mathbf{K}^n$-beli $\|.\|_1$, ill. $\mathbf{K}^m$-beli $\|.\|_2$ vektornormával. Ha $\mathbf{A} = (a_{ik})_{i=1,k=1}^{m,n} \in \mathbf{K}^{m \times n}$, akkor tekintsük az

$$Ax := \mathbf{A}x \qquad (x \in X_1)$$

definícióval értelmezett $A : X_1 \to X_2$ operátort, amelyre $A \in L(X_1, X_2)$ (ld. 6.3.2. vi) megjegyzés). A most idézett 6.3.2. vi) megjegyzést az $m := 1$, ill. az $n := 1$ esetben alkalmazva azt kapjuk, hogy X_1^* izomorf X_1-gyel, X_2^* pedig izomorf X_2-vel. Ennek alapján könnyű meggondolni, hogy $L(X_2^*, X_1^*)$ izomorf $L(X_2, X_1)$-gyel és ebben az értelemben az előbbi A operátor esetén A^* azonosítható az $\mathbf{A}^* := (\overline{a_{ki}})_{k=1,i=1}^{n,m} \in \mathbf{K}^{n \times m}$ *adjungált mátrixszal.*

2^o Ha $(X, \langle , \rangle)$ *Hilbert*-tér, akkor (ld. 6.4.1. iii) megjegyzés) X^* izomorf és izometrikus X-szel. Legyen $A \in L(X, X)$, ekkor $A^* \in L(X^*, X^*)$, ahol tehát $f \in X^*$ esetén $A^* f \in X^*$. A 6.4.1. Tétel szerint egyértelműen megadhatók olyan $a, b \in X$ elemek, amelyekkel $f(x) = \langle x, a \rangle$, $A^* f(x) = \langle x, b \rangle$ $(x \in X)$. Viszont az $A^* f$ funkcionál értelmezése alapján

$$A^* f(x) = f(Ax) = \langle Ax, a \rangle \qquad (x \in X),$$

azaz $\langle Ax, a \rangle = \langle x, b \rangle$ $(x \in X)$. Legyen $B_A(a) := b$, ezzel definiáltunk egy $B_A : X \to X$ (nyilván lineáris) operátort, amellyel az előbbiek a következőképpen írhatók:

$$A^* f(x) = \langle Ax, a \rangle = \langle x, B_A a \rangle \qquad (x \in X).$$

Mivel a 6.4.1. Tétel alapján

$$\|B_A a\| = \|b\| = \|A^* f\| \le \|A^*\| \cdot \|f\| = \|A^*\| \cdot \|a\| \qquad (a \in X),$$

ezért $B_A \in L(X,X)$ és $\|B_A\| \leq \|A^*\|$. Az

$$|A^*f(x)| = |\langle x, B_A a\rangle| \leq \|x\|\cdot\|B_A a\| \leq \|B_A\|\cdot\|a\|\cdot\|x\| = \|B_A\|\cdot\|f\|\cdot\|x\| \qquad (x \in X, f \in X^*)$$

becslésből viszont az következik, hogy $\|A^*f\| \leq \|B_A\|\cdot\|f\|$, azaz $\|A^*\| \leq \|B_A\|$. Azt kaptuk tehát, hogy $\|A^*\| = \|B_A\|$.

A fentiek alapján világos, hogy az $L(X^*,X^*) \ni A^* \mapsto B_A \in L(X,X)$ megfeleltetés izomorfia és izometria. Ebben az értelemben A^*-ot azonosíthatjuk B_A-val: $A^* \equiv B_A$, az $L(X^*,X^*)$ teret pedig $L(X,X)$-szel: $L(X^*,X^*) \equiv L(X,X)$. Ezt figyelembe véve azt írhatjuk, hogy

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^*y\rangle \qquad (x, y \in X, A \in L(X,X)),$$

ill. azt mondjuk, hogy az $A \in L(X,X)$ operátor *önadjungált,* ha $A^* = A$. Ez utóbbi esetben tehát bármely $x, y \in X$ esetén $\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle$.

Legyen pl. $L \subset X$ zárt altér, ekkor a P_L projekció (ld. 5.3.3. iv) megjegyzés) önadjungált. Ui. bármely $x, y \in X$ esetén az $x = P_L x + \tilde{x}$, $y = P_L y + \tilde{y}$ $\quad (\tilde{x}, \tilde{y} \in L^\perp)$ felbontás (ld. 5.3.3. Tétel) alapján

$$\langle P_L x, y\rangle = \langle P_L x, P_L y + \tilde{y}\rangle = \langle P_L x, P_L y\rangle = \langle x - \tilde{x}, P_L y\rangle = \langle x, P_L y\rangle,$$

hiszen $P_L x, P_L y \in L$ miatt $\langle P_L x, \tilde{y}\rangle = \langle \tilde{x}, P_L y\rangle = 0$. Továbbá $L \neq \{0\}$ esetén $\|P_L\| = 1$, mivel bármely $0 \neq x \in L$ elemre $\|P_L x\| = \|x\| \leq \|P_L\|\cdot\|x\|$ miatt egyrészt $\|P_L\| \geq 1$, másrészt (ld. 6.3.2. iii) megjegyzés) $\|P_L\| \leq 1$. (Ha $L = \{0\}$, akkor $P_L \equiv 0$ miatt nyilván $\|P_L\| = 0$.)

3^o Egy $(X, \|.\|)$ normált tér X^{**} *második duálisát* értelemszerűen az $X^{**} := (X^*)^*$ definícióval értelmezzük. Ha $x \in X$, akkor a

$$\Phi_x(f) := \overline{f(x)} \qquad (f \in X^*)$$

előírással értelmezett $\Phi_x : X^* \to \mathbf{K}$ leképezés (funkcionál) nyilván lineáris: $\Phi_x \in \mathcal{L}(X^*, \mathbf{K})$. Mivel

$$|\Phi_x(f)| = |f(x)| \leq \|f\|\cdot\|x\| \qquad (f \in X^*, x \in X),$$

ezért $\Phi_x \in L(X^*, \mathbf{K}) = X^{**}$ is igaz, ill. $\|\Phi_x\| \leq \|x\|$.

6.5.5. Következmény. *Bármely $x \in X$ esetén $\|\Phi_x\| = \|x\|$.*

Bizonyítás. Azt kell megmutatnunk, hogy $\|x\| \leq \|\Phi_x\| \quad (x \in X)$. Mivel ez $x = 0$ esetén triviális, ezért feltehető, hogy $x \neq 0$. Legyen (ld. 6.5.1. Következmény) $f \in X^*$ olyan, hogy $\|f\| = 1$ és $f(x) = \|x\|$. Ekkor

$$\Phi_x(f) = \overline{f(x)} = \|x\| \leq \|\Phi_x\|\cdot\|f\| = \|\Phi_x\|,$$

azaz valóban $\|x\| \leq \|\Phi_x\|$. ■

6.5.4. Megjegyzések.

i) Az előbbieket szem előtt tartva legyen

$$\mathcal{X} := \{\Phi_x \in X^{**} : x \in X\}.$$

Nyilvánvaló, hogy $\mathcal{X}$ altere X^{**}-nak, ill. az $X \ni x \mapsto \varphi(x) := \Phi_x \in \mathcal{X}$ megfeleltetés izomorfia és izometria. Azt mondjuk, hogy az $(X, \|.\|)$ tér *reflexív,* ha $\mathcal{X} = X^{**}$.

ii) Az eddigiek szerint azt kapjuk, hogy bármely *Hilbert*-tér, ill. tetszőleges $1 < p < +\infty$ esetén az $(\ell_p, \|.\|_p)$ terek reflexívek (ld. 6.4.1. iii) megjegyzés, ill. 6.4.2. Tétel). Ugyanakkor (ld. 6.4.2. i) megjegyzés) az $(\ell_1, \|.\|_1)$, $(\ell_\infty, \|.\|_\infty)$ terek nem reflexívek.

iii) Reflexív $(X, \|.\|)$ tér esetén tehát X^{**} izomorf és izometrikus X-szel, ebben az értelemben $X = X^{**}$. Mivel a duális terek *Banach*-terek, ezért minden reflexív tér egyúttal *Banach*-tér. Felhívjuk azonban a figyelmet arra, hogy a most mondottakban az is „benne van", hogy az említett izomorfiát és izometriát az i) megjegyzésben értelmezett φ leképezés valósítja meg. Konstruáltak ui. olyan $(X, \|.\|)$ teret, hogy X^{**} ugyan izomorf és izometrikus X-szel, de φ *nem* izomorfia és izometria. Következésképpen $(X, \|.\|)$ nem reflexív.

iv) Normált terek $X^{***}, X^{****}, \ldots$ *harmadik, negyedik, ... duálisa* is értelemszerűen definiálható, ill. felvethető ezek egymáshoz való viszonya. Pl. mutassuk meg, hogy *az* $(X, \|.\|)$ *Banach-tér akkor és csak akkor reflexív, ha a duálisa is reflexív.* Ha ui. $g \in X^*$ esetén $\Psi_g \in X^{***}$ az a funkcionál, amelyre

$$\Psi_g(F) := \overline{F(g)} \qquad (F \in X^{**})$$

és $\psi(g) := \Psi_g$, akkor azt kell megmutatnunk (ld. i)), hogy

$$\mathcal{R}_\varphi = X^{**} \iff \mathcal{R}_\psi = X^{***}.$$

Ehhez tegyük fel először, hogy $\mathcal{R}_\varphi = X^{**}$ és legyen $\Psi \in X^{***}$. Ha $g := \Psi \circ \varphi$, azaz $g(x) := \Psi(\varphi(x)) \quad (x \in X)$, akkor g nyilván lineáris és

$$|g(x)| \leq \|\Psi\| \cdot \|\varphi(x)\| = \|\Psi\| \cdot \|x\| \qquad (x \in X)$$

miatt $g \in X^*$. Ugyanakkor $\Psi_g(F) = \overline{F(g)}$, ahol $F \in X^{**}$, azaz alkalmas $x \in X$ esetén (ld. i)) $F = \varphi(x) = \Phi_x$. Tehát

$$\Psi_g(F) = \overline{\Phi_x(g)} = g(x) = \Psi(\varphi(x)) = \Psi(F),$$

amiből $\Psi_g = \Psi$ már következik. Ezért $\mathcal{R}_\psi = X^{***}$, így a duális tér valóban reflexív.

Fordítva, ha a duális tér reflexív: $\mathcal{R}_\psi = X^{***}$, akkor indirekt módon gondolkodva tegyük fel, hogy $\mathcal{R}_\varphi \neq X^{**}$. Lássuk be először, hogy $\mathcal{X} = \mathcal{R}_\varphi$ zárt. Ha ui. $\Phi_{x_n} \in \mathcal{X} \quad (n \in \mathbf{N})$ konvergens sorozat: $\|\Phi_{x_n} - \Phi\| \to 0 \quad (n \to \infty)$ valamilyen $\Phi \in X^{**}$ funkcionállal, akkor

$$\|x_n - x_m\| = \|\Phi_{x_n} - \Phi_{x_m}\| \to 0 \qquad (n, m \to \infty)$$

alapján az $x_n \in X \quad (n \in \mathbf{N})$ sorozat *Cauchy*-sorozat, így az $(X, \|.\|)$ tér teljessége miatt konvergens: $x := \lim(x_n)$. Innen viszont

$$\|\Phi_{x_n} - \Phi_x\| = \|x_n - x\| \to 0 \qquad (n \to \infty),$$

azaz $\Phi_x = \lim(\Phi_{x_n}) = \Phi$, tehát $\Phi \in \mathcal{X}$ következik. Azt kaptuk, hogy $\mathcal{X}$ valódi zárt altere X^{**}-nak. A 6.5.3. Megjegyzés szerint ezért van olyan $0 \neq \Theta \in X^{***}$, amelyre $\Theta_{|\mathcal{X}} \equiv 0$. Az $\mathcal{R}_\psi = X^{***}$ feltétel miatt alkalmas $g \in X^*$ esetén $\Theta = \Psi_g$, így

$$0 = \Theta(\Phi_x) = \Psi_g(\Phi_x) = \overline{\Phi_x(g)} = g(x) \qquad (x \in X).$$

Ezért $g \equiv 0$, amiből $\Theta = \Psi_g \equiv 0$ következik, ami nem igaz. Következésképpen $\mathcal{R}_\varphi = X^{**}$, azaz az $(X, \|.\|)$ tér reflexív.

v) Az előbbi megjegyzésből már egyszerűen következik, hogy ha az $(X, \|.\|)$ *Banach*-tér nem reflexív, akkor (izomorfia és izometria értelmében) az

$$X \subset X^{**} \subset X^{****} \subset ..., \text{ ill. } X^* \subset X^{***} \subset X^{*****} \subset ...$$

tartalmazások valamennyien szigorú tartalmazások:

$$X \neq X^{**} \neq X^{****} \neq ..., \text{ ill. } X^* \neq X^{***} \neq X^{*****} \neq ...$$

Ha ui. pl. $X^{***} = X^{*****}$, akkor ez azt jelentené, hogy X^{***} reflexív, azaz X^{**} is az. Innen viszont X^* és így X reflexivitása is következne (*A. E. Plessner*).

6.5.6. Következmény. *Bármely $(X, \|.\|)$ normált tér és $S \subset X$ részhalmaz esetén S akkor és csak akkor zárt rendszer, ha az alábbi ekvivalencia igaz: tetszőleges $f \in X^*$ funkcionálra $f = 0 \iff f_{|S} = 0$.*

Bizonyítás. Tegyük fel először, hogy S zárt rendszer és $f_{|S} = 0$. Ekkor f linearitása miatt nyilván $f_{|\mathcal{L}[S]} = 0$ is igaz. Innen viszont f folytonosságát is figyelembe véve $f_{|\overline{\mathcal{L}[S]}} = 0$, azaz $\overline{\mathcal{L}[S]} = X$ szerint $f = 0$ következik.

Ha S nem zárt rendszer, akkor az $Y := \overline{\mathcal{L}[S]}$ $(\neq X)$ választással a 6.5.3. Megjegyzés miatt egy alkalmas $f \in X^*$ funkcionállal $f_{|Y} = 0$, de $f \neq 0$. Mivel $f_{|S} = 0$, ezért - feltéve a tételben említett ekvivalencia fennállását - $f = 0$ következik, ellentétben az előbbi $f \neq 0$ tulajdonsággal. Ezért S zárt rendszer. ■

6.6. Erős konvergencia.

Tekintsük valamely $(X_i, \|.\|_i)$ $(i = 1, 2)$ normált terek esetén korlátos lineáris operátoroknak egy (T_n) sorozatát: $T_n \in L(X_1, X_2)$ $(n \in \mathbf{N})$. Azt mondjuk, hogy a (T_n) sorozat *erősen konvergens,* ha minden $x \in X_1$ esetén a helyettesítési értékek $(T_n x)$ sorozata konvergens. Világos, hogy ekkor minden $X_1 \ni x$-re $\sup_n \|T_n x\|_2 < +\infty$. Megmutatjuk, hogy (bizonyos feltételek mellett) ekkor az „erősebb" $\sup_n \|T_n\| < +\infty$ korlátosság is teljesül. Sőt, igaz a

6.6.1. Tétel (*az egyenletes korlátosság elve*)**.** *Legyenek adottak az* $(X_1, \|.\|_1)$, $(X_2, \|.\|_2)$ *normált terek és a* $T_\alpha \in L(X_1, X_2)$ $(\alpha \in \Gamma)$ *lineáris operátorok valamely* $\Gamma \neq \emptyset$ *(index)halmaz esetén. Ha az*

$$\{x \in X_1 : \sup_\alpha \|T_\alpha x\|_2 < +\infty\}$$

halmaz második kategóriájú, akkor $\sup_\alpha \|T_\alpha\| < +\infty$.

Bizonyítás. Legyen $x \in X_1$, $k \in \mathbf{N}$ esetén $p(x) := \sup_\alpha \|T_\alpha x\|_2$ és

$$\{p \leq k\} := \{x \in X_1 : p(x) \leq k\}.$$

Ekkor minden $k \in \mathbf{N}$ természetes számra $\{p \leq k\}$ zárt halmaz. Valóban, ha

$$z \in \{p > k\} := X_1 \setminus \{p \leq k\},$$

akkor $p(z) = \sup_\alpha \|T_\alpha z\|_2 > k$. Ezért van olyan $\alpha \in \Gamma$, hogy $\|T_\alpha z\|_2 > k$. Mivel T_α, $\|.\|_2$ folytonos leképezések, ezért egyúttal a z pont egy alkalmas $K(z)$ környezetének minden $t \in K(z)$ pontjára is teljesül a $\|T_\alpha t\|_2 > k$ egyenlőtlenség. Ez más szóval azt jelenti, hogy $K(z) \subset \{p > k\}$, azaz $\{p > k\}$ nyílt halmaz.

A feltétel szerint a

$$\{p < \infty\} := \{x \in X_1 : \sup_\alpha \|T_\alpha x\|_2 < +\infty\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{p \leq k\}$$

halmaz második kategóriájú (ld. 2.2.2. i) megjegyzés) ezért egy alkalmas $0 < k \in \mathbf{N}$ természetes számra a $\{p \leq k\}$ halmaz belseje nem üres. Létezik tehát olyan $y \in \{p \leq k\}$ elem és olyan $\delta > 0$ szám, hogy a $K_\delta(y)$ környezetre $K_\delta(y) \subset \{p \leq k\}$ igaz. Így tetszőleges $t \in X_1$, $\|t - y\|_1 < \delta$ esetén minden $\alpha \in \Gamma$ indexre $\|T_\alpha t\|_2 \leq k$.

Legyen most már $x \in X_1$ tetszőleges, ekkor nyilván van olyan $r > 0$, amellyel $y + rx \in K_\delta(y)$, azaz

$$\|T_\alpha(y + rx)\|_2 = \|T_\alpha y + rT_\alpha x\|_2 \leq k \qquad (\alpha \in \Gamma).$$

A háromszög-egyenlőtlenség miatt

$$\|T_\alpha y + rT_\alpha x\|_2 \geq r\|T_\alpha x\|_2 - \|T_\alpha y\|_2,$$

amiből $r\|T_\alpha x\|_2 \leq k + \|T_\alpha y\|_2 \leq 2k$ következik. Ha $x \neq 0$, akkor az

$$r := \frac{\delta}{2\|x\|_1}$$

választás megfelelő, amikor is

$$\|T_\alpha x\|_2 \leq \frac{4k}{\delta}\|x\|_1.$$

Ez utóbbi egyenlőtlenség nyilván igaz $x = 0$-ra is, hiszen ekkor $T_\alpha x = T_\alpha 0 = 0 \quad (\alpha \in \Gamma)$. Tehát $\|T_\alpha\| \leq 4k/\delta \quad (\alpha \in \Gamma)$, ami az állításunk bizonyítását jelenti. ■

Világos, hogy a $\{p < \infty\}$ halmaz második kategóriájú, ha valamilyen második kategóriájú $X \subset X_1$ halmazra $X \subset \{p < \infty\}$. Más szóval tehát az előbbi tétel alkalmazásához nem kell a „teljes” $\{p < \infty\}$ halmazt „felderítenünk”, elegendő a pontonkénti korlátosságot egy második kategóriájú X halmazon ellenőrizni.

A 2.2.2. *Baire*-féle kategória-tétel alapján az alábbi speciális esethez jutunk:

6.6.2. Tétel (*Banach-Steinhaus I*)**.** *Tegyük fel, hogy az* $(X_i, \|.\|_i) \quad (i = 1, 2)$ *normált terek közül* $(X_1, \|.\|_1)$ *Banach-tér, a* $T_n \in L(X_1, X_2) \quad (n \in \mathbf{N})$ *operátor-sorozat pedig erősen konvergens. Ekkor a* $T_n \quad (n \in \mathbf{N})$ *operátorok egyenletesen korlátosak, azaz* $\sup_n \|T_n\| < +\infty$ *és a* $Tx := \lim_n T_n x \quad (x \in X_1)$ *(pontonkénti) limesz-operátorra* $T \in L(X_1, X_2)$, $\|T\| \leq \liminf_n \|T_n\|$ *teljesül.*

Bizonyítás. Valóban, a feltétel szerint bármely $x \in X_1$ esetén a $(T_n x, n \in \mathbf{N})$ (helyettesítési értékekből álló) sorozat konvergens, így $\sup_n \|T_n x\|_2 < +\infty$. Ez azt jelenti, hogy $\{p < \infty\} = X_1$, ami (ld. *Baire*-tétel) második kategóriájú. Így a 6.6.1. Tétel következtében $\sup_n \|T_n\| < +\infty$. Speciálisan $M := \liminf_n \|T_n\| < +\infty$.

A T leképezés nyilván lineáris, ill. $\|Tx\|_2 = \lim_n \|T_n x\|_2 \quad (x \in X_1)$. Mivel $\|T_n x\|_2 \leq \|T_n\|\|x\|_1$ $(n \in \mathbf{N})$, ezért $\|Tx\|_2 \leq M\|x\|_1 \quad (x \in X_1)$, azaz az állításunk második fele is következik. ■

6.6.1. Megjegyzések.

i) Legyen pl. $(X, \|.\|)$ *szeparábilis Banach-tér,* $f_n \in X^* \quad (n \in \mathbf{N})$ *és tegyük fel, hogy az* (f_n) *sorozat korlátos:* $q := \sup_n \|f_n\| < +\infty$. *Ekkor van olyan* (ν_n) *indexsorozat és olyan* $f \in X^*$ *funkcionál, hogy* $f(x) = \lim(f_{\nu_n}(x)) \quad (x \in X)$.

Valóban, legyen $\{x_n \in X :\in \mathbf{N}\}$ mindenütt sűrű X-ben. Ekkor

$$|f_n(x_0)| \leq \|f_n\| \cdot \|x_0\| \leq q\|x_0\| \qquad (n \in \mathbf{N})$$

miatt az $(f_n(x_0))$ számsorozat korlátos. A *Bolzano-Weierstrass*-tétel miatt ezért van olyan $\nu^{(0)}$ indexsorozat, amellyel az $(f_{\nu_n^{(0)}}(x_0))$ részsorozat konvergens. Hasonlóan, az $(f_{\nu_n^{(0)}}(x_1))$ sorozat korlátossága alapján van olyan $\nu^{(1)}$ indexsorozat, hogy az $(f_{\nu^{(0)} \circ \nu_n^{(1)}}(x_1))$ részsorozat konvergens. Teljes indukcióval folytatva a konstrukciót minden $\mathbf{N} \ni i$-re kapunk olyan $\nu^{(i)}$ indexsorozatot, amellyel $(f_{\nu^{(0)} \circ \cdots \circ \nu_n^{(i)}}(x_i))$ konvergens. Legyen most már

$$\nu_n := \nu^{(0)} \circ \cdots \circ \nu_n^{(n)} \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Ekkor ν nyilván indexsorozat és bármely $n, i \in \mathbf{N}, i \leq n$ esetén

$$f_{\nu_n}(x_i) = f_{\nu^{(0)} \circ \cdots \circ \nu^{(i)}_{\mu_i(n)}}(x_i),$$

ahol $\mu_i(n) := \nu^{(i+1)} \circ \cdots \circ \nu_n^{(n)}$. Ezért $(f_{\nu^{(0)} \circ \cdots \circ \nu_n^{(i)}}(x_i))$ konvergenciája miatt tetszőleges $i \in \mathbf{N}$ esetén

$$f_{\nu_n}(x_i) - f_{\nu_m}(x_i) \to 0 \qquad (n, m \to \infty).$$

Ha $x \in X, \varepsilon > 0$, akkor legyen $i \in \mathbf{N}$ olyan, hogy $\|x - x_i\| < \varepsilon$. Legyen továbbá $N \in \mathbf{N}$ olyan küszöbindex, amellyel $|f_{\nu_n}(x_i) - f_{\nu_m}(x_i)| < \varepsilon \quad (N < n, m \in \mathbf{N})$, így ilyen n, m esetén

$$|f_{\nu_n}(x) - f_{\nu_m}(x)| \le$$

$$|f_{\nu_n}(x) - f_{\nu_m}(x_i)| + |f_{\nu_n}(x_i) - f_{\nu_m}(x_i)| + |f_{\nu_m}(x_i) - f_{\nu_m}(x)| \le (2q+1)\varepsilon.$$

Az $(f_{\nu_n}(x))$ számsorozat tehát *Cauchy*-sorozat, azaz konvergens. Definiáljuk az f funkcionált a következőképpen: $f(x) := \lim(f_{\nu_n}(x)) \quad (x \in X)$. A 6.6.2. Tétel alapján $f \in X^*$.

ii) Az i) megjegyzésben szereplő állítás nem más, mint (a bizonyítás közben is idézett) *Bolzano-Weierstrass*-tétel absztrakt változata funkcionálok sorozatára.

iii) Belátható, hogy a most említett absztrakt *Bolzano-Weierstrass*-tétel akkor is igaz, ha az $(X, \|.\|)$ tér nem szeparábilis, de reflexív.

A továbbiakban a bevezetőben megfogalmazott erős konvergencia-kérdésre adunk választ.

6.6.3. Tétel (*Banach-Steinhaus II*)**.** *Ha az* $(X_i, \|.\|_i) \quad (i = 1, 2)$ *terek mindegyike Banach-tér,* $T_n \in L(X_1, X_2) \quad (n \in \mathbf{N})$, *akkor a* (T_n) *sorozat erős konvergenciájának szükséges és elégséges feltétele az, hogy ez a konvergencia az* X_1 *tér egy* Y *zárt rendszerén fennálljon és* $\sup_n \|T_n\| < +\infty$ *legyen.*

Bizonyítás. A tételben megfogalmazott feltétel szükségessége részben triviális, részben pedig az egyenletes korlátosság imént bebizonyított speciális esetéből következik (ld. 6.6.2. Tétel).

Az elégségesség igazolásához először is jegyezzük meg, hogy a $T_n \quad (n \in \mathbf{N})$ operátorok linearitása miatt a $(T_n x)$ sorozat az Y rendszer $\mathcal{L}(Y)$ lineáris burkának minden elemére is konvergál. Mivel az $\mathcal{L}(Y)$ lineáris burok mindenütt sűrű X_1-ben, ezért tetszőleges $x \in X_1$ és $\varepsilon > 0$ esetén van olyan $z \in \mathcal{L}(Y)$, amellyel $\|x - z\|_1 < \varepsilon$. Továbbá, a háromszög-egyenlőtlenséget felhasználva minden $n, m \in \mathbf{N}$ természetes számra az adódik, hogy

$$\|T_n x - T_m x\|_2 \le \|T_n x - T_n z\|_2 + \|T_n z - T_m z\|_2 + \|T_m z - T_m x\|_2 \le$$

$$2q\|x - z\|_1 + \|T_n z - T_m z\|_2 \le 2q\varepsilon + \|T_n z - T_m z\|_2,$$

ahol $q := \sup_n \|T_n\|$. A $(T_k z)$ sorozat konvergens, ezért egy alkalmas $N \in \mathbf{N}$ „küszöbbel" $\|T_n z - T_m z\|_2 < \varepsilon$, hacsak $n, m > N$. Ilyen n, m-ekre tehát $\|T_n x - T_m x\|_2 \le (2q+1)\varepsilon$, azaz a $(T_n x)$ sorozat *Cauchy*-sorozat, így az $(X_1, \|.\|_1)$ tér teljessége miatt $(T_n x)$ konvergens is. ∎

Egy $T_n \in L(X_1, X_2) \quad (n \in \mathbf{N})$ operátorsorozat *konvergenciahalmazán* értsük az összes olyan $x \in X_1$ pont által meghatározott $X \subset X_1$ halmazt, amelyre a $(T_n x)$ sorozat konvergens. Ekkor az alábbi állítás igaz:

6.6.4. Tétel. *Ha az* $(X_i, \|.\|_i)$ $(i = 1, 2)$ *terek Banach-terek, akkor az* X *halmaz vagy első kategóriájú, vagy pedig* $X = X_1$.

Bizonyítás. Ui. a T_n-ek $(n \in \mathbf{N})$ linearitása miatt X nyilván altere az X_1 térnek. Ha X második kategóriájú, akkor (ld. az egyenletes korlátosság elvét) $\sup_n \|T_n\| < +\infty$. Megmutatjuk, hogy ekkor $\overline{X} = X_1$. Valóban, mivel X második kategóriájú, ezért van olyan $a \in X$ és $\delta > 0$, hogy $K_\delta(a) \subset \overline{X}$. Ha $z \in X_1$ tetszőleges, akkor egy alkalmas $r > 0$ számmal $y := a + rz \in K_\delta(a)$, amiből $y \in \overline{X}$ és így ($\overline{X}$ altér volta miatt)

$$z = (y - a)/r \in \overline{X}$$

következik. Tehát $\overline{X} = X_1$, azaz X zárt rendszer, ezért a *Banach-Steinhaus II*-tétel miatt $X = X_1$. ■

6.6.2. Megjegyzések.

i) Világos, hogy az előbbi okoskodás alapján egy második kategóriájú altér mindig sűrű altér.

ii) Ha tehát $(X_1, \|.\|_1)$ *Banach*-tér, $(X_2, \|.\|_2)$ normált tér és a $T_n \in L(X_1, X_2)$ $(n \in \mathbf{N})$ operátorsorozatra $\sup_n \|T_n\| = +\infty$ teljesül, akkor (ld. 6.6.1. Tétel) van olyan $x \in X_1$, amelyre a $(T_n x)$ sorozat nem konvergens, sőt, $\sup_n \|T_n x\|_2 = +\infty$.

iii) Érdemes kiemelni a 6.6.3. Tétel alábbi változatát is: *ha* $(X_1, \|.\|_1)$ *Banach-tér,* $(X_2, \|.\|_2)$ *normált tér,* $T, T_n \in L(X_1, X_2)$ $(n \in \mathbf{N})$, *akkor a* $\lim(T_n(x)) = Tx$ $(x \in X_1)$ *konvergenciának szükséges és elégséges feltétele az, hogy ez a konvergencia az* X_1 *tér egy* Y *zárt rendszerén fennálljon és* $\sup_n \|T_n\| < +\infty$ *legyen.* Valóban, a 6.6.3. Tétel bizonyításában írjunk T_m helyébe T-t, ekkor (az ottani jelölésekkel) $\|T_n x - Tx\|_2 \le (q + \|T\| + 1)\varepsilon$ $(\mathbf{N} \ni n > N)$, azaz $\lim(\|T_n x - Tx\|_2) = 0$ adódik.

iv) A 6.6.1. Tétel általánosításaként röviden tárgyaljuk az *I. M. Gelfandtól* származó alábbi változatot. Ehhez vezessük be a következő fogalmat: valamely $(X, \|.\|)$ *Banach*-téren értelmezett $\phi : X \to [0, +\infty)$ funkcionált *konvexnek* nevezünk (ld. 6.5.1. iii) megjegyzés), ha

i) $\phi(x + y) \le \phi(x) + \phi(y) \quad (x, y \in X)$ és
ii) $\phi(\alpha \cdot x) = |\alpha| \cdot \phi(x) \ (\alpha \in \mathbf{R}, x \in X)$.

Ha a Φ konvex funkcionál folytonos $(X \ni)$ 0-ban, akkor korlátos is, azaz van olyan $M > 0$ konstans, amellyel $\Phi(x) \le M\|x\| \quad (x \in X)$ (ld. 6.3.1. Tétel bizonyítása).

A most mondottak segítségével az említett *Gelfand*-tétel így fogalmazható meg:

legyen $\phi_n : X \to \mathbf{K} \quad (n \in \mathbf{N})$ *konvex, folytonos funkcionáloknak egy sorozata. Ha bármely* $x \in X$ *esetén* $\sup\{\phi_n(x) : n \in \mathbf{N}\} < +\infty$, *akkor az* $X \ni x \mapsto \sup\{\phi_n(x) : n \in \mathbf{N}\}$ *funkcionál is konvex és folytonos.*

v) Ha $(X_1, \|.\|_1)$ *Banach*-tér, $(X_2, \|.\|_2)$ normált tér és $T \in L(X_1, X_2)$, akkor az

$$X_1 \ni x \mapsto \|Tx\|_2$$

funkcionál nyilván konvex és folytonos. Legyen $T_n \in L(X_1, X_2) \quad (n \in \mathbf{N})$ egy adott operátor-sorozat, amelyre

$$\sup\{\|T_n x\|_2 : n \in \mathbf{N}\} < +\infty \quad (x \in X_1).$$

A iv)-ben mondottak szerint ekkor az

$$X_1 \ni x \mapsto \sup\{\|T_n x\|_2 : n \in \mathbf{N}\}$$

funkcionál konvex és folytonos, így korlátos is. Ezért alkalmas $M > 0$ konstanssal $\sup\{\|T_n x\|_2 : n \in \mathbf{N}\} \leq M\|x\|_1 \ (x \in X_1)$ is igaz, amiből $\sup_n \|T_n\| \leq M$ már következik.

vi) A *Gelfand*-tétel egyik fontos következményeként tekintsük az $(X, \|.\|)$ *Banach*-téren értelmezett $f_n \in X^* \quad (n \in \mathbf{N})$ korlátos, lineáris funkcionálok sorozatát. Ha $n \in \mathbf{N}, 1 \leq p$, akkor az

$$X \ni x \mapsto \left(\sum_{i=0}^{n} |f_i(x)|^p\right)^{1/p}$$

funkcionál nyilván konvex, folytonos. Ezért $\sum_{i=0}^{\infty} |f_i(x)|^p < +\infty \ (x \in X)$ esetén az

$$X \ni x \mapsto \left(\sum_{i=0}^{\infty} |f_i(x)|^p\right)^{1/p}$$

leképezés is egy konvex és folytonos funkcionál, azaz valamely $M > 0$ konstanssal

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} |f_i(x)|^p\right)^{1/p} \leq M \cdot \|x\| \quad (x \in X).$$

vii) Emlékeztetünk a bázis fogalmára (ld. 3.2.): legyen $(X, \|.\|)$ *Banach*-tér, ekkor a $z_n \in X$ $(n \in \mathcal{N})$ rendszer bázis, ha bármely $x \in X$ esetén egyértelműen megadható egy x-et előállító $\sum_{n\in\mathcal{N}} \alpha_n z_n \ (= x)$ végtelen sor (vagy összeg). Jelöljük $z_n^*(x)$-szel az előbbi előállításban szereplő α_n együtthatót, $S_n(x)$-szel a sor (összeg) n-edik részletösszegét:

$$z_n^*(x) := \alpha_n \quad , \quad S_n(x) := \sum_{k=0}^{n} z_k^*(x) z_k \qquad (n \in \mathcal{N}).$$

Az így definiált $z_n^* : X \to \mathbf{K}$ *koordináta-funkcionálok* mindegyike nyilván lineáris. Ugyanez áll az $S_n : X \to X$ *részletösszeg-operátorokra* is. Igaz továbbá a következő két (ekvivalens) állítás: *bármely* $n \in \mathcal{N}$ *esetén* $z_n^* \in X^*$, *ill.* $S_n \in L(X, X)$.

viii) A továbbiakban feltesszük, hogy $\mathcal{N} = \mathbf{N}$. Mivel bármely $x \in X$ esetén $x = \lim_n S_n(x)$ (azaz az (S_n) operátor-sorozat erősen konvergens), ezért a *Banach-Steinhaus II*-tétel (ld. 6.6.3. Tétel) miatt

$$C := \sup\{\|S_n\| : n \in \mathbf{N}\} < +\infty$$

és $\|z_n^*\| \leq 2C/\|z_n\|$ $(n \in \mathbf{N})$. Legyen $z^* := (z_n^*, n \in \mathbf{N})$. Mivel z bázis, ezért $z_n^*(z_k) = \delta_{nk}$ $(n, k \in \mathbf{N})$, azaz a z, z^* rendszerek „együtt" egyfajta ortogonalitási relációnak tesznek eleget. Ennek fényében vezessük be a következő definíciót:

az $x_n \in X$, $\varphi_n \in X^*$ $(n \in \mathbf{N})$ rendszerek *biortogonálisak*, ha $\varphi_n(x_k) = \delta_{nk}$ $(n, k \in \mathbf{N})$. A $\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x)x_n$ $(x \in X)$ sort az x elem *biortogonális sorának* nevezzük.

Amennyiben tehát z bázis X-ben, úgy z, z^* biortogonálisak. (Valójában ekkor mondják, hogy z *Schauder*-bázis.)

ix) Tegyük fel, hogy az $x_n \in X$, $\varphi_n \in X^*$ $(n \in \mathbf{N})$ rendszerek biortogonálisak és legyen

$$X_n := \overline{\mathcal{L}(\{x_k \in X : \mathbf{N} \ni k \neq n\})} \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Mivel $\varphi_n(x) = 0$ $(x \in X_n)$ és $\varphi_n(x_n) = 1$, ezért $x_n \notin X_n$ $(n \in \mathbf{N})$. Azt mondjuk, hogy az $y_n \in X$ $(n \in \mathbf{N})$ rendszer *minimális*, ha bármely $n \in \mathbf{N}$ esetén

$$y_n \notin \overline{\mathcal{L}(\{y_k \in X : \mathbf{N} \ni k \neq n\})}.$$

Az előbbiek szerint tehát, ha egy X-beli rendszernek van biortogonális társa, akkor a szóban forgó rendszer minimális. A *Hahn-Banach*-tétel (ld. 6.5.1. Tétel) 6.5.3. Következménye alapján könnyű megmutatni, hogy ez fordítva is igaz. Hasonlóan látható be, hogy ha az $(x_n, n \in \mathbf{N})$ rendszer zárt X-ben, akkor legfeljebb egy, vele biortogonális X^*-beli rendszer létezik, ill. minden minimális rendszer egyúttal független is.

Ha tehát egy X-beli elemekből álló $z = (z_n, n \in \mathbf{N})$ rendszer bázis X-ben, akkor

$$(*) \qquad \begin{cases} \text{i)} & z \text{ zárt rendszer;} \\ \text{ii)} & z \text{ minimális rendszer;} \\ \text{iii)} & \sup\{\|S_n\| : n \in \mathbf{N}\} < \infty, \end{cases}$$

ahol $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} z_k^*(x)z_k$ $(x \in X,\ n \in \mathbf{N})$ és $z^* = (z_n^*, n \in \mathbf{N})$ a z-vel biortogonális rendszer. A 6.6.3. Tételt felhasználva megmutatható, hogy a most felsorolt (szükséges) feltételek elégségesek is ahhoz, hogy a z rendszer bázis legyen, nevezetesen igaz az alábbi állítás („alaptétel"):

az X-beli $z = (z_n, n \in \mathbf{N})$ rendszer akkor és csak akkor bázis X-ben, ha teljesülnek a $(*)$ feltételek.

x) A ix) megjegyzésbeli $(*)$ feltételekben szerepel egy, a rendszeren „kívüli" eszköz is, ti. (az S_n-ek definíciójában) a z^* (z-vel) biortogonális rendszer. Hogyan lehet kizárólag a z rendszer segítségével eldönteni, hogy az bázis-e vagy sem? Ezzel kapcsolatos a következő (a *Hahn-Banach*-tétel (ld. 6.5.1. Tétel), ill. a *Banach-Steinhaus II*-tétel (ld. 6.6.3. Tétel) alapján belátható) állítás:

legyen adott egy (a nullelemet nem tartalmazó) $z = (z_n, n \in \mathbf{N})$ rendszer az $(X.\|.\|)$ Banach-térben. Ekkor z pontosan abban az esetben bázis $\overline{\mathcal{L}(z)}$-ban, ha

$$(**) \qquad \begin{cases} \textit{van olyan } B > 0 \textit{ konstans, hogy bármely } n \in \mathbf{N} \textit{ és} \\ x = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k z_k \in \mathcal{L}(z) \textit{ esetén } \|\sum_{k=0}^{n} \beta_k z_k\| \leq B\|x\|. \end{cases}$$

xi) Az előbbi $(**)$ tulajdonságból kiindulva vezessük be a következő fogalmat: valamely X-beli $z = (z_n, n \in \mathbf{N})$ lineárisan független rendszer és $x = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k z_k \in \mathcal{L}(z)$ esetén legyen $\rho(x) := \sup\{\| \sum_{k=0}^{n} \beta_k z_k \| : n \in \mathbf{N}\}$. A

$$B_z := \sup\{\rho(x) : \ x \in \mathcal{L}(z), \|x\| \leq 1\}$$

számot (vagy $+\infty$-t) a z rendszer *Banach-konstansának* nevezzük. A ix) megjegyzés alapján azt mondhatjuk, hogy amennyiben z zárt rendszer X-ben, akkor

$$z \text{ bázis } X-\text{ben} \quad \Longleftrightarrow \quad B_z < +\infty.$$

Mivel bármely $x \in \mathcal{L}(z)$ elemre $\rho(x) \geq \|x\|$, ezért $B_z \geq 1$. Ha pl. $(X, \langle , \rangle)$ *Hilbert*-tér és z ONR X-ben, akkor $\rho(x) = \|x\| \quad (x \in \mathcal{L}(z))$, azaz $B_z = 1$.

xii) Legyen $z = (z_n, n \in \mathbf{N})$ bázis X-ben, $z^* = (z_n^*, n \in \mathbf{N})$ a z-vel biortogonális koordinátafunkcionálok rendszere. Ekkor bármely $x \in \mathcal{L}(z)$ esetén

$$|z_n^*(x)| \cdot \|z_n\| = \|z_n^*(x) z_n\| = \left\| \sum_{k=0}^{n} z_k^*(x) z_k - \sum_{k=0}^{n-1} z_k^*(x) z_k \right\| \leq 2\rho(x),$$

azaz $\|z_n^*\| \leq 2B_z / \|z_n\| \quad (n \in \mathbf{N})$. Ha tehát z normált $(\|z_n\| = 1 \quad (n \in \mathbf{N}))$, akkor bármely $n \in \mathbf{N}$ esetén $\|z_n^*\| \leq 2B_z$.

A *Banach-Steinhaus I, II*-tételek alkalmazásaként tekintsük először az $S_n \quad (n \in \mathbf{N})$ trigonometrikus *Fourier*-részletösszeg-operátorokat (ld. 6.2. pont):

$$S_n f(x) = \int_0^{2\pi} f(t) D_n(x-t)\, dt \qquad (f \in C_{2\pi}, x \in \mathbf{R}),$$

ahol továbbra is $C_{2\pi}$-vel jelöltük a 2π-szerint periodikus $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvények halmazát. Legyen $f \in C_{2\pi}$ esetén $\|f\|_\infty := \max_{x \in \mathbf{R}} |f(x)|$. Ekkor $(C_{2\pi}, \|.\|_\infty)$ *Banach*-tér, ebben a térben a konvergencia a függvénysorozatok egyenletes konvergenciáját jelenti, ill. $S_n \in L(C_{2\pi}, C_{2\pi})$ és (ld. 6.3.3. Tétel)

$$\|S_n\| = \max_{x \in \mathbf{R}} \int_0^{2\pi} |D_n(x-t)|\, dt = \int_0^{2\pi} |D_n| \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Mivel (ld. 6.2.) alkalmas $c_2 > 0$ konstanssal $\int_0^{2\pi} |D_n| \geq c_2 \ln(n+2) \quad (n \in \mathbf{N})$, így $\sup_n \|S_n\| = +\infty$. Ezért a 6.6.1., 6.6.2. Tételek következményeként (ld. 6.6.2. ii) megjegyzés) kapjuk az alábbi állítást:

6.6.5. Tétel. *Van olyan $f \in C_{2\pi}$ függvény, amelyre az $(S_n f)$ sorozat nem konvergál egyenletesen, sőt,* $\sup_n \|S_n f\|_\infty = +\infty$.

Legyen $z \in \mathbf{R}$ és definiáljuk a $\left(\Phi_n^{(z)}\right)$ *Fourier-funkcionálok* sorozatát a következőképpen:

$$\Phi_n^{(z)}(f) := S_n f(z) \qquad (n \in \mathbf{N}, f \in C_{2\pi}).$$

Világos, hogy $\Phi_n^{(z)} \in \mathcal{L}(C_{2\pi}, \mathbf{R})$, ill.

$$|\Phi_n^{(z)}(f)| \leq \|S_n f\|_\infty \leq \|S_n\| \cdot \|f\|_\infty$$

miatt $\Phi_n^{(z)} \in C_{2\pi}^*$ és $\|\Phi_n^{(z)}\| \leq \|S_n\| \quad (n \in \mathbf{N})$. A 6.3.3. Tétel bizonyításával analóg módon nem nehéz belátni, hogy bármely $z \in \mathbf{R}$ és $n \in \mathbf{N}$ esetén $\|\Phi_n^{(z)}\| = \|S_n\|$. Következésképpen $\sup_n \|\Phi_n^{(z)}\| = +\infty$, ezért a 6.6.1., 6.6.2. Tételek alapján (ld. 6.6.2. ii) megjegyzés) igaz a

6.6.6. Tétel (*Fejér*). *Bármely $z \in \mathbf{R}$ esetén van olyan $f \in C_{2\pi}$ függvény, amelyre az $(S_n f(z))$ sorozat nem konvergens (az f függvény trigonometrikus Fourier-sora z-ben divergens), sőt,* $\sup_n |S_n f(z)| = +\infty$.

Az előbbi $S_n \quad (n \in \mathbf{N})$ részletösszeg-operátorok helyett tekintsük a

$$\sigma_n f := \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} S_k f \qquad (f \in C_{2\pi}, n \in \mathbf{N})$$

Fejér-féle-operátorokat. Ha

$$K_n := \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} D_k \qquad (n \in \mathbf{N})$$

az n-edik *Fejér-féle magfüggvény,* akkor

$$\sigma_n f(x) = \int_0^{2\pi} f(t) K_n(x-t)\, dt \qquad (f \in C_{2\pi}, n \in \mathbf{N}, x \in \mathbf{R}).$$

Következésképpen a $\sigma_n \quad (n \in \mathbf{N})$ operátorok is speciális folytonos magú integráloperátorok (ld. 6.2.). Ezért $\sigma_n \in L(C_{2\pi}, C_{2\pi})$ és a 6.3.3. Tétel miatt

$$\|\sigma_n\| = \max_{x \in \mathbf{R}} \int_0^{2\pi} |K_n(x-t)|\, dt = \int_0^{2\pi} |K_n|\, dt \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Nem nehéz ellenőrizni, hogy $K_n \geq 0 \quad (n \in \mathbf{N})$, így

$$\int_0^{2\pi} |K_n|\, dt = \int_0^{2\pi} K_n\, dt = 1 \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Ui. (ld. 6.2.) $0 < t < 2\pi$ esetén

$$2\pi(n+1)K_n(t) = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin((k+1/2)t)}{\sin(t/2)} = 1 + \frac{1}{\sin^2(t/2)} \sum_{k=1}^{n} \sin(t/2) \sin((k+1/2)t) =$$

$$1 + \frac{1}{2\sin^2(t/2)} \sum_{k=1}^{n} [\cos(kt) - \cos((k+1)t)] = 1 + \frac{\cos t - \cos((n+1)t)}{2\sin^2(t/2)} =$$

$$\frac{2\sin^2(t/2) + 1 - 2\sin^2(t/2) - \cos((n+1)t)}{2\sin^2(t/2)} = \frac{\sin^2((n+1)t/2)}{\sin^2(t/2)}.$$

Tehát

$$K_n(t) = \frac{\sin^2((n+1)t/2)}{2\pi(n+1)\sin^2(t/2)}.$$

Mivel $K_n(0) = \frac{n+1}{2}$, ezért innen $K_n \geq 0$, ill.

$$\int_0^{2\pi} |K_n| = \int_0^{2\pi} K_n = \frac{1}{\pi(n+1)} \sum_{k=0}^{n} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} + \sum_{j=1}^{k} \cos(jt) \right) dt = \frac{1}{\pi(n+1)} \sum_{k=0}^{n} \pi = 1$$

rögtön következik. Ez azt is jelenti, hogy $\sup_n \|\sigma_n\| < +\infty$. Mivel a trigonometrikus polinomok halmaza ($\|.\|_\infty$-ban) mindenütt sűrű $C_{2\pi}$-ben és tetszőleges ilyen T „polinomra” $\|\sigma_n T - T\|_\infty \to 0$ $(n \to \infty)$ triviálisan igaz, ezért a 6.6.3. Tétel egyenes következménye a

6.6.7. Tétel (*Fejér*)**.** *Minden $f \in C_{2\pi}$ függvény esetén a $\sigma_n f$ $(n \in \mathbf{N})$ Fejér-közepek egyenletesen konvergálnak f-hez.*

Valamely kompakt $[a,b] \subset \mathbf{R}$ intervallum esetén legyenek adottak az $a \leq x_{n0} < ... < x_{nn} \leq b$ „alappontok” és a $g_{n0}, ..., g_{nn} \in C[a,b]$ $(n \in \mathbf{N})$ „alapfüggvények”, ill. $f \in C[a,b]$ esetén legyen (ld. 6.2.)

$$L_n f := \sum_{k=0}^{n} f(x_{nk}) g_{nk}.$$

Vezessük be $C[a,b]$-ben az $\|f\|_\infty := \max_{x \in [a,b]} |f(x)|$ $(f \in C[a,b])$ normát, ekkor $(C[a,b], \|.\|_\infty)$ *Banach*-tér, ebben a térben a konvergencia a függvénysorozatok egyenletes konvergenciáját jelenti, ill. (ld. 6.2.) $L_n \in L(C[a,b], C[a,b])$ és (ld. 6.3.2. iv) megjegyzés)

$$\|L_n\| = \left\| \sum_{k=0}^{n} |g_{nk}| \right\|_\infty \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Ha itt $g_{nk} := l_{nk}$-k $(n \in \mathbf{N}, k = 0, ..., n)$ a *Lagrange*-féle alappolinomokat jelentik, azaz

$$l_{nk}(x) := \prod_{k \neq j=0}^{n} \frac{x - x_{nj}}{x_{nk} - x_{nj}} \qquad (x \in [a,b]),$$

akkor $L_n f$-ek $(f \in C[a,b], n \in \mathbf{N})$ az f függvény *Lagrange*-féle interpolációs polinomjai az $[a,b]$ intervallumon a megadott alappontrendszerre nézve. Ismert (ld. 6.6.18. Tétel), hogy ebben az esetben is valamilyen $c > 0$ abszolút konstanssal

$$\|L_n\| = \left\| \sum_{k=0}^{n} |l_{nk}| \right\|_\infty \geq c \ln (n+2) \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Ezért $\sup_n \|L_n\| = +\infty$, azaz a 6.6.2., 6.6.3. Tételekből (ld. 6.6.2. ii) megjegyzés) adódik a

6.6.8. Tétel (*Bernstein*). *Bármely kompakt $[a,b]$ intervallum és $x_{nk} \in [a,b]$ $(n \in \mathbf{N}$, $k = 0, ..., n)$ alappontrendszer esetén van olyan $f \in C[a,b]$ függvény, amelyre az $(L_n f)$ Lagrange-féle interpolációs polinomok sorozata nem konvergál egyenletesen, sőt,* $\sup_n \|L_n f\|_\infty = +\infty$.

6.6.3. Megjegyzések.

i) Mivel $\sum_{k=0}^{n} l_{nk} = L_n f_0$ $(n \in \mathbf{N})$, ahol $f_0(x) := 1$ $(x \in [a,b])$, ezért - lévén f_0 (az $[a,b]$-n) 0-adfokú polinom - $L_n f_0 = f_0$, azaz $\sum_{k=0}^{n} l_{nk} = f_0$. Így

$$\left\| \sum_{k=0}^{n} l_{nk} \right\|_\infty = \|f_0\|_\infty = 1 \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

következésképpen az előbb idézett *Faber-Bernstein*-féle logaritmikus becslés miatt az l_{nk} $(l = 0, ..., n)$ alappolinomok nem lehetnek végtelen sok $\mathbf{N} \ni n$-re állandó előjelűek. Ti. minden ilyen n esetén $\|\sum_{k=0}^{n} |l_{nk}|\|_\infty = \|\sum_{k=0}^{n} l_{nk}\|_\infty$, azaz ha ez végtelen sok n-re fennállna (mondjuk egy (n_j) indexsorozat tagjaira), akkor a lehetetlen

$$c \ln (n_j + 2) \leq \|L_{n_j}\| = \left\| \sum_{k=0}^{n_j} l_{n_j k} \right\|_\infty = 1 \qquad (j \in \mathbf{N})$$

egyenlőségre jutnánk.

ii) Korábban már említettük, hogy lineáris operátorok normájának komoly szerep jut az öröklött hiba szempontjából is. Ha pl. a fenti $L_n f$ *Lagrange*-polinom kiszámításához csak az $y_{nk} \sim f(x_{nk})$ közelítések állnak rendelkezésre az

$$|y_{nk} - f(x_{nk})| < \varepsilon \qquad (k = 0, ..., n \in \mathbf{N})$$

hibabecsléssel (valamilyen $\varepsilon > 0$ mellett), akkor az

$$\widetilde{L_n f} := \sum_{k=0}^{n} y_{nk} l_{nk}$$

„közelítő *Lagrange*-polinomról” a következőt mondhatjuk:

$$|\widetilde{L_n f} - L_n f| \leq \|L_n\| \varepsilon.$$

Természetes kívánság az $x_{n0}, ..., x_{nn}$ alappontok megválasztását illetően, hogy az $\|L_n\| = \|\sum_{k=0}^{n} |l_{nk}|\|_\infty$ norma a lehető legkisebb legyen. Az ilyen értelemben optimális alappontok máig nem ismertek, de pl. az $[a,b] := [-1,1]$ intervallum és az

$$x_{nk} := \cos\left((2k+1)\pi/(2n+2)\right) \qquad (k = 0, ..., n)$$

ún. *Csebisev*-féle alappontok esetén belátható, hogy alkalmas (abszolút) $\tilde{c} > 0$ konstanssal $\|L_n\| \le \tilde{c}\ln(n+2) \quad (n \in \mathbf{N})$ igaz. (Ugyanakkor pl. $n = 1$-re könnyen ellenőrizhető, hogy a *Csebisev*-alappontok nem optimálisak a most mondott értelemben.)

iii) Legyen az előző megjegyzésben $z \in [a,b]$ rögzített és

$$L_n^{(z)} f := L_n f(z) = \sum_{k=0}^{n} f(x_{nk}) l_{nk}(z) \qquad (f \in X := C[a,b], n \in \mathbf{N})$$

(*Lagrange*-funkcionál). Világos, hogy $L_n^{(z)} \in X^*$ és $\|L_n^{(z)}\| \le \|L_n\| \quad (n \in \mathbf{N})$, de általában $\|L_n^{(z)}\| \neq \|L_n\|$. Pl. *adaptív* alappontrendszer esetén - tehát, amikor $\{x_{n0}, ..., x_{nn}\} \subset \{x_{n+10}, ..., x_{n+1n+1}\} \quad (n \in \mathbf{N})$ -, akkor tetszőleges $z \in \bigcup_{n=0}^{\infty} \{x_{n0}, ..., x_{nn}\}$ ponthoz van olyan $N \in \mathbf{N}$, amellyel

$$L_n^{(z)} f = L_N^{(z)} f = f(z) \qquad (N \le n \in \mathbf{N}, f \in X).$$

Következésképpen $L_n^{(z)} f \to f(z) \quad (n \to \infty)$, ezért $\sup_n \|L_n^{(z)}\| < +\infty$. Így az $\|L_n\| \ge c\ln(n+2) \quad (n \in \mathbf{N})$ becslés miatt az $\|L_n^{(z)}\| = \|L_n\|$ egyenlőség nem állhat fenn végtelen sok n-re.

A valamely kompakt $[a,b] \subset \mathbf{R}$ intervallum esetén bevezetett $a \le x_{n0} < ... < x_{nn} \le b$ $(n \in \mathbf{N}, k = 0, ..., n)$ alappontok mellett legyenek adottak az $\alpha_{n0}, ..., \alpha_{nn} \in \mathbf{R} \quad (n \in \mathbf{N}, k = 0, ..., n)$ „súlyok” is, ill. (ld. 6.2.) tekintsük a

$$Q_n f := \sum_{k=0}^{n} \alpha_{nk} f(x_{nk}) \qquad (f \in C[a,b], n \in \mathbf{N})$$

kvadratúra-sorozatot. A $C[a,b]$ téren továbbra is a $\|.\|_\infty$ normát tartva meg láttuk (ld. 6.3.2. iv) megjegyzés), hogy

$$\|Q_n\| = \sum_{k=0}^{n} |\alpha_{nk}| \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Emlékeztetünk arra, hogy a polinomok ($[a,b]$-re leszűkített rendszere $:= \mathcal{P}$) mindenütt sűrű (a $\|.\|_\infty$ normára nézve) $C[a,b]$-ben, ezért a 6.6.3. Tétel speciális esete a

6.6.9. Tétel (*Pólya-Szegő*)**.** *Legyen $[a,b]$ egy tetszőleges kompakt intervallum, s egy súlyfüggvény $[a,b]$-n és tegyük fel, hogy adott az alappontoknak egy $a \le x_{n0} < ... < x_{nn} \le b \quad (n \in \mathbf{N})$ és a súlyoknak egy $\alpha_{n0}, ..., \alpha_{nn} \in \mathbf{R} \quad (n \in \mathbf{N})$ rendszere. Ekkor a $Q_n f \to \int_a^b fs \quad (n \to \infty, f \in C[a,b])$ konvergenciának szükséges és elégséges feltétele az, hogy $\sup_n \sum_{k=0}^{n} |\alpha_{nk}| < +\infty$ és bármely $P \in \mathcal{P}$ polinomra $Q_n P \to \int_a^b Ps \quad (n \to \infty)$ teljesüljön.*

Világos, hogy $\alpha_{nk} \ge 0 \quad (n \in \mathbf{N}, k = 0, ..., n)$ esetén

$$\sum_{k=0}^{n} |\alpha_{nk}| = \sum_{k=0}^{n} \alpha_{nk} = Q_n f_0 \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

ahol $f_0(x) := 1 \quad (x \in [a,b])$. Mivel $f_0 \in \mathcal{P}$, így ebben az esetben a $\sup_n \sum_{k=0}^{n} |\alpha_{nk}| < +\infty$ korlátosság következik a $P \in \mathcal{P}$ polinomokra megkövetelt $Q_n P \to \int_a^b Ps \quad (n \to \infty)$ konvergenciából, azaz ekkor a *Pólya-Szegő*-tételben elég ez utóbbit feltenni:

6.6.10. Tétel (*Sztyeklov*)**.** *Legyen $[a,b]$ egy tetszőleges kompakt intervallum, s egy súlyfüggvény $[a,b]$-n és tegyük fel, hogy adott az alappontoknak egy $a \le x_{n0} < ... < x_{nn} \le b \quad (n \in \mathbf{N})$ és a súlyoknak egy $\alpha_{n0} \ge 0, ..., \alpha_{nn} \ge 0 \in \mathbf{R} \quad (n \in \mathbf{N})$ rendszere. Ekkor a $Q_n f \to \int_a^b fs$ $(n \to \infty, f \in C[a,b])$ konvergenciának szükséges és elégséges feltétele az, hogy bármely $P \in \mathcal{P}$ polinomra $Q_n P \to \int_a^b Ps \quad (n \to \infty)$ teljesüljön.*

Ha itt még ráadásul

$$Q_n f := \int_a^b s L_n f \qquad (n \in \mathbf{N}, f \in C[a,b]),$$

ahol $L_n f \quad (n \in \mathbf{N})$ a szóban forgó alappontokra vonatkozó *Lagrange*-féle interpolációs polinomja f-nek (tehát $Q_n \quad (n \in \mathbf{N})$ egy ún. *interpolációs kvadratúra* vagy *Newton-Cotes-formula*), akkor a bármely $P \in \mathcal{P}$ esetén az „elég nagy” $\mathbf{N} \ni n$-ekre fennálló $L_n P = P$ egyenlőség alapján a $\lim_{n\to\infty} Q_n P = \int_a^b Ps$ feltétel automatikusan teljesül. Így a 6.6.10. Tétel miatt P helyett minden $f \in C[a,b]$ függvényre is igaz az előbbi konvergencia. Speciális esetként megkapjuk a *Gauss-kvadratúrák* konvergenciájára vonatkozó alábbi tételt:

6.6.11. Tétel (*Stieltjes*)**.** *Tegyük fel, hogy a $Q_n \quad (n \in \mathbf{N})$ interpolációs kvadratúra-eljárás alappontjai az s súlyra ortogonális $P_n \quad (n \in \mathbf{N})$ polinomrendszer gyökei: $P_n(x_{nk}) = 0$ $(k = 0, ..., n)$. Ekkor bármely $f \in C[a,b]$ függvényre a $(Q_n, n \in \mathbf{N})$ kvadratúra-sorozat konvergens, azaz $\int_a^b fs = \lim_n (Q_n f)$.*

Legyenek adottak az $\alpha_{nk} \in \mathbf{K} \quad (n, k \in \mathbf{N})$ (valós vagy komplex) számok. Azt mondjuk, hogy az $(x_n, n \in \mathbf{N})$ számsorozat *szummábilis,* ha minden $n \in \mathbf{N}$ esetén létezik az

$$y_n := \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{nk} x_k$$

sorösszeg, $y_n \in \mathbf{K}$ és az $(y_n, n \in \mathbf{N})$ sorozat konvergens. Ha mindezek tetszőleges konvergens $(x_n, n \in \mathbf{N})$ mellett igazak és még ráadásul $\lim(x_n) = \lim(y_n)$, akkor α_{nk}-k egy ún. *permanens* (vagy *Toeplitz-típusú*) szummációt határoznak meg.

Legyen pl.

$$\alpha_{nk} := \begin{cases} \dfrac{1}{n+1} & (k = 0, ..., n) \\ 0 & (k > n) \end{cases} \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Ekkor bármely $x = (x_n)$ számsorozatra

$$y_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} x_k \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

azaz (y_n) az (x_n) sorozat számtani közép sorozata. Jól ismert, hogy ha x konvergens, akkor y is az és $\lim x = \lim y$. Más szóval tehát a most definiált $(C,1)$-*szummáció* permanens.

6.6.12. Tétel (*Toeplitz*). *A fenti α_{nk}-k akkor és csak akkor határoznak meg permanens szummációt, ha az alábbi feltételek teljesülnek:*

i) $\lim_{n\to\infty}(\alpha_{nk}) = 0 \quad (k \in \mathbf{N})$;

ii) $\sup\{\sum_{k=0}^{\infty} |\alpha_{nk}| : n \in \mathbf{N}\} < +\infty$;

iii) $\lim_{n\to\infty} (\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{nk}) = 1$.

Bizonyítás. 1^o Legyen $\alpha_n \in \mathbf{K} \quad (n \in \mathbf{N})$ és tegyük fel, hogy minden konvergens $(x_n, n \in \mathbf{N})$ sorozatra létezik a $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x_n \in \mathbf{K}$ sorösszeg. Ekkor $\sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_n| < +\infty$.

Valóban, ha ez nem lenne igaz, akkor egy alkalmas $(n_k, k \in \mathbf{N})$, $n_0 = 0$ indexsorozattal

$$\sum_{j=n_k}^{n_{k+1}-1} |\alpha_j| > k+1 \qquad (k \in \mathbf{N})$$

teljesülne. Viszont az

$$x_j := \begin{cases} 0 & (\alpha_j = 0) \\ \dfrac{|\alpha_j|}{(k+1)\alpha_j} & (\alpha_j \neq 0) \end{cases} \qquad (n_k \leq j < n_{k+1}\ ,\ j,k \in \mathbf{N})$$

(nyilván) nulla-sorozatra

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x_n = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=n_k}^{n_{k+1}-1} \alpha_j x_j = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} \sum_{j=n_k}^{n_{k+1}-1} |\alpha_j| \geq \sum_{k=0}^{\infty} 1 = +\infty$$

lenne, ami ellentmond a feltételezésnek. (Mellesleg az is kiderült, hogy elegendő a következőt feltenni: minden $(x_n, n \in \mathbf{N})$ nulla-sorozat esetén a $\sum_{k=0}^{n} \alpha_k x_k \quad (n \in \mathbf{N})$ összegek korlátosak.)

2^o Emlékeztetünk arra (ld. 6.4.2. vii) megjegyzés), hogy a konvergens számsorozatok c terében az $\|x\|_\infty = \sup_n |x_n| \ \ (x = (x_n) \in c)$ normára nézve az

$$e := (1, 1, ..., 1, ...)\ ,\ e^{(n)} := (0, ..., 0, 1, 0, ..., 0, ...) \qquad (n \in \mathbf{N})$$

sorozatok zárt rendszert alkotnak (ahol $e^{(n)}$-ben az $(n+1)$-edik tag 1).

3^o Mutassuk meg, hogy c zárt altere $(\ell_\infty, \|.\|_\infty)$-nak. Legyen ehhez $\xi_n, \xi \in c \quad (n \in \mathbf{N})$ és tegyük fel, hogy a (ξ_n) sorozat konvergál ξ-hez: $\|\xi_n - \xi\|_\infty \to 0 \quad (n \to \infty)$. Ha $\xi_n = (x_{nk}, k \in \mathbf{N}) \quad (n \in \mathbf{N})$, $\xi = (x_k, k \in \mathbf{N})$, akkor tehát bármely $\varepsilon > 0$ esetén van olyan $N \in \mathbf{N}$, hogy

$$\sup_k |x_{nk} - x_k| < \varepsilon \qquad (N < n \in \mathbf{N}).$$

Legyen $k, j \in \mathbf{N}$, ekkor

$$|x_k - x_j| \le |x_k - x_{nk}| + |x_{nk} - x_{nj}| + |x_{nj} - x_j| < 2\varepsilon + |x_{nk} - x_{nj}|,$$

ahol $n \in \mathbf{N}$ és $n > N$. Így választva n-et vegyük figyelembe, hogy a $\xi_n = (x_{nk}, k \in \mathbf{N})$ sorozat c-beli, azaz konvergens. Ezért létezik olyan $M \in \mathbf{N}$ küszöbindex, amellyel $|x_{nk} - x_{nj}| < \varepsilon \quad (M < k, j \in \mathbf{N})$. Következésképpen ilyen k, j-k esetén

$$|x_k - x_j| < 3\varepsilon,$$

azaz a $\xi = (x_k, k \in \mathbf{N})$ sorozat *Cauchy*-sorozat. Tehát $\xi \in c$, ami c zártságát jelenti.

4^o Tegyük most fel, hogy α_{nk}-k permanens szummációt határoznak meg. Ekkor 1^o szerint minden $\mathbf{N} \ni n$-re

$$\delta_n := \sum_{k=0}^{\infty} |\alpha_{nk}| < +\infty,$$

következésképpen a

$$T_n x := \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{nk} x_k \qquad (x = (x_j) \in c)$$

előírással egy $T_n : c \to \mathbf{K}$ korlátos lineáris funkcionált határoztunk meg, amelynek a normája (ld. 6.4.2. vii) megjegyzés) δ_n. Mivel most permanens szummációról van szó, ezért a $(T_n x)$ sorozat konvergens és $\lim_{n\to\infty}(T_n x) = \lim x$. (Más szóval tehát a (T_n) sorozat erősen konvergál a limesz-funkcionálhoz.) De $e, e^{(n)} \in c \quad (n \in \mathbf{N})$, ezért egyúttal

$$\lim(T_n e) = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{nk} \right) = \lim e = 1,$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(T_n e^{(k)} \right) = \lim_{n\to\infty} (\alpha_{nk}) = \lim e^{(k)} = 0 \qquad (k \in \mathbf{N}).$$

Tudjuk (ld. 3^o), hogy c zárt ℓ_∞-ben, azaz a $(c, \|.\|_\infty)$ tér *Banach*-tér. Ezért a *Banach-Steinhaus II*-tétel (6.6.3. Tétel) miatt

$$\sup\{\|T_n\| : n \in \mathbf{N}\} = \sup\{\delta_n : n \in \mathbf{N}\} < +\infty,$$

amit (még) be kellett látni.

5^o Fordítva, ha a tételben mondott i), ii), iii) feltételek teljesülnek, akkor a 4^o-ben definiált $T_n \quad (n \in \mathbf{N})$ funkcionálok léteznek, ii) szerint egyenletesen korlátosak, i) és iii) szerint pedig az $Y := \{e, e^{(n)} : n \in \mathbf{N}\}$ c-beli zárt rendszeren erősen konvergálnak a limesz-funkcionálhoz:

$$\lim_{n\to\infty} (T_n x) = \lim x \qquad (x \in Y).$$

Ezért ismét a *Banach-Steinhaus II*-tételt alkalmazva azt kapjuk, hogy minden $x \in c$ (azaz konvergens) sorozatra is $\lim_{n\to\infty}(T_n x) = \lim x$. ■

6.6.4. Megjegyzések.

i) Legyen (y_n) egy számsorozat és tegyük fel, hogy az általa generált $\sum(y_n)$ végtelen sor konvergens. Ekkor

$$\sum_{k=0}^{\infty} y_k r^k \to \sum_{k=0}^{\infty} y_k \qquad (r \to 1-0)$$

(*Abel*-féle folytonossági tétel). Valóban, legyen $x_m := \sum_{k=0}^{m} y_k \quad (m \in \mathbf{N})$, akkor

$$y_0 = x_0 \ , \ y_k = x_k - x_{k-1} \qquad (1 \le k \in \mathbf{N}),$$

ill. $\lim(x_m) = \sum_{k=0}^{\infty} y_k$. Ha $0 \le r_n < 1 \quad (n \in \mathbf{N})$ olyan sorozat, amelyre $\lim(r_n) = 1$, akkor azt kell megmutatnunk, hogy

$$\sum_{k=0}^{\infty} y_k r_n^k = x_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (x_k - x_{k-1}) r_n^k =$$

$$x_0(1 - r_n) + \sum_{k=1}^{\infty} (r_n^k - r_n^{k+1}) x_k \to \lim(x_m) \qquad (n \to \infty).$$

Legyen ehhez $\alpha_{nk} := r_n^k (1 - r_n) \ \ (n, k \in \mathbf{N})$. Ekkor

$$\sum_{k=0}^{\infty} y_k r_n^k = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{nk} x_k \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Továbbá minden $k \in \mathbf{N}$ esetén $\alpha_{nk} \to 0 \quad (n \to \infty)$, ill. tetszőleges $\mathbf{N} \ni n$-re

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{nk} = \sum_{k=0}^{\infty} |\alpha_{nk}| = (1 - r_n) \sum_{k=0}^{\infty} r_n^k = 1.$$

Teljesülnek tehát a 6.6.12. Tétel feltételei, így a fentiek szerint az *Abel*-tétel is következik.

ii) Azt mondjuk, hogy a $\sum(z_n)$ végtelen számsor *Abel-szummábilis,* ha létezik és véges a

$$\lim_{r \to 1-0} \sum_{k=0}^{\infty} z_k r^k$$

határérték. Az i) megjegyzés azt mutatja, hogy a most értelmezett *Abel-szummáció* is permanens: ha a $\sum(z_n)$ sor konvergens, akkor *Abel*-szummábilis is és

$$\sum_{k=0}^{\infty} z_k = \lim_{r \to 1-0} \sum_{k=0}^{\infty} z_k r^k.$$

iii) Legyen ii)-ben $z_n := (-1)^n \ \ (n \in \mathbf{N})$, ekkor

$$\sum_{k=0}^{\infty} z_k r^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-r)^k = \frac{1}{1+r},$$

azaz

$$\lim_{r\to 1-0}\sum_{k=0}^{\infty} z_k r^k = \lim_{r\to 1-0}\frac{1}{1+r} = \frac{1}{2}.$$

Tehát a $\sum((-1)^n)$ (*Cauchy*-értelemben divergens) sor *Abel*-szummábilis és az *Abel*-szummája:= $\lim_{r\to 1-0}\sum_{k=0}^{\infty} z_k r^k = 1/2$.

iv) Mutassuk meg, hogy *ha a* $\sum(z_n)$ *számsor (C,1)-szummábilis, azaz az*

$$s_k := \sum_{j=0}^{k} z_j \quad (k \in \mathbf{N})\ ,\ \sigma_n := \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} s_k \quad (n \in \mathbf{N})$$

jelölésekkel létezik és véges az $s := \lim(\sigma_n)$ *határérték, akkor a* $\sum(z_n)$ *sor Abel-szummábilis is és* $\lim_{r\to 1-0}\sum_{k=0}^{\infty} z_k r^k = s$ (*Frobenius*-tétel).

Ui. az

$$s_n = (n+1)\sigma_n - n\sigma_{n-1}\ ,\ s_{n-1} = n\sigma_{n-1} - (n-1)\sigma_{n-2} \qquad (n \in \mathbf{N})$$

(ahol legyen $\sigma_{-2} := \sigma_{-1} := s_{-1} := 0$) egyenlőségekből

$$z_n = s_n - s_{n-1} = (n+1)\sigma_n - 2n\sigma_{n-1} + (n-1)\sigma_{n-2} \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

azaz

$$\sum_{n=0}^{\infty} z_n r^n = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\sigma_n r^n - 2\sum_{n=0}^{\infty} n\sigma_{n-1} r^n + \sum_{n=0}^{\infty}(n-1)\sigma_{n-2} r^n =$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left((k+1)r^k - 2(k+1)r^{k+1} + (k+1)r^{k+2}\right)\sigma_k.$$

Legyen $0 \le r_n < 1\ \ (n \in \mathbf{N})$ és $\lim(r_n) = 1$. Ekkor

$$\sum_{k=0}^{\infty} z_k r_n^k = \sum_{k=0}^{\infty}\left((k+1)r_n^k - 2(k+1)r_n^{k+1} + (k+1)r_n^{k+2}\right)\sigma_k =$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)r_n^k(1-r_n)^2\sigma_k =: \sum_{k=0}^{\infty}\alpha_{nk}\sigma_k,$$

ahol tehát $\alpha_{nk} := (k+1)r_n^k(1-r_n)^2\ \ (n,k \in \mathbf{N})$. Mivel $\lim_{n\to\infty}\alpha_{nk} = 0\quad (k \in \mathbf{N})$ triviálisan igaz, ill. tetszőleges $n \in \mathbf{N}$ esetén

$$\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_{nk} = \sum_{k=0}^{\infty}|\alpha_{nk}| = (1-r_n)^2\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)r_n^k = 1,$$

ezért teljesülnek a 6.6.12. Tétel feltételei. Következésképpen

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{\infty} z_k r_n^k = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_{nk}\sigma_k = \lim(\sigma_n) = s.$$

v) Tekintsük a $z_n := (-1)^n(n+1)$ $(n \in \mathbf{N})$ sorozat által generált $\sum(z_n)$ végtelen sort. Ekkor a iv)-beli jelölésekkel $s_{2n} = n+1$, $s_{2n+1} = -n-1$, azaz $\sigma_{2n} = (n+1)/(2n+1)$, $\sigma_{2n+1} = 0$ $(n \in \mathbf{N})$. Így a (σ_n) sorozat divergens. Ugyanakkor bármely $0 \le r < 1$ esetén

$$\sum_{n=0}^{\infty} z_n r^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)r^n = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(-r)^n = \frac{1}{(1+r)^2} \to \frac{1}{4} \quad (r \to 1-0),$$

azaz a $\sum(z_n)$ sor *Abel*-szummábilis és az *Abel*-szummája $1/4$.

vi) Jól ismert az elemi analízisből, hogy ha egy $\sum(z_n)$ számsor konvergens, akkor (ld. iv)) $(C,1)$-szummábilis is és $\lim(\sigma_n) = \sum_{n=0}^{\infty} z_n$. A iv)-beli *Frobenius*-tétel tehát kiterjesztése az i)-beli *Abel*-tételnek $(C,1)$-szummábilis sorokra.

A 6.6.5., 6.6.8. Tételekben szereplő S_n $(n \in \mathbf{N})$ trigonometrikus *Fourier*-részletösszeg-operátorok, ill. L_n $(n \in \mathbf{N})$ *Lagrange*-interpolációs operátorok közös tulajdonsága, hogy mindegyikük projekció az alábbi értelemben: ha $(X, \|.\|)$ egy normált tér, akkor a $0 \ne T \in L(X,X)$ korlátos lineáris operátort *projekciónak* nevezzük, ha T *idempotens,* azaz $T^2 = T$. Ha $Y := T[X]$ a T operátor képtere, akkor Y altér, $Tx \in Y$ $(x \in X)$ és $Ty = y$ bármely $y \in Y$ esetén.

Világos, hogy ez utóbbi három tulajdonság egyúttal jellemzi is a projekciókat. Valóban, ha T projekció, akkor (mint minden lineáris operátor esetén) $Y := T[X]$ altér X-ben és az értelmezése miatt $Tx \in Y$ $(x \in X)$. Továbbá bármely $y \in Y$ esetén van olyan $x \in X$, amellyel $y = Tx$, tehát $Ty = T^2x = Tx = y$. Fordítva, ha T korlátos lineáris operátor és valamely $Y \subset X$ altérrel $T : X \to Y$ és $Ty = y$ $(y \in Y)$, akkor ez utóbbi tulajdonság miatt nyilván $Y = T[X]$. Ha $x \in X$, akkor tehát $Tx \in Y$ és ezért $T(Tx) = T^2x = Tx$, azaz $T^2 = T$.

Az is nyilvánvaló, hogy T normája legalább 1, hiszen $\|Ty\| = \|y\| \le \|T\| \cdot \|y\|$ $(y \in Y)$.

Legyen pl. $(X, \|.\|) := (C_{2\pi}, \|.\|_\infty)$ és valamely $n \in \mathbf{N}$ mellett jelöljük $\mathcal{T}_n$-nel a legfeljebb n-edrendű trigonometrikus polinomok halmazát:

$$\mathcal{T}_n := \left\{ \sum_{k=0}^{n}(a_k c_k + b_k s_k) : a_k, b_k \in \mathbf{R} \right\},$$

ahol $c_k(t) := \cos(kt), s_k(t) := \sin(kt)$ $(k \in \mathbf{N}, t \in \mathbf{R})$. Ekkor $\mathcal{T}_n$ altér $C_{2\pi}$-ben, $S_n : C_{2\pi} \to \mathcal{T}_n$ pedig projekció.

Hasonlóan, ha $[a,b]$ egy kompakt intervallum, akkor legyen $(X, \|.\|) := (C[a,b], \|.\|_\infty)$ és adott $n \in \mathbf{N}$ esetén jelöljük $\mathcal{P}_n$-nel a legfeljebb n-edfokú polinomok $[a,b]$-re való leszűkítéseinek a halmazát. Tegyük fel, hogy kijelöltük $[a,b]$-ben az $a \le x_0 < ... < x_n \le b$ alappontokat, ekkor az ezekre vonatkozó $L_n : C[a,b] \to \mathcal{P}_n$ *Lagrange*-féle interpolációs operátor nyilván projekció.

Vizsgáljuk először a trigonometrikus esetet. Legyen ehhez valamely $f \in C_{2\pi}$ függvény és $t \in \mathbf{R}$ szám esetén f_t az a függvény, amelyre

$$f_t(x) := f(x+t) \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

Világos, hogy bármely $f \in C_{2\pi}$ és $t \in \mathbf{R}$ esetén $f_t \in C_{2\pi}$. Továbbá az f egyenletes folytonossága miatt

$$\|f_t - f_a\|_\infty \to 0 \qquad (a \in \mathbf{R}, t \to a).$$

Mutassuk meg, hogy igaz a következő állítás:

6.6.1. Lemma. *Bármely $A \in L(C_{2\pi}, C_{2\pi})$ operátor, $f \in C_{2\pi}$ függvény és $x \in \mathbf{R}$ szám esetén a*

$$\mathbf{R} \ni t \mapsto \big(Af_t\big)(x-t) \in \mathbf{R}$$

leképezés folytonos.

Bizonyítás. Valóban, ha $a \in \mathbf{R}$, akkor tetszőleges $t \in \mathbf{R}$ esetén

$$\Big|\big(Af_t\big)(x-t) - \big(Af_a\big)(x-a)\Big| \leq$$

$$\Big|\big(Af_t\big)(x-t) - \big(Af_a\big)(x-t)\Big| + \Big|\big(Af_a\big)(x-t) - \big(Af_a\big)(x-a)\Big| =$$

$$\Big|\big(A(f_t - f_a)\big)(x-t)\Big| + \Big|\big(Af_a\big)(x-t) - \big(Af_a\big)(x-a)\Big| \leq$$

$$\|A\| \cdot \|f_t - f_a\|_\infty + \Big|\big(Af_a\big)(x-t) - \big(Af_a\big)(x-a)\Big|.$$

Mivel $|x - t - (x-a)| = |t-a| \to 0 \quad (t \to a)$ és Af_a folytonos függvény, ezért

$$\Big|\big(Af_a\big)(x-t) - \big(Af_a\big)(x-a)\Big| \to 0 \qquad (t \to a),$$

ill. $\|f_t - f_a\|_\infty \to 0 \quad (t \to a)$ miatt $\big(Af_t\big)(x-t) - \big(Af_a\big)(x-a) \to 0 \quad (t \to a)$. Ez éppen azt jelenti, hogy az állításban szereplő leképezés folytonos a-ban. ∎

A továbbiak szempontjából alapvető fontosságú az alábbi, egy *Marcinkiewicz*-től (és részben *Faber*től) származó formula *Berman*-féle általánosítása:

6.6.13. Tétel. *Legyen $n \in \mathbf{N}$, $T : C_{2\pi} \to \mathcal{T}_n$ pedig projekció. Ekkor bármely $f \in C_{2\pi}$ függvényre igaz az alábbi egyenlőség:*

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \big(Tf_t\big)(x-t)\,dt = S_n f(x) \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

Bizonyítás. Elöljáróban jegyezzük meg, hogy a 6.6.1. Lemma alapján a tételben szereplő integrálban az integrandus folytonos függvény, ezért a szóban forgó integrál minden $x \in \mathbf{R}$ esetén létezik. Először azt mutatjuk meg, hogy a bizonyítandó egyenlőség minden trigonometrikus polinomra igaz. Legyen ehhez $U : C_{2\pi} \to C_{2\pi}$ az az operátor, amelyet az

$$Uf(x) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \big(Tf_t\big)(x-t)\,dt \qquad (f \in C_{2\pi}, x \in \mathbf{R})$$

egyenlőség definiál. Tekintettel arra, hogy az S_n operátor is, meg az U leképezés is lineáris, ezért a most mondott állítást elegendő a c_k, $s_k \quad (k \in \mathbf{N})$ függvényekre belátni. Csak c_k-ra részletezzük a bizonyítást, s_k-ra analóg módon végezhető.

Legyen tehát $k \in \mathbf{N}$ és $f := c_k$. Ha $k \leq n$, akkor $S_n f = f$ és $f_t \in \mathcal{T}_n$, ezért $Tf_t = f_t \quad (t \in \mathbf{R})$. Tehát $\big(Tf_t\big)(x-t) = f_t(x-t) = f(x)$, amiből

$$S_n f(x) = f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \big(Tf_t\big)(x-t)\,dt \qquad (x \in \mathbf{R})$$

nyilván következik. Ha viszont $k > n$, akkor

$$f_t(z) = \cos(kz + kt) = c_k(t)c_k(z) - s_k(t)s_k(z) \qquad (z, t \in \mathbf{R}),$$

így $f_t = c_k(t)c_k - s_k(t)s_k \ (t \in \mathbf{R})$. A T linearitása miatt ezért

$$Tf_t = c_k(t)Tc_k - s_k(t)Ts_k \qquad (t \in \mathbf{R}).$$

A bizonyítandó állításban szereplő integrandus tehát a következő alakú:

$$\big(Tf_t\big)(x-t) = c_k(t)\big(Tc_k\big)(x-t) - s_k(t)\big(Ts_k\big)(x-t) =$$

$$c_k(t)\Phi_1(t) - s_k(t)\Phi_2(t) \qquad (t \in \mathbf{R}),$$

ahol

$$\Phi_1(t) := \big(Tc_k\big)(x-t)\ ,\ \Phi_2(t) := \big(Ts_k\big)(x-t) \qquad (t \in \mathbf{R}).$$

Mivel $Tc_k, Ts_k \in \mathcal{T}_n$, ezért nyilván $\Phi_1, \Phi_2 \in \mathcal{T}_n$. A trigonometrikus rendszer ortogonalitása miatt tehát

$$\int_0^{2\pi} c_k(t)\Phi_1(t)\,dt = \int_0^{2\pi} c_k(t)\Phi_2(t)\,dt = 0,$$

azaz

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \big(Tf_t\big)(x-t)\,dt =$$

$$\frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{2\pi} c_k(t)\Phi_1(t)\,dt - \int_0^{2\pi} c_k(t)\Phi_2(t)\,dt\right) = 0 = S_n f(x).$$

Ezzel a *Berman*-formulát trigonometrikus polinomokra beláttuk. A tetszőleges $C_{2\pi}$-beli függvényre való igazolásához emlékeztetünk arra, hogy U lineáris operátor $C_{2\pi}$-ről $C_{2\pi}$-be. Könnyen belátható, hogy korlátos is, ui.

$$\left|Uf(x)\right| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\left(Tf_t\right)(x-t)\right|dt \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\|Tf_t\|_\infty\,dt \leq$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\|T\|\cdot\|f_t\|_\infty\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\|T\|\cdot\|f\|_\infty\,dt = \|T\|\cdot\|f\|_\infty \qquad (f\in C_{2\pi}, x\in\mathbf{R}),$$

azaz $\|Uf\|_\infty \leq \|T\|\cdot\|f\|_\infty \ \ (f\in C_{2\pi})$.

Azt kaptuk tehát, hogy az $S_n-U\in L(C_{2\pi},C_{2\pi})$ operátor a trigonometrikus polinomok halmazára leszűkítve az azonosan nulla leképezés. Mivel S_n-U folytonos is, a trigonometrikus polinomok pedig mindenütt sűrűn vannak $C_{2\pi}$-ben, ezért tetszőleges $f\in C_{2\pi}$ függvényre $(S_n-U)f=0$. Ez éppen a *Berman*-formula igazolását jelenti. ■

Vegyük észre, hogy a fenti bizonyítás végén a következő egyenlőtlenség derült ki:

$$\|S_nf\|_\infty = \|Uf\|_\infty \leq \|T\|\|f\|_\infty \qquad (f\in C_{2\pi}),$$

azaz $\|S_n\|\leq\|T\|$. Ez többek között azt is jelenti, hogy igaz a

6.6.14. Tétel. *A $T: C_{2\pi}\to\mathcal{T}_n \ \ (n\in\mathbf{N})$ projekciók között van legkisebb normájú és ez az S_n trigonometrikus Fourier-részletösszeg-operátor.*

Mivel (ld. 6.6.2. ii) megjegyzés) $\|S_n\|\geq c\ln(n+2) \ \ (n\in\mathbf{N})$ (ahol $c>0$ egy abszolút konstans), ezért egyúttal $\|T\|\geq c\ln(n+2) \ \ (n\in\mathbf{N})$ is igaz. A 6.6.2. *Banach-Steinhaus*-tételt alkalmazva már egyszerűen kapjuk a *Lozinszkij-Harsiladze*-tételt:

6.6.15. Tétel. *Tetszőleges $T_n: C_{2\pi}\to\mathcal{T}_n \ \ (n\in\mathbf{N})$ projekció-sorozat esetén van olyan $f\in C_{2\pi}$ függvény, amelyre a (T_nf) sorozat nem konvergál egyenletesen, sőt $\sup_n\|T_nf\|_\infty=+\infty$.*

A $T_n:=S_n \ \ (n\in\mathbf{N})$ speciális esetben a trigonometrikus *Fourier*-sorokra vonatkozó 6.6.5. (divergencia) Tételhez jutunk.

6.6.5. Megjegyzések.

i) Nem ismert viszont a *Fejér*-féle 6.6.6. Tétel megfelelője, nevezetesen, hogy tetszőleges $T_n: C_{2\pi}\to\mathcal{T}_n \ \ (n\in\mathbf{N})$ projekció-sorozat esetén van-e olyan $f\in C_{2\pi}$ függvény és olyan $x\in\mathbf{R}$ pont, hogy a $(T_nf(x))$ sorozat divergál.

ii) A 6.6.15. Tétel szerint tehát egy $T_n: C_{2\pi}\to\mathcal{T}_n \ \ (n\in\mathbf{N})$ operátor-sorozat esetén a T_n-ek projekciós tulajdonsága és a (T_n) sorozat erős konvergenciája „nem össszeférhető” tulajdonságok.

iii) Emlékeztetünk (ld. a 6.6.7. Tétel előtti fejtegetéseket) a trigonometrikus *Fourier*-sorok ún. *Fejér*-féle (C,1)-közepeit megadó $\sigma_n \ \ (n\in\mathbf{N})$ operátorokra:

$$\sigma_nf := \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}S_kf \qquad (f\in C_{2\pi}).$$

A $\sigma_n : C_{2\pi} \to \mathcal{T}_n$ operátorok nem projekciók, mivel (pl.)

$$\sigma_n(\sin) = \frac{n}{n+1} \sin \neq \sin \qquad (0 < n \in \mathbf{N}),$$

pedig $\sin \in \mathcal{T}_n$. Ugyanakkor legyen valamely $0 < n \in \mathbf{N}$ és $f \in C_{2\pi}$ esetén

$$V_n f := \frac{(2n+1)\sigma_{2n} f - n\sigma_{n-1} f}{n+1}.$$

Mivel

$$(2n+1)\sigma_{2n} f - n\sigma_{n-1} f = \sum_{k=n}^{2n} S_k f,$$

ezért bármely $f \in \mathcal{T}_n$ trigonometrikus polinomra $V_n f = f$. A $V_n : C_{2\pi} \to \mathcal{T}_{2n}$ ún. *De la Vallèe Poussin*-operátorok ezért „majdnem” projekciók (ti. V_n nem $\mathcal{T}_n$-be, hanem $\mathcal{T}_{2n}$-be képez). A 6.6.7. Tétel alapján minden $f \in C_{2\pi}$ esetén $\|\sigma_n f - f\|_\infty \to 0 \quad (n \to \infty)$, következésképpen

$$\|V_n f - f\|_\infty = \left\| \frac{(2n+1)(\sigma_{2n} f - f) - n(\sigma_{n-1} f - f)}{n+1} \right\|_\infty \leq$$

$$\frac{2n+1}{n+1} \|\sigma_{2n} f - f\|_\infty + \frac{n}{n+1} \|\sigma_{n-1} f - f\|_\infty \to 0 \qquad (n \to \infty),$$

azaz $\|V_n f - f\|_\infty \to 0 \;\; (n \to \infty)$.

Az algebrai eset vizsgálatához jelöljük $C^*_{2\pi}$-gal a $C_{2\pi}$-beli páros függvények halmazát, $\mathcal{T}^*_n$-gal $(n \in \mathbf{N})$ pedig a legfeljebb n-edrendű páros trigonometrikus polinomok halmazát. Legyen továbbá $S^*_n \quad (n \in \mathbf{N})$ az S_n részletösszeg-operátornak a $C^*_{2\pi}$-ra való leszűkítése. Ebben az esetben a fenti *Berman*-féle formula megfelelője a következő:

6.6.16. Tétel. *Legyen $n \in \mathbf{N}$, $U : C^*_{2\pi} \to \mathcal{T}^*_n$ pedig projekció. Ekkor bármely $f \in C^*_{2\pi}$ függvényre igaz az alábbi egyenlőség:*

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \big((I^* - U)(f_t + f_{-t}) \big)(x - t)\, dt = f(x) - S^*_n f(x) \qquad (x \in \mathbf{R}),$$

ahol $I^* g := g \quad (g \in C^*_{2\pi})$.

A most mondott állítás bizonyítását nem részletezzük, hiszen az a fentiekkel analóg módon végezhető. Ehhez annyit jegyzünk meg csupán, hogy könnyen belátható módon a páros trigonometrikus polinomok halmaza mindenütt sűrű a $C^*_{2\pi}$ térben. Valóban, ha $f \in C^*_{2\pi}$ és $\varepsilon > 0$ egy tetszőlegesen adott szám, akkor (lévén a trigonometrikus polinomok halmaza mindenütt sűrű $C_{2\pi}$-ben) van olyan F trigonometrikus polinom, amelyre $\|f - F\|_\infty < \varepsilon$. Az

$$F^o(x) := \frac{F(x) + F(-x)}{2} \qquad (x \in \mathbf{R})$$

függvény nyilván páros trigonometrikus polinom és (egyszerűen ellenőrizhetően) $\|f - F^o\|_\infty < \varepsilon$.

Az előbbi módosított *Berman*-formula rögtön elvezet az

$$\|I^* - S_n^*\| \leq 2\|I^* - U\|$$

becsléshez, amiből az alábbi állítást kapjuk:

6.6.17. Tétel. *Legyen $n \in \mathbf{N}$, $P : C[-1,1] \to \mathcal{P}_n$ pedig projekció. Ekkor $2\|I - P\| \geq \|I^* - S_n^*\|$, ahol $Ih := h \quad (h \in C[-1,1])$.*

Bizonyítás. Ha $n \in \mathbf{N}, f \in C_{2\pi}^*$, akkor $f \circ \arccos \in C[-1,1]$. Így $P(f \circ \arccos) \in \mathcal{P}_n$, amiből

$$Uf := \big(P(f \circ \arccos)\big) \circ \cos \in \mathcal{T}_n^*$$

következik. Ha itt $f \in \mathcal{T}_n^*$, akkor $f \circ \arccos \in \mathcal{P}_n$, azaz $P(f \circ \arccos) = f \circ \arccos$. Ezért $Uf = f$.

A fent definiált U operátor nyilván lineáris és

$$\|Uf\|_\infty = \|P(f \circ \arccos)\|_\infty \leq \|P\| \cdot \|f \circ \arccos\|_\infty = \|P\| \cdot \|f\|_\infty \qquad (f \in C_{2\pi}^*).$$

Más szóval U korlátos is, azaz $U : C_{2\pi}^* \to \mathcal{T}_n^*$ projekció és $\|U\| \leq \|P\|$. Mivel bármely $g \in C[-1,1]$ függvényre nyilván

$$Pg = \big(U(g \circ \cos)\big) \circ \arccos,$$

ezért $\|P\| \leq \|U\|$. Tehát $\|P\| = \|U\|$. Ha mindezt P helyett $I - P$-re alkalmazzuk, akkor a módosított *Berman*-formula alapján kapjuk a bizonyítandó állítást. ■

Mivel $\|S_n^*\| \sim \|S_n\| \sim \ln(n+2)$, ezért egy alkalmas $\beta > 0$ abszolút konstanssal

$$\|P\| \geq \beta \ln(n+2) \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Világos, hogy ebben az állításban nincs jelentősége annak, hogy azt éppen a $[-1,1]$ intervallumra mondtuk ki, egy egyszerű transzformációval kapjuk az analóg tételt bármely (kompakt) $[a,b]$-re. A $P := L_n$ speciális esetben a *Faber-Bernstein*-tétel következik:

6.6.18. Tétel. *Bármely $[a,b]$ kompakt intervallum, $n \in \mathbf{N}$ és $a \leq x_{n0} < ... < x_{nn} \leq b$ alappontok esetén $\|L_n\| \geq c \ln(n+2)$, ahol $c > 0$ egy abszolút konstans.*

Megjegyezzük, hogy az algebrai esetben nincs szó a $P : C[a,b] \to \mathcal{P}_n$ projekciók norma szerinti minimalizálásáról. Viszont ismét csak a 6.6.2. *Banach-Steinhaus*-tétel alkalmazásával adódik a fenti *Lozinszkij-Harsiladze*-tétel algebrai változata:

6.6.19. Tétel. *Tetszőleges $P_n : C[a,b] \to \mathcal{P}_n \quad (n \in \mathbf{N})$ projekció-sorozat esetén van olyan $f \in C[a,b]$ függvény, amelyre $(P_n f)$ nem konvergál egyenletesen, sőt $\sup_n \|P_n f\|_\infty = +\infty$.*

A $P_n := L_n \quad (n \in \mathbf{N})$ választással a *Lagrange*-interpolációval kapcsolatos 6.6.8. Tételt kapjuk.

A 6.6.7. Tétel megfogalmazása előtt megmutattuk a *Fejér*-féle $\sigma_n \quad (n \in \mathbf{N})$ operátorok egy karakterisztikus tulajdonságát: $C_{2\pi} \ni f \geq 0$ esetén $\sigma_n f \geq 0 \quad (n \in \mathbf{N})$.

Ezzel a *pozitivitási* tulajdonsággal más fontos operátorok is rendelkeznek. Tekintsük pl. az alábbi $B_n \quad (n \in \mathbf{N})$ *Bernstein*-féle operátorokat:

$$B_n f(x) := \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^k \qquad (x \in [0,1], f \in C[0,1]).$$

Világos, hogy minden $f \geq 0$ függvényre $B_n f \geq 0 \quad (n \in \mathbf{N})$.

Hasonlóan, ha

$$H_n f(x) := \sum_{k=0}^{n} f(x_{nk}) \frac{1 - x x_{nk}}{1 - x_{nk}^2} l_{nk}^2(x) \qquad (x \in [-1,1], f \in C[-1,1])$$

(ahol az

$$x_{nk} := \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n+2}\right) \qquad (k = 0, ..., n)$$

pontok a *Csebisev*-féle alappontok, l_{nk}-k $\quad (k = 0, ..., n)$ az ezekre vonatkozó *Lagrange*-féle alappolinomok), akkor a $H_n \quad (n \in \mathbf{N})$ *Hermite-Fejér*-féle interpolációs operátorok szintén pozitív operátorok a fenti értelemben: $H_n f \geq 0 \quad (n \in \mathbf{N})$ minden $0 \leq f \in C[-1,1]$ függvényre.

Ezeknek a korlátos lineáris operátoroknak tehát egy közös tulajdonsága a pozitivitás. Ez utóbbi megfogalmazásához legyen az $(X, \|.\|)$ normált tér vagy a $(C_{2\pi}, \|.\|_\infty)$ tér, vagy pedig a $(C[a,b], \|.\|_\infty)$ tér (valamely kompakt $[a,b]$ intervallum mellett). A $T : X \to X$ leképezést *pozitív operátornak* nevezzük, ha bármely $X \ni f \geq 0$ esetén $Tf \geq 0$.

Világos, hogy ha T lineáris is, akkor *monoton* is, azaz tetszőleges $f, g \in X$, $f \leq g$ választással $Tf \leq Tg$, ill. a lineáris operátorokat illetően a pozitivitás ekvivalens a monotonitással.

Jelöljük a $T : X \to X$ pozitív lineáris operátorok halmazát $L^+(X)$-szel.

A következő jelöléseket fogjuk még használni:

a) az $X = C[a,b]$ esetben legyen

$$f_0(x) := 1\,,\ f_1(x) := x\,,\ f_2(x) := x^2 \qquad (x \in [a,b]),$$

ill. valamely $t \in [a,b]$ mellett

$$\Phi_t(x) := (x-t)^2 \qquad (x \in [a,b]);$$

b) ha $X = C_{2\pi}$, akkor legyen

$$f_0(x) := 1\,,\ f_1(x) := \cos x\,,\ f_2(x) := \sin x \qquad (x \in \mathbf{R}),$$

ill. valamely $t \in \mathbf{R}$ mellett

$$\Phi_t(x) := \sin^2\left(\frac{x-t}{2}\right) \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

Mivel (könnyen belátható módon) bármely $f, g \in X, |f| \le g$ és $T \in L^+(X)$ esetén $|Tf| \le Tg$, ezért (a triviális $|f| \le \|f\|_\infty \cdot f_0 \quad (f \in X)$ egyenlőtlenség alapján)

$$\|Tf\|_\infty \le \|Tf_0\|_\infty \cdot \|f\|_\infty \qquad (f \in X).$$

Ez azt jelenti, hogy $L^+(X) \subset L(X, X)$, azaz bármely $T : X \to X$ pozitív lineáris operátor egyúttal korlátos is és $\|T\| \le \|Tf_0\|_\infty$. Ha itt még ráadásul $Tf_0 = f_0$ is igaz, akkor $\|T\| = 1$.

A továbbiakban a $T_n \in L^+(X) \quad (n \in \mathbf{N})$ operátor-sorozatok erős konvergenciáját vizsgáljuk. Ehhez először is bebizonyítjuk az alábbi, *Bohman-Korovkin*-tételt:

6.6.20. Tétel. *Bármely $T_n \in L^+(X) \quad (n \in \mathbf{N})$ sorozat esetén az alábbi három kijelentés egyenértékű egymással:*

i) *tetszőleges $f \in X$ függvényre $\|T_n f - f\|_\infty \to 0 \quad (n \to \infty)$;*

ii) *az* i)*-beli konvergencia teljesül az $f = f_0, f_1, f_2$ függvényekre;*

iii) $\|T_n f_0 - f_0\|_\infty \to 0 \quad (n \to \infty)$ *és* $\max_t (T_n \Phi_t)(t) \to 0 \quad (n \to \infty)$.

Bizonyítás. Csak az algebrai esettel foglalkozunk, az erre adott bizonyítás alapján a trigonometrikus változat analóg módon igazolható.

Mivel a ii) állítás az i)-ből triviális módon következik, ezért az említett ekvivalenciához elegendő azt megmutatni, hogy a ii)-ből a iii), ill. a iii)-ból az i) levezethető.

Lássuk először a ii) $\Longrightarrow$ iii) következtetés bizonyítását. Legyen ehhez $n \in \mathbf{N}, t \in [a, b]$, ekkor a T_n linearitása és $\Phi_t = t^2 f_0 - 2t f_1 + f_2$ miatt $T_n \Phi_t = t^2 T_n f_0 - 2t T_n f_1 + T_n f_2$, azaz

$$(T_n \Phi_t)\,(t) = t^2 T_n f_0(t) - 2t T_n f_1(t) + T_n f_2(t) =$$

$$t^2 \big[T_n f_0(t) - 1\big] - 2t \big[T_n f_1(t) - t\big] + \big[T_n f_2(t) - t^2\big].$$

Ha a C valós számot úgy választjuk, hogy bármely $t \in [a, b]$ mellett $\max\{t^2, 2|t|\} \le C$ igaz legyen, akkor

$$\max_{t \in [a,b]} (T_n \Phi_t)(t) \le C \left(\|T_n f_0 - f_0\|_\infty + \|T_n f_1 - f_1\|_\infty + \|T_n f_2 - f_2\|_\infty\right).$$

Mivel a feltételezésünk szerint most a ii) állítás igaz, ezért $\max_{t \in [a,b]} (T_n \Phi_t)(t) \to 0 \quad (n \to \infty)$, azaz a iii) kijelentés rögtön adódik.

Lássuk be most a iii) $\Longrightarrow$ i) következtetést. Ehhez először is emlékeztetünk arra, hogy a *Heine*-tétel (ld. 6.6.1.) miatt f egyenletesen folytonos. Ezért tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan pozitív δ szám, hogy $|f(x) - f(t)| < \varepsilon$, hacsak az $x, t \in [a, b]$ argumentumokra $|x - t| < \delta$ teljesül. Ha ez utóbbi nem igaz, azaz $|x - t| \geq \delta$, akkor $\Phi_t(x) \geq \delta^2$ és nyilván

$$|f(x) - f(t)| \leq 2\|f\|_\infty \leq 2\|f\|_\infty \cdot \frac{\Phi_t(x)}{\delta^2} = \gamma\Phi_t(x),$$

ahol tehát $\gamma := 2\|f\|_\infty/\delta^2$.

A most mondottakból triviálisan következnek az alábbi becslések, mégpedig az $x, t \in [a, b]$ elemek bármely megválasztása mellett:

$$-\varepsilon - \gamma\Phi_t(x) \leq f(t) - f(x) \leq \varepsilon + \gamma\Phi_t(x),$$

azaz ugyanezt függvények közötti egyenlőtlenségekként felírva

$$-\varepsilon f_0 - \gamma\Phi_t \leq f(t)f_0 - f \leq \varepsilon f_0 + \gamma\Phi_t.$$

Innen a $T_n \ \ (n \in \mathbf{N})$ operátor monotonitását kihasználva tetszőleges $[a, b] \ni t$-re azt kapjuk, hogy

$$-\varepsilon T_n f_0 - \gamma T_n\Phi_t \leq f(t)T_n f_0 - T_n f \leq \varepsilon T_n f_0 + \gamma T_n\Phi_t.$$

Ugyanezt egyetlen egyenlőtlenségbe átírva

$$|f(t)T_n f_0(x) - T_n f(x)| \leq \varepsilon T_n f_0(x) + \gamma(T_n\Phi_t)(x) \qquad (t, x \in [a, b]).$$

Speciálisan az $x = t$ választással az

$$|f(t)T_n f_0(t) - T_n f(t)| \leq \varepsilon T_n f_0(t) + \gamma(T_n\Phi_t)(t) \qquad (t \in [a, b])$$

becsléshez jutunk. Ezt és a háromszög-egyenlőtlenséget felhasználva azt kapjuk, hogy

$$|T_n f(t) - f(t)| \leq |T_n f(t) - f(t)T_n f_0(t)| + |f(t)T_n f_0(t) - f(t)| \leq$$

$$\varepsilon T_n f_0(t) + \gamma(T_n\Phi_t)(t) + |f(t)| \cdot |T_n f_0(t) - 1| \qquad (t \in [a, b]).$$

Ezért

$$\|T_n f - f\|_\infty \leq \varepsilon\|T_n f_0\|_\infty + \gamma \max_{t\in[a,b]} (T_n\Phi_t)(t) + \|f\|_\infty \cdot \|T_n f_0 - f_0\|_\infty.$$

A iii) állítás szerint a fenti ε-hoz van olyan $N \in \mathbf{N}$, hogy tetszőleges $n \in \mathbf{N}, n > N$ esetén

$$\max_{t\in[a,b]} (T_n\Phi_t)(t) < \varepsilon \ , \ \|T_n f_0 - f_0\|_\infty < \varepsilon.$$

A $\|T_n f_0 - f_0\|_\infty \to \infty$ feltételből az is következik, hogy $\beta := \sup_n \|T_n f_0\|_\infty < +\infty$, így $n \in \mathbf{N}$, $n > N$ mellett

$$\|T_n f - f\|_\infty \leq (\beta + \gamma + \|f\|_\infty)\varepsilon.$$

Ez pontosan azt jelenti, hogy $\|T_n f - f\|_\infty \to 0 \quad (n \to \infty)$.

Ezzel a *Bohman-Korovkin*-tételt bebizonyítottuk. ■

A tétel kimondása előtt tett megjegyzésünkből rögtön következik, hogy amennyiben a $(T_n f_0)$ sorozat konvergens, akkor $\sup_n \|T_n\| < \infty$. Ez azt jelenti, hogy ha pl. ii) igaz, akkor a *Banach-Steinhaus*-féle 6.6.3. Tétel egyik feltétele, a $T_n \quad (n \in \mathbf{N})$ operátorok egyenletes korlátossága automatikusan teljesül. Az említett tétel másik feltétele viszont azt követelné meg, hogy a (T_n) sorozat erősen konvergáljon (jelen esetben az identikus leképezéshez) egy alkalmas zárt rendszer valamennyi elemére. Ezzel szemben ii)-ben ez a követelmény mindössze három függvényre szűkül, ami jól szemléleteti azt a tényt, hogy egy operátor-sorozatot illetően a pozitivitás mennyivel erősebb tulajdonság a sorozat korlátosságánál.

Mutassuk meg, hogy ha $T_n f_0 = f_0 \quad (n \in \mathbf{N})$, $\delta_n := \max_t (T_n \Phi_t)(t) \quad (n \in \mathbf{N})$, akkor

$$\|T_n f - f\|_\infty \leq C\omega(f, \sqrt{\delta_n}) \qquad (f \in X, n \in \mathbf{N}),$$

ahol

$$\omega(f,\delta) := \sup\{|f(x) - f(t)| : x, t \in \mathcal{D}_f, |x - t| \leq \delta\} \qquad (\delta \geq 0)$$

az f függvény (szokásos) folytonossági modulusa, C pedig a trigonometrikus esetben $1+\pi$, az algebrai esetben 2.

A bizonyítást ismét csak az algebrai esetre részletezve induljunk ki a triviális

$$|f(t) - f(x)| \leq \omega(f, |t - x|)$$

becslésből, ami az ω értelmezése miatt nyilván minden $f \in C[a,b]$ és $t, x \in [a,b]$ mellett fennáll. Az $\omega(f, \lambda\delta) \leq (\lambda + 1)\omega(f,\delta) \quad (\lambda, \delta > 0)$ egyenlőtlenséget, ill. a négyzetes és a mértani közép közti összefüggést kihasználva bármely $\delta > 0$ mellett a következőt írhatjuk:

$$|f(t) - f(x)| \leq \left(\frac{|t-x|}{\delta} + 1\right)\omega\left(f,\delta\right) \leq \left(\frac{|t-x|^2}{2\delta^2} + \frac{3}{2}\right)\omega\left(f,\delta\right) =$$

$$\left(\frac{\Phi_t(x)}{2\delta^2} + \frac{3}{2}\right)\omega\left(f,\delta\right).$$

Innen a 6.6.20. Tétel bizonyításában látottakkal megegyező módon jutunk a

$$\|T_n f - f\|_\infty \leq \|f\|_\infty \cdot \|T_n f_0 - f_0\|_\infty + \frac{1}{2}\left(\frac{\delta_n}{\delta^2} + 3\right)\omega\left(f,\delta\right)$$

becsléshez. Kihasználva a $T_n f_0 = f_0 \;\; (n \in \mathbf{N})$ feltételt azt kapjuk, hogy

$$\|T_n f - f\|_\infty \le \frac{1}{2}\left(\frac{\delta_n}{\delta^2}+3\right)\omega(f,\delta) \qquad (n\in\mathbf{N}).$$

Ha itt valamilyen $n\in\mathbf{N}$ esetén $\delta_n=0$, akkor bármely $\delta>0$ számra

$$\|T_n f - f\|_\infty \le \frac{3}{2}\omega\left(f,\delta\right).$$

Mivel az f egyenletes folytonossága miatt $\omega\big(f,\delta\big)\to 0 \quad (\delta\to +0)$, ezért ekkor $T_n f = f$. Ha viszont $\delta_n>0$, akkor δ helyébe írhatunk $\sqrt{\delta_n}$-et, és kapjuk a

$$\|T_n f - f\|_\infty \le 2\omega\big(f,\sqrt{\delta_n}\big)$$

becslést.

A $T_n f_0 = f_0 \quad (n\in\mathbf{N})$ feltétel triviálisan teljesül pl. a $T_n\in\{\sigma_n, B_n, H_n\}$ speciális esetekben. Egyszerűen megmutatható továbbá, hogy

$$\delta_n = \begin{cases} \dfrac{1}{4n} & (T_n=B_n) \\[2ex] \dfrac{1}{2n+2} & (T_n=\sigma_n) \\[2ex] \dfrac{1}{n+1} & (T_n=H_n) \end{cases} \qquad (0<n\in\mathbf{N}).$$

Valóban, a binomiális tételre hivatkozva bármely $f\in C[0,1], x\in[0,1]$ esetén

$$B_n f_0(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = 1 \qquad (n\in\mathbf{N}),$$

$$B_n f_1(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{k}{n}x^k(1-x)^{n-k} =$$

$$x\sum_{k=1}^{n}\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}x^{k-1}(1-x)^{(n-1)-(k-1)} =$$

$$x\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}x^{k-1}(1-x)^{(n-1)-(k-1)} = x \qquad (1\le n\in\mathbf{N}),$$

ill.

$$B_n f_2(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{k^2}{n^2}x^k(1-x)^{n-k} =$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}\,\frac{(k-1)+1}{n}x^k(1-x)^{n-k} =$$

$$x^2\frac{n-1}{n}\sum_{k=2}^{n}\frac{(n-2)!}{(k-2)!(n-k)!}x^{k-2}(1-x)^{n-k}+\frac{x}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}x^{k-1}(1-x)^{n-k}=$$

$$x^2\frac{n-1}{n}\sum_{k=2}^{n}\binom{n-2}{k-2}x^{k-2}(1-x)^{(n-2)-(k-2)}+\frac{x}{n}\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}x^{k-1}(1-x)^{(n-1)-(k-1)}=$$

$$\frac{n-1}{n}x^2+\frac{x}{n}\qquad(2\le n\in\mathbf{N}).$$

(Könnyen ellenőrizhető, hogy az utóbbi egyenlőség $n=1$ esetén is igaz.) Innen

$$(B_n\Phi_t)(t)=B_nf_2(t)-2tB_nf_1(t)+t^2B_nf_0(t)=$$

$$\frac{n-1}{n}t^2+\frac{t}{n}-2t^2+t^2=\frac{t-t^2}{n}=\frac{t(1-t)}{n},$$

azaz

$$\delta_n=\max_{0\le t\le 1}(B_n\Phi_t)(t)=\max_{0\le t\le 1}\frac{t(1-t)}{n}=\frac{1}{4n}\qquad(0<n\in\mathbf{N})$$

adódik.

Hasonlóan kapjuk, hogy bármely $\mathbf{N}\ni n$-re

$$\sigma_nf_0=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}S_kf_0=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}f_0=f_0,$$

$$\sigma_nf_1=\sigma_n(\cos)=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}S_k(\cos)=\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}S_k(\cos)=$$

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\cos=\frac{n}{n+1}\cos,$$

ill. ugyanígy $\sigma_n(\sin)=\dfrac{n}{n+1}\sin$. Mivel

$$\Phi_t(x)=\sin^2\frac{x-t}{2}=\frac{1-\cos(x-t)}{2}=\frac{1-\cos t\cos x-\sin t\sin x}{2}\qquad(x,t\in\mathbf{R}),$$

ezért

$$\Phi_t=\frac{f_0-f_1\cos t-f_2\sin t}{2}.$$

Így

$$\delta_n = \max_{t\in\mathbf{R}}(\sigma_n\Phi_t)(t) = \max_{t\in\mathbf{R}}\frac{1}{2}\left(1-\frac{n}{n+1}\cos^2 t-\frac{n}{n+1}\sin^2 t\right) =$$

$$\frac{1}{2}\left(1-\frac{n}{n+1}\right)=\frac{1}{2n+2}.$$

A $T_n = H_n$ $(n\in\mathbf{N})$ eset vizsgálatához emlékeztetünk arra, hogy

$$H_nf(x) = \frac{2^{2n}}{(n+1)^2}\sum_{k=0}^{n} f(x_{nk})\frac{\omega_n^2(x)}{(x-x_{nk})^2}(1-xx_{nk}) \qquad (x\in[-1,1]),$$

ahol

$$\omega_n(x) := \prod_{j=0}^{n}(x-x_{nj}) = \frac{1}{2^n}\cos\left((n+1)\,\mathrm{arc}\,\cos\,x\right) \qquad (x\in[-1,1])$$

és az $\dfrac{\omega_n^2(x)}{(x-x_{nk})^2}$ hányados az $x=x_{nk}$ helyen a

$$\lim_{x\to x_{nk}}\frac{\omega_n^2(x)}{(x-x_{nk})^2} = \prod_{k\neq j=0}^{n}(x_{nk}-x_{nj})^2$$

határértékként van értelmezve. Következésképpen

$$(H_n\Phi_t)(t) = \frac{1}{(n+1)^2}\sum_{k=0}^{n}(t-x_{nk})^2\frac{\omega_n^2(t)}{(t-x_{nk})^2}(1-tx_{nk}) =$$

$$\frac{\omega_n^2(t)}{(n+1)^2}\sum_{k=0}^{n}(1-tx_{nk}) = \frac{\omega_n^2(t)}{(n+1)^2}\left(\sum_{k=0}^{n}1-t\sum_{k=0}^{n}x_{nk}\right)=\frac{\omega_n^2(t)}{n+1},$$

hiszen $\sum_{k=0}^{n}x_{nk}=0$. Tehát

$$\delta_n = \max_{-1\le t\le 1}\frac{\omega_n^2(t)}{n+1} = \max_{-1\le t\le 1}\frac{\cos^2((n+1)\,\mathrm{arc}\,\cos\,t)}{n+1} = \frac{1}{n+1}.$$

A fentiekből a

$$\|\sigma_nf-f\|_\infty \le (1+\pi)\omega(f,1/\sqrt{2n+2}) \qquad (f\in C_{2\pi}),$$

$$\|B_nf-f\|_\infty \le 2\omega(f,1/2\sqrt{n}) \qquad (f\in C[0,1]),$$

$$\|H_nf-f\|_\infty \le 2\omega(f,1/\sqrt{n+1}) \qquad (f\in C[-1,1])$$

becslések, ill. a $\sigma_n, B_n, H_n \quad (n \in \mathbf{N})$ operátorok erős konvergenciáját kifejező

$$\|\sigma_n f - f\|_\infty \to 0 \ \ (n \to \infty) \qquad (f \in C_{2\pi}),$$

$$\|B_n f - f\|_\infty \to 0 \ \ (n \to \infty) \qquad (f \in C[0,1]),$$

$$\|H_n f - f\|_\infty \to 0 \ \ (n \to \infty) \qquad (f \in C[-1,1])$$

állítások azonnal következnek. Ez utóbbiak egyúttal igazolásul szolgálnak a *Weierstrass*-féle approximációs tételekekre is:

bármely $f \in C_{2\pi}$ ($g \in C[a,b]$) függvényhez és tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan F trigonometrikus (G algebrai) polinom, amellyel $\|f - F\|_\infty < \varepsilon \quad (\|g - G\|_\infty < \varepsilon)$ teljesül.

6.6.6. Megjegyzések.

i) A *Bohman-Korovkin*-tétel fenti alakja messzemenően általánosítható. Így pl. legyen $\mathcal{A}$ egy legalább két pontból álló *Hausdorff*-féle kompakt topologikus tér (ld. 1.5., ill. 4.1.) és tekintsük a $(C(\mathcal{A}), \|.\|_\infty)$ *Banach*-teret. (Tehát $C(\mathcal{A}) := \{f : \mathcal{A} \to \mathbf{R} : f \text{ folytonos}\}$, $\|f\|_\infty := \max\{|f(x)| : x \in \mathcal{A}\} \quad (f \in C(\mathcal{A}))$. Tegyük fel, hogy valamely $m \in \mathbf{N}$ mellett $a_0, f_0, ..., a_m, f_m \in C(\mathcal{A})$ olyan függvények, amelyek rendelkeznek a következő tulajdonságokkal:

$P(x,y) := \sum_{k=0}^{m} a_k(y) f_k(x) \geq 0 \ \ (x, y \in \mathcal{A})$, ill. a $P(x,y) = 0$ egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha $x = y$.

Ekkor a következő állítás igaz:

ha $T_n : C(\mathcal{A}) \to C(\mathcal{A}) \quad (n \in \mathbf{N})$ pozitív lineáris operátoroknak egy sorozata, akkor a $\|T_n f - f\|_\infty \to 0 \quad (n \to \infty; f \in C(\mathcal{A}))$ erős konvergencia ekvivalens azzal, hogy minden $k = 0, ..., m$ esetén $\|T_n f_k - f_k\|_\infty \to 0 \quad (n \to \infty)$.

ii) Világos, hogy az $\mathcal{A} = [a,b]$ (algebrai) esetben pl. a $P(x,y) := (x-y)^2 \quad (x, y \in [a,b])$ függvény eleget tesz a fentieknek, amikor is $m = 2$ és

$$a_2(y) := f_0(x) := 1\ ,\ f_1(x) := x,$$

$$a_1(y) := -2y\ ,\ f_2(x) := x^2\ ,\ a_0(y) := y^2 \quad (x, y \in [a,b]).$$

Hasonlóan, az $\mathcal{A} = \mathbf{R} \pmod{2\pi}$ (trigonometrikus) esetben a $P(x,y) := 1 - \cos(x-y)$ $(x, y \in \mathbf{R})$ ilyen függvény. Ekkor tehát megint csak $m = 2$ és $x, y \in \mathbf{R}$ esetén

$$a_0(y) := f_0(x) := 1\ ,\ f_1(x) := \cos x,$$

$$a_1(y) := -\cos y\ ,\ f_2(x) := \sin x\ ,\ a_2(y) := -\sin y.$$

6.7. Kompakt operátorok.

Legyenek adottak az $(X_i, \|.\|_i) \quad (i = 1, 2)$ normált terek és egy $f \in X_1 \to X_2$ leképezés. Azt mondjuk, hogy f *kompakt operátor,* ha bármely $Y \subset X_1$, Y korlátos halmaz esetén az $\overline{f[Y]}$ halmaz kompakt. Ha még f folytonos is, akkor f-et *teljesen folytonosnak* nevezzük.

Tegyük fel, hogy $f \in \mathcal{L}(X_1, X_2)$. Ekkor nem nehéz belátni, hogy az f kompaktsága a következővel ekvivalens: van olyan $r > 0$, hogy $\overline{f[K_r(0)]}$ kompakt.

Valóban, a mondott ekvivalencia egyik iránya triviális. Fordítva, ha $Y \subset X_1$ korlátos, akkor alkalmas $s > 0$ számmal $Y \subset K_s(0)$, azaz $\overline{f[A]} \subset \overline{f[K_s(0)]}$. Elég tehát azt meggondolni, hogy $\overline{f[K_s(0)]}$ kompakt, ami a feltételből és az

$$f[K_s(0)] = \frac{s}{r} f[K_r(0)]$$

egyenlőségből rögtön következik. (Ez azt is mutatja, hogy az előbbi ekvivalens feltételben a „van olyan $r > 0$" helyett „minden $r > 0$" is írható.)

A most mondottakból azonnal adódik, hogy ha $f \in \mathcal{L}(X_1, X_2)$ és f kompakt, akkor $f \in L(X_1, X_2)$.

Ha X_2 véges dimenziós, akkor tetszőleges $f \in L(X_1, X_2)$ kompakt. Ui. ekkor bármely $Y \subset X_1$ korlátos halmaz esetén $\overline{f[Y]} \subset X_2$ korlátos és zárt, azaz (ld. 4.3.1. Tétel) $\overline{f[Y]}$ kompakt. Így bármely $(X, \|.\|)$ normált tér esetén az X^* duális tér minden eleme kompakt operátor. Ha viszont az előbbi X nem véges dimenziós, akkor az $I \in L(X, X)$, $Ix := x \quad (x \in X)$ leképezés nem kompakt operátor. Tudjuk ui. (ld. 4.3.2. Tétel), hogy ebben az esetben van korlátos és zárt, de nem kompakt $Y \subset X$ halmaz. Viszont $\overline{I[Y]} = Y$.

Mutassuk meg, hogy tetszőleges folytonos magú integráloperátor (ld. 6.2.) kompakt, azaz igaz a

6.7.1. Tétel. *Legyen $[a, b]$ és $[c, d]$ egy-egy kompakt intervallum, K az $[a, b] \times [c, d]$ „téglalapon" értelmezett folytonos valós függvény, $(X_1, \|.\|_1) := (C[a, b], \|.\|_\infty)$, $(X_2, \|.\|_2) := (C[c, d], \|.\|_\infty)$ és $Tf(x) := \int_a^b f(t)K(t, x)\, dt \quad (f \in X_1, x \in [c, d])$. Ekkor $T \in L(X_1, X_2)$ kompakt operátor.*

Bizonyítás. Az $(X_2, \|.\|_2)$ térbeli kompaktságra vonatkozó *Arzelà*-tétel (ld. 4.3.3. Tétel) miatt azt kell megmutatnunk, hogy bármely $F \subset X_1$ korlátos halmaz esetén a $T[F]$ halmaz elemei egyenletesen korlátosak és egyenlő mértékben egyenletesen folytonosak. Legyen tehát $f \in F, x \in [c, d]$, ekkor

$$|Tf(x)| \leq \|Tf\|_\infty \leq \|T\| \cdot \|f\|_\infty,$$

azaz $\|Tf\|_\infty \leq \|T\| \cdot \sup\{\|g\|_\infty : g \in F\}$. Innen a $T[F]$ halmaz elemeinek az egyenletes korlátossága már nyilvánvaló. Továbbá tetszőleges $x, y \in [c, d]$ mellett

$$|Tf(x) - Tf(y)| \leq \|f\|_\infty \cdot \int_a^b |K(t, x) - K(t, y)|\, dt \leq$$

$$\sup\{\|g\|_\infty : g \in F\} \cdot \int_a^b |K(t, x) - K(t, y)|\, dt.$$

Mivel K egyenletesen folytonos (ui. $[a,b]\times[c,d]$ kompakt $\mathbf{R}^2$-ben a „szokásos” (pl. az $\|.\|$ euklideszi) normára nézve), ezért bármely $\varepsilon>0$ számhoz van olyan $\delta>0$, hogy

$$|K(t,x)-K(t,y)|<\varepsilon \qquad ((t,x),(t,y)\in[a,b]\times[c,d], \|(t,x)-(t,y)\|=|x-y|<\delta)\,.$$

Ha tehát $|x-y|<\delta$, akkor $|Tf(x)-Tf(y)|\le C\varepsilon$, ahol

$$C:=\sup\{\|g\|_\infty : g\in F\}.$$

Így $T[F]$ elemei valóban egyenlő mértékben egyenletesen folytonosak. ■

A továbbiakban kompakt lineáris operátorokkal foglalkozunk. Legyen (a bevezetőben jelzett $(X_i,\|.\|_i)$ $\;(i=1,2)$ normált terek esetén)

$$K(X_1,X_2):=\{U\in L(X_1,X_2) : U \text{ kompakt}\}.$$

6.7.2. Tétel. *Tegyük fel, hogy $U,V\in L(X_1,X_2)$, $\alpha,\beta\in\mathbf{K}$. Ekkor*

i) *$U,V\in K(X_1,X_2)$ esetén $\alpha U+\beta V\in K(X_1,X_2)$;*

ii) *ha $(X_3,\|.\|_3)$ is normált tér, $W\in L(X_2,X_3)$ és U,W közül legalább az egyik kompakt operátor, akkor $WU:=W\circ U\in K(X_1,X_3)$.*

Bizonyítás. Ha $U,V\in K(X_1,X_2)$, $A\subset X_1$ korlátos, akkor bármely

$$y_n=(\alpha U+\beta V)(x_n)\in(\alpha U+\beta V)[A] \qquad (x_n\in A, n\in\mathbf{N})$$

sorozat esetén az $\overline{U[A]}$, $\overline{V[A]}$ halmazok kompaktsága miatt alkalmas (ν_n), (μ_n) indexsorozatokkal az (Ux_{ν_n}), $(Vx_{\nu_{\mu_n}})$ sorozatok konvergensek. Tehát a $\gamma_n:=\nu_{\mu_n}$ $\;(n\in\mathbf{N})$ jelöléssel az (y_{γ_n}) sorozat konvergens. Mivel bármely (X,ρ) metrikus tér és $\emptyset\ne Y\subset X$ halmaz esetén az $\overline{Y}$ halmaz pontosan akkor kompakt, ha tetszőleges Y-beli sorozatnak van konvergens részsorozata (ld. 4.2.2. Tétel), ezért a fentiek alapján $(\alpha U+\beta V)[A]$ kompakt.

Tegyük most fel, hogy W kompakt és legyen $A\subset X_1$ korlátos. Ekkor $U[A]$ korlátos, így

$$\overline{W\,[U[A]]}=\overline{W\circ U[A]}$$

kompakt. Tehát $W\circ U$ kompakt operátor.

Ha viszont U kompakt, akkor az előbbi korlátos $A\subset X_1$ halmazra $\overline{U[A]}$ kompakt. Ezért bármely $x_n\in A$ $\;(n\in\mathbf{N})$ sorozathoz van olyan (ν_n) indexsorozat, amellyel (Ux_{ν_n}) konvergens. Ugyanakkor W folytonos, így (ld. átviteli elv) a $W(Ux_{\nu_n})$ sorozat is konvergens. Ez azt jelenti, hogy a $\overline{W\circ U[A]}$ halmaz kompakt. ■

Mutassuk meg, hogy a kompakt lineáris operátorok $K(X_1,X_2)$ tere zárt az $L(X_1,X_2)$ operátortérben (az $(L(X_1,X_2)$-beli $\|.\|$ operátornormára nézve). Ezt fejezi ki a

6.7.3. Tétel. *Tegyük fel, hogy* $(X_2, \|.\|_2)$ *Banach-tér,* $U_n \in K(X_1, X_2) \quad (n \in \mathbf{N})$, $U \in L(X_1, X_2)$ *és* $\lim(\|U_n - U\|) = 0$. *Ekkor* $U \in K(X_1, X_2)$.

Bizonyítás. Elegendő azt belátni, hogy $\overline{U[K_1(0)]}$ kompakt. Mivel $(X_2, \|.\|_2)$ *Banach*-tér, ezért azt kell bebizonyítanunk (ld. 4.2.3. Tétel), hogy $\overline{U[K_1(0)]}$ teljesen korlátos. Ez utóbbi azzal ekvivalens, hogy $U[K_1(0)]$ teljesen korlátos, azaz, hogy bármely $\varepsilon > 0$ számhoz megadható olyan $Y \subset X_2$ véges halmaz, hogy

$$U[K_1(0)] \subset \bigcup_{y \in Y} K_\varepsilon(y).$$

A feltételek miatt az előbbi ε-hoz van olyan $n \in \mathbf{N}$ és $Y_n \subset X_2$ véges halmaz, amelyekkel

$$\|U_n - U\| < \frac{\varepsilon}{2} \;, \quad U_n[K_1(0)] \subset \bigcup_{y \in Y} K_{\varepsilon/2}(y).$$

Legyen $x \in K_1(0)$. Ekkor $\|U_n x - Ux\|_2 \le \|U_n - U\| \cdot \|x\|_1 < \varepsilon/2$. Továbbá alkalmas $y \in Y_n$ elemmel $\|U_n x - y\|_2 < \varepsilon/2$, azaz

$$\|Ux - y\|_2 \le \|Ux - U_n x\|_2 + \|U_n x - y\|_2 < \varepsilon.$$

Ez éppen azt jelenti, hogy $U[K_1(0)] \subset \bigcup_{y \in Y_n} K_\varepsilon(y)$. ■

6.7.1. Megjegyzések.

i) Legyen $(X_i, \|.\|_i) := (\ell_1, \|.\|_1) \quad (i = 1, 2)$ (ld. 6.4.) és

$$U_k x := (x_0, ..., x_k, 0, 0, ...) \qquad (x = (x_n) \in \ell_1, n \in \mathbf{N}).$$

Ekkor szinte nyilvánvaló, hogy $U_k \in K(X_1, X_2) \quad (k \in \mathbf{N})$, $\lim(U_k x) = x \; (x \in \ell_1)$, de az $Ux := x \quad (x \in \ell_1)$ operátor nem kompakt , ui. ℓ_1 nem véges dimenziós. Ez a példa azt mutatja, hogy az 6.7.3. Tételben nem elegendő az (U_n) operátorsorozat erős konvergenciáját feltételezni.

ii) Mutassuk meg közvetlen számolással is, hogy i)-ben az $(\|U_n - U\|)$ sorozat nem nullasorozat.

iii) Bebizonyítható, hogy ha az $(X_i, \|.\|_i) \quad (i = 1, 2)$ terek közül $(X_2, \|.\|_2)$ *Banach*-tér, akkor bármely $U \in L(X_1, X_2)$ esetén az alábbi ekvivalencia igaz: *U akkor és csak akkor kompakt, ha az adjungáltja* (U^*) *is az* (*Schauder*-tétel).

iv) Részben az előbbi megjegyzésből következik operátorok kompaktságának az alábbi jellemzése: *ha az* $(X_i, \|.\|_i) \quad (i = 1, 2)$ *normált terek közül* $(X_2, \|.\|_2)$ *szeparábilis Banach-tér,* $U \in L(X_1, X_2)$, *akkor* $U \in K(X_1, X_2)$ *azzal ekvivalens, hogy bármely* $g_n \in X_2^* \quad (n \in \mathbf{N})$, $\lim(g_n(x)) = 0 \quad (x \in X_2)$ *esetén* $\lim(\|U^* g_n\|) = 0$ (ahol $\|.\|$ az X_1^*-beli normát jelöli).

v) Az is igaz, hogy az előbbi megjegyzésben a „*szeparábilis*" jelző kicserélhető „*reflexív*" -re.

vi) Tegyük fel, hogy a 6.7.2. Tételben $(X_i, \|.\|_i) = (X, \|.\|)$ $(i = 1, 2, 3)$. Mivel $L(X, X)$ a $\circ$ kompozíció-képzésre, mint szorzásra nézve (könnyen beláthatóan) gyűrű, ill. ezzel a szorzással algebra, ezért az említett tétel algebrai jelentése a következő: $K(X, X)$ az $L(X, X)$ algebrában kétoldali ideál.

vii) Tekintsük a vi) megjegyzésbeli $(X, \|.\|)$ *Banach*-teret. Ekkor tetszőleges $\{0\} \neq Y \subset X$ kompakt részhalmaz egy félnormát indukál $L(X, X)$-ben az alábbiak szerint:

$$\|A\|_Y := \sup\{\|Ax\| : x \in Y\} \qquad (A \in L(X, X)).$$

Ha $z = (z_n, n \in \mathbf{N})$ bázis X-ben (ld. 3.2.) és S_n $(n \in \mathbf{N})$ a 6.6.2. vi) megjegyzésbeli részletösszeg-operátor, akkor egyszerűen adódik, hogy a fenti Y halmazon az $(S_n, n \in \mathbf{N})$ sorozat egyenletesen konvergens. Mivel bármely $\mathbf{N} \ni n$-re $S_n \in K(X, X)$ (ui. $\mathcal{R}_{S_n}$ véges dimenziós), ezért minden $A \in L(X, X)$ operátorra $A \circ S_n \in K(X, X)$ (ld. 6.7.2. Tétel). Így minden $\varepsilon > 0$ mellett van olyan $n \in \mathbf{N}$, hogy

$$\|A \circ S_n - A\|_Y < \varepsilon.$$

Ezzel beláttuk, hogy tetszőlegesen adott $\{0\} \neq Y \subset X$ kompakt részhalmaz és bármely $A \in L(X, X)$, $\varepsilon > 0$ esetén van olyan $B \in K(X, X)$, hogy $\|B - A\|_Y < \varepsilon$. Tehát ez azt jelenti, hogy a $\|.\|_Y$ félnormára nézve $K(X, X)$ mindenütt sűrű $L(X, X)$-ben. Ezt röviden úgy mondjuk, hogy teljesül a *kompakt approximációs tulajdonság* (compact approximation property – CAP). Ha tehát egy *Banach*-tér nem rendelkezik a CAP-pal, akkor nincs benne bázis.

A továbbiakban kompakt önadjungált operátorokkal foglalkozunk (ld. 6.5.). Legyen ehhez $(X, \langle , \rangle)$ *Hilbert*-tér, $X \neq \{0\}$, $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$ $(x \in X)$, $U \in L(X, X)$. Ha $\lambda \in \mathbf{K}$, akkor

$$X_\lambda := \{x \in X : Ux = \lambda x\}$$

zárt altere X-nek (az U operátor *sajátaltere*). Minden olyan λ-t, amelyre $X_\lambda \neq \{0\}$, az U operátor *sajátértékének* nevezünk. Ez tehát azzal ekvivalens, hogy alkalmas $0 \neq x \in X$ elemmel $Ux = \lambda x$ (az ilyen x elemeket az U operátor λ-hoz tartozó *sajátvektorainak* nevezzük). Világos, hogy ekkor $|\lambda| \cdot \|x\| = \|Ux\| \leq \|U\| \cdot \|x\|$, azaz

$$|\lambda| \leq \|U\|.$$

Az U operátor U^* *adjungáltja* (ld. 6.5.) az az egyértelműen létező $U^* \in L(X, X)$ operátor, amelyre

$$\langle Ux, y \rangle = \langle x, U^* y \rangle \qquad (x, y \in X)$$

teljesül. Azt mondjuk, hogy U *önadjungált,* ha $U = U^*$. Legyen

$$S(X, X) := \{U \in L(X, X) : U = U^*\}.$$

6.7.4. Tétel. *Legyen $U \in S(X, X)$. Ekkor*

i) $\langle Ux, x\rangle \in \mathbf{R}$ $(x \in X)$;

ii) $\|U\| = \sup\{|\langle Ux, x\rangle| : x \in X, \|x\| = 1\}$;

iii) *ha λ az U sajátértéke, akkor $\lambda \in \mathbf{R}$;*

iv) *ha $\lambda, \mu \in \mathbf{K}$ és $\lambda \neq \mu$, akkor az X_λ, X_μ sajátalterek egymásra ortogonálisak, azaz $\langle x, y\rangle = 0$ $(x \in X_\lambda,\ y \in X_\mu)$.*

Bizonyítás. Mivel

$$\langle Ux, x\rangle = \langle x, U^*x\rangle = \langle x, Ux\rangle = \overline{\langle Ux, x\rangle} \qquad (x \in X),$$

így az i) állítás igaz. Ha $x \in X$, $\|x\| = 1$, akkor

$$|\langle Ux, x\rangle| \leq \|Ux\| \cdot \|x\| \leq \|U\| \cdot \|x\|^2 = \|U\|.$$

Ezért a ii) állításban szereplő szuprémumot p-vel jelölve, $p \leq \|U\|$. Továbbá tetszőleges $x, y \in X$ esetén i)-t figyelembe véve (ld. 1.3.1. Tétel)

$$\mathrm{Re}\langle Ux, y\rangle = \frac{1}{4}\Big(\langle U(x+y), x+y\rangle - \langle U(x-y), x-y\rangle\Big) \leq$$

$$\frac{1}{4}p\left(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2\right) = \frac{1}{2}p\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$$

adódik. Legyen itt $\|x\| = 1$ olyan, hogy $Ux \neq 0$, ill. $y := Ux/\|Ux\|$. Ekkor

$$\mathrm{Re}\langle Ux, y\rangle = \|Ux\| \leq p,$$

azaz $\|U\| \leq p$, amiből ii) már következik.

Legyen most λ sajátértéke U-nak, $0 \neq x \in X$ pedig egy sajátvektor: $Ux = \lambda x$. Ekkor i) szerint

$$\lambda = \frac{\langle Ux, x\rangle}{\langle x, x\rangle} \in \mathbf{R},$$

ami iii) igazolását jelenti.

Végül, ha a iv)-beli feltételek mellett $x \in X_\lambda$, $y \in X_\mu$, akkor $x = 0$ vagy $y = 0$ mellett iv) triviális, különben iii) szerint $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ és (pl.) $\lambda \neq 0$ esetén (ami $\lambda \neq \mu$ miatt feltehető)

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{\lambda}\langle Ux, y\rangle = \frac{1}{\lambda}\langle x, Uy\rangle = \frac{\mu}{\lambda}\langle x, y\rangle,$$

amiből $\lambda \neq \mu$ miatt $\langle x, y\rangle = 0$ következik. Ezzel iv)-et, azaz a 6.7.4. Tételt beláttuk. ■

6.7.5. Tétel. *Bármely $U \in S(X,X) \cap K(X,X)$ operátornak van sajátértéke.*

Bizonyítás. Nyilván feltehető, hogy $U \neq 0$. Legyen

$$m := \inf\{\langle Ux, x\rangle : x \in X, \|x\| = 1\}\ ,\ M := \sup\{\langle Ux, x\rangle : x \in X, \|x\| = 1\}\,.$$

Ekkor a 6.7.4. Tétel szerint

$$\|U\| = \max\{|m|, M\}.$$

Megmutatjuk, hogy

$$\lambda := \begin{cases} m & (\|U\| = |m|) \\ M & (\|U\| = M) \end{cases}$$

sajátérték. Csak az $\|U\| = M\,(> 0)$ esetre részletezve az okoskodást ($\|U\| = m$ esetén analóg a bizonyítás), legyen $x_n \in X$, $\|x_n\| = 1 \quad (n \in N)$ olyan sorozat, amelyre

$$M = \lim\left(\langle Ux_n, x_n\rangle\right).$$

Mivel U kompakt, ezért egy alkalmas (n_k) indexsorozattal az (Ux_{n_k}) sorozat is konvergens. Továbbá

$$\|Ux_{n_k} - Mx_{n_k}\|^2 = \|Ux_{n_k}\|^2 - 2M\langle Ux_{n_k}, x_{n_k}\rangle + M^2 \leq$$

$$\|U\|^2 + M^2 - 2M\langle Ux_{n_k}, x_{n_k}\rangle = 2M(M - \langle Ux_{n_k}, x_{n_k}\rangle) \to 0 \qquad (k \to \infty).$$

Innen viszont az következik, hogy $\lim(Ux_{n_k} - Mx_{n_k}) = 0$, azaz, hogy

$$x_{n_k} = \frac{1}{M}\Big(Ux_{n_k} - \big(Ux_{n_k} - Mx_{n_k}\big)\Big) \to z \qquad (k \to \infty)$$

egy alkalmas $z \in X$ elemmel. Az U folytonossága miatt tehát

$$0 = \lim(Ux_{n_k} - Mx_{n_k}) = Uz - Mz,$$

azaz $Uz = Mz$. Mivel $\|z\| = \lim(\|x_{n_k}\|) = 1$, ezért $z \neq 0$, így M valóban sajátértéke U-nak. ■

6.7.2. Megjegyzések.

i) Ha tehát az $U \in S(X,X) \cap K(X,X)$ operátornak egyetlen sajátértéke van és ez a nulla, akkor $U = 0$.

ii) Mivel a 6.7.5. Tételben szereplő U operátor bármely μ sajátértékére $|\mu| \leq \|U\|$ igaz, ezért a 6.7.5. Tétel bizonyítása más olvasatban a következőt jelenti:

$$\max\{|\mu| : \mu \text{ sajátértéke } U\text{-nak}\} = \|U\|.$$

iii) Legyen $0 < n \in \mathbf{N}$, $\langle x, y\rangle := \sum_{k=1}^n x_k \overline{y_k} \quad (x = (x_1, ..., x_n),\ y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbf{C}^n)$. Ekkor $\|x\| = \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^n |x_k|^2} \quad (x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbf{C}^n)$ és

$$S(X,X) \cap K(X,X) = S(X,X) \cap L(X,X) =$$

$$S(X,X) = \{A \in \mathbf{C}^{n\times n} : A = A^*\},$$

ahol $A = (a_{jk}) \in \mathbf{C}^{n\times n}$ esetén $A^* = (\overline{a_{kj}}) \in \mathbf{C}^{n\times n}$ az A mátrix *adjungáltja*. Ha tehát $A = A^*$ (röviden: A *hermitikus*), akkor

$$\|A\| = \sup\{\|Ax\|_2 : x \in \mathbf{C}^n, \|x\|_2 = 1\} = \max\{|\lambda| : \lambda \text{ sajátértéke } A\text{-nak}\}.$$

iv) Az előbbi megjegyzésben szereplő jelölésekkel legyen $A \in \mathbf{C}^{n\times n}$. Világos, hogy $A^*A \in S(X,X)$. Ha λ sajátértéke A^*A-nak, akkor valamilyen $x \in \mathbf{C}^n$, $\|x\|_2 = 1$ vektorral $A^*Ax = \lambda x$, azaz

$$\lambda = \langle A^*Ax, x\rangle = \langle Ax, Ax\rangle = \|Ax\|_2^2,$$

tehát $0 \leq \lambda \in \mathbf{R}$. Továbbá (ld. 6.7.4. Tétel, ill. 6.3.2. ii) megjegyzés)

$$\|A\|^2 = \sup\left\{\|Ax\|_2^2 : x \in \mathbf{C}^n, \|x\|_2 = 1\right\} =$$

$$\sup\{\langle Ax, Ax\rangle : x \in \mathbf{C}^n, \|x\|_2 = 1\} =$$

$$\sup\{\langle x, A^*Ax\rangle : x \in \mathbf{C}^n, \|x\|_2 = 1\} =$$

$$\sup\{|\langle A^*Ax, x\rangle| : x \in \mathbf{C}^n, \|x\|_2 = 1\} = \|A^*A\|.$$

Innen a ii) megjegyzést figyelembe véve azt kapjuk, hogy

$$\|A\| = \sqrt{\|A^*A\|} = \max\{\sqrt{\lambda} : \lambda \text{ sajátértéke } A^*A\text{-nak}\}$$

(az A mátrix ún. *spektrálnormája*.)

Az alábbi jelöléseket fogjuk használni: ha $U \in L(X,X)$, $\lambda \in \mathbf{C}$, akkor $P_\lambda : X \to X_\lambda$ jelenti az X_λ altérre való projekciót (ld. 5.3.3. iv) megjegyzés). Tehát bármely $x \in X$ esetén $P_\lambda x \in X_\lambda$ és tetszőleges $y \in X_\lambda$ esetén $P_\lambda y = y$. Legyen továbbá $I : X \to X$ az identikus operátor, azaz $Ix := x$ $(x \in X)$.

6.7.6. Tétel (*Hilbert-Schmidt*). *Bármely $U \in S(X,X) \cap K(X,X)$ operátornak legfeljebb megszámlálható sok sajátértéke van, U pedig előállítható (az $\|.\|$ operátornorma szerint konvergens) $\sum_{k=1}^{N} \lambda_k P_{\lambda_k}$ alakban, ahol $N \in \mathbf{N}$ vagy $N = +\infty$ és $\lambda_1, \lambda_2, ...$ az U összes, páronként különböző, nem nulla sajátértékét jelenti.*

Bizonyítás. Nyilván feltehető, hogy $U \neq 0$. Legyen λ egy sajátértéke U-nak. Ekkor a 6.7.4. Tétel miatt $\lambda \in \mathbf{R}$ és

$$\lambda P_\lambda = U P_\lambda = P_\lambda U.$$

Valóban, bármely $x \in X$ esetén $P_\lambda x \in X_\lambda$, ezért $U(P_\lambda x) = \lambda P_\lambda x$, azaz $UP_\lambda = \lambda P_\lambda$. Továbbá (könnyen ellenőrizhetően) P_λ, $\lambda P_\lambda \in S(X,X)$, ezért az előbbiek szerint UP_λ önadjungált. Következésképpen

$$UP_\lambda = (UP_\lambda)^* = P_\lambda^* U^* = P_\lambda U$$

is igaz.

Legyen (ld. 6.7.4. Tétel és 6.7.2. ii) megjegyzés) $U_1 := U$ és $\lambda_1 \in \mathbf{R}$ olyan sajátértéke U_1-nek, amelyre $|\lambda_1| = \|U_1\| > 0$. Ha

$$U_2 := U_1 - \lambda_1 P_{\lambda_1},$$

akkor az előbbiek, ill. az 6.7.2. Tétel alapján

$$U_2 = U_1(I - P_{\lambda_1}) =: U_1 \tilde{P}_{\lambda_1} \in S(X,X) \cap K(X,X).$$

Világos, hogy $\|U_2\| \leq \|\tilde{P}_{\lambda_1}\| \cdot \|U_1\| \leq \|U_1\|$, hiszen

$$\|\tilde{P}_{\lambda_1} x\| = \|x - P_{\lambda_1} x\| \leq \|x\| \qquad (x \in X),$$

azaz $\|\tilde{P}_{\lambda_1}\| \leq 1$. (Itt felhasználtuk azt, hogy a pitagoraszi-összefüggés szerint (ld. 1.3.1. Tétel) $\|x\|^2 = \|P_{\lambda_1} x\|^2 + \|x - P_{\lambda_1} x\|^2$.)

A fentiekhez hasonlóan van olyan $\lambda_2 \in \mathbf{R}$ sajátértéke U_2-nek, amelyre $|\lambda_2| = \|U_2\|$. Ekkor $|\lambda_2| \leq |\lambda_1|$. Belátjuk továbbá, hogy λ_1 nem sajátértéke U_2-nek. Különben lenne olyan $0 \neq x \in X$, amelyre $U_2 x = \lambda_1 x$, azaz

$$U_1 x - \lambda_1 P_{\lambda_1} x = \lambda_1 x.$$

Utóbbiból az következne, hogy

$$P_{\lambda_1}(U_1 x - \lambda_1 P_{\lambda_1} x) = P_{\lambda_1}(\lambda_1 x) = \lambda_1 P_{\lambda_1} x.$$

A bizonyítás elején mondottakat is figyelembe véve itt

$$P_{\lambda_1}(U_1x - \lambda_1 P_{\lambda_1}x) = P_{\lambda_1}U_1x - \lambda_1 P_{\lambda_1}^2 x = \lambda_1 P_{\lambda_1}x - \lambda_1 P_{\lambda_1}x = 0,$$

tehát $\lambda_1 P_{\lambda_1}x = 0$. Mivel $\lambda_1 \neq 0$, ezért $P_{\lambda_1}x = 0$, továbbá $U_1x = \lambda_1 x$, amiből meg $x \in X_{\lambda_1}$ adódna. Ez utóbbiból azonban azt kapnánk, hogy $x = P_{\lambda_1}x = 0$, ami nem igaz.

Legyen most $\lambda \neq 0$ sajátértéke U_2-nek és lássuk be, hogy λ sajátértéke U_1-nek is és

$$\{x \in X : U_1x = \lambda x\} = \{x \in X : U_2x = \lambda x\}.$$

Ui. legyen $0 \neq x \in X$ egy λ-hoz tartozó sajátvektora U_2-nek: $U_2x = \lambda x$, azaz

$$U_1x - \lambda_1 P_{\lambda_1}x = \lambda x.$$

Ekkor

$$P_{\lambda_1}(U_1x - \lambda_1 P_{\lambda_1}x) = P_{\lambda_1}U_1x - \lambda_1 P_{\lambda_1}x = \lambda P_{\lambda_1}x.$$

De tudjuk, hogy $P_{\lambda_1}U_1 = \lambda_1 P_{\lambda_1}$, ezért $\lambda P_{\lambda_1}x = 0$. Mivel $\lambda \neq 0$, így $P_{\lambda_1}x = 0$, azaz $U_1x = \lambda x$. Tehát λ valóban sajátértéke U_1-nek. Ezzel egyúttal azt is beláttuk, hogy

$$\{x \in X : U_2x = \lambda x\} \subset \{x \in X : U_1x = \lambda x\}.$$

Ha viszont $z \in X$ és $U_1z = \lambda z$, akkor az (előbbiek szerinti) $\lambda \neq \lambda_1$ egyenlőtlenség és a 6.7.4. Tétel alapján X_{λ_1} és X_λ ortogonális egymásra, azaz

$$\langle P_{\lambda_1}z, y\rangle = \langle z, P_{\lambda_1}y\rangle = 0 \qquad (y \in X).$$

Ez azonban csak úgy lehetséges, ha $P_{\lambda_1}z = 0$, amiből $U_2z = \lambda z$ következik. Tehát

$$\{x \in X : U_1x = \lambda x\} \subset \{x \in X : U_2x = \lambda x\}$$

is fennáll.

Ha $U_2 \neq 0$, akkor az előbbi eljárást megismételve legyen $U_3 := U_2 - \lambda_2 P_{\lambda_2}$ és i.t. Teljes indukcióval okoskodva, tegyük fel, hogy

$$1 \leq n \in \mathbf{N}, U_1 := U, U_2, ..., U_n \in S(X,X) \cap K(X,X),$$

$\lambda_1, ..., \lambda_n$ a megfelelő sajátértékek és

i) $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq ... \geq |\lambda_n|$;

ii) $\|U_k\| = |\lambda_k|$ $(k = 1, ..., n)$;

iii) $U_{k+1} = U_k - \lambda_k P_{\lambda_k} = U - \sum_{j=1}^{k} \lambda_j P_{\lambda_j} \quad (k = 1, ..., n-1)$.

Ekkor a λ_k-k páronként különböző sajátértékei U-nak. Két eset lehetséges:

1^o van olyan $1 \leq n \in \mathbf{N}$, hogy $U_n = 0$, amikor is $U = \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j P_{\lambda_j}$;

2^o minden $1 \leq n \in \mathbf{N}$ esetén $U_n \neq 0$. Mutassuk meg, hogy ekkor $\lim(\lambda_n) = 0$. Valóban, különben lenne olyan $\delta > 0$, amellyel $|\lambda_n| \geq \delta \quad (n = 1, 2, ...)$. Legyen $x_n \in X_{\lambda_n}$, $\|x_n\| = 1 \quad (n = 1, 2, ...)$, ekkor bármely két különböző $n, m = 1, 2, ...$ esetén az X_{λ_n}, X_{λ_m} alterek ortogonalitása miatt

$$\|Ux_m - Ux_n\|^2 = \|\lambda_m x_m - \lambda_n x_n\|^2 = |\lambda_m|^2 + |\lambda_n|^2 \geq 2\delta^2.$$

Innen persze az is adódna, hogy az (Ux_n) sorozattal együtt annak bármely részsorozata is divergens, ami ellentmond az U kompaktsága miatt annak, hogy az (Ux_n) sorozatnak van konvergens részsorozata.

Tehát

$$\lim(|\lambda_n|) = \lim(\|U_n\|) = \lim\left(\left\|U - \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j P_{\lambda_j}\right\|\right) = 0,$$

azaz $U = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j P_{\lambda_j}$.

Végül megmutatjuk, hogy U minden λ sajátértéke vagy nulla vagy alkalmas $k = 1, 2, ...$ mellett $\lambda = \lambda_k$. Ha ui. minden $k = 1, 2, ...$ esetén $\lambda \neq \lambda_k$ és $0 \neq x \in X$ olyan, hogy $Ux = \lambda x$, akkor az U-ra már bebizonyított előállítás alapján

$$\lambda x = Ux = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j P_{\lambda_j} x.$$

Innen bármely $n = 1, 2, ...$ mellett azt kapjuk, hogy

$$\lambda P_{\lambda_n} x = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j P_{\lambda_n}\left(P_{\lambda_j} x\right) = \lambda_n P_{\lambda_n} x,$$

ui. $X_{\lambda_n}, X_{\lambda_j} \quad (j \neq n)$ ortogonalitása miatt $P_{\lambda_n}\left(P_{\lambda_j} x\right) = 0$. Tehát $\lambda P_{\lambda_n} x = \lambda_n P_{\lambda_n} x$, ezért $P_{\lambda_n} x = 0$ $(n = 1, 2, ...)$. Így $\lambda x = 0$, amiből $\lambda = 0$. ■

6.7.3. Megjegyzések.

i) Ha a fenti tételben $\lambda \neq 0$ sajátértéke U-nak, akkor az X_λ sajátaltér véges dimenziós. Ui. legyen $E \subset X_\lambda$ zárt és korlátos halmaz. Ekkor

$$E^* := \left\{\frac{x}{\lambda} \in X : x \in E\right\}$$

korlátos, ezért U kompaktsága miatt $\overline{U[E^*]}$ kompakt. De $U[E^*] = E$, azaz $\overline{U[E^*]} = \overline{E} = E$, ami azt jelenti, hogy az X_λ altér minden korlátos és zárt részhalmaza kompakt. A normált terekbeli kompaktságra vonatkozó *Riesz*-tétel (ld. 4.3.2. Tétel) alapján tudjuk, hogy ekkor X_λ szükségképpen véges dimenziós.

ii) Megmutatható, hogy $\overline{\mathcal{R}_U}$ nem más, mint az $X_0 := \{x \in X : Ux = 0\}$ altér ortogonális kiegészítő altere: $X = X_0 \oplus \overline{\mathcal{R}_U}$ (ld. 5.3.3. i) megjegyzés).

iii) Legyen a *Hilbert-Schmidt*-tételben $k = 1, 2, ...$ és válasszunk X_{λ_k}-ban egy Φ_k teljes ortonormált rendszert. (Ez i) szerint véges.) Ha az így kapott Φ_k rendszereket egyetlen $\Phi = \{x_1, x_2, ...\}$ rendszerben egyesítjük, akkor Φ teljes ortonormált rendszer $\mathcal{R}_U$-ban (és könnyen belátható módon $\overline{\mathcal{R}_U}$-ban is), minden eleme az U sajátvektora: $Ux_k = \mu_k x_k$ $(k = 1, 2, ...)$. A ii) megjegyzés és a *Riesz*-felbontási tétel (ld. 5.3.3. Tétel) miatt bármely $x \in X$ egyértelműen írható fel $x = x^* + \tilde{x}$ alakban, ahol $x^* \in X_0$, $\tilde{x} \in \overline{\mathcal{R}_U}$. Az $\tilde{x}$ elemet *Fourier*-sorba fejtve a Φ rendszer szerint azt kapjuk, hogy

$$\tilde{x} = \sum_k \alpha_k x_k \qquad (\alpha_k = \langle \tilde{x}, x_k \rangle \ \ (k = 1, 2, ...)).$$

Tehát $Ux^* = 0$ miatt $Ux = \sum_k \alpha_k \mu_k x_k$.

iv) Tegyük fel, hogy az előbbi megjegyzésben $(X, \langle , \rangle)$ szeparábilis is. Ekkor X_0-ban is választhatunk egy ortonormált bázist, amit a iii)-beli Φ-vel egyesítve egy (továbbra is) x_k-val $(k = 1, 2, ...)$ jelölt ortonormált bázist kapunk X-ben. Itt minden x_k sajátvektora U-nak (a megfelelő sajátértékeket is μ_k-val jelölve ez utóbbiak között már lehetnek nullák is). Ekkor tehát bármely $x \in X$ előállítható a sajátvektorbázis szerint $x = \sum_k \alpha_k x_k$ alakban és $Ux = \sum_k \alpha_k \mu_k x_k$.

v) Ha iv)-ben X véges dimenziós, azaz $U = A \in \mathbf{C}^{n \times n}$ $(n = 1, 2, ...)$ egy hermitikus mátrix, akkor $x_1, ..., x_n \in \mathbf{C}^n$ az A ortonormált sajátvektoraiból álló bázisa $\mathbf{C}^n$-nek, $\mu_1, ..., \mu_n$ a megfelelő (valós) sajátértékek és bármely $x \in \mathbf{C}^n$ esetén

$$Ax = \sum_{j=1}^{n} \alpha_k \mu_k x_k.$$

Ha a $T \in \mathbf{C}^{n \times n}$ mátrix oszlopvektorai rendre az $x_1, ..., x_n$ vektorok, akkor T nem szinguláris, a $T^{-1}AT$ mátrix diagonális, amelynek a főátlójában a $\mu_1, ..., \mu_n$ sajátértékek vannak.

vi) Világos, hogy iv)-ben

$$\langle Ux, x \rangle = \sum_k \mu_k |\alpha_k|^2 \qquad (x \in X).$$

Ha X véges dimenziós, azaz (ld. v)) $U = A \in \mathbf{C}^{n \times n}$ $(n = 1, 2, ...)$ egy hermitikus mátrix, akkor

$$\langle Ax, x \rangle = \sum_{k=1}^{n} \mu_k |\alpha_k|^2 \qquad (x \in \mathbf{C}^n)$$

(ld. kvadratikus alakok *főtengelytranszformációja*).

vii) Legyen $(X, \|.\|)$ tetszőleges normált tér, $Ix := x \quad (x \in X)$, $Y \subset X$ altér és $A \in \mathcal{L}(Y, X)$. Ekkor bármely $\lambda \in \mathbf{K}$ esetén három eset lehetséges:

1^o $A - \lambda I$ nem invertálható;

2^o $(A - \lambda I)$-nek van inverze és $(A - \lambda I)^{-1} \in L(X, Y)$;

3^o $(A - \lambda I)$-nek van inverze, de $(A - \lambda I)^{-1} \notin L(X, Y)$.

Az 1^o eset nyilván azzal ekvivalens, hogy alkalmas $0 \neq x \in Y$ elemre $Ax = \lambda x$. Ekkor λ-t az A *sajátértékének,* x-et pedig az A (λ-hoz tartozó) *sajátvektorának* nevezzük. A λ szám *reguláris,* ha a 2^o eset áll fenn. (Így minden sajátérték nem reguláris.) Legyen $\operatorname{Sp} A$ a nem reguláris értékek halmaza (az A operátor *spektruma*). Ha $(X, \|.\|)$ *Banach*-tér, $A \in L(X, X)$, akkor (a *Banach*-féle inverz-tétel (ld. 6.8.5. Tétel) miatt) bármely $\lambda \in \mathbf{K}$ akkor és csak akkor reguláris, ha tetszőleges $y \in X$ elemhez egyértelműen van olyan $x \in X$, hogy $Ax - \lambda x = y$.

viii) Tekintsünk most egy $A \in L(X, X)$ korlátos lineáris operátort. Megmutatható, hogy létezik

$$\alpha_A := \lim \left(\sqrt[n]{\|A^n\|} \right) = \inf\{ \sqrt[n]{\|A^n\|} : 0 < n \in \mathbf{N}\}$$

(*A spektrálsugara*), $\operatorname{Sp} A \subset \{\lambda \in \mathbf{K} : |\lambda| \leq \alpha_A\}$, ill. az, hogy $\operatorname{Sp} A$ zárt halmaz. Ha $A \in K(X, X)$ és X nem véges dimenziós, akkor $0 \in \operatorname{Sp} A$. Különben ui. $A^{-1} \in L(X, X)$ lenne, amiből a 6.7.2. Tétel szerint $I = A^{-1}A \in K(X, X)$ következne, ami tudjuk, hogy nem igaz. Sőt (egy nem triviális tétel szerint), ha $\mathbf{K} := \mathbf{C}$, akkor bármely $(X, \|.\|)$ *Banach*-tér és $A \in L(X, X)$ esetén $\operatorname{Sp} A \neq \emptyset$ és

$$\alpha_A = \max\{|\lambda| : \lambda \in \operatorname{Sp} A\}.$$

Továbbá tetszőleges $(X, \|.\|)$ *Banach*-térre és $A \in L(X, X)$ operátorra igaz, hogy

$$\operatorname{Sp} A^* = \overline{\operatorname{Sp} A} := \{\overline{\lambda} \in \mathbf{K} : \lambda \in \operatorname{Sp} A\}$$

(ahol $A^* \in L(X^*, X^*)$ az A operátor adjungáltja).

ix) Ha $(X, \langle , \rangle)$ (komplex) *Hilbert*-tér, $A \in S(X, X)$,

$$m := \inf\{\langle Ax, x\rangle : x \in X, \|x\| = 1\} \ , \ \ M := \sup\{\langle Ax, x\rangle : x \in X, \|x\| = 1\},$$

akkor az alábbiak láthatók be:

$$m, M \in \operatorname{Sp} A \ , \ \ \operatorname{Sp} A \subset [m, M].$$

Ha itt A még kompakt is, akkor $\operatorname{Sp} A$ legfeljebb megszámlálható, minden eleme vagy nulla vagy az A sajátértéke és a $\operatorname{Sp} A$ halmaznak legfeljebb a nulla lehet torlódási pontja.

6.8. Nyílt leképezések.

Legyenek adottak az $(X_i, \|.\|_i)$ $(i = 1, 2)$ normált terek és az $A \in \mathcal{L}(X_1, X_2)$ lineáris leképezés. Tegyük fel, hogy $A : X_1 \to X_2$ szürjektív és invertálható, ekkor nyilván $A^{-1} \in \mathcal{L}(X_2, X_1)$. A továbbiakban azt a kérdést vizsgáljuk, hogy ha az A leképezés folytonos, akkor igaz-e ugyanez A^{-1}-re, azaz (ld. 6.3.1. Tétel) következik-e $A \in L(X_1, X_2)$-ből $A^{-1} \in L(X_2, X_1)$.

Könnyű példát adni arra, hogy a fenti kérdésre a válasz általában az, hogy nem. Legyen ui.

$$X_i := \{f \in C^\infty[0, 1] : f(0) = 0\} \ , \ \|.\|_i := \|.\|_\infty \qquad (i = 1, 2)$$

és $If := \int_0 f \quad (f \in X_1)$. Ekkor egyszerűen ellenőrizhető, hogy $I : X_1 \to X_2$ bijekció, $I \in L(X_1, X_2)$, $\|I\| = 1$ és $I^{-1}f = f' \quad (f \in X_2)$. Tudjuk (ld. 6.2.), hogy $D := I^{-1} \notin L(X_2, X_1)$.

Mit jelent az, hogy $A^{-1} \in L(X_2, X_1)$? Egyrészt azt, hogy $A^{-1} : X_2 \to X_1$ lineáris leképezés (ami az A-ra tett feltételek mellett mindig igaz), másrészt azt, hogy A^{-1} folytonos is. Ez utóbbi azt követeli meg (ld. 6.1.1. ii) megjegyzés), hogy

$$\text{bármely } Y \subset X_1, Y \text{ nyílt} : \left(A^{-1}\right)^{-1}[Y] = A[Y] \;\text{ nyílt.}$$

Nevezzünk egy $f : X_1 \to X_2$ leképezést *nyíltnak,* ha

$$\text{minden } Y \subset X_1, Y \text{ nyílt: } f[Y] \;\text{ nyílt.}$$

6.8.1. Tétel. *Az $A \in \mathcal{L}(X_1, X_2)$ lineáris operátor akkor és csak akkor nyílt, ha az X_1 térbeli nulla bármely környezetét az A olyan halmazra képezi le, amelynek az X_2 tér nulleleme belső pontja, azaz: tetszőleges $r > 0$ számhoz van olyan $\rho > 0$ szám, hogy $K_\rho(0) \subset A[K_r(0)]$.*

Bizonyítás. A szükségesség nyilvánvaló: ha ui. A nyílt, akkor $K_r(0)$ nyílt halmaz lévén, az $A[K_r(0)]$ képhalmaz is nyílt. De A lineáris, ezért $A0 = 0$, azaz $0 \in A[K_r(0)]$, tehát $0 \in X_2$ belső pontja $A[K_r(0)]$-nak.

Az elégségességhez legyen $Y \subset X_1$ nyílt halmaz (nyilván feltehető, hogy $Y \neq \emptyset$) és $z \in A[Y]$. Ekkor van olyan $y \in Y$, amellyel $z = Ay$. Mivel Y nyílt, ezért egy alkalmas $r > 0$ sugárral $K_r(y) \subset Y$, így $A[K_r(y)] \subset A[Y]$. De $K_r(y) = y + K_r(0)$, azaz

$$A[K_r(y)] = Ay + A[K_r(0)] = z + A[K_r(0)] \subset A[Y].$$

A feltétel szerint most van olyan $\rho > 0$, amelyre $K_\rho(0) \subset A[K_r(0)]$. Így

$$K_\rho(z) = z + K_\rho(0) \subset z + A[K_r(0)] \subset A[Y].$$

Más szóval z belső pontja $A[Y]$-nak, azaz $A[Y]$ nyílt halmaz. Ezzel a 6.8.1. Tételt beláttuk. ■

6.8.2. Tétel. *Tegyük fel, hogy az $A \in \mathcal{L}(X_1, X_2)$ lineáris operátor $\mathcal{R}_A$ értékkészlete második kategóriájú. Ekkor van olyan $q > 0$ szám, hogy bármely $r > 0$ esetén $K_r(0) \subset \overline{A[K_{qr}(0)]}$.*

Bizonyítás. Világos, hogy $\mathcal{R}_A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A[K_n(0)]$. A feltétel szerint $\mathcal{R}_A$ második kategóriájú (ld. 2.2.2. i) megjegyzés), tehát létezik olyan $1 \leq n \in \mathbf{N}$, $y \in A[K_n(0)]$, $\rho > 0$, hogy

$$K_\rho(y) \subset \overline{A[K_n(0)]}.$$

Lássuk be először is, hogy $K_\rho(0) \subset \overline{A[K_n(0)]}$. Valóban, ha $x \in K_\rho(0)$, akkor nyilván $x + y \in K_\rho(y)$, $x - y \in K_\rho(-y)$. Könnyen adódik, hogy

$$K_\rho(-y) \subset \overline{A[K_n(0)]}$$

is igaz. Ha ui. $z \in K_\rho(-y)$ (azaz $\|z+y\|_2 < \rho$), akkor $-z \in K_\rho(y)$, így $-z \in \overline{A[K_n(0)]}$. Ezért alkalmas $z_s \in K_n(0) \quad (s \in \mathbf{N})$ sorozattal $-z = \lim(Az_s)$. Innen

$$z = -\lim(Az_s) = \lim(-Az_s) = \lim(A(-z_s))$$

következik. Mivel $-z_s \in K_n(0) \quad (s \in \mathbf{N})$, ezért valóban $z \in \overline{A[K_n(0)]}$.

Így bármely $x \in K_\rho(0)$ esetén $x \pm y \in \overline{A[K_n(0)]}$. Megadhatók tehát olyan $u_s, v_s \in K_n(0) \quad (s \in \mathbf{N})$ sorozatok, amelyekre $x + y = \lim(Au_s)$, $x - y = \lim(Av_s)$. Ezért

$$x = \frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2} = \lim\left(A\left(\frac{u_s}{2}\right) + A\left(\frac{v_s}{2}\right)\right) = \lim\left(A\left(\frac{u_s+v_s}{2}\right)\right) \in \overline{A[K_n(0)]},$$

hiszen $\frac{u_s+v_s}{2} \in K_n(0) \quad (s \in \mathbf{N})$.

Legyen most már

$$q := \frac{n}{\rho}.$$

Ekkor bármely $r > 0, x \in K_r(0)$ esetén $\rho x/r \in K_\rho(0)$, amiből a fentiek szerint $\rho x/r \in \overline{A[K_n(0)]}$, azaz

$$x \in \frac{r}{\rho}\overline{A[K_n(0)]} = \overline{A[K_{rn/\rho}(0)]} = \overline{A[K_{qr}(0)]}$$

következik. ■

6.8.3. Tétel. *Tegyük fel, hogy az* $(X_i, \|.\|_i) \quad (i = 1, 2)$ *normált terek közül* $(X_1, \|.\|_1)$ *Banach-tér,* $A \in L(X_1, X_2)$ *és* $\mathcal{R}_A$ *második kategóriájú. Ekkor tetszőleges* $r > 0$ *esetén* $K_r(0) \subset A[K_{2qr}(0)]$ *(ahol* q*-t a 6.8.2. Tételben kaptuk).*

Bizonyítás. Legyen $r > 0, y \in K_r(0)$. Azt kell belátnunk, hogy egy alkalmas $x \in K_{2qr}(0)$ elemmel $y = Ax$. A 6.8.2. Tétel szerint $y \in \overline{A[K_{qr}(0)]}$, azaz van olyan $y_1 \in A[K_{qr}(0)]$, amellyel $\|y - y_1\|_2 < r/2$. Mivel $y - y_1 \in K_{r/2}(0)$, ezért $y - y_1 \in \overline{A[K_{qr/2}(0)]}$, így egy alkalmas $y_2 \in A[K_{qr/2}(0)]$ elemmel $\|y - y_1 - y_2\|_2 < r/4$.

Az előbbieket folytatva teljes indukcióval azt kapjuk, hogy minden $0 < i \in \mathbf{N}$ mellett egy $y_i \in A[K_{qr/2^{i-1}}(0)]$ elemmel

$$\left\|y - \sum_{i=1}^{n} y_i\right\|_2 < \frac{r}{2^n} \qquad (0 < n \in \mathbf{N}).$$

Ez $r/2^n \to 0 \quad (n \to \infty)$ miatt egyúttal azt is jelenti, hogy $y = \sum_{i=1}^{\infty} y_i$. Legyen $x_n \in K_{qr/2^{n-1}}(0)$ $(0 < n \in \mathbf{N})$ olyan, hogy $y_n = Ax_n$. Ekkor bármely $0 < n, m \in \mathbf{N}$, $n < m$ esetén

$$\left\|\sum_{k=n}^{m} x_k\right\|_1 \le \sum_{k=n}^{m} \|x_k\|_1 < qr \sum_{k=n}^{m} \frac{1}{2^{k-1}} < \frac{qr}{2^{n-2}} \to 0 \quad (n, m \to \infty),$$

azaz $\sum(x_n)$ *Cauchy*-sor. Mivel az $(X_1, \|.\|_1)$ tér teljes, ezért létezik az $x := \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ sorösszeg és

$$\|x\|_1 \le \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|_1 < qr \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k-1}} = 2qr.$$

Tehát $x \in K_{2qr}(0)$ és az A folytonossága miatt

$$Ax = \sum_{k=1}^{\infty} Ax_k = \sum_{k=1}^{\infty} y_k = y. \blacksquare$$

6.8.1. Megjegyzések.

i) Azt kaptuk, hogy bármely $r > 0$ mellett (az X_2-beli) $K_r(0)$ környezet minden z pontja $A[K_{2qr}(0)]$-beli, azaz $z \in \mathcal{R}_A$. Innen világos, hogy $\mathcal{R}_A = X_2$. Ha tehát az $(X_i, \|.\|_i)$ $(i = 1, 2)$ normált terek közül $(X_1, \|.\|_1)$ *Banach*-tér, $A \in L(X_1, X_2)$, akkor az $\mathcal{R}_A$ értékkészlet vagy első kategóriájú vagy pedig $\mathcal{R}_A = X_2$.

ii) A *Baire*-féle kategória-tételre (ld. 2.2.2. Tétel) gondolva a 6.8.2. Tétel feltételei nyilván teljesülnek, ha $\mathcal{R}_A = X_2$ és $(X_2, \|.\|_2)$ *Banach*-tér.

iii) Az előbbi megjegyzéshez hasonlóan az 6.8.3. Tétel alkalmazható, ha abban $(X_2, \|.\|_2)$ is *Banach*-tér és $\mathcal{R}_A = X_2$.

6.8.4. Tétel (*a nyílt leképezések tétele*)**.** *Legyenek az $(X_i, \|.\|_i)$ $(i = 1, 2)$ normált terek Banach-terek, $A \in L(X_1, X_2)$, $A : X_1 \to X_2$ szürjektív. Ekkor A nyílt leképezés.*

Bizonyítás. Legyen ui. $r > 0$, amikor is a 6.8.3. Tétel (és az előbbi megjegyzések) szerint

$$K_{r/(2q)}(0) \subset A[K_r(0)].$$

A 6.8.1. Tételt alkalmazva innen valóban azt kapjuk, hogy A nyílt. $\blacksquare$

Figyelembe véve a nyílt leképezések és az invertálható lineáris operátorok inverzének a korlátossága (folytonossága) közötti, a bevezetőben említett viszonyt, a 6.8.4. Tételből következik a

6.8.5. Tétel (*Banach*)**.** *Tegyük fel, hogy az $A \in L(X_1, X_2)$ operátor egy $A : X_1 \to X_2$ bijekció az $(X_i, \|.\|_i)$ $(i = 1, 2)$ Banach-terek között. Ekkor $A^{-1} \in L(X_2, X_1)$.*

Más szóval tehát az 6.8.5. Tétel feltételei esetén az $(X_i, \|.\|_i)$ $(i = 1, 2)$ terek *homeomorfak.*

6.8.6. Tétel. *Legyen X lineáris tér, $\|.\|, \|.\|_*$ egy-egy olyan norma X-en, hogy az $(X, \|.\|), (X, \|.\|_*)$ terek Banach-terek. Tegyük fel továbbá, hogy egy alkalmas $m > 0$ számmal $\|x\| \geq m\|x\|_*$ teljesül minden $X \ni x$-re. Ekkor $\|.\|$ és $\|.\|_*$ ekvivalens, azaz van olyan $M > 0$ konstans is, hogy*

$$m\|x\|_* \leq \|x\| \leq M\|x\|_* \qquad (x \in X).$$

Bizonyítás. Legyen $Ax := x$ $(x \in X)$. Ekkor $A : X \to X$ bijekció és

$$\|Ax\|_2 = \|x\|_* \leq \frac{1}{m}\|x\|_1 = \frac{1}{m}\|x\| \qquad (x \in X),$$

tehát $A \in L(X_1, X_2)$, ahol $(X_1, \|.\|_1) := (X, \|.\|)$, $(X_2, \|.\|_2) := (X, \|.\|_*)$ *Banach*-terek. Az 6.8.5. Tétel szerint tehát $A^{-1} = A \in L(X_2, X_1)$, így egy alkalmas $M > 0$ konstanssal

$$\|A^{-1}x\|_1 = \|x\| \leq M\|x\|_* \qquad (x \in X). \blacksquare$$

Ha az előbbi tételben X véges dimenziós, $x_1, ..., x_n \in X$ bázis (valamilyen $0 < n \in \mathbf{N}$ mellett), akkor bármely $x \in X$ egyértelműen előállítható $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$ alakban alkalmas $\alpha_i \in \mathbf{K} \quad (i = 1, ..., n)$ együtthatókkal. Világos, hogy

$$\|x\|_\infty := \max\{|\alpha_i| : i = 1, ..., n\} \qquad (x \in X)$$

norma X-en és $(X, \|.\|_\infty)$ *Banach*-tér (ld. 3.2.). Ha $\|.\|$ is norma X-en és $(X, \|.\|)$ is *Banach*-tér, akkor a nyilván fennálló

$$\|x\| \leq \|x\|_\infty \cdot \sum_{i=1}^{n} \|x_i\| \qquad (x \in X)$$

egyenlőtlenség és az 1.6. Tétel miatt $\|.\| \sim \|.\|_\infty$.

Legyenek adottak az $(X_i, \rho_i) \quad (i = 1, 2)$ metrikus terek és egy $f \in X_1 \to X_2$ függvény. Azt fogjuk mondani, hogy f *zárt leképezés,* ha bármely

$$x \in X_1 \; , \; y \in X_2 \; , \; x_n \in \mathcal{D}_f \;\; (n \in \mathbf{N}) \; , \; \lim(x_n) = x \; , \; \lim(f(x_n)) = y$$

esetén $x \in \mathcal{D}_f$ és $y = f(x)$. Könnyű meggondolni, hogy ha

$$X := X_1 \times X_2 \; , \; \rho(x, y) := \rho_1(x_1, y_1) + \rho_2(x_2, y_2) \qquad (x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in X) \, ,$$

akkor f zártsága pontosan azt jelenti, hogy az f grafikonja zárt halmaz az (X, ρ) metrikus (szorzat)térben.

6.8.2. Megjegyzések.

i) Ha $\mathcal{D}_f$ zárt és f folytonos, akkor f zárt (ami a folytonosságra vonatkozó átviteli elv (ld. 6.1.) alapján meglehetősen triviális). Így pl. bármilyen $(X_i, \|.\|_i) \quad (i = 1, 2)$ normált terek és $A \in L(X_1, X_2)$ esetén A zárt.

ii) Az $f(x) := 1 \;\; (0 < x < 1)$ egyváltozós valós függvény folytonos, de nem zárt.

iii) Ha $f : [0, +\infty) \to \mathbf{R}$, $f(0) := 0$ és $f(x) := 1/x \quad (x > 0)$, akkor f zárt, de $f \notin C\{0\}$.

iv) Ha $(X_1, \|.\|_1) := (C^1[0, 1], \|.\|_\infty)$, $(X_2, \|.\|_2) := (C[0, 1], \|.\|_\infty)$, akkor a 6.2.-ben definiált $Df := f' \quad (f \in X_1)$ (differenciál)operátor lineáris ($D \in \mathcal{L}(X_1, X_2)$), D zárt, de D nem folytonos (azaz $D \notin L(X_1, X_2)$). (Emlékeztetünk a függvénysorozatok tagonkénti deriválásával kapcsolatos állításra: ha a korlátos I intervallumon differenciálható $f_n : I \to \mathbf{R}$ $(n \in \mathbf{N})$ függvénysorozat az I intervallum legalább egy pontjában konvergens és az (f_n') (derivált)sorozat egyenletesen konvergens, akkor az (f_n) sorozat is egyenletesen konvergens, az $f := \lim(f_n)$ határfüggvény differenciálható és $f' = \lim(f_n')$.)

v) Gondoljuk meg, hogy ha f zárt és injektív, akkor az f^{-1} inverz is zárt.

6.8.7. Tétel (*zárt gráf tétel*)**.** *Legyenek az* $(X_i, \|.\|_i) \quad (i = 1, 2)$ *normált terek Banach-terek, az* $A \in \mathcal{L}(X_1, X_2)$ *lineáris operátor pedig legyen zárt. Ekkor A folytonos, azaz* $A \in L(X_1, X_2)$.

Bizonyítás. Vezessük be X_1-en az alábbi normát:

$$\|x\| := \|x\|_1 + \|Ax\|_2 \qquad (x \in X_1).$$

Ez valóban norma, hiszen $\|x\| \geq 0 \quad (x \in X_1)$ triviális, $\|x\| = 0 \iff \|x\|_1 = \|Ax\|_2 = 0$ és $\|x\|_1 = 0 \iff x = 0$. Továbbá

$$\|\lambda x\| = \|\lambda x\|_1 + \|A(\lambda x)\|_2 = |\lambda|\cdot \|x\|_1 + \|\lambda Ax\|_2 =$$

$$|\lambda|\cdot \|x\|_1 + |\lambda|\cdot \|Ax\|_2 = |\lambda|\cdot \|x\| \quad (x \in X_1),$$

ill.

$$\|x+y\| = \|x+y\|_1 + \|A(x+y)\|_2 = \|x+y\|_1 + \|Ax+Ay\|_2 \leq$$

$$\|x\|_1 + \|y\|_1 + \|Ax\|_2 + \|Ay\|_2 = \|x\| + \|y\| \quad (x, y \in X_1).$$

Ha $x_n \in X_1 \quad (n \in \mathbf{N})$ és $\|x_n - x_m\| \to 0 \quad (n, m \to \infty)$, akkor $\|x_n - x_m\|_1 \to 0 \quad (n, m \to \infty)$ és $\|Ax_n - Ax_m\|_2 \to 0 \quad (n, m \to \infty)$. Ezért az $(X_i, \|.\|_i) \quad (i = 1, 2)$ terek teljessége miatt van olyan $x \in X_1$ és $y \in X_2$, amelyekkel

$$\lim(\|x - x_n\|_1) = \lim(\|Ax_n - y\|_2) = 0.$$

Innen viszont az A zártsága alapján az következik, hogy $y = Ax$, tehát

$$\|x - x_n\| = \|x - x_n\|_1 + \|Ax - Ax_n\|_2 = \|x - x_n\|_1 + \|y - Ax_n\|_2 \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Ezzel megmutattuk, hogy $(X_1, \|.\|)$ is *Banach*-tér. Mivel az $\|x\| \geq \|x\|_1 \quad (x \in X_1)$ egyenlőtlenség nyilván igaz, ezért a 6.8.6. Tétel alapján van olyan $M > 0$ konstans, hogy

$$\|x\| = \|x\|_1 + \|Ax\|_2 \leq M\|x\|_1 \qquad (x \in X_1).$$

Világos, hogy $M \geq 1$, így $\|Ax\|_2 \leq (M-1)\|x\|_1 \quad (x \in X_1)$. ■

6.8.3. Megjegyzések.

i) Tehát a 6.8.7. Tételt úgy is felfoghatjuk, mint a *Banach*-féle inverz-tétel (ld. 6.8.5. Tétel) következménye.

ii) Nem nehéz meggondolni, hogy az előbbi megjegyzés fordítva is igaz, azaz, hogy a 6.8.7. Tétel ekvivalens a *Banach*-féle inverz-tétellel. A 6.8.5. Tétel feltételei mellett ui. az A operátor zárt, ezért A^{-1} is zárt, ahol $A^{-1} \in \mathcal{L}(X_2, X_1)$. Tehát a zárt gráf tétel miatt $A^{-1} \in L(X_2, X_1)$.

iii) Legyen pl. $(X, \langle , \rangle)$ *Hilbert*-tér, $A \in \mathcal{L}(X, X)$ pedig olyan lineáris operátor, amelyre $\langle x, Ay \rangle = \langle Ax, y \rangle \quad (x, y \in X)$. Ekkor $A \in L(X, X)$. Ha ui. $x_n \in X \quad (n \in \mathbf{N})$ és az $(x_n), (Ax_n)$ sorozatok konvergensek: $x := \lim(x_n)$, $y := \lim(Ax_n)$, akkor tetszőleges $z \in X$ esetén

$$\langle z, y\rangle = \lim(\langle z, Ax_n\rangle) = \lim(\langle Az, x_n\rangle) = \langle Az, x\rangle = \langle z, Ax\rangle.$$

Tehát $0 = \langle z, Ax - y\rangle \ (z \in X)$, amiből $y = Ax$ következik. Ez azt jelenti, hogy az A operátor zárt, ezért a 6.8.7. Tétel miatt $A \in L(X, X)$.

iv) Legyen $z = (z_n, n \in \mathbf{N})$ bázis az $(X, \|.\|)$ *Banach*-térben (ld. 3.2.), $(z_n^*, n \in \mathbf{N})$ a vele biortogonális rendszer (ld. 6.6.2. vi), vii) megjegyzések) és

$$\widehat{X}_z := \left\{ (a_n) : \mathbf{N} \to \mathbf{K} : \sum_{n=0}^{\infty} a_n z_n \in X \right\}.$$

A szokásos műveletekre nézve $\widehat{X}_z$ nyilván vektortér $\mathbf{K}$-ra vonatkozóan, az

$$|a|_z := \sup\left\{ \left\| \sum_{k=0}^{n} a_k z_k \right\| : \ n \in \mathbf{N} \right\} \qquad (a = (a_n) \in \widehat{X}_z)$$

módon definiált $|.|_z$ leképezés pedig norma $\widehat{X}_z$-n. Egyszerűen megmutatható, hogy $\widehat{X}_z$ a $|.|_z$ normára nézve *Banach*-tér. Világos, hogy $\widehat{X}_z = \{(z_n^*(x), n \in \mathbf{N}) : x \in X\}$. Legyen $\|x\|_* := |(z_n^*(x), n \in \mathbf{N})|_z \ (x \in X)$, akkor $\|.\|$ és $\|.\|_*$ ekvivalens normák X-en (ld. ld. 3.2.2. i) megjegyzés).

v) Az előbbi megjegyzést folytatva jelöljük Φ-vel azt az $\widehat{X}_z \to X$-beli leképezést, amelyre

$$\Phi(a) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n z_n \qquad (a = (a_n) \in \widehat{X}_z).$$

Nyilvánvaló, hogy $\Phi : \widehat{X}_z \to X$ invertálható, lineáris operátor. Mivel

$$\|\Phi(a)\| = \lim_n \left\| \sum_{k=0}^{n} a_k z_k \right\|,$$

ezért $\|\Phi(a)\| \le |a|_z \ (a \in \widehat{X}_z)$, azaz Φ korlátos. Így a *Banach*-féle inverz-tétel (ld. 6.8.5. Tétel) miatt $\Phi^{-1} : X \to \widehat{X}_z$ is korlátos (lineáris) operátor. Tehát van olyan $M > 0$ konstans, amellyel

$$|\Phi^{-1}(x)|_z = \sup\left\{ \left\| \sum_{k=0}^{n} z_k^*(x) z_k \right\| : \ n \in \mathbf{N} \right\} \le M\|x\| \qquad (x \in X)$$

teljesül. Ezzel beláttuk azt a korábban már említett tényt (ld. 6.6.2. vi) megjegyzés), miszerint minden $n \in \mathbf{N}$ mellett $S_n \in L(X, X)$.

Ha pl. $(X, \langle . \rangle)$ szeparábilis *Hilbert*-tér, z pedig ortonormált bázis X-ben, akkor a *Riesz-Fischer*-tétel (ld. 3.3.2. Tétel) miatt $\widehat{X}_z = \ell_2$, $|a|_z = \|a\|_{\ell_2}$ $(a \in \widehat{X}_z)$ és a $\Phi : \widehat{X}_z \to X$ leképezés izomorfia és izometria.

vi) Legyenek a $z = (z_n, n \in \mathbf{N})$, $y = (y_n, n \in \mathbf{N})$ rendszerek bázisok az $(X, \|.\|)$ *Banach*-térben. Azt mondjuk, hogy z, y *ekvivalens bázisok*, ha $\widehat{X}_z = \widehat{Y}_y$. Az v) megjegyzés végén mondottak alapján pl. egy szeparábilis *Hilbert*-térben bármely két ortonormált bázis ekvivalens. A *Banach-Steinhaus II*-tétel (ld. 6.6.3. Tétel) miatt ez azt jelenti, hogy vannak olyan $A, B > 0$ konstansok, amelyekkel minden $v = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k z_k \in \mathcal{L}(z)$ elemre

$$A\|v\| \leq \left\| \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k y_k \right\| \leq B\|v\|$$

teljesül. Legyen $(z_n^*, n \in \mathbf{N})$ a z-vel biortogonális rendszer. Megmutatható, hogy *ha* $x_n \in X$ $(n \in \mathbf{N})$ *és*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|z_n - x_n\| \cdot \|z_n^*\| < 1,$$

akkor $(x_n, n \in \mathbf{N})$ *bázis* X*-ben és ekvivalens* z*-vel.* Innen világos, hogy ha az $(X, \|.\|)$ *Banach*-térben van bázis, akkor bármely, az X-ben mindenütt sűrű halmaz elemeiből is kiválasztható X-beli bázis. Legyen pl. szó a $(C[0,1], \|.\|_\infty)$ térről. Láttuk (ld. 3.2.3. Tétel), hogy ebben minden *Schauder*-szerű rendszer bázis. Mivel a polinomok halmaza sűrű $C[0,1]$-ben, ezért $C[0,1]$-ben van polinomokból álló bázis.

vii) A vi) megjegyzéssel kapcsolatos a következő érdekes probléma. Legyen $P = (P_n, n \in \mathbf{N})$ egy polinomokból álló bázis a $(C[0,1], \|.\|_\infty)$ *Banach*-térben és jelöljük ϑ_n-nel a P_n polinom fokszámát $(n \in \mathbf{N})$. Ha

$$q_n := \max\{\vartheta_0, ..., \vartheta_n\} \quad (n \in \mathbf{N}),$$

akkor – lévén a $P_0, ..., P_n$ polinomok legfeljebb q_n-edfokúak és lineárisan függetlenek – $q_n \geq n$ és a P bázis szerinti n-edik részletösszeg-operátor (S_n) a $C[0,1]$ teret a legfeljebb q_n-edfokú polinomok $(\mathcal{P}_{q_n})$ alterébe képezi. Amennyiben valamely $n \in \mathbf{N}$ esetén $q_n = n$, akkor bármely $R \in \mathcal{P}_n$ polinomra $S_n R = R$ teljesül, azaz ekkor $S_n : C[0,1] \to \mathcal{P}_n$ projekció. A 6.6.14. Tétel, ill. a 6.6.2. ii) megjegyzés szerint ebben az esetben (egy alkalmas $C > 0$ abszolút konstanssal) $\|S_n\| \geq C \cdot \ln(n+2)$. Mivel $\sup\{\|S_n\| : n \in \mathbf{N}\} < +\infty$, ezért az $\{n \in \mathbf{N} : q_n = n\}$ halmaz legfeljebb véges. A kérdés most már az, hogy mit lehet mondani a $(q_n/n, 0 < n \in \mathbf{N})$ sorozatról. A részletek mellőzésével csupán annyit jegyzünk meg, hogy meglehetősen bő az idevágó irodalom.

7. Feladatok

1. Tegyük fel: $(X,\mathcal{T}_1),(X,\mathcal{T}_2)$ topologikus terek. Igaz-e, hogy $(X,\mathcal{T}_1\cup\mathcal{T}_2)$, $(X,\mathcal{T}_1\cap\mathcal{T}_2)$ is az?

(**Útm.:** $\mathcal{T}_1\cap\mathcal{T}_2$ topológia, ill. legyen $X:=\{1,2,3\}$, $\mathcal{T}_1:=\{\emptyset,X,\{1\}\}$, $\mathcal{T}_2:=\{\emptyset,X,\{2\}\}$. Ekkor $\mathcal{T}_1\cup\mathcal{T}_2=\{\emptyset,X,\{1\},\{2\}\}$ nem topológia, mivel $\{1\}\cup\{2\}\notin\mathcal{T}_1\cup\mathcal{T}_2$.)

2. Legyen $\emptyset\neq X,\mathcal{G}\subset X$. Ekkor $\mathcal{G}$ pontosan akkor bázisa egy $(X,\mathcal{T})$ topologikus térnek, ha $\forall\, x\in X\ \exists\, A\in\mathcal{G}: x\in A$ és $\forall\, A,B\in\mathcal{G}\ \ \forall\, x\in A\cap B\ \ \exists\, Q\in\mathcal{G}: x\in Q\subset A\cap B$.

3. Ha $a\neq b, X:=\{a,b\}$ és $\mathcal{T}:=\{\emptyset,X,\{a\}\}$, akkor $(X,\mathcal{T})$ topologikus tér, de nem létezik olyan $\rho: X^2\to[0,+\infty)$ metrika, amely szerinti nyílt halmazok rendszere megegyezne $\mathcal{T}$-vel.

(**Útm.:** ha lenne ilyen metrika, akkor $\delta:=\rho(a,b)>0$. Mivel a ρ szerint $K_\delta(b)=\{b\}$ nyílt halmaz, ezért $\{b\}\in\mathcal{T}$ kellene, ami nem igaz.)

4. Az $(X,\mathcal{T})$ topologikus térben valamely $A\subset X$ halmaz lezártja legyen $\overline{A}$. Mutassuk meg, hogy $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cup\overline{B}$; $A\subset\overline{A}$; $\overline{\overline{A}}=\overline{A}$; $\overline{\emptyset}=\emptyset$.

5. Valamely X halmaz esetén legyen adott a $\mathcal{P}(X)\ni A\mapsto\overline{A}\in\mathcal{P}(X)$ leképezés és tegyük fel, hogy erre a leképezésre teljesülnek a **4.** feladatbeli állítások. Ha $\mathcal{C}:=\{A\in\mathcal{P}(X): A=\overline{A}\}$, akkor lássuk be, hogy $\mathcal{T}:=\{A\in\mathcal{P}(X): X\setminus A\in\mathcal{C}\}$ topológia X-en.

6. Az $(X_1,\mathcal{T}_1),(X_2,\mathcal{T}_2)$ topologikus terek esetén legyen

$$X:=X_1\times X_2\ ,\ \mathcal{G}:=\{A\times B: A\in\mathcal{T}_1, B\in\mathcal{T}_2\}\ ,\ \mathcal{T}:=\{\cup\mathcal{X}:\mathcal{X}\subset\mathcal{G}\}.$$

Ekkor $\mathcal{T}$ topológia X-en (*szorzattopológia*), amelynek $\mathcal{G}$ bázisa.

7. Ha $(X,\mathcal{T})$ topologikus tér, $x\in X$, akkor legyen

$$\mathcal{T}_x:=\{A\in\mathcal{P}(X): A \text{ környezete } x \text{ nek}\}$$

(az x *környezetrendszere*). Bizonyítsuk be, hogy $\forall A\in\mathcal{T}_x: x\in A$; $X\in\mathcal{T}_x$; $\forall A\in\mathcal{T}_x$, $\forall A\subset B$: $B\in\mathcal{T}_x$; $\forall A,B\in\mathcal{T}_x: A\cap B\in\mathcal{T}_x$; $\forall A\in\mathcal{T}_x\ \ \exists B\in\mathcal{T}_x\ \ \forall y\in B: A\in\mathcal{T}_y$.

(**Útm.:** ha $A\in\mathcal{T}_x$, akkor $B:=\operatorname{int}A\in\mathcal{T}_x$ és bármely $y\in B$ esetén $A\in\mathcal{T}_y$.)

8. Tegyük fel, hogy valamely $\emptyset\neq X$ halmaz esetén minden $x\in X$ elemhez kijelöltünk egy olyan $\mathcal{T}_x\subset\mathcal{P}(X)$ halmazrendszert, amelyre az előbbi feladat állításai igazak. Definiáljuk ezek után a $\mathcal{T}\subset\mathcal{P}(X)$ halmazrendszert úgy, hogy $A\in\mathcal{T}\iff A=\emptyset$ vagy $\forall x\in A\ \ \exists B\in\mathcal{T}_x: B\subset A$. Igazoljuk, hogy $\mathcal{T}$ topológia X-en és bármely $x\in X$ elem környezetrendszere éppen $\mathcal{T}_x$.

9. Legyen $X\neq\emptyset, K\subset X^{\mathbf{N}}\times X$ és

i) $\forall\,(x,\alpha)\in K\ \forall\,\nu$ indexsorozat: $(x\circ\nu,\alpha)\in K$;

ii) $\forall\,\alpha\in X: ((\alpha),\alpha)\in K$ (ahol az (α) sorozat minden tagja α).

Azt mondjuk, hogy (X,K) egy *Frechet*-tér. Nevezzünk egy $A\subset X$ halmazt *zártnak,* ha $A=\emptyset$ vagy $\forall\,(x,\alpha)\in K, x\in A^{\mathbf{N}}: \alpha\in A$. Ekkor $\mathcal{T}:=\{Y\in\mathcal{P}(X): X\setminus Y \text{ zárt}\}$ topológia X-en. Bizonyítsuk be továbbá, hogy minden topologikus tér *Frechet*-tér.

(**Útm.:** legyen $K:=\{(x,\alpha)\in X^{\mathbf{N}}\times X: \alpha \text{ limeszpontja } x\text{-nek}\}$.)

10. Mutassunk olyan $\mathbf{K}$-ra vonatkozó X vektorteret és $\rho : X^2 \to [0, +\infty)$ metrikát, amelyre $X \ni x \mapsto \rho(x, 0)$ nem norma.

(**Útm.:** pl. $\mathbf{R}$-en a diszkrét metrika.)

11. Tekintsük az (X, ρ) metrikus teret, ahol X vektortér $\mathbf{K}$-ra vonatkozóan. Lássuk be, hogy akkor és csak akkor van olyan $\|.\| : X \to [0, +\infty)$ norma, amelyre $\rho(x, y) = \|x - y\| \quad (x, y \in X)$, ha $\rho(x + z, y + z) = \rho(x, y)$ és $\rho(\lambda x, \lambda y) = |\lambda|\rho(x, y) \quad (x, y, z \in X, \lambda \in \mathbf{K})$.

12. Adjunk példát olyan (X, ρ) metrikus térre és $\|.\| : X \to [0, +\infty)$ normára, hogy $\|x\| = \rho(x, 0)$ $(x \in X)$, de alkalmas $x, y \in X$ elemekkel $\rho(x, y) \neq \|x - y\|$.

(**Útm.:** legyen $(X, \|\cdot\|)$ normált tér, $\rho(x, y) := \frac{\|x-y\|+|\|x\|-\|y\||}{2} \quad (x, y \in x)$. Ekkor ρ metrika, $\rho(x, 0) = \|x\| \quad (x \in X)$, de $\rho(x, y) = \|x - y\| \iff \|x - y\| = |\|x\| - \|y\||$.)

13. Igazoljuk, hogy ha az (X, ρ) metrikus tér szeparábilis, akkor bármely $\emptyset \neq Y \subset X$ esetén az $(Y, \rho_{|_{Y^2}})$ altér is az.

14. Egy (X, Ω, μ) mértéktér és $1 \leq p < +\infty$ esetén lássuk be, hogy $(L^p, \|.\|_p)$ akkor és csak akkor szeparábilis, ha a μ mérték *szeparábilis,* azaz van olyan $A_n \in \Omega$, $\mu(A_n) < +\infty \quad (n \in \mathbf{N})$ sorozat, hogy minden $A \in \Omega$, $\mu(A) < +\infty$ és $\varepsilon > 0$ esetén egy alkalmas $\mathbf{N} \ni n$-nel $\mu\left((A \setminus A_n) \cup (A_n \setminus A)\right) < \varepsilon$.

(**Útm.:** ld. Simon: *Analízis V.*)

15. Az előbbi feladat alapján mutassuk meg, hogy $(\ell_p, \|.\|_p) \quad (1 \leq p < +\infty)$ szeparábilis. Lássuk be ugyanezt a definíció alapján is, azaz adjunk meg olyan $\ell \subset \ell_p$ legfeljebb megszámlálható halmazt, amely mindenütt sűrű ℓ_p-ben.

16. Gondoljuk meg, hogy $\{x \in \ell_\infty : \mathcal{R}_x \text{ véges}\}$ sűrű (altér) ℓ_∞-ben, de **15.** nem igaz, ha $p = +\infty$.

17. Adjunk példát olyan (X, ρ) metrikus térre és olyan $a, b \in X$ elemekre, ill. $R > r > 0$ számokra, hogy $K_R(a)$ valódi részhalmaza legyen $K_r(b)$-nek.

(**Útm.:** $X := \{1, 2, 3\}, \rho(x, x) := 0 \quad (x \in X)$, $\rho(1, 2) := \rho(2, 1) := 2$, $\rho(x, y) := 1$ (egyéb $x, y \in X, x \neq y$) esetén. Ekkor $K_{3/2}(3) = X$ és $K_{7/4}(2) = \{2, 3\}$.)

18. Legyen $\rho(n, m) := \begin{cases} 0 & (n = m) \\ 1 + (n + m)^{-1} & (n \neq m) \end{cases} \quad (n, m \in \mathbf{N})$. Ekkor $(\mathbf{N}, \rho)$ teljes metrikus tér, amelyben van olyan $x_n \in \mathbf{N} \quad (n \in \mathbf{N})$ elemsorozat, hogy alkalmas $r_n > 0 \quad (n \in \mathbf{N})$ számokkal a $K_n := \{k \in \mathbf{N} : \rho(k, x_n) \leq r_n\} \quad (n \in \mathbf{N})$ halmazokra $K_{n+1} \subset K_n \quad (n \in \mathbf{N})$ és $\cap_{n=0}^{\infty} K_n = \emptyset$ teljesül.

(**Útm.:** lássuk be, hogy a térben egy sorozat akkor és csak akkor *Cauchy*-sorozat, ha kvázikonstans. Továbbá legyen $x_n := n$, $r_n := 1 + 1/(2n + 1) \quad (n \in \mathbf{N})$.)

19. Ha $(X, \|.\|)$ *Banach*-tér, $x_n \in X, r_n > 0 \quad (n \in \mathbf{N})$ és a $K_n := \{x \in X : \|x - x_n\| \leq r_n\} \quad (n \in \mathbf{N})$ halmazokra $K_{n+1} \subset K_n \quad (n \in \mathbf{N})$ igaz, akkor $\cap_{n=0}^{\infty} K_n \neq \emptyset$.

(**Útm.:** Először gondoljuk meg, hogy az (r_n) sorozat monoton fogyó. Ui. ha valamilyen $\mathbf{N} \ni n$-re $r_{n+1} > r_n$ volna, akkor $x_{n+1} + \frac{r_{n+1}(x_{n+1} - x_n)}{\|x_{n+1} - x_n\|} \in K_{n+1} \setminus K_n$ lenne, ami $K_{n+1} \setminus K_n = \emptyset$ miatt nem lehet. Ha most már $\lim(r_n) = 0$, akkor a feladatbeli állítás a megfelelő tételből következik (ld. *Banach*-terek *Cantor*-szerű jellemzése (2.2.1. Tétel)). Ha viszont $r := \lim(r_n) \neq 0$, akkor tekintsük a $\tilde{K}_n := \{x \in X : \|x - x_n\| \leq r_n - r\} \quad (n \in \mathbf{N})$ sorozatot.)

20. Mutassuk meg, hogy tetszőleges (X,ρ) metrikus térben $\overline{K_r(a)} \subset \{x \in X : \rho(x,a) \le r\}$ $(a \in X, r > 0)$. Adjunk példát olyan esetre, amikor az előbbi $\subset$-ban $\neq$ van. Végül lássuk be, hogy normált térben $\overline{K_r(a)} = \{x \in X : \rho(x,a) \le r\}$ $\quad (a \in X, r > 0)$.

(**Eml.:** $\overline{K_r(a)}$ a $K_r(a)$ halmaz (topologikus) lezárását jelenti.)

(**Útm.:** diszkrét tér!)

21. Tekintsük az $(X, \|.\|)$ normált teret, legyen $a \in X, r > 0$ és $\emptyset \neq A \subset X$. Ekkor

i) $d(A) := \sup\{\rho(x,y) : x,y \in A\} = d(\overline{A})$ (az A halmaz *átmérője*);

ii) $d\left(K_r(a)\right) = 2r$.

Igaz-e mindez metrikus terekben is?

22. Tegyük fel, hogy az $(X_i, \mathcal{T}_i)$ $\quad (i = 1,2)$ topologikus terek kompaktak (azaz X_i $\quad (i = 1,2)$ kompakt) és legyen $X := X_1 \times X_2$, $\mathcal{T}$ pedig a szorzattopológia (ld. **6.**). Bizonyítsuk be, hogy az $(X, \mathcal{T})$ szorzattér is kompakt (*Tyihonov*-tétel).

23. Igazoljuk, hogy a $(\mathbf{K}^n, \rho_p)$ $\quad (0 < n \in \mathbf{N}, 1 \le p \le +\infty)$ metrikus térben egy $A \subset \mathbf{K}^n$ halmaz teljesen korlátos volta ekvivalens azzal, hogy A korlátos.

24. Ha (X,ρ) tetszőleges metrikus tér, $A \subset X$, akkor A teljesen korlátos $\iff$ $\overline{A}$ teljesen korlátos.

25. Legyen $(X, \|\cdot\|)$ véges dimenziós normált tér, $L \subset X$ valódi (zárt) altér. Lássuk be, hogy alkalmas $e \in X, \|e\| = 1$ elemmel $\rho(e, L) := \inf\{\rho(x,e) : x \in L\} = 1$.

(**Útm.:** a *Riesz*-lemma (ld. 4.3.1. Lemma) miatt van olyan $e_n \in X$, $\|e_n\| = 1$ $\quad (n \in \mathbf{N})$ sorozat, amellyel $1 \ge \rho(e_n, L) > 1 - 1/(n+1)$. A véges dimenziós feltétel, ill. a *Bolzano-Weierstrass*-féle kiválasztási tétel miatt feltehető, hogy az (e_n) sorozat konvergens, legyen $e := \lim(e_n)$.)

26. Az $X := \ell_1, \|x\| := \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} |x_k|^2}$ $\quad (x \in X)$ normált térben

$$L := \left\{ (x_k) \in X : \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x_k}{k+1} = 0 \right\}$$

zárt altér, de bármely $e \in X, \|e\| = 1$ esetén $\rho(e, L) < 1$.

(**Útm.:** (pl. valós testre vonatkozó terekre.) Az L zártságához vegyük észre, hogy ha $h := (1/(n+1), n \in \mathbf{N})$, akkor $h \in \ell_2$ és $L = \{x \in \ell_1 : \langle x, h \rangle = 0\}$ (ahol $\langle , \rangle$ az ℓ_2-beli szokásos skaláris szorzást jelenti). Legyen továbbá $e = (e_n) \in X, \|e\| = 1$ esetén pl. $e_0 > 0$. Ha $n \in \mathbf{N}$, $l_0 \in \mathbf{R}$, akkor

$$l := (l_0, 0, ..., 0, l_n, 0, ...) \in L \iff l_0 + l_n/(n+1) = 0,$$

amiből

$$\|e - l\|^2 = (e_0 - l_0)^2 + (e_n - l_n)^2 + \sum_{n \neq k = 1}^{\infty} e_k^2 =$$

$$1 + l_0^2 + l_n^2 - 2(e_0 l_0 + e_n l_n) = 1 + l_0^2 + (n+1)^2 l_0^2 - 2\left(e_0 l_0 - (n+1) e_n l_0\right) =$$

$$1 + l_0 \left((n^2 + 2n + 2) l_0 - 2(e_0 - (n+1) e_n \right)$$

következik. Mivel $e \in \ell_1$, ezért $e_0 - (n+1)e_n > 0$ végtelen sok n-re igaz. Ha n ilyen, akkor $0 < l_0 < \frac{2(e_0 - (n+1)e_n)}{n^2 + 2n + 2}$ esetén $\|e - l\|^2 < 1$.)

27. Az $(X, \langle\cdot\rangle)$ euklideszi térben egy $x_n \in X \quad (n \in \mathbf{N})$ ONR (*ortonormált rendszer*) akkor és csak akkor zárt, ha $\forall x \in X : \|x\|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} |\hat{x}(k)|^2$ (ahol $\hat{x}(k) := \langle x, x_k\rangle \quad (k \in \mathbf{N})$).

28. (Általánosított *Parseval*-egyenlőség.) Az előbbi feladatban szereplő bármely zárt ONR esetén $\forall x, y \in X : \langle x, y\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{x}(k)\overline{\hat{y}(k)}\,(= \langle \hat{x}, \hat{y}\rangle_{\ell_2})$.

29. Adjunk példát olyan $(X, \langle,\rangle)$ euklideszi térre és benne olyan $x_n \in X \quad (n \in \mathbf{N})$ teljes ONR-re, amely nem zárt.

(**Útm.:** tekintsük a **26.** feladatbeli normált teret és L alteret. A

$$h := (1/(n+1), n \in \mathbf{N})$$

jelöléssel élve, ha valamely $x \in X$ esetén $\langle x, l\rangle = 0 \quad (l \in L)$, akkor $x = x_0 h$. Különben ui. lenne olyan $k \in \mathbf{N}$, amellyel $x_k \neq x_1/(k+1)$. Legyen ekkor

$$z := (-1/(k+1), 0, ..., 0, 1, 0, 0, ...)$$

(ahol tehát $z_k = 1$). Nyilván $z \in L$, azaz

$$\langle x, z\rangle = 0 = -x_0/(k+1) + x_k,$$

ami nem igaz. Mivel $\forall 0 \neq \lambda \in \mathbf{R} : \lambda h \notin \ell_1$, ezért $x_1 = 0$, azaz $x = 0$. Az L szeparábilis lévén, van benne zárt ONR, ami a fentiek szerint teljes, viszont nem zárt X-ben, ui. $L \neq \ell_1$.)

30. Az (X, ρ) metrikus térben adottak az $A, B \subset X$ nem üres, diszjunkt halmazok és tegyük fel, hogy A zárt, B pedig kompakt. Bizonyítsuk be, hogy ekkor

$$\rho(A, B) := \inf\{\rho(x, y) : x \in A, y \in B\} > 0.$$

Mutassuk meg egy példával, hogy ebből a szempontból a B zártsága nem elég. Speciálisan az is adódik, hogy bármely $\emptyset \neq A \subset X$ zárt halmaz és $z \in X$ esetén $\rho(z, A) = 0 \iff z \in A$.

(**Útm.:** $X := \mathbf{R}^2, \rho := \rho_2, A := \{(x, 0) \in X : x \in \mathbf{R}\}$, $B := \{(x, 1/x) \in X : x > 0\}$.)

31. Legyen (X, ρ) egy tetszőleges metrikus tér, $\emptyset \neq A \subset X$ egy kompakt halmaz. Ekkor $\forall x \in X$ $\exists a \in A : \rho(x, a) = \rho(x, A)$. Lényeges-e itt, hogy A kompakt? Mutassuk meg, hogy ha (X, ρ) helyett egy véges dimenziós normált térről van szó, akkor az állításban elegendő azt feltenni, hogy A zárt.

(**Útm.:** pl. az $(\ell_2, \|.\|_2)$ térben legyen $B := \{e_n := (0, 0, ..., 0, 1, 0, ...) \in \ell_2 : n \in \mathbf{N}\}$ (tehát e_n-ben az $(n+1)$-edik pozícióban van 1-es). Ha $x := (-1/(n+1))$, akkor $\rho(x, B) = \sqrt{1 + \|x\|_2^2}$, de $\forall b \in B : \rho(x, b) > \sqrt{1 + \|x\|_2^2}$.)

32. Tekintsük a $(C[-1, 1], \|\cdot\|_\infty)$ normált teret és legyen $f(x) := x^2 - 1$, $g(x) := x \quad (|x| \leq 1)$, $L_1 := \{\alpha g \in C[-1, 1] : \alpha \in \mathbf{R}\}$, $L_2 := \{\alpha g + \beta \in C[-1, 1] : \alpha, \beta \in \mathbf{R}\}$. Számítsuk ki $\rho(f, L_i)$-t $(i = 1, 2)$.

33. Bizonyítsuk be, hogy bármely (X, ρ) metrikus tér és tetszőleges $\emptyset \neq A, B \subset X$ esetén $\rho(A, B) > 0$ $\Longrightarrow \overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset$. Igaz-e az állítás megfordítása?

34. Mutassuk meg a torlódási pontokra vonatkozó következő jellemzést: ha (X, ρ) tetszőleges metrikus tér, $\emptyset \neq A \subset X$, akkor $x \in A' \iff \rho(x, A \setminus \{x\}) = 0$. Speciálisan $x \in \overline{A} \iff$ $\rho(x, A) = 0$.

35. Bármely (X, ρ) metrikus tér és tetszőleges kompakt $\emptyset \neq A \subset X$ halmaz esetén megadhatók olyan $a, b \in A$ elemek, amelyekkel $\rho(a, b) = d(A)$.

36. Tudjuk (ld. 5.1.1. Tétel), hogy egy (X, ρ) metrikus térben valamely kompakt $\emptyset \neq A \subset X$ és $\emptyset \neq B \subset X$ kvázikompakt halmaz esetén megadhatók olyan $a \in A, b \in B$ elemek, hogy $\rho(a, b) = \rho(A, B)$. Adjunk példát annak az illusztrálására, hogy ebből a szempontból a B zártsága nem elég.

(**Útm.:** ld. **31.** útm.)

37. Valamely (X, ρ) metrikus tér esetén legyen $\mathbf{K}(X) := \{A \in \mathcal{P}(X) : \emptyset \neq A \text{ kompakt}\}$. Lássuk be, hogy tetszőleges $A, B \in \mathbf{K}(X)$ halmazokra létezik a $d(A, B) := \max\{\rho(x, A) : x \in B\}$ maximum.

(**Útm.:** $|\rho(x, A) - \rho(y, A)| \leq \rho(x, y) \quad (x, y \in X)$ és alkalmazzuk a *Weierstrass*-tételt (ld. 6.1.) az $X \ni x \mapsto \rho(x, A)$ (az előbbiek szerint (egyenletesen) folytonos) függvényre.)

38. A **37.** feladatbeli jelöléseket alkalmazva bizonyítsuk be, hogy a $\sigma : \mathbf{K}(X)^2 \to [0, +\infty)$,

$$\sigma(A, B) := \max\{d(A, B), d(B, A)\} \qquad (A, B \in \mathbf{K}(X))$$

függvény metrika.

Megjegyzés. $\sigma(A, B)$ az A, B halmazok ún. *Hausdorff*-távolsága.

39. Egy metrikus tér $A \subset X$ részhalmazának a *környezeteit* értelmezzük az alábbiak szerint: $K_r(A) := \bigcup_{a \in A} K_r(a) \quad (r > 0)$. Gondoljuk meg, hogy $K_r(A) = \{x \in X : \rho(x, A) < r\}$.

40. A **37 - 39.** feladatokat figyelembe véve legyen az (X, ρ) metrikus tér $A, B \in \mathbf{K}(X)$ részhalmazaira

$$[A, B] := \inf\{r > 0 : A \subset K_r(B)\}$$

és mutassuk meg, hogy $\sigma(A, B) = \max\{[A, B], [B, A]\}$.

(**Útm.:** először lássuk be, hogy $0 < r < [A, B]$ esetén $r \leq \sigma(A, B)$. Ha pedig $r > [A, B]$, akkor $r \geq d(B, A)$.)

41. A **37 - 40.** feladatokból kiindulva bizonyítsuk be, hogy tetszőleges (X, ρ) teljes metrikus tér esetén $(\mathbf{K}(X), \sigma)$ is teljes metrikus tér.

(**Útm.:** gondoljuk meg, hogy ha $A, A_n \in \mathbf{K}(X) \quad (n \in \mathbf{N})$ és $\sigma(A_n, A) \to 0 \quad (n \to \infty)$, akkor $A = \bigcap_{n=0}^{\infty} \overline{\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k}$ $(=: B)$. Ha ui. $a \in A$, akkor minden $\mathbf{N} \ni n$-re van olyan $a_n \in A_n$, hogy $\rho(a, A_n) = \rho(a, a_n)$. Ezért $\rho(a, a_n) \leq \sigma(A, A_n) \to 0 \quad (n \to \infty)$ miatt bármely $K(a)$-ra $K(a) \bigcap (\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k) \neq \emptyset \quad (n \in \mathbf{N})$. Így $a \in B$, azaz $A \subset B$.

Fordítva, ha $b \in B$, akkor alkalmas (ν_n) indexsorozattal $a_{\nu_n} \in A_{\nu_n} \quad (n \in \mathbf{N})$ és $\rho(a_{\nu_n}, b) \to 0$ $(n \to \infty)$, ill. $0 \leq \rho(B, A) \leq \rho(b, A_{\nu_n}) + \sigma(A, A_{\nu_n}) \to 0 \quad (n \to \infty)$ miatt $\rho(b, A) = 0$. Ezért $b \in A$, azaz $B \subset A$ is igaz. Mutassuk meg, hogy A teljesen korlátos, tehát (ld. 4.2.3. Tétel) kompakt.

Ha már most $C_n \in \mathbf{K}(X) \quad (n \in \mathbf{N})$ és $\sigma(C_n, C_m) \to 0 \quad (n, m \to \infty)$, akkor legyen $C := \bigcap_{n=0}^{\infty} \overline{\bigcup_{k=n}^{\infty} C_k}$ és lássuk be, hogy $\sigma(C_n, C) \to 0 \quad (n \to \infty)$: bármely $\varepsilon > 0$ mellett van olyan $N \in \mathbf{N}$, amellyel $d(C_n, C) < \varepsilon$, $d(C, C_n) < \varepsilon \quad (\mathbf{N} \ni n > N)$.)

42. Legyen $f(x) := x^2, g(x) := x \;\; (0 \le x \le 1)$ és $L := \{ag + b \in C[0,1] : a, b \in \mathbf{R}\}$. Számítsuk ki a

$$\rho(f, L) = \inf\{\|f - h\|_\infty : h \in L\} = \min\{\|f - h\|_\infty : h \in L\}$$

távolságot, azaz oldjuk meg a $\min\{\max\{|x^2 - (ax + b)| : x \in [0,1]\} : a, b \in \mathbf{R}\} =?$ *min-max* feladatot.

43. Általánosítsuk az előbbi feladatot a következő értelemben: az ottani f helyett legyen $f \in D^2[a, b]$, $f' \ge 0,\; f'' \ge 0$.

(**Útm.:** tekintsük az $(a, f(a))$-t a $(b, f(b))$-vel összekötő húr és a vele párhuzamos érintő középpárhuzamosát.)

44. Mi az approximatív megoldása a

$$\begin{aligned} 2x &= 3 \\ x &= 1 \\ 4x &= 7 \end{aligned}$$

egyenletrendszernek? Keressük meg tehát azt az $x \in \mathbf{R}$ számot, amelyre

$$\max\{|2x - 3|, |x - 1|, |4x - 7|\} = \min\{\max\{|2t - 3|, |t - 1|, |4t - 7|\} : t \in \mathbf{R}\}.$$

45. Határozzuk meg az $a, b \in \mathbf{R}$ együtthatókat úgy, hogy az $l(x) := ax + b \quad (x \in \mathbf{R})$ jelöléssel az

$$|l(0)|^2 + |l(1/2) - 2|^2 + |l(1) - 1|^2$$

összeg minimális legyen. Ágyazzuk be a feladatot a *pont és halmaz távolsága* feladatkörbe (*legkisebb négyzetek módszere*).

46. Legyen (X, Ω, μ) mértéktér, $1 < p < +\infty$. Bizonyítsuk be, hogy $(L^p, \|\cdot\|_p)$ szigorúan normált.

(**Útm.:** ha $f, g \in L^p$ és $\|f + g\|_p = \|f\|_p + \|g\|_p$, akkor

$$\|f + g\|_p^p = \int |f + g||f + g|^{p-1} \le \int |f||f + g|^{p-1} + \int |g||f + g|^{p-1} \le$$
$$\left(\left(\int |f|^p\right)^{1/p} + \left(\int |g|^p\right)^{1/p}\right)\left(\int |f + g|^{(p-1)s}\right)^{1/s},$$

ahol $1/p + 1/s = 1$ (ld. *Hölder*-egyenlőtlenség). Tehát

$$\|f + g\|_p^p \le (\|f\|_p + \|g\|_p)\left(\int |f + g|^p\right)^{1/s} = (\|f\|_p + \|g\|_p)\, \|f + g\|_p^{p-1} = \|f + g\|_p^p.$$

Ez azt jelenti, hogy a fenti becslésekben mindenütt „=” van. Ezért

$$\int |f + g|^{p-1}\,(|f| + |g| - |f + g|) = 0,$$

amiből $|f| + |g| - |f + g| \ge 0, |f + g|^{p-1} \ge 0$ miatt

$$|f + g|^{p-1}\,(|f| + |g| - |f + g|) = 0$$

m.m. következik. Ha $A := \{f + g = 0\}$, akkor B-vel jelölve az A komplementerét azt kapjuk, hogy $\|f + g\|_p = \left(\int_B |f + g|^p\right)^{1/p} \le$ (ld. *Minkowski*-egyenlőtlenség) $\le \left(\int_B |f|^p\right)^{1/p} + \left(\int_B |g|^p\right)^{1/p} \le$ $\|f\|_p + \|g\|_p$, azaz a feltételek miatt ezekben a becslésekben is mindenütt „=” van. Így $\int_A |f|^p = \int_A |g|^p = 0$, tehát $f(x) = g(x) = 0 \qquad$ (m.m. $x \in A$). Mindezt figyelembe véve az előbbiek alapján $|f + g| = |f| + |g|$ m.m. adódik, amiből meg $\operatorname{sign} f = \operatorname{sign} g$ m.m. következik. Továbbá a *Hölder*-egyenlőtlenség azon múlik, hogy $ab \leq a^p/p + b^s/s \quad (a, b \geq 0)$ és itt „=” akkor és csak akkor van, ha $a^p = b^s$. Most

$$a := \frac{|f|}{\|f\|_p}, \text{ ill. } a := \frac{|g|}{\|g\|_p}, \text{ valamint } b := \frac{|f+g|^{p-1}}{\||f+g|^{p-1}\|_s}.$$

Ezért

$$\frac{|f|^p}{\|f\|_p^p} = \frac{|f+g|^{(p-1)s}}{\||f+g|^{p-1}\|_s^s} = \frac{|f+g|^p}{\|f+g\|_p^p}$$

m.m., más szóval

$$\frac{|f|}{\|f\|_p} = \frac{|f+g|}{\|f+g\|_p}$$

m.m. és u. ez f helyett g-vel, amiből azt kapjuk, hogy $|f|/\|f\|_p = |g|/\|g\|_p$. Tehát mindent figyelembe véve

$$f = \frac{\|f\|_p}{\|g\|_p} \cdot g$$

m.m. (Nyilván feltehető, hogy $\|f\|_p, \|g\|_p$ mindegyike pozitív.))

47. Gondoljuk meg, hogy az $(\ell_1, \|.\|_1)$, $(\ell_\infty, \|.\|_\infty)$, $(C[a,b], \|.\|_\infty)$ terek nem szigorúan normáltak.

48. Legyen (X, ρ) kompakt metrikus tér, $f_n : X \to \mathbf{R}$, $f_n \in C$, $f_n \leq f_{n+1} \quad (n \in \mathbf{N})$ (vagy $f_n \geq f_{n+1} \quad (n \in \mathbf{N})$). Tegyük fel, hogy az (f_n) függvénysorozat pontonként konvergál egy folytonos függvényhez. Bizonyítsuk be, hogy a konvergencia egyenletes (*Dini*-tétel).

(**Útm.:** ld. Szőkefalvi-Nagy B.: *Valós függvények és függvénysorok.*)

49. Mutassuk meg, hogy bármely $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan P polinom, amelyre $|P(x) - |x|| < \varepsilon$ $(x \in [-1, 1])$.

(**Útm.:** ld. Szőkefalvi-Nagy B.: *Valós függvények és függvénysorok.*)

50. Bizonyítsuk be, hogy ha $-\infty < a < b < +\infty$, $f \in C[a,b]$ és $\varepsilon > 0$, akkor létezik olyan P polinom, hogy $|f(x) - P(x)| < \varepsilon \quad (x \in [a,b])$. (*Weierstrass*-féle approximációs tétel).

(**Útm.:** ld. Szőkefalvi-Nagy B.: *Valós függvények és függvénysorok.*)

51. Valamely $(X_i, \|.\|_i) \quad (i = 1, 2)$ normált terek és $A \in \mathcal{L}(X_1, X_2)$ lineáris operátor esetén $A \in L(X_1, X_2) \iff \forall Y \subset X_1, Y$ korlátos: $A[Y]$ korlátos.

52. Adottak az $(X_i, \|.\|_i) \quad (i = 1, 2)$ normált terek és az $A \in L(X_1, X_2)$ operátor. Lássuk be, hogy $\|A\| = \sup\{\|Ax\|_2 : x \in X_1, \|x\|_1 \leq 1\}$. Adjunk példát arra az esetre, amikor a „sup” helyett nem írható „max”. Mi a helyzet akkor, ha X_1 véges dimenziós?

53. Bizonyítsuk be, hogy ha $(X, \langle , \rangle)$ euklideszi tér, $A \in L(X, X)$, akkor

$$\|A\| = \sup\left\{\frac{|\langle Ax, y\rangle|}{\|x\| \cdot \|y\|} : x, y \in X \setminus \{0\}\right\}.$$

54. Tekintsük az $X_1 := X_2 := C[-1, 1]$ tereket, az $\|f\|_1 := \|f\|_\infty$, $\|f\|_2 := \int_{-1}^1 |f|$ normákat és az $Af := f(0) \quad (f \in C[-1, 1])$ operátort. Mutassuk meg, hogy $A \in \mathcal{L}(X_i, \mathbf{R}) \quad (i = 1, 2)$, $A \in L(X_1, \mathbf{R})$, de $A \notin L(X_2, \mathbf{R})$. Mennyi az $A \in L(X_1, \mathbf{R})$ operátor normája?

55. Ha $(X, \|.\|) := (C[0,1], \|.\|_\infty)$ és

$$B_n f(x) := \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k} \qquad (f \in C[0,1], n \in \mathbf{N}, x \in [0,1])$$

(*Bernstein-operátor*), akkor $B_n \in L(X,X)$ és $\|B_n\| = 1$.

56. Valamely $-\infty < a < b < +\infty$, $a \le x_{n0} < x_{n1} < ... < x_{nn} \le b \quad (n \in \mathbf{N})$ esetén legyen

$$L_n f := \sum_{k=0}^{n} f(x_{nk}) l_{nk} \qquad (f \in C[a,b], n \in \mathbf{N}),$$

ahol l_{nj} $(n \in \mathbf{N}, j = 0, ..., n)$ az x_{nk}-kra vonatkozó j-edik *Lagrange-féle alappolinom.* Milyen x_{nk}-k esetén lesz $\|L_i\| \quad (i = 0,1,2)$ (ld. 6.3.2. iv) megjegyzés) a legkisebb?

57. Legyen $X_1 := C^1[0,1], X_2 := C[0,1], \|f\|_1 := \|f\|_\infty$, $\|g\|_2 := \|g\|_\infty \quad (f \in X_1,\ g \in X_2)$. Lássuk be, hogy ha $Df := f' \quad (f \in X_1)$, akkor $D \in \mathcal{L}(X_1, X_2) \setminus L(X_1, X_2)$. Módosítsuk a $\|.\|_1$ normát a következőképpen: $\|f\|_1 := \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty \quad (f \in X_1)$. Ekkor $D \in L(X_1, X_2)$ és $\|D\| = 1$.

58. Tekintsük az $X_1 := X_2 := C[0,1], \|f\|_1 := \|f\|_\infty$, $\|f\|_2 := \int_0^1 |f| \quad (f \in C[0,1])$ definícióval értelmezett $(X_i, \|.\|_i) \quad (i = 1,2)$ normált tereket. Legyen $0 \le a < b \le 1$ és $A_i f := \int_a^b f \quad (f \in X_i)$ $(i = 1,2)$. Igazoljuk, hogy $A_i \in L(X_i, \mathbf{R}) \quad (i = 1,2)$ és $\|A_1\| = b - a$, $\|A_2\| = 1$.

59. Tegyük fel, hogy az $(X, \langle , \rangle)$ euklideszi térben adott egy véges $\emptyset \ne Y \subset X$ ONR és legyen $Ax := \sum_{y \in Y} \langle x, y\rangle \cdot y \quad (x \in X)$. Mutassuk meg, hogy $A \in L(X,X)$ és $\|A\| = 1$.

60. Adott $-\infty < a < b < +\infty$ mellett legyen $(X, \|.\|) := (C[a,b], \|.\|_\infty)$ és tegyük fel, hogy az $A \in L(X,X)$ operátor *pozitív,* azaz bármely $0 \le f \in X$ esetén $Af \ge 0$. Bizonyítsuk be, hogy ha $e(x) := 1 \quad (x \in [a,b])$, akkor $\|A\| = \|Ae\|_\infty$.

(**Útm.:** $f \in X \implies |f| \le \|f\|_\infty \cdot e$, azaz $\|f\|_\infty \cdot e - |f| \ge 0 \implies 0 \le A(\|f\|_\infty \cdot e - |f|) = \|f\|_\infty \cdot Ae - A(|f|) \implies A(|f|) \le \|f\|_\infty \cdot Ae$. De $-|f| \le f \le |f| \implies -A(|f|) \le Af \le A(|f|)$, azaz $|Af| \le A(|f|) \implies |Af| \le \|f\|_\infty \cdot Ae$, tehát $\|Af\|_\infty \le \|f\|_\infty \cdot \|Ae\|_\infty$ és itt $f := e$-re egyenlőség van.)

61. A $B_n \quad (n \in \mathbf{N})$ *Bernstein-operátorokról* (ld. **55.** feladat) mutassuk meg, hogy $\lim(\|B_n f - f\|_\infty) = 0$, ha f legfeljebb másodfokú polinom.

62. Az **60.** feladatban értelmezett $A \in L(X,X)$ pozitív operátorról lássuk be, hogy $|A(fg)| \le \sqrt{A(f^2)} \cdot \sqrt{A(g^2)} \quad (f, g \in X)$.

(**Útm.:** $(f + \lambda g)^2 \ge 0 \quad (\lambda \in \mathbf{R}) \implies 0 \le A\left((f+\lambda g)^2\right) = \lambda^2 A(g^2) + 2\lambda A(fg) + A(f^2)$, azaz minden $x \in [a,b]$ esetén $\lambda^2 A(g^2)(x) + 2\lambda A(fg)(x) + A(f^2)(x) \ge 0$, ill. u. ez f és g felcserélésével. Ha pl. $A(g^2)(x) > 0$, akkor az előbbi (λ-ra nézve) másodfokú polinom diszkriminánsa nem lehet pozitív, stb.)

63. Legyen $(X_1, \|.\|_1)$ *Banach*-tér, $(X_2, \|.\|_2)$ normált tér, $A \in L(X_1, X_2)$ és $\|x\| := \|x\|_1 + \|Ax\|_2$ $(x \in X_1)$. Mutassuk meg, hogy $X_1 \ni x \mapsto \|x\|$ norma és $(X_1, \|.\|)$ *Banach*-tér.

64. Bizonyítsuk be, hogy az $(\{x \in \ell_\infty : \lim x = 0\}, \|\cdot\|_\infty)$ térben van (*Schauder-*) bázis.

65. Valamely $(X, \|.\|)$ normált tér esetén lássuk be, hogy $\forall A \in L(\mathbf{K}, X) \quad \exists|\, a \in X : Ax = xa$ $(x \in \mathbf{K})$ és $\|A\| = \|a\|$.

(**Útm.:** $\forall x \in \mathbf{K} : x = 1 \cdot x \implies Ax = x \cdot A1$, stb.)

66. Terjesszük ki a **65.** feladatbeli állítást: $0 < n \in \mathbf{N}$ és jellemezzük az $L(\mathbf{K}^n, X)$ teret ($\mathbf{K}^n$-en a „szokásos" $\|.\|_i \quad (i = 1, 2, \infty)$ normákat vezetve be).

67. Tekintsük az $(X, \|.\|)$ normált tér és az $f \in X^*$ korlátos lineáris funkcionál esetén az $L := \{x \in X : f(x) = 0\}$ *magteret.* Bizonyítsuk be, hogy $\forall x \in X : \|f\| \cdot \rho(x, L) = |f(x)|$.

(**Útm.:** $f = 0$ esetén a dolog triviális, különben

$$\forall l \in L : |f(x)| = |f(x - l)| \leq \|f\| \cdot \|x - l\|,$$

azaz $|f(x)| \leq \|f\| \cdot \rho(x, L)$. Továbbá $\forall z \in X, \|z\| = 1, f(z) \neq 0 : x - f(x)z/f(z) \in L$, így $\rho(x, L) \leq \|f(x)z/f(z)\| = |f(x)/|f(z)| \implies |f(z)| \leq |f(x)|/\rho(x, L)$, ezért $\|f\| \leq |f(x)|/\rho(x, L)$.)

68. Az $(X, \|.\|) := (C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ normált tér esetén tekintsük az alábbi leképezéseket: $A_1 f(t) := t \cdot f(t)$, $A_2 f(t) := f(0) + t \cdot f(1)$, $A_3 f(t) := f(t^2)$, $A_4 f(t) := \int_0^t f$, $A_5 f(t) := \int_0^1 e^{tx} f(x)\, dx$ $(f \in X,\ t \in [0,1])$. Mutassuk meg, hogy $A_i \in L(X) \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5)$, és számítsuk ki a szóban forgó operátorok normáit.

69. Egy $(X, \|.\|)$ normált tér és $f \in X^*$ esetén legyen L az f magtere (ld. **67.** feladat). Tegyük fel, hogy $X \setminus L \neq \emptyset$ és $x \in X \setminus L$ olyan, hogy egy alkalmas $y \in L$ elemmel $\rho(x, L) = \|x - y\|$. Lássuk be, hogy ekkor van olyan $z \in X, \|z\| = 1$ elem, amellyel $|f(z)| = \|f\|$.

(**Útm.:** ld. **67.** feladat.)

70. Az előző feladatbeli normált tér és $0 \neq f \in X^*$ funkcionál mellett legyen most $L := \{x \in X : f(x) = 1\}$. Bizonyítsuk be, hogy ha $m := \inf\{\|x\| : x \in L\}$, akkor $m \cdot \|f\| = 1$.

(**Útm.:** $\forall x \in L : 1 = f(x) \leq \|f\| \cdot \|x\|$, azaz $1/\|f\| \leq m$. De $\forall z \in X, f(z) \neq 0 : z/f(z) \in L$, azaz $m \leq \|z/f(z)\| = \|z\|_*/|f(z)|$, ezért $|f(z)| \leq \|z\|/m$, amiből már $\|f\| \leq 1/m$ következik.)

71. Legyen $X := \{x = (x_n) \in \ell_\infty : \lim x = 0\}$, $\|.\| := \|.\|_\infty$ és $f(x) := \sum_{k=0}^\infty x_k 2^{-k} \quad (x \in X)$. Bizonyítsuk be, hogy $f \in X^*$ és ha L az f magtere, akkor bármilyen $x \in X \setminus L$ elemet is adunk meg, ehhez nem létezik olyan $y \in L$, amellyel $\rho(x, L) = \|x - y\|$ igaz lenne. Mennyi az f normája?

(**Útm.:** a **64.** feladatra hivatkozva okoskodhatunk indirekt módon. Legyen tehát $x \in X \setminus L$ olyan, hogy egy alkalmas $y \in L$ elemmel $\rho(x, L) = \|x - y\|$. Ekkor lenne olyan $z \in X, \|z\| = 1$, hogy $|f(z)| = \|f\|$. De $\|f\| = 2$ (ui. egyrészt $|f(t)| \leq \|t\|_\infty \cdot \sum_{k=0}^\infty 2^{-k} = 2\|t\|_\infty \quad (t \in X)$, másrészt $f((1, 1, ..., 1, 0, 0, ...)) = \sum_{k=0}^n 2^{-k} \leq \|f\| \quad (n \in \mathbf{N})$) és $\forall z = (z_n) \in X, \|z\| = 1$ $\exists n \in \mathbf{N} : |z_n| < 1 \implies |f(z)| < \sum_{k=0}^\infty 2^{-k} = 2$.)

72. Az $(\ell_2, \|.\|_2)$ normált tér és valamely $\lambda_n \in \mathbf{K} \quad (n \in \mathbf{N})$ együtthatók esetén tekintsük az $Ax := (\lambda_n x_n) \in \mathbf{K}^\mathbf{N} \quad (x = (x_n) \in \ell_2)$ leképezést. Ekkor $A \in \mathcal{L}(\ell_2, \mathbf{K}^\mathbf{N})$. Mikor igaz, hogy $A \in \mathcal{L}(\ell_2, \ell_2)$? Milyen esetben lesz $A \in L(\ell_2, \ell_2)$ és ekkor mennyi az A normája?

73. Mutassuk meg, hogy ha az $(\ell_1, \|.\|_1)$ tér esetén $f_n(x) := x_n \quad (n \in \mathbf{N},\ x = (x_k) \in \ell_1)$, akkor $f_n \in \ell_1^* \quad (n \in \mathbf{N})$. Számítsuk ki az $f_n \quad (n \in \mathbf{N})$ funkcionál normáját. Igazoljuk, hogy $\forall x \in \ell_1 : (f_n(x))$ konvergens, de nincs olyan $f \in \ell_1^*$, amelyre $\lim(\|f - f_n\|) = 0$ lenne.

74. Az **56.** feladat jelöléseit megtartva tekintsük az $L_n \quad (n \in \mathbf{N})$ *Lagrange-féle interpolációs operátorokat* és legyen

$$\mathcal{P}_n := \{P_{|_{[a,b]}} \in C[a,b] : P \text{ legfeljebb } n\text{−edfokú polinom}\} \quad (n \in \mathbf{N}).$$

Bizonyítsuk be, hogy ha $f \in C[a,b]$ és f-re teljesül a $\lim(\rho(f, \mathcal{P}_n) \cdot \|L_n\|) = 0$ feltétel, akkor $\lim(\|f - L_n f\|_\infty) = 0$.

(**Útm.:** $\forall\, P \in \mathcal{P}_n : \|f - L_n f\|_\infty \le \|f - P\|_\infty + \|P - L_n f\|_\infty = \|f - P\|_\infty + \|L_n(f - P)\|_\infty \le (1 + \|L_n\|)\cdot \|f - P\|_\infty$, amiből $\|f - L_n f\|_\infty \le (1 + \|L_n\|)\cdot \rho(f, \mathcal{P}_n) \quad (n \in \mathbf{N})$ következik.)

Megjegyzések.

i) Van olyan $C > 0$ konstans, hogy $\|L_n\| \ge C \ln(n+2) \quad (n \in \mathbf{N})$ (ld. *Faber-Bernstein*-tétel). Ezért a $\lim(\rho(f, \mathcal{P}_n)\cdot \|L_n\|) = 0$ egyenlőséghez szükséges, hogy $\lim(\rho(f, \mathcal{P}_n)\cdot \ln(n+2)) = 0$, azaz $\rho(f, \mathcal{P}_n) = o(1/\ln(n+2)) \quad (n \to \infty)$ legyen (azaz $\rho(f, \mathcal{P}_n)\cdot \ln(n+2) \to 0 \quad (n \to \infty)$).

ii) Ismert (ld. *Jackson*-tétel), hogy egy alkalmas $c > 0$ konstanssal $\rho(f, \mathcal{P}_n) \le c\omega(f, 1/n)$ $(0 < n \in \mathbf{N})$ (ahol $\omega(f, \delta) := \sup\{|f(x) - f(y)| : x, y \in [a, b], |x - y| \le \delta\} \quad (\delta \ge 0)$ az f folytonossági modulusa). Tehát $\omega(f, \delta) = o(1/\ln(1/\delta)) \quad (\delta \to +0)$ (azaz $\omega(f, \delta)\cdot \ln(1/\delta) \to 0$ $(\delta \to +0)$) elegendő ahhoz, hogy $\lim(\|f - L_n f\|_\infty) = 0$ legyen (*Dini-Lipschitz*-feltétel).

75. Továbbra is az **56.** feladatra hivatkozva gondoljuk meg, hogy ha $x \in [a, b]$, akkor $\forall\, f \in C[a, b]$: $f(x) = \lim(L_n f(x)) \iff \sup\{\sum_{k=0}^n |l_{nk}(x)| : n \in \mathbf{N}\} < +\infty$ (*Hahn*-tétel).

(**Útm.:** számítsuk ki az $C[a, b] \ni f \mapsto L_n f(x) \quad (n \in \mathbf{N})$ *Lagrange*-funkcionál normáját, és alkalmazzuk a *Banach-Steinhaus*-tételt (ld. 6.6.3. Tétel).)

Megjegyzések.

i) Az útmutatóban szereplő funkcionál egy kvadratúra (ld. 6.2.), amelynek a súlyai $l_{nk}(x)$-ek $(k = 0, ..., n \in \mathbf{N})$.

ii) Bármely $x_{nk} \quad (k = 0, ..., n \in \mathbf{N})$ alappontrendszer esetén van olyan $x \in [a, b]$ és $f \in C[a, b]$, hogy az $(L_n f(x))$ sorozat divergál (*Bernstein*). Sőt, f úgy is megválasztható, hogy az $(L_n f(x))$ sorozat az $[a, b]$ intervallum majdnem minden pontjában divergál (*Erdős-Vértesi*).

76. Tegyük fel, hogy az **56.** feladatban szereplő $x_{nk} \quad (k = 0, ..., n \in \mathbf{N})$ alappontok egy, az $[a, b]$-n értelmezett r *súlyfüggvényre* ortogonális (P_n) polinomsorozat gyökei, azaz $\int_a^b P_n P_m r = 0$ $(n \ne m \in \mathbf{N})$ és $P_n(x_{nk}) = 0 \quad (k = 0, ..., n \in \mathbf{N})$. Mutassuk meg, hogy $\forall\, f \in C[a, b]$: $\lim\left(\int_a^b r(f - L_n f)^2\right) = 0$ (*Turán-Erdős*).

(**Útm.:** mivel $\int_a^b l_{nk} l_{nj} r = 0 \quad (j \ne k = 0, ..., n \in \mathbf{N})$, ezért minden olyan $Q_n \in \mathcal{P}_n \quad (n \in \mathbf{N})$ sorozatra, amelyre $\lim(\|f - Q_n\|_\infty) = 0$, igaz az, hogy

$$\int_a^b r(f - L_n f)^2 = \int_a^b r\,(f - Q_n + L_n(Q_n - f))^2 \le$$

$$2\left(\int_a^b r(f - Q_n)^2 + \int_a^b r\,(L_n(Q_n - f))^2\right),$$

ahol $\forall\, g \in C[a, b]$:

$$\int_a^b r(L_n g)^2 = \int_a^b r\left(\sum_{k=0}^n g(x_{nk}) l_{nk}\right)^2 = \int_a^b r\cdot \sum_{k=0}^n g^2(x_{nk}) l_{nk}^2 \le \|g\|_\infty^2 \cdot \int_a^b r\cdot \sum_{k=0}^n l_{nk}^2 =$$

$$\|g\|_\infty^2 \cdot \int_a^b r\left(\sum_{k=0}^n l_{nk}\right)^2 = \|g\|_\infty^2 \cdot \int_a^b r,$$

tehát $\int_a^b r(f - L_n f)^2 \le 4\|f - Q_n\|_\infty^2 \cdot \int_a^b r \to 0 \quad (n \to \infty)$.)

Megjegyzés. Ha $\inf \mathcal{R}_r > 0$, akkor könnyen belátható módon az is igaz, hogy $\lim\left(\int_a^b (f - L_n f)^2\right) = \lim\left(\int_a^b |f - L_n f|\right) = 0$.

77. Legyenek adottak az $(X_i, \|.\|_i)$ $(i = 1, 2)$ *Banach*-terek és tegyük fel, hogy valamely $\emptyset \neq \mathcal{N} \subset \mathbf{N}$ indexhalmazzal $U_{nk} \in L(X_1, X_2)$ $(k \in \mathcal{N}, n \in \mathbf{N})$. Bizonyítsuk be, hogy ha minden $\mathcal{N} \ni k$-ra $\sup\{\|U_{nk}\| : n \in \mathbf{N}\} = +\infty$, akkor $\exists\, x \in X_1\ \forall\, k \in \mathcal{N} : \sup\{\|U_{nk}x\|_2 : n \in \mathbf{N}\} = +\infty$.

(**Útm.:** $Y_k := \{x \in X_1 : \sup\{\|U_{nk}x\|_2 : n \in \mathbf{N}\} < +\infty\}$ $(k \in \mathcal{N})$ első kategóriájú halmaz (ld. 6.6.1. Tétel)), ezért $Y := \cup_{k \in \mathcal{N}} Y_k$ is az, de X_1 nem ilyen (ld. *Baire*-tétel (2.2.2. Tétel).)

78. Legyen $(X, \|.\|_*) := (C_{2\pi}, \|.\|_\infty), x \in \mathbf{R}$ és $\Phi_n^{(x)} f := S_n f(x)$ $(n \in \mathbf{N},\ f \in C_{2\pi})$, ahol $S_n f$ az f függvény *Fourier*-sorának az n-edik részletösszege. Lássuk be, hogy a $\Phi_n^{(x)}$ $(n \in \mathbf{N})$ *Fourier-funkcionálra* az alábbiak igazak: $\Phi_n^{(x)} \in X^*$, $\|\Phi_n^{(x)}\| = \int_0^{2\pi} |D_n|$ $(n \in \mathbf{N})$ (itt D_n jelöli az n-edik *Dirichlet*-féle magfüggvényt, azaz $S_n f(x) = \int_0^{2\pi} f(t) D_n(x - t)\, dt$).

79. Bizonyítsuk be, hogy bármely $\emptyset \neq \mathcal{D} \subset \mathbf{R}$ legfeljebb megszámlálható halmazhoz van olyan $f \in C_{2\pi}$ függvény, amelynek a *Fourier*-sora minden $\mathcal{D}$-beli pontban divergál (*Fejér*-tétel).

(**Útm.:** gondoljuk meg (ld. **78.**), hogy alkalmas $C > 0$ konstanssal $\|\Phi_n^{(x)}\| \geq C \ln(n + 2)$ $(n \in \mathbf{N})$. Legyen $\mathcal{D} = \{x_k \in \mathbf{R} : k \in \mathcal{N}\}$, ahol $\mathcal{N} \subset \mathbf{N}$ egy legfeljebb megszámlálható halmaz. Írjunk ezek után **77.**-ben $X_1 := C_{2\pi}$-t, $X_2 := \mathbf{R}$-et, $\|.\|_1 := \|.\|_\infty$-t, $\|.\|_2 := |.|$-et, $U_{nk} := \Phi_n^{(x_k)}$-t $(n \in \mathbf{N},\ k \in \mathcal{N})$.)

80. A B_n $(n \in \mathbf{N})$ *Bernstein*-operátorokról (ld. **55.**) mutassuk meg, hogy ha $h_j(x) := x^j$ $(x \in [0, 1],$ $j = 0, 1, 2)$, akkor $\lim(\|B_n h_j - h_j\|_\infty) = 0$.

81. Legyen $(X, \langle , \rangle)$ euklideszi tér, $L_i \subset X$ teljes altér, $P_i : X \to L_i$ projekció $(i = 1, 2)$ (ld. 5.3.3. iv) megjegyzés) és tegyük fel, hogy $\forall\, x \in X : \langle P_1 x, P_2 x\rangle = 0$. Mutassuk meg, hogy ekkor $P_1 P_2 := P_1 \circ P_2 = 0$ (azaz $\forall\, x \in X : P_1(P_2 x) = 0$.)

(**Útm.:** $\forall\, x \in L_2 : 0 = \langle P_1 x, P_2 x\rangle = \langle P_1 x, x\rangle$, ezért $\|P_1 x\|^2 = \langle P_1 x, x\rangle = 0$, így $\forall\, x \in X :$ $P_1(P_2 x) = 0$.)

82. Az előbbi feladat jelöléseit használva lássuk be, hogy $L_1 \perp L_2 \iff \forall\, x \in X : \langle P_1 x, P_2 x\rangle = 0$.

(**Útm.:** a szükségesség nyilvánvaló, az elégségességhez pedig vegyük figyelembe, hogy $\forall\, x \in L_1, y \in L_2 : \langle x, y\rangle = \langle P_1 x, P_2 x\rangle = 0$.)

83. Adott egy $(X, \langle , \rangle)$ *Hilbert*-tér és benne egy zárt $L \subset X$ altér. Jelöljük P-vel az L-re való projekciót és legyen $A \in L(X, X)$. Bizonyítsuk be, hogy

i) $AP = A \implies L^\perp \subset \{x \in X : Ax = 0\}$;

ii) $PA = A \implies \mathcal{R}_A \subset L$;

iii) $AP = PA \implies A[L] \subset L$ és $A[L^\perp] \subset L^\perp$;

iv) írhatunk-e az előbbiekben „$\subset$” helyett egyenlőséget?

84. A **81.** feladatbeli jelölésekre hivatkozva gondoljuk meg, hogy $\|P_1 - P_2\| \leq 1$, ill. $L_2 \perp L_1 \iff P_1 + P_2$ projekció $\implies \|P_1 - P_2\| = 1$. Szemléltessük a feladatot $\mathbf{R}^2$-ben.

(**Útm.:** bármely $P : X \to X$ projekció és $x \in X$ esetén

$$\|P(2x) - x\|^2 = \|(Px - x) + Px\|^2 = \|Px - x\|^2 + \|Px\|^2 = \|x\|^2,$$

ezért

$$\|P_1 x - P_2 x\| = \|P_1 x - x/2 + x/2 - P_2 x\| \leq (\|P_1(2x) - x\| + \|x - P_2(2x)\|)/2 = \|x\|.)$$

85. Az $(X, \langle,\rangle)$ euklideszi térben tekintsük az $L \subset X$ alteret, és mutassuk meg, hogy $L \subset \left(L^{\perp}\right)^{\perp}$, ill., ha L teljes, akkor $\left(L^{\perp}\right)^{\perp} = L$. Igaz-e az utóbbi egyenlőség akkor is, ha L nem teljes?

(**Útm.:** $x \in \left(L^{\perp}\right)^{\perp} \iff \forall\ y \in L^{\perp} : \langle x, y\rangle = 0$, ami minden $x \in L$ esetén igaz $\Longrightarrow$ $L \subset \left(L^{\perp}\right)^{\perp}$. Fordítva, ha L teljes, akkor $\forall\ x \in \left(L^{\perp}\right)^{\perp} : x = x_1 + x_2$, ahol $x_1 \in L$, $x_2 \in L^{\perp}$. Tehát $\|x\|^2 = \langle x, x\rangle = \langle x, x_1\rangle \leq \|x\| \cdot \|x_1\|$, azaz $\|x_1\| \geq \|x\|$. Ugyanakkor $\|x\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2$, amiből $\|x_2\| = 0$, így $x = x_1 \in L$ következik. Ezért $\left(L^{\perp}\right)^{\perp} \subset L$. Legyen $X := \ell_2$, $L := \ell_1$, ekkor $\ell_1^{\perp} = \left(\overline{\ell_1}\right)^{\perp} = \ell_2^{\perp} = \{0\} \Longrightarrow \left(\ell_1^{\perp}\right)^{\perp} = \{0\}^{\perp} = \ell_2 \neq \ell_1$.)

86. Legyen $(X, \langle,\rangle)$ *Hilbert*-tér, $L \subset X$ zárt altér és $f \in L^*$ (azaz f korlátos lineáris funkcionál L-en). Bizonyítsuk be, hogy ekkor egyértelműen adható meg a *Hahn-Banach*-tételben (ld. 6.5.1. Tétel) szereplő kiterjesztés, tehát olyan $F \in X^*$ funkcionál, amelyre $F_{|_L} = f$ és $\|F\| = \|f\|$.

(**Útm.:** az idézett tétel alapján tudjuk, hogy van ilyen F. Viszont a *Riesz*-reprezentációs tétel (ld. 6.4.1. Tétel) miatt $\exists|\, b \in X, a \in L : f(x) = \langle x, a\rangle \quad (x \in L)$, ill. $F(z) = \langle z, b\rangle \quad (z \in X)$. Ezért $\forall\, x \in L : \langle x, a - b\rangle = 0$. A *Riesz*-felbontás (ld. 5.3.3. Tétel) miatt $b = b_1 + b_2$, ahol $b_1 \in L, b_2 \in L^{\perp}$, így az előbbiek szerint $\forall\, x \in L : \langle x, a - b_1 - b_2\rangle = 0$. Ezért az $x := a - b_1$ választással $\langle a - b_1, a - b_1\rangle = 0$, azaz $a = b_1$. Továbbá $\|F\| = \|b\| = \sqrt{\|b_1\|^2 + \|b_2\|^2} = \sqrt{\|a\|^2 + \|b_2\|^2} = \|f\| = \|a\|$, amiből $b_2 = 0$ következik. Végül tehát $a = b$.)

87. Az $(X, \langle,\rangle)$ *Hilbert*-térben tekintsük az $L \subset X$ zárt alteret. Ellenőrizzük, hogy $\forall\, x \in X$: $\rho(x, L) = \max\{|\langle x, y\rangle| : y \in L^{\perp}, \|y\| = 1\}$.

(**Útm.:** $|\langle x, y\rangle| = |\langle x - Px, y\rangle| \leq \|x - Px\| = \rho(x, L)$, ahol P az L-re való projekció. Továbbá $x \notin L$ esetén $y := \frac{x - Px}{\|x - Px\|} \in L^{\perp}$, $\|y\| = 1$, azaz $|\langle x, y\rangle| = |\langle x - Px, y\rangle| = \|x - Px\| = \rho(x, L)$.)

88. Az $X := \mathbf{R}^2, \|(x, y)\|_* := |x| + |y| \quad ((x, y) \in X)$ normált tér esetén tekintsük az $Y := \{(x, 0) \in X : x \in \mathbf{R}\}$ alteret és az $f(x, 0) := x \quad ((x, 0) \in Y)$ funkcionált. Lássuk be, hogy $f \in Y^*$, $\|f\| = 1$. Határozzuk meg az összes olyan $F \in X^*$ funkcionált, amelyre $F_{|_Y} = f$ és $\|F\| = \|f\|$ (röviden: $f \subset F$) teljesül.

(**Útm.:** tudjuk, hogy $F \in X^* \iff \exists\, a, b \in \mathbf{R}\ \ \forall\, (x, y) \in \mathbf{R}^2 : F(x, y) = ax + by$. Ezért $F(x, 0) = ax = f(x, 0) = x \quad (x \in \mathbf{R})$ miatt $a = 1$. Továbbá $|F(x, y)| = |x + by| \leq |x| + |b| \cdot |y| \leq \max\{1, |b|\} \cdot \|(x, y)\|_* \quad ((x, y) \in X)$, azaz $\|F\| \leq \max\{1, |b|\}$. De $|F(x, 0)| = |x| = \|(x, 0)\|_*$, így $\|F\| \geq 1$, ill. $|F(0, y)| = |b| \cdot |y| = |b| \cdot \|(0, y)\|_*$, amiből meg $\|F\| \geq |b|$ adódik. Tehát $\|F\| = \max\{1, |b|\} = \|f\| = 1 \iff |b| \leq 1$.)

89. Mi van akkor, ha az előző feladatban $\|(x, y)\|_* := \max\{|x|, |y|\} \quad (x, y) \in X)$?

90. Legyen $(X, \|.\|_*) := (\mathbf{R}^3, \|\cdot\|_2)$, $Y := \{(x, y, z) \in X : x = y = z\}$ és $f(x, y, z) := x \quad ((x, y, z) \in Y)$. Igazoljuk az alábbiakat: $f \in Y^*$, $\|f\| = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Adjuk meg az összes olyan $F \in X^*$ funkcionált, amelyre $f \subset F$.

91. Módosítsuk az előző feladatot a következőképpen: $Y := \{(x, y, z) \in X : x + y + z = 0\}$, $f(x, y, z) := x + y \quad ((x, y, z) \in Y)$. Ekkor $\|f\| = \sqrt{\frac{2}{3}}$. Adjuk meg most is az összes $F \in X^*$, $f \subset F$ funkcionált.

92. Legyen $(X, \|.\|)$ normált tér, $x_n, x \in X \quad (n \in \mathbf{N})$ és tegyük fel, hogy $\forall\, f \in X^* : f(x) = \lim(f(x_n))$ (azaz az (x_n) sorozat *gyengén konvergál* x-hez: $\mathrm{LIM}\,(x_n) := x$). Igazoljuk az alábbi állításokat:

i) $\lim(x_n) = x \Longrightarrow \mathrm{LIM}\,(x_n) = x$;

ii) az előbbi következtetés fordítva nem igaz;

iii) a $\mathrm{LIM}\,(x_n)$ *gyenge limesz* egyértelműen létezik;

iv) ha $\mathrm{LIM}\,(y_n)$ is létezik, akkor $\forall\,\alpha \in \mathbf{R} : \mathrm{LIM}\,(\alpha x_n + y_n) = \alpha \cdot \mathrm{LIM}\,(x_n) + \mathrm{LIM}\,(y_n)$.

93. Tegyük fel, hogy **87.**-ben $(X, \|.\|)$ véges dimenziós. Ekkor $\mathrm{LIM}\,(x_n) = x \iff \lim(x_n) = x$.

94. A **92.**-beli jelöléseket használva mutassuk meg, hogy a gyengén konvergens (x_n) sorozat korlátos és $\|x\| \le \lim\inf(\|x_n\|)$.

(**Útm.:** legyen $\Phi_n(f) := \overline{f(x_n)}, \Phi(f) := \overline{f(x)} \quad (n \in \mathbf{N},\ f \in X^*)$, ekkor $\Phi_n,\ \Phi \in X^{**}$ és $\lim(\Phi_n(f)) = \Phi(f)$. Alkalmazzuk a *Banach-Steinhaus*-tételt (ld. 6.6.3. Tétel).)

95. Legyen **92.**-ben $L := \overline{\mathcal{L}(\{x_n \in X : n \in \mathbf{N}\})}$ és gondoljuk meg, hogy $x \in L$.

(**Útm.:** indirekt okoskodva tegyük fel, hogy $x \notin L$. Ekkor - lévén L zárt altér - lenne olyan $f \in X^*$ funkcionál, amelyre $f(x) = 1$ és $f(t) = 0 \quad (t \in L)$. Tehát erre az f-re $\lim(f(x_n)) = 0 \ne f(x) = 1$ lenne, ami nem igaz.)

96. Tekintsük az $(X, \|.\|) := (\ell_2, \|.\|_2)$ normált teret és legyen $x_n = (x_{nk}, k \in \mathbf{N})$, $x = (x_k) \in X$ $(n \in \mathbf{N})$. Bizonyítsuk be, hogy $\mathrm{LIM}\,(x_n) = x \iff (x_n)$ korlátos és $\forall\,k \in \mathbf{N} : \lim(x_{nk}) = x_k$.

(**Útm.:** ld. Kolmogorov-Fomin-könyv.)

Megjegyzés. Belátható, hogy $(\ell_1, \|.\|_1)$-ben a gyenge konvergencia ekvivalens a konvergenciával (*Schur*-tétel).

97. Tegyük fel, hogy az $(X, \|.\|)$ *Banach*-tér reflexív (ld. 6.5.4. i) megjegyzés) és $f_n, f \in X^* \quad (n \in \mathbf{N})$. Lássuk be, hogy ekkor $\mathrm{LIM}\,(f_n) = f \iff \forall\,x \in X : \lim\,(f_n(x)) = f(x)$.

98. Igazoljuk a gyenge konvergencia alábbi jellemzését tetszőleges $(X, \|.\|)$ normált tér esetén: $\mathrm{LIM}\,(x_n) = x \iff (x_n)$ korlátos és $\exists Y \subset X^*$ zárt rendszer, hogy $\lim(f(x_n)) = f(x)$ $(f \in Y)$.

99. Legyen $(X, \langle,\rangle)$ *Hilbert*-tér. Ekkor:

i) $\mathrm{LIM}\,(x_n) = x$ és $\lim(\|x_n\|) = \|x\| \implies \lim(x_n) = x$;

ii) $\mathrm{LIM}\,(x_n) = x$ és $\lim(\|x_n\|) \le \|x\| \implies \lim(x_n) = x$;

iii) $\mathrm{LIM}\,(x_n) = x$ és $\|x_n\| \le \|x\| \quad (n \in \mathbf{N}) \implies \lim(x_n) = x$.

100. Egy $(X, \|.\|)$ normált tér, $\emptyset \neq A \subset X^*$ véges halmaz és $\varepsilon > 0$ szám esetén legyen

$$K_\varepsilon^A := \{x \in X : |f(x)| < \varepsilon \ \ (f \in A)\}.$$

Lássuk be a következőket:

i) minden K_ε^A halmaz nyílt és $0 \in K_\varepsilon^A$;

ii) a $K_\varepsilon^A(z) := z + K_\varepsilon^A \quad (z \in X, \emptyset \neq A \subset X^*$ véges) halmazok (*gyenge környezetek*) eleget tesznek a környezetrendszerrel kapcsolatos kívánalmaknak (ld. **7.** feladat);

iii) $K_\varepsilon^A(z) = \{x \in X : |f(z) - f(x)| < \varepsilon \ \ (f \in A)\} \quad (z \in X, \emptyset \neq A \subset X^*$ véges);

iv) legyen $z \in X$,

$$\mathcal{T}_z^* := \{K_\varepsilon^A(z) \in \mathcal{P}(X) : \varepsilon > 0, \emptyset \neq A \subset X^*, A \text{ véges}\}$$

és $\mathcal{T}^*$ a $\mathcal{T}_z^* \quad (z \in X)$ környezetrendszer által indukált topológia X-ben (ld. **8.** feladat) (az X *gyenge topológiája*). Ekkor $(X, \mathcal{T}^*)$ T_2-tér és ha $\mathcal{T}$ jelöli az $(X, \|.\|)$ tér topológiáját, akkor $\mathcal{T}^* \subset \mathcal{T}$ (azaz $\mathcal{T}^*$ *gyengébb,* mint $\mathcal{T}$);

v) legyen $x_n, x \in X \quad (n \in \mathbf{N})$, akkor $\mathrm{LIM}\,(x_n) = x \iff \forall\, K \in \mathcal{T}_x^* : x_n \in K$ m.m. $n \in \mathbf{N}$.

Megjegyzés. Ha $\varepsilon > 0, \emptyset \neq Y \subset X$, Y véges, akkor legyen

$$\mathcal{K}_\varepsilon^Y := \{f \in X^* : |f(x)| < \varepsilon \ \ (x \in Y)\},$$

ill. $g \in X^*$ esetén $\mathcal{K}_\varepsilon^Y(g) := g + \mathcal{K}_\varepsilon^Y$ (a g *gyenge környezete*). A fentiekhez hasonlóan látható be, hogy $\mathcal{T}_g^{**} := \{\mathcal{K}_\varepsilon^Y(g) \in \mathcal{P}(X^*) : \varepsilon > 0, \emptyset \neq Y \subset X, Y \text{ véges}\}$ is eleget tesz a környezetrendszerrel szembeni kívánalmaknak. A $\mathcal{T}_g^{**} \quad (g \in X^*)$ által (X^*-ban) indukált $\mathcal{T}^{**}$ topológiát az X^* *gyenge topológiájának* nevezzük. Nem nehéz belátni, hogy ez részhalmaza az X^* gyenge topológiájának (azaz annál gyengébb), ill. reflexív tér esetén a kettő megegyezik.

101. Legyen $(X, \|.\|)$ reflexív *Banach*-tér, $x_n \in X \quad (n \in \mathbf{N})$ és tegyük fel, hogy bármely $f \in X^*$ esetén az $(f(x_n))$ sorozat konvergens. Lássuk be, hogy ekkor az (x_n) sorozat gyengén konvergens.

Megjegyzés. Egy $(X, \|.\|)$ normált tér *gyengén teljes,* ha bármely $x_n \in X \quad (n \in \mathbf{N})$ esetén igaz a következő ekvivalencia: (x_n) gyengén konvergens $\iff \forall\, f \in X^* : (f(x_n))$ konvergens. A feladat szerint tehát minden reflexív *Banach*-tér gyengén teljes. Így pl. minden *Hilbert*-tér vagy bármely $(L^p, \|.\|_p) \quad (1 < p < +\infty)$ tér gyengén teljes. Megmutatható, hogy $(\ell_1, \|.\|_1)$ gyengén teljes, bár nem reflexív.

102. Igazoljuk, hogy az $\ell_\infty^0 := \{x \in \ell_\infty : \lim x = 0\}$, $\|x\| := \|x\|_\infty \quad (x \in \ell_\infty^0)$ definícióval értelmezett $(\ell_\infty^0, \|\cdot\|)$ tér nem gyengén teljes.

103. Tegyük fel, hogy az $(X_i, \|.\|_i)$ normált terek esetén az $A_n \in \mathcal{L}(X_1, X_2) \quad (n \in \mathbf{N})$ operátorsorozat olyan, hogy egy alkalmas $A : X_1 \to X_2$ operátorral $\mathrm{LIM}\,(A_n x) = Ax \quad (x \in X_1)$. Gondoljuk meg, hogy ekkor $A \in \mathcal{L}(X_1, X_2)$, sőt, ha $A_n \in L(X_1, X_2) \quad (n \in \mathbf{N})$ és $(X_1, \|.\|_1)$ *Banach*-tér, akkor $A \in L(X_1, X_2)$.

104. Adottak az $(X_i, \|.\|_i)$ normált terek és az $x_n \in X_1 \quad (n \in \mathbf{N})$ sorozat gyengén tart valamely X_1-beli x elemhez. Lássuk be, hogy ekkor bármely $A \in L(X_1, X_2)$ operátorra $\mathrm{LIM}\,(Ax_n) = Ax$.

105. Tegyük fel, hogy a **104.** feladatban szereplő A operátor egyben kompakt is (ld. 6.7.), és bizonyítsuk be, hogy ekkor $\mathrm{LIM}\,(x_n) = x \implies \lim(Ax_n) = Ax$.

(**Útm.:** feltehető, hogy $x = 0$ és okoskodjunk indirekt módon: (Ax_n) nem tart 0-hoz. Ekkor van olyan $m > 0$ konstans és olyan (ν_n) indexsorozat, hogy $\|Ax_{\nu_n}\|_2 \geq m \quad (n \in \mathbf{N})$. Feltehető tehát rögtön az is, hogy $\|Ax_n\|_2 \geq m \quad (n \in \mathbf{N})$. Mivel (x_n) korlátos és A kompakt, az is feltehető, hogy (Ax_n) konvergens, legyen $z := \lim(Ax_n) (\in X_2)$. Tehát $\forall\, f \in X_2^* :$ $f(z) = \lim(f(Ax_n)) = \lim(f^*(x_n)) = 0$ (ahol $f^* \in X_1^*$), ami nyilván ellentmond $\|z\|_2 \geq m$-nek.)

106. A **68.** feladatban szereplő operátorok közül melyik kompakt?

107. Valamely $(X, \|.\|)$ normált esetén egy $A \subset X$ halmazt nevezzünk *gyengén kompaktnak,* ha bármely $x : \mathbf{N} \to A$ sorozathoz van olyan ν indexsorozat, amellyel $x \circ \nu$ gyengén konvergens. Mutassuk meg, hogy ekkor A korlátos. Igaz-e mindez fordítva?

(**Útm.:** tekintsük ℓ_1-ben a $(0, 0, ..., 0, 1, 0, ...)$ alakú elemek sorozatát.)

108. Nyilván minden kompakt halmaz gyengén kompakt. Mutassuk meg, hogy ez fordítva nem igaz.

(**Útm.:** tekintsük ℓ_2-ben a $(0, 0, ..., 0, 1, 0, ...)$ alakú elemek halmazát.)

109. Legyen $(X_i, \|.\|_i) \quad (i = 1, 2)$ normált tér, $A \in L(X_1, X_2)$. Ekkor igaz az alábbi ekvivalencia: $\exists\, A^{-1}$ és $A^{-1} \in L(X_2, X_1) \quad \Longleftrightarrow \quad A$ szürjektív és alkalmas $m > 0$ számmal $\|Ax\|_2 \geq m\|x\|_1$ $(x \in X_1)$.

110. Tegyük fel, hogy $(X, \|.\|_*)$ *Banach*-tér, $A \in L(X, X)$ és $\|A\| < 1$. Legyen $Ix := x \quad (x \in X)$ és mutassuk meg, hogy $I - A$ invertálható, $(I - A)^{-1} \in L(X, X)$ és $\|(I - A)^{-1}\| \leq (1 - \|A\|)^{-1}$.

(**Útm.:** $\forall\ x \in X : Vx := \sum_{n=0}^{\infty} A^n x \in X$, ui. $\|\sum_{n=0}^{\infty} A^n x\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|A\|^n \cdot \|x\| = (1 - \|A\|)^{-1} \cdot \|x\| < +\infty$. Ezért $V \in L(X, X)$, $\|V\| \leq (1 - \|A\|)^{-1}$. De $\forall x \in X : V(x - Ax) = Vx - V(Ax) = \sum_{n=0}^{\infty} A^n x - \sum_{n=1}^{\infty} A^n x = x$, azaz V szürjektív. A most mondottak miatt $y \in X$ esetén $(I - A)(Vy) = y$, amiből V injektivitása is nyilván következik. Ezért $V^{-1} = I - A$.)

111. Bizonyítsuk be, hogy ha $(X_i, \|.\|_i) \quad (i = 1, 2)$ *Banach*-tér, akkor

$$L_0(X_1, X_2) := \{A \in L(X_1, X_2) : A^{-1} \in L(X_2, X_1)\}$$

nyílt halmaz $L(X_1, X_2)$-ben (az $\|.\|$ operátornormára nézve). Nevezetesen, lássuk be, hogy ha $A \in L_0(X_1, X_2)$, $B \in L(X_1, X_2)$ és $\|B\| < \|A^{-1}\|^{-1}$, akkor $A + B \in L_0(X_1, X_2)$ és $\|(A+B)^{-1}\| \leq \|A^{-1}\|(1 - \|A^{-1}B\|)^{-1} \leq \|A^{-1}\| \cdot (1 - \|A^{-1}\| \cdot \|B\|)^{-1}$.

(**Útm.:** alkalmazzuk az előző két feladatot.)

112. Valamely $(X, \|.\|)$ *Banach*-tér és $A \in L(X, X)$ esetén igazak az alábbiak:

i) $\exists\, \alpha_A := \lim(\sqrt[n]{\|A^n\|})$ és $\alpha_A = \inf\{\sqrt[n]{\|A^n\|} : 0 < n \in \mathbf{N}\}$;

ii) $\alpha_A < 1$ esetén a $\sum(A^n)$ operátorsor konvergens;

iii) $\alpha_A \geq 1$ esetén a ii)-beli operátorsor divergens;

iv) a $\sum(A^n)$ operátorsor konvergens $\quad \Longleftrightarrow \quad \exists\, n \in \mathbf{N} : \|A^n\| < 1$.

(**Útm.:** legyen $a := \inf\{\sqrt[n]{\|A^n\|} : 0 < n \in \mathbf{N}\}$. Ekkor $\forall \varepsilon > 0\ \exists\, 2 < m \in \mathbf{N} : \sqrt[m]{\|A^m\|} < a + \varepsilon$. Legyen $M := \max\{1, \|A\|, ..., \|A^{m-1}\|\}$. Ha $n \in \mathbf{N}$, akkor $\exists | k_n \in \mathbf{N}$, $l_n = 0, ..., m-1 : n = k_n m + l_n$, azaz $\sqrt[n]{\|A^n\|} = \sqrt[n]{\|A^{l_n}(A^m)^{k_n}\|} \leq \sqrt[n]{\|A^{l_n}\|\|A^m\|^{k_n}} \leq M^{1/n}\|A^m\|^{k_n/n} < M^{1/n}(a + \varepsilon)^{1 - l_n/n}$. De $\lim(M^{1/n}(a + \varepsilon)^{1 - l_n/n}) = a + \varepsilon$, ezért alkalmas $N \in \mathbf{N}$ mellett minden $N < n \in \mathbf{N}$ esetén $M^{1/n}(a + \varepsilon)^{1 - l_n/n} < a + 2\varepsilon$. Innen $(a \leq) \sqrt[n]{\|A^n\|} < a + 2\varepsilon$ már következik.)

113. Legyen adott a (valós) $(X, \|.\|) := (C[a, b], \|.\|_\infty)$ normált tér, $Af(x) := x \cdot f(x) \quad (f \in X, x \in [a, b])$ (ahol $-\infty < a < b < +\infty$). Bizonyítsuk be, hogy $A \in L(X, X)$ (ld. kvantummechanika *helyzetoperátora*), A-nak nincs sajátértéke, sőt, az A *spektruma*$=: \mathrm{Sp}\, A = [a, b]$ (ld. 6.7.3. vii) megjegyzés).

(**Útm.:** igazoljuk, hogy $\forall\, \lambda \in \mathbf{R} : \ \exists\, (A - \lambda I)^{-1}$ és $\lambda \notin [a, b]$ esetén $(A - \lambda I)^{-1} \in L(X, X)$, azaz $\mathrm{Sp}\, A \subset [a, b]$. Továbbá, ha $\lambda \in [a, b]$, akkor $\mathcal{D}_{(A - \lambda I)^{-1}} \neq X$, tehát $\mathrm{Sp}\, A = [a, b]$. Nyilván $\forall\, \lambda \in [a, b] : x \cdot f(x) = \lambda f(x) \quad (x \in [a, b]) \quad \Longleftrightarrow \quad f = 0$, azaz λ nem sajátérték.)

114. Legyen $A \in L(\ell_2, \ell_2), Ax := (0, x_0, x_1, ...)$ $(x \in \ell_2)$. Határozzuk meg $\operatorname{Sp} A$-t.

115. Az $X := C[-1,1], \|.\| := \|.\|_\infty$ (valós) normált tér esetén tekintsük az

$$Af(x) := f(-x) \quad (f \in X, |x| \leq 1)$$

módon értelmezett (nyilván) $L(X,X)$-beli A operátort. Számítsuk ki az A sajátértékeit, ill. a megfelelő sajátvektorait (ld. 6.7.3. vii) megjegyzés). Mutassuk meg, hogy $\operatorname{Sp} A = \{-1, 1\}$.

116. Az $(X, \|.\|) := (C[0, 2\pi], \|.\|_\infty)$ (komplex) normált tér és az $Af(x) := e^{\imath x} \cdot f(x)$ $(0 \leq x \leq 2\pi, f \in X)$ operátor esetén mutassuk meg, hogy $\operatorname{Sp} A = \{\lambda \in \mathbf{C} : |\lambda| = 1\}$. Van-e sajátértéke A-nak?

117. Definiáljuk az $A : C[0,1] \to C[0,1]$ operátort a következőképpen:

$$Af(x) := f(0) + f(1)x \quad (f \in X, x \in [0,1]).$$

Határozzuk meg α_A-t és $\operatorname{Sp} A$-t, ha a (valós) $C[0,1]$ téren a $\|.\|_\infty$ normát tekintjük.

118. Legyen $X := C[0,1], \|.\| := \|.\|_\infty$,

$$X_0 := \{f \in X : f \in C^1[0,1], f(0) = 0\} \ , \ X_1 := \{f \in X : f \in C^1[0,1]\},$$

$$X_2 := \{f \in X : f \in C^1[0,1], f(0) = f(1)\}$$

és $D_i \in \mathcal{L}(X_i, X)$, $D_i f := f'$ $(f \in X_i, i = 0,1,2)$ (D_2-t illetően ld. kvantummechanika *impulzus-operátora*). Bizonyítsuk be, hogy $\operatorname{Sp} D_0 = \emptyset$, $\operatorname{Sp} D_1 = \mathbf{K}$ és itt $\operatorname{Sp} D_1$ minden eleme sajátérték, $\operatorname{Sp} D_2 = \{2\pi\imath n : n \in \mathbf{Z}\}$ és itt is minden $\operatorname{Sp} D_2$-beli elem sajátérték.